Quelques éléments d'histoire de l'analyse combinatoire

Mahdi Abdeljaouad, Université de Tunis
Journées Nationales de l'ATSM Decembre 2002, Mahdia, Tunisie

Lorsque le comté d'organisation des Journées Nationales 2002 de l'ATSM m'a proposé de présenter un exposé sur l'histoire de l'analyse combinatoire, je ne connaissais que la conférence sur la combinatoire chez les Arabes présentée par notre ami Ahmed Djebbar[1], lors de nos Journées Nationales 1983 à Monastir. Depuis vingt ans, de nouveaux travaux concernant ce sujet ont été publiés : je citerai en particulier ceux de Roshdi Rashed[2].
Bien que les points de vues de Djebbar et de Rashed divergent sur certains aspects de ce patrimoine commun, ils s'accordent tous deux à considérer que les mathématiciens arabes ont introduit l'analyse combinatoire comme un chapitre à part entière dans les mathématiques universelles.
Avant de préciser l'apport des Arabes, nous commencerons par sérier les domaines couverts par l'analyse combinatoire et nous présenterons par la suite d'une manière essentiellement chronologique les diverses contributions, depuis quelques milliers d'années, des uns et des autres, dans l'écriture de ce chapitre.

1. Qu'est-ce que l'analyse combinatoire?

"*L'analyse combinatoire s'emploie à étudier et à dénombrer divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis*". Cette définition de l'Atlas des mathématiques[3] est complétée par les précisions suivantes que l'on retrouve dans la plupart des dictionnaires[4] : "*L'analyse combinatoire est née de l'étude des jeux de hasard et s'est fortement développée sous l'influence du calcul des probabilités. Elle est par ailleurs liée à la théorie des nombres et à la théorie des graphes. Ses méthodes étaient originellement adaptées à la résolution de problèmes particuliers. En revanche, actuellement, on tente de ramener les problèmes rencontrés à des exemples types pour lesquels on développe des méthodes générales de résolution*." (page 462)
Retenons que dans cette définition le rôle des groupements d'ensembles finis et la généralisation des méthodes découvertes sur des cas particuliers, mais le raisonnement combinatoire se caractérise aussi par la nécessité de l'induction et par l'utilisation forcée des propriétés des nombres.
L'analyse combinatoire serait née de l'étude des jeux de hasard. Cela nous renvoie bien entendu à Blaise Pascal (1623-1662) et à son "*Usage du triangle arithmétique pour déterminer les parties*" (1636), de même qu'à la correspondance en 1654 entre Blaise Pascal et Pierre Fermat (1601-1665) qui fut à l'origine du calcul des probabilités. En fait, les prémisses de l'analyse combinatoire se trouvent, comme nous allons le montrer, chez de nombreux prédécesseurs de ces deux savants et que la combinatoire elle-même n'est devenue un chapitre autonome des mathématiques que bien plus tard avec la publication entre 1796 et 1806 des articles de Hindeburg et de l'opuscule de Heinrich Burmann intitulé: "*Développement des fonctions combinatoires*."
Nous allons montrer dans ce qui suit que l'analyse combinatoire est l'exemple même d'une science qui commence par résoudre des problèmes de dénombrements apparus dans

[1] Ahmed Djebbar : *Réalité et mathématique dans le Maghreb médiéval : exemple de la combinatoire*, Monastir 1983.
[2] Roshdi Rashed : *Histoire des sciences arabes*, Tome II, pages 55-92.
[3] Fritz Reinhart et Henrich Soeder, *Atlas des mathématiques*, éd. Livre de Poche, Paris, 1997.
[4] Voir par exemple sur internet, www.chronomath.com l'encyclopédie numérique de l'histoire des mathématiques produite par Serge Mehl.

diverses civilisations et en des périodes différentes, de la Chine il y a 5000 ans aux problèmes de trafics routiers d'aujourd'hui en passant par les problèmes linguistiques arabes du IX^{ème} siècle et que souvent des solutions combinatoires ont été inventées suite à la curiosité inventive de quelques mathématiciens dont les résultats furent tellement en avance sur le temps qu'ils ne furent point compris par leurs contemporains.
Nous terminons ce paragraphe en citant quelques termes que l'on associe directement à l'analyse combinatoire de base: Dénombrement - énumération - combinaison - arrangement - partition - permutation - répétition - factorielle - coefficients du binôme.

