Ciclo di Seminari di fisica interdisciplinare:
Comprendere la Complessità

Terzo Seminario
19 marzo 2009

"Diffusione Anomala negli Ecosistemi e nei Processi Biologici"

Dott.Angelo La Cognata

Sommario

- **Un po' di storia;**
- **Cos'è la diffusione anomala;**
- **Distribuzione di Lévy e teorema del limite centrale generalizzato;**
- **Strategie di sopravvivenza ed esempi in natura;**
- **Un approccio analitico: equazioni differenziali stocastiche.**

Un po' di storia…
L'importanza della randomicità

- ***1827*** <u>R. Brown</u> osserva il moto del polline in sospensione acquosa
- ***1900*** <u>L. Bachelier</u> utilizza un modello di moto browniano in ambito finanziario
- ***1905*** <u>A. Eistein</u> descrive il moto browniano con un modello stocastico
- ***1906*** <u>*P. Langevin*</u> derivazione dei risulati di Eistein, ma con equazione differenziale stocastica
- ***1914*** <u>*A.D. Fokker*</u> deriva un equazione sulla densità di probabilità del moto browniano che <u>*M. Planck*</u> nel 1917 dimostra
- ***1923*** <u>*N. Wiener*</u> getta le basi dell'analisi stocastica
- ***1930*** <u>*P.P. Lévy*</u> teoria delle distribuzioni infinitamente divisibili
- ***1931*** <u>*A.N. Kolmogorov*</u> equazione di evoluzione della densità di probabilità per un qualsiasi processo di <u>*Markov*</u>
- ***1942*** <u>*K. Ito*</u> formulazione matematica dell'integrazione stocastica

Diffusione anomala

Se questa randomicità NON segue una statistica Gaussiana, allora la diffusione si dice anomala. Questo random-walk è descritto da una legge di scala

$$\mathrm{var}(x) \approx D t^{\gamma}$$

$\gamma < 1$ • **Sub - Diffusione**

$\gamma = 1$ • **Diffusione normale**

$\gamma > 1$ • **Super - Diffusione**

Distribuzione di Lévy

Che tipo di distribuzione deve seguire il random-walk ?

Nel caso super – diffusivo per poter avere dei jumps elevati le code della distribuzione devono essere "grasse", ovvero tendere a zero più lentamente della gaussiana, ovvero con una legge di potenza del tipo:

$$P(X > x) \approx x^{-1-\alpha}$$

Queste sono le distribuzioni di P. Lévy

Distribuzioni come Serie di Potenze

La funzione caratteristica della distribuzione di Lévy è:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} P(x,\alpha)\, dx = \exp\left(-|t|^{\alpha}\right)$$

Antitrasformando:

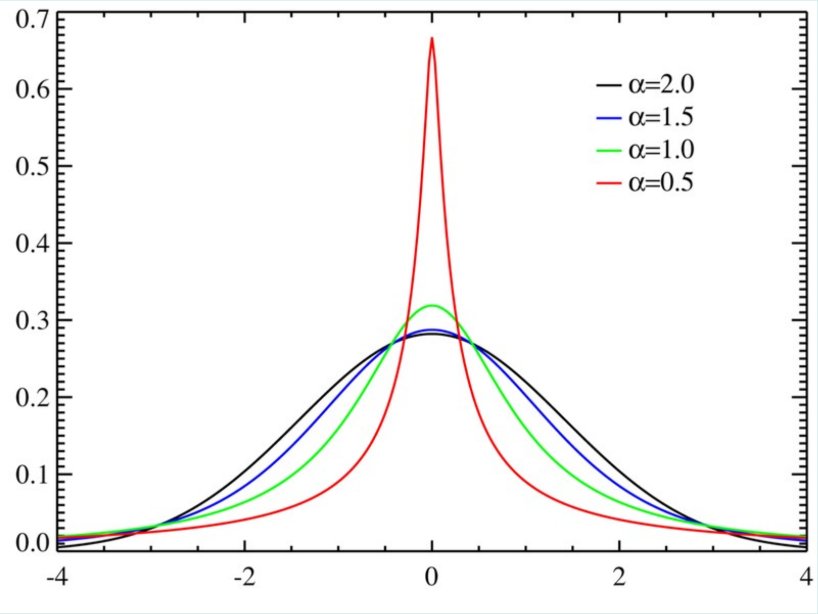
$$P(x,\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|^{\alpha} - itx}\, dt = \mathrm{Re}\, \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} e^{-t^{\alpha}} e^{itx}\, dt$$

Sviluppo secondo Taylor

$$P(x,\alpha)=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty}(t^{\alpha})^n e^{-(x/i)t}\,dt$$

L'integrale è un funzione gamma di Eulero

$$P(x,\alpha)=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{i}{x}\right)^{\alpha n+1}\Gamma(an+1)\approx|x|^{-1-\alpha}$$



Teorema del Limite Centrale

Le distribuzioni di Lévy sono, quindi, distribuzioni a momenti non convergenti, quindi fisicamente ha senso utilizzarle?

Sì perché vale il teorema del limite centrale generalizzato a queste distribuzioni

Esso afferma che se $x_1, x_2, \ldots, x_n$

sono n variabile aleatorie i.i.d. con media e varianza finite allora

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} x_i$$

Segue una distribuzione una distribuzione normale

$\Rightarrow$

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$

sono indipendenti e Lévy distribuite allora anche

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$$

E' Lévy distribuita

La P(x,α) è un <u>processo α-stabile</u>

Strategie di sopravvivenza

In natura le dinamiche dei movimenti delle specie animali possono essere descritte da random-walk, e in alcuni casi si deve ricorrere alla diffusione anomala. Ma perché alcune specie animali dovrebbero ricorrere a una passeggiata aleatoria che segue statistiche non-gaussiane?

Esempi

- **Matematica Finanziaria: Stock and Option Prices**
- **Cosmologia: modelli di (Friedmann) evoluzione a scala $t^{2/3}$;**
- **Astronomia: aggregazione frattale;**
- **Biologia: spostamenti umani e moti batterici;**
- **Geofisica: fenomeni sismici e cambiamenti climatici millenari;**
- **Fisica: distribuzioni spaziali di polimeri, tempi di trapping in moti vorticosi, vetri di Lévy .**

Approccio analitico

Descriviamo il moto di una particella sferica con massa *M* e diametro *a* immersa in un fluido con viscosità η così come fece Langevin;

Supposto che il fluido sia in equilibrio termico, quindi vale l'equipartizione dell'energia

Scriviamo l'equazione del moto (legge di newton) in una dimensione con l'aggiunta di una forza randomica esterna

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-6\pi\eta a\frac{dx}{dt}+F$$

Fatta l'ipotesi che la particella subisca urti isotropici, ovvero $\langle F\rangle=0$

E che gli urti siano indipendenti, allora moltiplcando per *x* e mediando otteniamo

$$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2\rangle+3\pi\eta a\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle=kT$$

Se la viscosità è molto elevata, possiamo trascurare il primo termine ottenendo così la legge di scala

$$\langle x^2\rangle-\langle x_0^2\rangle=\frac{kT}{3\pi\eta a}t$$