MATHEU
Identificazione, Motivazione e Supporto di Talenti Matematici nelle Scuole Europee

MANUALE

Volume 1

Editore
Gregory Makrides, INTERCOLLEGE, Cipro

Publicato da
MATH.EU Project

ISBN 9963-634-31-1

MATHEU
Identificazione, Motivazione e Supporto di Talenti Matematici nelle Scuole Europee

MANUALE

Volume 1

Editore
Gregory Makrides, INTERCOLLEGE, Cipro

Pubblicato
MATH.EU Project

ISBN 9963-634-31-1

<u>MATHEU Partners</u>

- **INTERCOLLEGE / Scuola di Educazione - Istituzione Coordinatore, CIPRO**
  Gregory Makrides
  Emilios Solomou
  Michalinos Zembylas
  Italiareas Savva
  Elena Michael
- **Istituto di Matematica – Accademia delle Scienze, BULGARIA**
  Petar Kenderov
  Sava Grozdev
- **Università di Cipro, CIPRO**
  Athanasios Gagatsis
  Costas Christou
- **Università "Charles", REPUBBLICA CECA**
  Jarmila Novotna
  Marie Hdimannova
  Jaroslav Zhouf
- **Università di Duisburg, GERMANIA**
  Werner Haussmann
- **Università di Creta, GRECIA**
  Michalis Lambrou
- **Università di Palermo, ITALIA**
  Filippo Spagnolo
- **Università North di Baia Mare, ROMANIA**
  Vasile Berinde
- **Università di Miskolc, HUNGARY**
  Péter Körtesi
  Jenő Szigeti

<u>Collaboratori MATHEU</u>

- **Unione Bulgara dei Matematici**
  Svetoslav Bilchev
- **Società Matematica Rumena**
  Mircea Becheanu
- **Società Europea Matematica**
  Tony Gardiner, Mina Teicher
- **MASSEE**
  Emilia Velikova
- **Società Matematica di Cipro**
  Italiareas Philippou
- **Unione di Matematici di Cipro**
  Marios Antoniades
- **Società Matematica Ceca**
- **Società Matematica Ellenica**
  Constantinos Salaris
- **Società Italiana Matematica**
  Franco Favilli
- **Società Matematica Ungerese**
  Péter Madarász

Indice

1.1 Partnership

La partnership di MATHEU si compone di nove istituzioni di otto paesi. Questi sono

	Istituzioni	
1.	CIPRO (INTERCOLLEGE)	
2.	BULGARIA (ACADEMY DI SCIENCES)	
3.	CIPRO (UNIVERSITY DI CIPRO)	
4.	REPUBBLICA CECA (CHARLES UNIVERSITY)	
5.	GERMANIA(UNIVERSITY DUISBURG-ESSEN)	
6.	GRECIA (UNIVERSITA' DI CRETA)	
7.	ITALIA (UNIVERSITA' DI PALERMO)	
8.	ROMANIA (NORTH UNIVERSITY)	
9.	HUNGARY (UNIVERSITA' DI MISKOLC)	

Partner 1: (INTERCOLLEGE / School di Education- Coordinating Institution, CIPRO):
Intercollege è una istituzione privata educativa a Cipro con duecento facoltà a tempo pieno e una varietà di programmi relativi a pre e post laurea. I programmi universitari sono accreditati dal governo di Cipro da NCA degli USA e da alcuni enti accreditanti europei. Il dipartimento di matematica offre un programma universitario in matematica applicata alle scienze ed alla tecnologia. L'obbiettivo e quello di formare scienziati che possano contribuire allo sviluppo della scienza e della tecnologia. Il dipartimento offre una formazione relativa alla laurea primaria secondaria e master in istruzione, ottenendo la formazione per i futuri insegnanti fornendo i necessari strumenti e metodi per diventare un efficiente insegnante. Alla luce del fatto che intercollege si sta battendo per diventare la più grande università di ricerca a Cipro, questi metodi stanno diventando tra i più importanti per la assicuRapportone della qualità del servizio (istruzione/ricerca) a Cipro ed in Europa. Il progetto è in cooperazionie tra la scuola di istruzione (dipartimento di istruzione primaria) e la scuola di scienze ed ingegneria dipartimento di matematica. L'istituto universitario, attraverso il coordinatore del progetto, contribuisce attivamente allo sviluppo di studenti che mostrano talenti matematici provvedendo per il totale supporto per le attività della società matematica di Cipro. L'istituto offre anche pieno insegnamento attraverso borse di studio per gli studenti capaci che vogliono studiare matematica. La scuola di istruzione e la scuola di scienze e ingegneria hanno precedente esperienza in progetti europei come in Comenius, Minerva, Leonardo e Lingua.