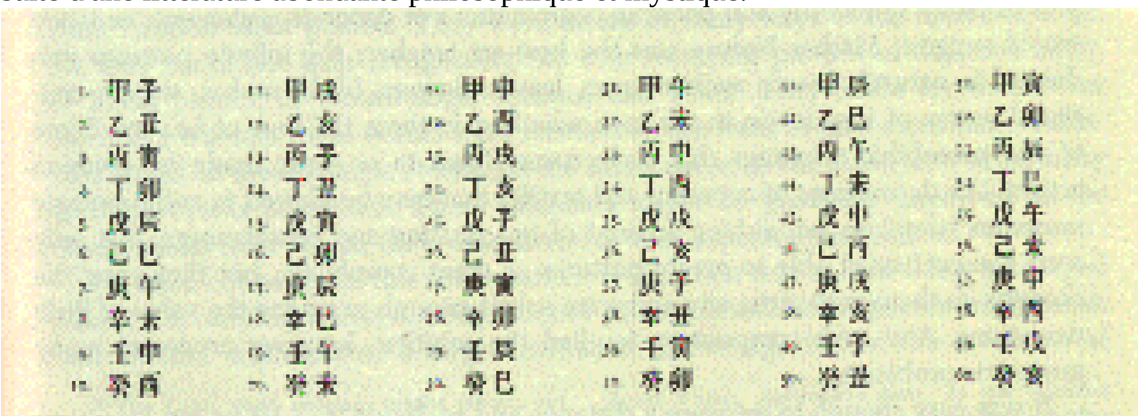
2. Vers la naissance de l'analyse combinatoire?

2.1 Des traces de combinatoire

Une motivation religieuse et mystique en Chine (vers 2900 av. J.C.)
Regrouper des objets de même nature par groupe de 2 , de 3 , … , de 18 , de 24 ou même de 72 ou de 100, était une activité traditionnelle en Chine nécessaire pour pouvoir les dénombrer. le principe de différentiation des sexes, le Yang et le Yin était privilégié. Dans le *I-king* (Le livre des permutations[5]), écrit vers 1150 av. J.C., on trouve les quatre diagrammes binaires:

——   – –   ——   – –
——   ——   – –   – –

de même que huit trigrammes, et bien d'autres combinaisons combinant deux regroupements l'un par Yang et Yin, et l'autre 6 par 6, les mathématiciens mystiques chinois obtenaient 64 hexagrammes tous différents, chacun possédant une signification particulière et objet par la suite d'une littérature abondante philosophique et mystique.



1. 甲子	11. 甲戌	21. 甲申	31. 甲午	41. 甲辰	51. 甲寅
2. 乙丑	12. 乙亥	22. 乙酉	32. 乙未	42. 乙巳	52. 乙卯
3. 丙寅	13. 丙子	23. 丙戌	33. 丙申	43. 丙午	53. 丙辰
4. 丁卯	14. 丁丑	24. 丁亥	34. 丁酉	44. 丁未	54. 丁巳
5. 戊辰	15. 戊寅	25. 戊子	35. 戊戌	45. 戊申	55. 戊午
6. 己巳	16. 己卯	26. 己丑	36. 己亥	46. 己酉	56. 己未
7. 庚午	17. 庚辰	27. 庚寅	37. 庚子	47. 庚戌	57. 庚申
8. 辛未	18. 辛巳	28. 辛卯	38. 辛丑	48. 辛亥	58. 辛酉
9. 壬申	19. 壬午	29. 壬辰	39. 壬寅	49. 壬子	59. 壬戌
10. 癸酉	20. 癸未	30. 癸巳	40. 癸卯	50. 癸丑	60. 癸亥

Des considérations linguistiques en Grèce (vers 330 av. J.C.)
Le philosophe Xénocrate (- 406 / - 315), disciple de Platon, s'est intéressé en particulier à la langue: il calcule le nombre de syllabes qui pourraient être formées avec les lettres de l'alphabet. On dit[6] que le nombre obtenu était : $1002. 10^9$.