Partner 2: (Institute di Mathematics-Academy di Sciences, BULGARIA)
L'istituto di matematica ed informatica (IMI) accademia di scienza Bulgara è un'indipendente ente legale. Organizza e conduce ricerche in matematica pura ed applicata e informatica. E' anche impegnato nella prepaRapportone e istruzione di specialisti altamente qualificati in tutti le importanti branche della matematica ed informatica. Attualmente IMI si compone all'incirca di 180 persone. 130 delle quali hanno conseguito lauree scientifiche. Un terzo dello stesso staff è temporaneamente all'estero e lavora per altre istituzioni di ricerche mondiali. IMI promuove la scienza e cerca di attrarre giovani talenti ad intraprendere carriere scientifiche. Da oltre 25 anni IMI è la principale forza di guida dietro le attività connesse con la prima identificazione e lo sviluppo di giovani bulgari che hanno talenti matematici. C'è un congruo gruppo di specialisti che da diversi reparti arrivano ad IMI (molti dei quali hanno partecipato a competizioni nazionali ed internazionali) che supportano scientificamente tutte le maggiori competizioni e la prepaRapportone delle competizioni. Il gruppo è strettamente correlato con gruppi e organizzazioni che includono la World FedeRapportin di National Mathematics Competition (WFNMC, vedi http://www.amt.canberra.edu.au/wfnmc.html), Europei Kangaroo, la nuova Mailmatical Society di South-East Europe (MASSEE), etc. All'interno delle strutture del prossimo congresso di MASSEE ci sarà uno speciale mini-simposio su una serie di campi per attrarre talenti alle scienze, dove gli studenti delle scuole superiori e universitari potranno mostrare i risultati ottenuti dalle attività di ricerca. IMI è il luogo di nascita

della prima Olimpiade Internazionale in Informatica (1989) e co-iniziatore del Mathematics Balkaniad per le scuole secondarie (primi anni 80).
Esiste in bulgaria un Know-How per la prima identificazione, motivazione e supporto di studenti con grandi abilità. Su questa base i nuovi materiali saranno preparati per facilitare il lavoro di insegnanti ed educatori con specifici gruppi di giovani talenti matematici

Partner 3: (Università di Cipro, CIPRO)
L'università di Cipro fu fondata nel 1989 e ammise i primi studenti nel 1992. L'ammissione all'università si ottiene attraverso esami nazionali e la competizione tra le città è intensa. Il rapporto dei candidati che supportano le selezioni è approssimativamente di 10 a 1. I principali obbiettivi dell'università di Cipro sono su due campi: la promozione dell'istruzione e dell'educazione dell'insegnamento e ricerca, e l'aumento della cultura e lo sviluppo sociale ed economico di Cipro. La ricerca è promossa e fondata in tutti i dipartimenti. La ricerca originale è una delle principali attività dello staff accademico all'università di Cipro. I programmi di ricerca dell'università coprono un ampio gruppo di campi che corrispondono ai dipartimenti esistenti. L'università è membro di un numero di organizzazioni internazionali di università e networks. Coopera anche attraverso inter-state e accordii inter-universitari, con università e centri di ricerca In europa e internazionalmente, per la promozioe della scienza, per la ricerca scolastica e scambio di informazioni. Inoltre, l'università coopera con varie istituzioni a Cipro su programmi di ricerca che sono specificatamente mirati alle necessità dell'economia e della società cipriota in generale.
Dipartimento di istruzione: L'obiettivo del dipartimento di istruzione è il seguente:

- Produrre e diffondere conoscenza nelle scienze Pedagogiche
- Identificazione, ricerca e studio di problemi educativi
- Istruzione primaria e pre-primaria degli insegnanti delle scuole di Cipro
- Fornisce programmi ai laureati con l'obbiettivo di prepararli alla ricerca personale e di preparare persone che vorranno occupare posizioni dirigenziali.
- Fornisce corsi di sviluppo per le scuole. La ricerca interessa i membri delle facoltà e copre un ampio spettro di aree disponendo di articoli relativi all'assestamento educativo e valutativo, all'organizzazione educativa, alla sociologia alla psicologia, e alla didattica specifica per aree di materie.

Partner 4: (Università di Charles, REPUBBLICA CECA)
L'università di Charles è situata a Praga, CZ. È una pubblica istituzione. L'ammissione della facoltà di formazione dell'università di Charles è quella di preparare insegnanti per tutti I tipi e livelli di scuole, preparare specialisti e studiosi nell'area della pedagogia, psicologia applicata all'educazione e didattica. A seconda del tipo di studi, la facoltà di istruzione rilascia Laurea, Master e dottorato. Nell'ambito della cooperazione internazionale, la facoltà di scienze della formazione si è focalizzata in vari tipi di progetti nel programma Socrates (Comenius, Lingua, Grundtvig, Minerva, Arion, Erasmus).

Partner 5: (Università di Duisburg, GERMANIA)
L'università di Duisburg è stata fondata nel 1072. Oggi, conta circa 15000 studenti impegnati in 5 facoltà. 210 professori e altri 650 persone come staff accademico impegnati nell'insegnamento e ricerca. Studenti DimostRapportoninienti da 110 differenti stati stranieri sono iscritti all'università, questo garantisce una vivace comunità internazionale di studenti. Nonostante il relativamente piccolo numero di Università, sono disponibili un ampia varietà di corsi, come ad esempio, scienze sociali, economia e lingue, scienze naturali, matematica e ingegneria. Accanto a questo corso tradizionale, l'università offre una varietà di corsi di laurea e corsi interdisciplinari rivolti a studenti internazionali. Questi corsi sono definiti come Bachelor o programmi di laurea Master. L'istituto di Matematica ha una forte vocazione per la Matematica Applicata. (ottimizzazione, metodi matematici e numerici di immagini di processi, analisi, teoria dell'approssimazione e probabilità). Ci sono due professioni generali all'Istituto di Educazione e Insegnamento (Didattica della matematica). Dal Gennaio 2003 l'università di Duisburg e l'università di Essen sono state fuse con l'università di Duisburg e Essen.

Partner 6: (Università di Creta, GRECIA)
L'università di Creta è una istituzione multidisciplinare orientata alla ricerca, sita nella città di Rethymnon e Heraklion nell'isola di Creta in Grecia. È un università con corsi di laurea, e considerevoli cooperazionii internazionali. Lo scopo dell'università di Creta è la promozione della scienza e della conoscenza attraverso l'educazione e la ricerca, così come la partecipazione al futuro culturale, sociale, ed economico della regione e del paese.
Cominciò ad operare nel 1977. Oggi, frequentano l'università 8723 (7187 studenti universitari e1535 laureati). L'università si compone di di 544 insegnanti e membri dello staff di ricerca e più di 300 impiegati amministrativi.
Operano le seguenti scuole: a) La scuola di lettere che si compone dal dipartimento di Filologia, Storia-Archeologia, Filosofia, Sociologia, b) La scuola di scienze sociali si compone dei dipartimenti di: Sociologia, Economia, Psicologia, e Scienze Politiche, c) La scuola di educazione si compone dei dipartimenti di Scienze della Formazione Primaria con indirizzo elementare e materno, d) La scuola di scienze si compone dei dipartimenti di Matematica, Fisica, Biologia, Informatica, Scienze Naturali, Chimica, Matematica applicata e Scienze dei Materiali, e) La scuola di Scienze mediche è formata dalla facoltà di Medicina.