En chimie
Considérant les éléments de la nature comme des combinaisons d'éléments de base, Jabir b. Hayyan (vers 800) a étudié la morphologie des métaux de la même manière que l'on étudgie les mots d'une langue.

Les carrés magiques

[5] D.E.Smith, *History of mathematics*, Dover, N.Y., 1952, Tome 1, page 25-26
[6] George Sarton, *A History of Science*, Dover, N.Y. 1952, Tome 1,, tome 2, page 503.

L'intérêt ancien pour les carrés magiques vient de leur utilisation en astrologie. Des mathématiciens chevronnés, comme al-Kindi (805-867), Abu'l Wafa (940-998) ou les Ikhwan as-Safa (vers 983) pouvaient ainsi être largement subventionnés en étudiant ces assemblages particuliers de nombres, faisant intervenir des concepts combinatoires. Nous retrouveront cette tradition eu Europe du XVIème siècle.

Les dénombrements

Ahmed Djebbar[7] signale que les dénombrements par énumération sont nombreux dans les disciplines mathématiques, comme par exemple:

- les dénombrements des rapports composés chez Thabit ibn Qurra (836-901)
- les dénombrements des nombres figurés
- les dénombrements après classification des équations issues de la trigonométrie sphérique chez al-Biruni (973-1050)
- les dénombrements par énumération des équations obtenues pour résoudre un problème d'oiseaux, comme chez Abu kamil (850-950).

Pour tous ces exemples, les historiens des mathématiques arabes s'accordent pour dire que l'introduction d'éléments combinatoire comme outils de résolution de problèmes divers reste non structurée et ne constitue pas encore une base consciente d'un nouveau savoir.

2.2 Un chapitre des mathématiques en construction

La première phase que nous venons d'évoquer est appelée la phase des activités "naïves" en combinatoire. Les recherches suivantes vont constituer un apport certain à la mise en place d'un nouveau chapitre des mathématiques.

Les études sur la langue arabe

La langue arabe, orale et écrite, langue du Coran et des Arabes, devait être fixée définitivement au VIIIème siècle avec entre autres le travail en lexicographie d'al-Khalil ibn Ahmed (716-786) qui introduit une approche combinatoire dans ses raisonnements:

> "La langue est une partie phonétiquement réalisée de la langue possible. Si en effet l'arrangement r à r des lettres de l'alphabet avec r = 2 , 3 , 4 ou 5 selon le nombre des lettres de la racine en arabe nous donne l'ensemble des racines des mots de la langue possible, une seule partie, limitée par les règles d'incompatibilités des phonèmes des racines, formera la langue. Constituer un lexique revient donc à constituer la langue possible pour en extraire tous les mots soumis aux dites règles." (d'après R.Rashed, page 56)

al-Khalil calcule le nombre de combinaisons sans répétition des 28 lettres de l'alphabet, prises 2 à 2, puis 3 à 3, etc, jusqu'à 5 à 5., ainsi que le nombre de permutations de chaque groupe de r lettres.

Ces techniques calculatoires vont se développer en phonologie (étude de la langue du point de vue de ses éléments sonores), en lexicographie (ensemble des mots), mais aussi en cryptographie (codage et décodage des messages secrets), en métrique (structures des vers d'un poème) et en musique (combinaison des rythmes et sons divers). Outre celui d'al-Khalil, Les noms d'al-Farabi (875-950) et des Ikhwan as-Safa (cers 983) sont associés à ces travaux. .

Le triangle arithmétique

Al-Karaji (953-1028)

[7] Ibid, page 12.