Partner 7: (Università di Palermo, ITALIA)
Il Dipartimento di Matematica e Applicazioni fu fondata nel 1990. Prima di questa data l'istituto di matematica aveva una storia molto antica. L'attività dell'istituto di matematica a Palermo cominciò nel 1884 ("Circolo Matematico di Palermo"). La sua attività è stata molteplice, dagli studi di matematica teorica agli studi di matematica applicata. Il lavoro si è concetrato su i fondamenti della matematica e sulla didattica della matematica.
Il dipartimento di Matematica offre I seguenti corsi di Laurea:
1. Matematica
2. Matematica applicata all'industria e finanza
3. Informatica
4. Matematica per l'informatica e la divulgazione scientifica
Dal 1979 il dipartimento di matematica ha sviluppato un gruppo di ricerca in didattica della matematica G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matemtaiche). Il gruppo si occupa principalmente di ricerca in didattica delle matematiche come anche di relazioni con le scuole della sicilia attraverso corsi di formazione post universitari per i futuri insegnanti di scuola elementare, media e superiore. Le attività di ricerca di questo gruppo sono documentate nel sito web: http://dipmat.math.unipa.it/~grim /
È possible trovare inoltre nel sito:
1. La rivista on-line "Quaderni di Ricerca in Didattica": http://dipmat.math.unipa.it/~grim/menuquad.htm;
2. I proceedings del gruppo internazionale http://dipmat.math.unipa.it/~grim/21project.htm;
3. I materiali didattici elaborati dagli insegnanti e dagli studenti dei corsi universitari per la formazione di futuri Insegnanti elementari e di scuola secondaria.
4. Articoli e tesi di laurea e di dottorato Italiani.

Partner 8: (North University di Baia Mare, ROMANIA)
Fondata nel 1961 come il più alto istituto educativo pedagogico, oggi North University di Baia Mare (NUBM) offre più di 35 lauree, corsi di specializzazione postlaurea e programmi PhD che ricoprono una vasta gamma di campi. NUBM comprende 4 facoltà (Facoltà di Ingegneria, Facoltà di risorse Minerali, Facoltà di scienze ambientali, Facoltà di Scienze, Facoltà di lettere) e un College Universitario con distaccamento a Satu Mare e Bistrita.
Il Diparimento di Matematica e quello di informatica, il più grande dipartimento di NUBM, offre i seguenti corsi: Matematica e fisica, Matematica e Informatica, Informatica (tutti i corsi di laurea), Informatica (corsi post laurea) e metodi numerici con applicazioni al CAD (Programmi Master).
Esiste una lunga tradizione al NUBM nella formazione di insegnanti altamente qualificati per il sistema educativo pre universitatrio così come nell'organizzazione continua dei programmi di formazione

educativi per insegnanti. Il lavoro di ricerca è dato dalla struttura del centro di ricerca "Matematica pura e applicata", che si è classificata ottava su 31 centri di ricerca universitari accreditati dal Ministero Nazionale della ricerca Universitaria nel 2001. Un gruppo di lavoro (Centro di eccellenza Matematica) è stato coinvolto nella formazione di talenti nella scuola secondaria superiore e universitaria per competizione matematiche.

Partner 9: (Università di Miskolc, UNGHERIA)

Lo scopo dell'università è quello di riunire le più grandi intelligenze, valori e sforzi: la costituzione e il sostentamento di istituzioni (integrate HE) che incontrano gli standards di professionisti altamente qualificati, e dall'attiva di partecipazione alla vita sociale e scientifica della nazione e del mondo. L'Università è impegnata continuamente nel miglioramento di contenuti e delle strutture dei suoi programmi accademici per rispondere allo sviluppo globale Europeo all'interno dell'HE. Le diffusissime relazioni internazionali dell'Univesrità sono cambiate. Le prime relazioni (principalmente con i paesi dell'Est Europa) sono state trasformate o, in alcuni casi, cessate. Dall'altra parte, si sono allargati i rapporti con un crescente numero di istituzioni partner nell'Ovest Europa nella forma di progetti internazionali e accordi bilaterali. L'Università di Miskolc collega la più grande scuola didattica con relativi progetti di ricerca (TEMPUS, CEEPUS, SOCRATES, LEONARDO, NATO, quarto e quinto programmi, EUREKA, etc.), e l'Università ha partecipato a due altri progetti (LINGUA, MINERVA) del programma SOCRATES.
Inoltre, per i partners su presentati, abbiamo contributi da società matematiche. Queste sono:

Cipro Mathematics Society

- Cipro Union di Mathematician
- Hellenic Mathematics Society
- Mathematics Society di South Eastern Europe
- Europei Mathematics Society
- Bulgarian Union di Mathematician
- Romanian Mathematics Society
- Czech Mathematics Society
- Hungarian Mathematics Society

1.2 Riferimenti\ riconoscimenti
Il riconoscimento è dato ai membri della Società di matematica che volontariamente hanno contribuito allo sviluppo del materiale per il progetto Matheu. In particolare il professore Mircea Becheanu dell'università della Società Matematica dell'Università della Romania che colleziona materiale da tutti i partners e sviluppa gli strumenti di identificazione.
Prof. Svetoslav Bilchev della Società Matematica Bulgara che si occupa dello sviluppo delle "scale di livelli". Dr Emilia Velikova di MASSEE che ha sviluppato le "scale di livello".
Mr Andreas Philippou della Società Matematica di Cipro e Mr Marios Antoniades dell'Unione Matematica Cipriota che hanno messo insieme le diverse parti degli strumenti di identificazione.

1.3 Matematica come una delle materie prioritarie nell'Unione Europea. la decisione dell' Unione Europea, COM/2001/678 dice, « Una società di conoscenza, Democratica, richiede ai cittadini di avere conoscenze scientifiche e tecnologiche come competenze di base». Gli obiettivi futuri del Sistema Educativo Europeo, che è stato concordato il 12 Febbraio 2001 dal Consiglio Educativo di Stoccolma, ha identificato la Matematica come una delle materie più importanti. L'obiettivo è l'incremento dell'interesse alla matematica che da pochi anni da impulso ai giovani per intraprendere la carriera matematica.

La tipologia di studenti, che potrà essere in grado di contribuire alla ricerca in questi campi, sono probabilmente studenti che hanno talento in questi campi e più specificatamente in matematica.
Alcune attività indirizzate all'obiettivo appena detto hanno già preso piede in alcuni paesi. L'idea di Matheu era di mettere insieme esperti di paesi partner, con conoscenze di base ed esperienze comuni e sviluppare insieme un sistema di lavoro comune per tutti i 9 membri dei paesi della EU.

Gli studenti che hanno talento in matematica sono stati identificati nei primi stages. Il metodo usuto per l'identificazione di ogni studente si è basato sulle competizioni, ma è pensabile che molti studenti che hanno talento in matematica non sono stati ancora scoperti perché non hanno partecipato alle competizioni o perché non erano tra i primi dieci durante lo svolgimeto delle competizioni oppure non si sono dimostrati capaci di lavorare in tempi limitati.
I paesi Europei hanno trovato il modo di tenere i loro cervelli in Europa. Per fare ciò, matenatici, educatori hanno lavorato insieme in un programma che vuole cambiare modo di governare, università e fondazioni in favore del supporto dell'incremento di talenti matematici in Europa e pensa che i cervelli matematici non debbano andare fuori dalla Comunità Europea. I talenti hanno bisgno di attenzione, affezione, supporto, formazione e identificazione. I partner del progetto Matheu hanno tentato una strada per l'offerta di soluzioni per tutte le sfide dello sviluppo di studenti Europei attraverso i loro insegnanti, amministratori, educatori e altre corpoRapportoni – istituzioni – corpi governativi, attraverso Internet.

1.4 – L'obiettivo del progetto/manuale:
In alcune scuole Europee il curriculum matematico è progettato per servire mediamente i bisogni degli studenti, con talento e cmpetenza matematica, che non sono stati identificati e sostenuti potenzialmente. L'obiettivo di Matheu è stato quello di sviluppare metodi, che possano aiutare gli educatori a identificare e motivare i talenti matematici al fine si sostenere il loro sviluppo all'interno della Comunità Europea senza alcuna discriminazione. MAtheu trae forza e stabilità dalla rete atraverso le Società Matematiche e le università nell'area Europea per sostenere i propri obiettivi così come per l'utilizzo delle nuove tecnologie, diffusione e sostenibilità per lo sviluppo delle strutture di cooperazione.