Dès le XI^{ème} siècle, et en particulier depuis al-Karaji, l'algèbre arabe devient un chapitre autonome des mathématiques, se libérant de l'arithmétique et de la géométrie euclidienne. Une définition claire des "inconnues" (*al-Majhulat* = ???????) permet de présenter les opérations sur l'ensembles des expressions polynomiales en x et x^{-1}, et de les représenter sur une planche à calcul recouverte de sable. Les puissances du binôme interviennent assez rapidement dans les calculs, or lorsque l'on développe une expression algébrique de la forme $(a + b)^n$, on trouve les coefficients du binôme. Prenons des exemples

Pour n = 2 , on trouve $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Ici, les coefficients sont 1 , 2 , 1.

Pour n = 3 , on trouve $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$. Les coefficients sont 1 , 3 , 3 , 1. Le pas est alors franchi par induction. C'est ce que nous explique as-Samaw'al (1130-1174), disciple d'al-Karaji. Il rapporte que ce dernier utilisait un triangle numérique dont il explique la construction:

> "*Pour n = 5, al-Karaji ne fait plus de démonstration, mais écrit: celui qui a compris ce que nous venons de dire peut montrer que pour tout nombre partagé en deux parties, sa puissance d'ordre cinq est égale à la somme des puissances cinquièmes de chacune de ses (deux) parties, cinq fois le produit de chacune des parties par la puissance quatrième de l'autre partie, plus dix fois le carré de chacune des parties multiplié par le cube de l'autre, et ainsi de suite dans un ordre croissant*."

L'auteur ajoute :

> "*Enonçons maintenant une règle qui permet de connaître les coefficients intervenant dans les produits d'une partie d'un nombre divisé en deux par l'autre. Al-Karaji dit: si tu désires cela, tu places sur le takht 1 et tu places 1 au dessus de lui, tu recopies le 1 près de lui et tu ajoutes 1 au 1 dessous, ce qui donne 2 que tu places en dessous, et enfin tu places 1 en dessous. Tu as ainsi 1 et 2 et 1. Ceci t'indique que tout nombre somme de deux nombres, si tu multiplie par lui-même une fois, les extrémités seront 1 et 1 , quant au produit d'une partie par l'autre, le résultat central est multiplié par deux. (…) et par cette technique, l'on connaît les coefficients pour le carré, le cube et pour toute autre puissance cherchée. Voici l'image de cela*[8]:" (*al-Bahir fil Jabr*[9] , pages 109-110-111)

[8] Texte arabe:

? ?? ? C????: ? ? ? ? ?? ? ??. ? ??d?? ?d?? C?? ?? ? ?? ??? ?? ??p ??? ?????? ??? ? ? p ????? ? T??? ????? C?? ??? ???? ? ?? ? ??????? "
? ???????? ??S??? ? ????? ??S????µ ?? ? ?T?? ? ??? ??S????? ?? ?S???? ? ??? ? ? ? ? ?t ? ? ?? ?S???? ? ??? ??? ?T? ? ??S?? ??S?? ? ? T??? ?? ? ?? ?
????? ???? ? ? ? ? ? ? ? ? ?O???? ?S?? ??? ? ??S??? ??S?? ? ???t ?? ? ? ? ? GS?? G?? ?d?? ? ? ????? ?S?? ? ? ? ??? ???? ?O?? ? ? ? ??? C?? ? ? ? ?
":? ?? G?? ????. ???? ?????? ?? ?? ? ???T??? ? ???T??? ? ? ????? C?? ? ??? ?????? ????? . C???? ? ?? ???? ???.? ?t ? ????

[9] Salah Ahmad et Roshdi Rashed, *Al-Bahir fil Hisab*, Min.Ens.Supérieur, Damas, 1972.

Nasir ad-Din at-Tusi (1201-1273)

Nous retrouvons chez at-Tusi ce même triangle arithmétique dans le cadre de son calcul de la racine $n^{\text{ème}}$ d'un nombre entier. La règle de formation des éléments du triangle est clairement formulée:

> "Si l'on connaît les deux termes extrêmes et que l'on souhaite les termes centraux, on additionne deux termes qui appartiennent à l'ordre précèdent[10]" (page 145)

C'est bien la règle : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, mais formulée sous forme rhétorique. Comme application, at-Tusi calcule $7^4 - 6^4$ et $9^4 - 6^4$.
Dans une étude différente, mais à caractère philosophique, at-Tusi est amené à calculer $\Sigma\binom{n}{k}$ pour k=1 jusqu'à k=n, pour laquelle il utilise l'égalité : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
Calcul par approximation de la partie fractionnaire de la racine irrationnelle. Il s'agit en fait de la formule approchée: $\sqrt[n]{a^n + r} = a + \dfrac{r}{(a+1)^n - a^n}$, où le dénominateur développé fait apparaître les coefficients du binôme.
En utilisant cette méthode dans un traité de 1265, Nasr ad-Din at-Tusi explique en détail la technique d'extraction de la racine sixième d'un nombre entier en l'illustrant sur l'exemple suivant: $\sqrt[6]{244140626} = 25 + \dfrac{1}{26^6 - 25^6} = 25 + \dfrac{1}{64775151}$.
R.Rashed signale que d'autres mathématiciens ont suivi al-Karaji et at-Tusi et ont utilisé le triangle arithmétique, comme par exemple Kamal ed-Din al-Farisi (m. 1319) , Ibn al-Banna (m.1321) ou Jamsh ed-Din al-Kashi (m.1430). Mais c'est au sujet de l'influence d'at-Tusi que R.Rashed et Ahmed Djebbar divergent. Pour le premier :

> "*al-Farisi et Ibn al-Banna non seulement succèdent à at-Tusi, mais utilisent la majeure partie du lexique déjà adopté par ce dernier. Cette communauté d'intérêt, et, en grande partie, de vocabulaire, montre bien qu'il s'agit d'une tradition, et confirme une conjecture par nous soutenue il y a une dizaine*

[10] Texte arabe:
."? ?? ? ? ? ?S???????? ? ???? ????I??? ??????? ??? ??? ? ??O?? ? ? ????? ? ?? ? ? ? ??O??? ? ???t ?? ????? ????"

> *d'années, à savoir que l'analyse combinatoire s'est bien constituée comme chapitre avant al-Farisi et Ibn al-Banna*." (R.Rashed, page 59)

Par contre, pour Ahmed Djebbar :

> " *L'aspect combinatoire est complètement masqué par ces expressions algébriques, comme c'est le cas, par exemple, pour les coefficients du binôme d'ordre n, qu'il n'est pas du tout immédiat de les identifier aux combinaisons de n objets, p à p. Paradoxalement, ce n'est pas cette tradition qui a inspiré les mathématiciens du Maghreb qui se sont occupés de combinatoire, mais celle des linguistes*." (A.Djebbar, page 13)

N'étant pas, nous même, un spécialiste de l'analyse combinatoire, nous ne chercherons pas à partager ces deux prestigieux protagonistes dans ce débat, mais nous essayerons de bien comprendre la position de Djebbar: Pour lui l'apport d'al-Karaji ou d'al-Tusi concerne la manière de construire le triangle arithmétique et non le lien de ce triangle avec l'analyse combinatoire. Grâce à eux, dit-il, on sait trouver toute cellule du triangle et on connaît les relations entre ses cellules, adjacentes ou superposées. Les raisonnement sont arithmétiques, essentiellement inductifs, généralisant les formules donnant les puissances du binôme et rien, semble-t-il, de ce qu'ils écrivent ne laisse présager que la cellule C(k , j) est une combinaison de j objets pris i à i. Djebbar ajoute que les mathématiciens maghrébins, partant de l'analyse des travaux d'al-Khalil sur la langue arabe font le joint entre formules du binôme et combinatoire.

2.3 L'approche des mathématiciens maghrébins

Un mathématicien maghrébin, Ibn Mun^{c}im (?????? ? ??) peut être considéré comme ayant le plus apporté à la constitution de l'analyse combinatoire comme savoir nouveau, popularisé un siècle plus tard par l'un de ses successeurs, Ibn al-Banna (??????? ? ??).