Le principali attività del Matheu includono:

- Analisi della flessibilità dei curricula che esistono nelle scuole europee con particolare attenzione ai paesi partner focalizzandosi su studenti con talento.
- Analisi dei metodi e degli strumenti usati nei paesi Europei per l'identificazione, motivazione e supporto di talenti matematici.

- Progetto di metodi e strumenti per l'identificazione potenziale di studenti sia nella scuole elementari che medie e formazione di insegnanti così che possano portare gli studenti ad esprimere i loro "talenti" in matematica (talenti come abilità ad affrontare e risolvere problemi e apprezzare il ruolo del pensiero matematico). Disegnare uno speciale metodo pedagogico e preparare materiali per lo sviluppo e la promozione di talenti nelle scuole Europee.
- Sviluppo di metodi e soluzioni e programmi per cambiare attitudini governative, università e fondazioni in modo da tenere I cervelli matematici in Europa.
- progetto di uno speciale sito web dedicato a questo progetto che sia capace di sostenere gli obiettivi del progetto stesso.

Principali risultati sono:

- Un manuale europeo con metodi e strumenti per l'identificazione, motivazione e supporto dei talenti matematici.
- Un programma informativo per governare, università e fondazioni.
- Un corso di formazione per gli insegnanti di scuola elementare e media per l'identificazione e lo sviluppo di talenti matematici.

Il progetto contribuisce al "brain gain-effect" per la comunità Europea e aiuta a perseguire gli obiettivi del Consiglio Educativo nell'Unione Europea così come concordato il 12 Febbraio 2001 a Stoccolma, dove si é stabilito che la matematica è una della materie più importanti.

1.5 – l’esperimento

Il principale proposito di questa valutazione era DimostRapportonere con un esperimento l’idea di livelli e la selezione di studenti attraverso uno speciale metodo. Per questa ragione invitiamo gli studenti dal capitolo due di procedere attraverso una speciale guida, e focalizzare i propri individuali obiettivi.

1.6 Organizzazzione del materiale

Una “scala” (di livello) in questo caso è un testo matematico, focalizzato in un tema specifico, che potrebbe essere utilizzato dagli insegnanti o dagli studenti nei loro lavori in classe. In realtà, la scala è una sequenza di problemi matematici, spiegazioni e domande per test da fare da soli, ordinati per lento ordine crescente di difficoltà. Dal lavoro sul test, gli studenti potrebbero accrescere le loro conoscenze per elevare il loro livello. Per questo, il nome “scala” viene da: piano per raggiungere il più alto livello, uno strumento per facilitare il processo di sottomissione delle differenti difficoltà. Utilizzando la scala gli studenti (ma anche i loro insegnanti) possono arricchire, appofonndire e testare la loro conoscenza su uno specifico tema matematico. La parte più bassa della scala è costruita con il materiale comune curriculare studiato in classe. Come primo “steps” si hanno problemi matematici, definizioni e spiegazioni, cenni informativi e altre eccezioni che il discente deve acquisire per raggiungere un elevato livello intellettivo. In relazione ad ogni individuale abilità gli studenti avanzeranno i.e. per “salire” le differenti altezze delle scale. Il grado di avanzamento scegtlierà gli studenti con più elevate abilità. Quindi, le scale aiuteranno anche ad identificare gli studenti che hanno talenti matematici.

Se la scala sarà ben definita e formata da problemi di grande interesse, attrarrà e motiverà gli studenti ad impegnare più tempo nella matematica, e a spendere energia nello studio della matematica.

È importante definire le scale in ogni modo, il livello di difficoltà cresce lentamente (una piccola distanza tra due consecutivi steps) e gli studenti saranno capaci di superare ogni steps senza l’aiuto dell’insegnante. La definizione e la spiegazione dovrebbero aiutare a che questo accada. La presenza di domande e problemi la cui soluzione è commentata in un secondo momento, lascerà controllare allo studente stesso se ha capito o meno.

In ultimo ma non il meno importante: offrendo scale a studenti e insegnanti non si richiede la struttura dell’intero processo educativo nella scuola. Questo è vicino ad alcuni tradizionali metodi educativi che sono stati abbandonati negli ultimi dieci anni. La perturbazione (se c’è) di un normale processo educativo sarà piccola, corrispondente, al livello di resistenza di ogni insegnante ed autorità scolastica.