Ibn al-Mun^{c}im (mort en 1228)

Ce mathématicien de Marrakech, reprend dans son livre "*Fiqh al-Hisab*" l'étude d'al-Khalil ibn Ahmed sur la langue arabe:

> "*Nous voulons trouver le moyen de dénombrer tous les mots tels qu'un être humain ne peut parler qu'en utilisant l'un d'eux. Al-Khalil n'avait considéré que les cas où les lettres sont toutes distinctes. Pour ce qui est des mots à lettres répétées ou formés de cinq ou six lettres distinctes dont une, deux ou toutes sont répétées, et leur dénombrement, c'est ce que nous proposons de traiter dans le présent chapitre. Nous convenons que l'alphabet est formé de 28 lettres que le mot le plus long est constitué de 10 lettres en tenant compte des affixes et des répétitions, comme ARISTOTALIS, qu'au dessus d'une consonne se succèdent trois voyelles et un sukun; que l'on peut commencer par une lettre muette (sakin); et enfin deux lettres muettes ne se succèdent pas."* (traduction de Lakramti[11], page 215)

Ce qui est original dans la démarche d'Ibn Mun^{c}im , c'est le modèle choisi pour effectuer ses calculs : les lettres de l'alphabet sont représentés par des couleurs et les mots par des touffes de soie. L'auteur ajoute:

> "Problème préliminaire:
>
> *On dispose de dix couleurs en soie. On voudrait constituer des touffes (shara'ib) dont certaines sont d'une seule couleur, d'autres de deux couleurs, d'autres encore de trois couleurs, et ainsi jusqu'à ce que la dernière touffe*

[11] Driss Lamrabet, *Introduction à l'histoire des mathématiques maghrébines*, Rabat, 1994.

soit constituée de dix couleurs, et on voudrait connaître le nombre de chaque type de touffe pris seul, connaissant la couleur de chaque touffe et le nombre total de touffes si on les ajoute en tenant compte de leurs différentes couleurs. Disposons les couleurs une à une dans un tableau. Si tu analyses la question, tu trouves que les touffes constituées de deux couleurs distinctes s'obtiennent en combinant la deuxième avec la première, la troisième avec la première et la deuxième, la quatrième avec la première, la deuxième et la troisième, et ainsi jusqu'à combiner la dixième couleur avec chacune des précédentes. On détermine de cette manière le nombre de touffes constituées de couleurs différentes. (…)
Si tu analyses les propriétés de ce tableau et les merveilleuses conjonctures qui y apparaissent, tu y relèveras des accords insolites et des propriétés magnifiques dont la mise en évidence nécessiterait une étude longue et détaillée."(Lamrabet, page 215-216)

Ibn Mun^{c}im explique patiemment le mode d'emploi du triangle arithmétique et illustre son utilisation par plusieurs propositions dont nous citerons quelques uns pour mieux éclairer le lecteur - et lui montrer les éléments de la thèse de Djebbar - et illustrer l'usage généralisé du triangle arithmétique, ses outils étant l'analyse combinatoire et l'induction.

<u>Problème</u> 2 : "*Déterminer le nombre de manières de disposer les lettres d'un mot, connaissant leur nombre et sachant qu'aucune n'est répétée."* L'auteur examine les cas n = 2 , n = 3 et n = 4, puis par induction, il obtient la formule $P_n = n!$.

<u>Problème</u> 3 : "*Déterminer le nombre de manières de disposer les lettres d'un mot, connaissant leur nombre et sachant que certaines d'entre elles son répétée;"* L'auteur trouve en notation moderne: $P_n(r_1, r_2, \ldots, r_k) = \dfrac{n!}{r_1.r_2 \ldots r_k}$.

Ahmed Djebbar signale que Ibn Mun^{c}im ne semble pas avoir fait le lien entre le triangle arithmétique et les coefficients du binôme qu'il étudie pourtant au chapitre 7 de son ouvrage.

Le fac-similé présenté ci-dessous montre le tableau résumant l'analyse d'Ibn Mun'im :

Ibn al-Banna (1256-1321)

Lui aussi de Marrakech, Ibn al-Banna aura un usage multiple de l'analyse combinatoire. C'est d'abord dans son livre *Raf^c al-Hijab* qu'elle est le plus explicitement présentée et utilisée, comme nous le dit dans sa thèse Mohamed Aballagh[12] :

"Dans ce traité d'arithmétique et d'algèbre, Ibn al-Banna :

1. *établit des propositions combinatoires relatives aux permutations de n objets, à leur combinaisons p à p et à leurs arrangements et ce, en innovant par rapport à la contribution déjà importante d'inb Mun^{c}im, puisqu'ibn al-Banna énonce et démontre ces résultats sans avoir recours à la technique des tableaux, mais en suivant une démarche arithmétique et inductive.*
2. *en liaison avec le thème précédent, l'étude de quelques propriétés de nombres-polygones qui ne semblent pas avoir été analysées auparavent dans la tradition mathématique de l'Occident musulman, comme les relations existant entre certains de ces nombres polygones, les combinaisons de n objets p à p et certaines séries de puissances finies.*
3. *l'introduction d'un point de vue combinatoire dans le traitement de certains problèmes classiques de la science du calcul, comme lorsqu'ibn al-Banna classe un ensemble de formules algébriques en fonction du nombre d'opérations arithmétiques que chacune d'elles fait intervenir."* (Thèse d'Aballagh, page 130)

Sans entrer dans les détails, essayons de donner une idée de la terminologie et du type de raisonnement employés par Ibn al-Banna.

Combinaisons des lettres de l'alphabet

"La sommation des carrés est utile dans la composition des mots trilitères pour dénombrer le contenu des langues et de choses semblables. Par exemple: Combien a-t-on de mots trilitères à partir des lettres de l'alphabet selon une seule figure, sans ses permutées?

Le nombre de mots trilitères est égal à la somme des trigones dont le côté du dernier est inférieur au nombre de ces lettres de l'alphabet de deux et la somme des trigones s'obtient en multipliant le côté du dernier par le produit des deux nombres qui le suivent et en prenant le sixième du résultat, comme ce que l'on fait pour la sommation des carrés des impairs et des carrés des pairs.[13]". (Thèse d'Aballagh, pages 535-536)

Mot trilitère : mot ayant trois lettres.

Trigone : C'est un nombre figuré d'ordre 3, comme par exemple 1 , 3 , 6 , 10 . Plus généralement, le $n^{\text{ème}}$ nombre trigone est égal à $P_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

"la somme des trigones s'obtient en multipliant le côté du dernier par le produit des deux nombres qui le suivent et en prenant le sixième du résultat" est l'énoncé d'un théorème que nous écrivons en notation moderne : $P_3(1) + P_3(2) + \ldots + P_3(n-2) = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}$

"comme ce que l'on fait pour la sommation des carrés des impairs et des carrés des pairs" est l'énoncé d'un théorème:

$$P_3(1) + P_3(2) + \ldots + P_3(n-2) = [1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2] + [2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2]$$

Ibn al-Banna démontre plus loin, en les énonçant sous forme rhétorique, les formules :

[12] Mohamed Aballagh *Rafc al-Hijab d'Ibn al-Banna,* Thèse de doctorat de Paris I, 1988.

[13] Texte arabe:

[illegible]

$\binom{n}{2} = \frac{\text{(n-1)n}}{2}$ et $\binom{n}{k} = \frac{\text{n-(k-1)}}{\text{k}} \binom{n}{k-1}$ et il en déduit le résultat $\binom{n}{k} = \frac{\text{n(n-1)…(n-(k-1))}}{\text{1.2. … k}}$.
Il prouve par la suite qu'il existe n! permutations de n objets et n(n-1)…(n-(k-1)) arrangements de n lettres prises k à k.

Lamrabet signale qu'Ibn al-Banna dans son épître intitulée "*Risala fil ashkâl al-maisâhyya*":

> "*classifie les figures géométriques et dénombre les problèmes suceptibles d'être posés en fonction des éléments connus et de ceux recherchés:*
> *<u>Le triangle comporte cinq éléments: ses trois côtés, sa hauteur et son aire; il comporte trente données à déterminer, parce que ce qui est connu peut être un, deux, trois ou quatre de ces éléments, et ce qui est à déterminer c'est une inconnue entre ces éléments. (…)</u>" (lamrabet, page 219)*

3. Sous d'autres cieux

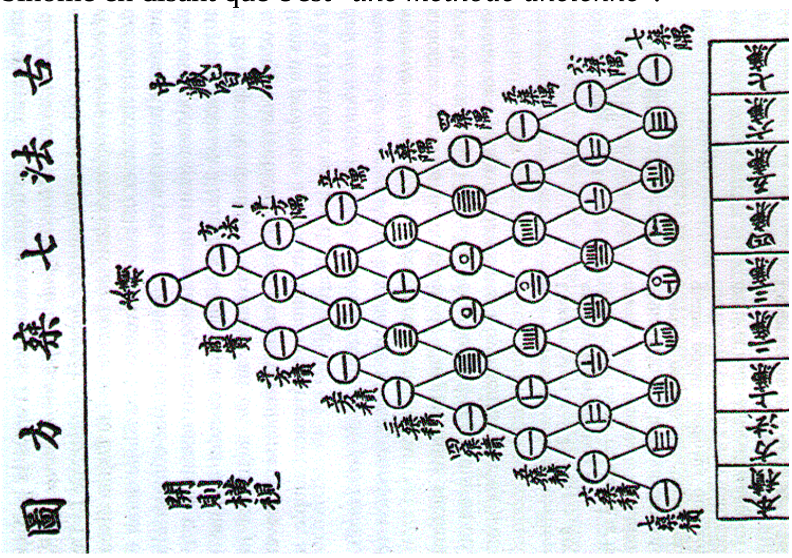
Des considérations combinatoires et des utilisations du triangle arithmétique sont signalés ici et là par les historiens des mathématiques. Nous ne connaissons pas les liens des uns avec les autres, ni l'influence des uns sur les autres; ils semblent suffisamment significatifs pour que nous les présentions sommairement, cependant nous ne traiterons pas de l'apport de Pascal et de Fermat qui sont eux bien connus. Le premier traité totalement consacré à l'analyse combinatoire a été écrit par Jacques de Bernouilli en 1713: 'Ars Conjectandi'

Le jeu d'échecs en Chine du XI^ème^ siècle

D'après Joseph Needham[14], le jeu d'échecs a été une autre source d'activités combinatoires en Chine. *Shen Kua* (1031-1095) raconte que l'on peut calculer aisément le nombre total de situations possibles sur l'échiquier, cependant ce nombre ne peut pas être exprimé en employant la terminologie habituelle pour les entiers. Avec deux bâtonnets et quatre pièces, il y aura 81 situations distinctes. Avec seulement trois bâtonnets et neuf pièces, le nombre sera de 19.683, alors qu'en utilisant quatre bâtonnets et 16 pièces, on aura 43.046.721 situations. Il ajoute qu'il est capable d'énumérer tous les changements possibles sur l'échiquier.

Un triangle arithmétique chinois au XII^ème^ siècle.

Les historiens des mathématiques chinoises[15] indiquent qu'en 1303 Zhu Shijie publie le "*Miroir de jade des quatre inconnues"*, qui commence ce tableau des coefficients du binôme en disant que c'est "*une méthode ancienne*".



Le triangle arithmétique en Europe au XVI^ème^ siècle.

Trois mathématiciens européens utilisent le triangle arithmétique bien avant Pascal, il s'agit de Johan Stifel (1487-1567), Scheubel (1494-1570) et Petrus Apianus (1495-1552) qui est l'auteur du premier traité imprimé en 1527 contenant ce triangle[16] qu'il reproduit d'ailleurs dans la page de garde.

[14] Joseph Needham, *Science and Civilization in China*, vol.3: *Mathematics and the Sciences*, Cambridge Univ. Press, N.Y., 1959.
[15] Kiyosi Yabuuti, *Une histoire des mathématiques chinoises*, édition Belin, Paris, 2000.
[16] D'après D.E.Smith, History of Mathematics, Dover, N.Y. 1923.