1.7 Come può essere usato dagli insegnanti

L'obiettivo di questo libro è quello di aiutarti ad identificare e svilupparee i talenti matematici nelle loro classi. Gli studenti possono mostrare I loro talenti matematici in vario modo. Esistono diversi elenchi di caratteristiche di talenti matematici – vedi capitolo xxx. Lascia che menzioni adesso quello che è più comune nella maggior parte degli elenchi. Gli studenti che hanno talenti in matematica imparano e capiscono i concetti matematici velocemente, lavorano con sistema e accuratamente, identificano le relazioni matematiche, fanno connessioni tra concetti e procedure che hanno imparato, applicano la loro conoscenza a nuove e non familiari situazioni, comunicano le loro ragioni e giustificano i loro metodi, hanno un approccio creativo nella risoluzione dei problemi matematici, persistono nel completamento di un compito, costruiscono e risolvono alti livelli di astRapportone, hanno forti critiche. Questa varietà di caratteristiche crea difficoltà nel riconoscimento di talenti matematici. Nessuno studente dimostra tutte le caratteristiche sopra descritte, ma mostra un significativo numero delle stesse. L'identificazione non è e non potrà essere perfetta.
In questo libro, l'identificazione è fatta attraverso la risoluzione dei problemi.
Ci sono argomenti suddivisi per due fasce di età, dai 9 ai 14 anni e dai 15 ai 18. Ogni argomento è affrontato con problemi più complessi in maniera graduale. Alcuni di loro sono forniti con la relativa teoria, altri no.
I capitoli non possono essere utilizzati indifferentemente dal libro intero, occore cominciare dall'inizio e arrivare alla fine. Conoscere I propri studenti, sapere le loro conoscenze pregresse, le loro abilità e potenzialità, la loro indipendenza nella ricerca di informazioni rilevanti, etc. Tu sei la persona principale per la decisione di come utilizzare le scale di livello con i tuoi studenti, quali problemi usare, quali risorse raccontare loro, etc.
Lo strumento identificativo può essere usata durante l'intero anno, ma è consigliata l'identificazione all'inizio dell'anno scolastico.Questo può darti un'indicazione circa gli studenti che potranno esibire grandi abilità e talento matematico. Gli studenti che non fanno bene l'identificazione, non significa che non abbiano necessariamente talento matematico. Tutti i potenziali studenti possono lavorare con le scale. I progressi che fanno rispetto alla scale, indicheranno maggiori abilità e il livello che raggiungeranno all'interno di una scala, indicherà il talento matematico.

1.8 Come deve essere usato dagli studenti

Lo scopo di questo libro è quello di aiutare a sviluppare il tuo talento matematico. Alcuni di voi sono già identificati come talenti matematici durante varie occasioni – competizioni, applicazioni di conoscenze matematiche in altri campi di interesse etc, e altri no.
Attraverso insiemi di problemi gradualmente più complessi in diverse aree puoi sviluppare e identificare il tuo talento matematico. Tu sei tenuto a cominciare con il primo problema del capitolo. Se lo trovi troppo facile, puoi andare oltre e lavorare ai problemi che ti hanno impegnato di più. Per alcuni di loro avrai bisogno di acquisire ulteriori informazioni matematiche. Ci sono ricche informazioni su internet, nei libri utilizzati dai tuoi insegnanti e da altra gente intorno a te.
Perfino molti talenti matematici potranno avere difficoltà nella risoluzione dei problemi. Potrebbero essere problemi troppo difficili per te in quel momento. Ma lavorare sistematicamente e allargare il repertorio di conoscenze e abilità ti aiuterà ad risolvere i problemi che trovi irrisolvibili in quel momento.
Tutti gli autori vi augurano buona fortuna per lo sviluppo dei vostri talenti matematici e vi invita a risolvere I problemi del manuale divertendovi.

1.9 studi comparativi

Part I: Identificazione – Motivazione

Introduzione

In questa parte di studi comparativi cercheremo di dare un quadro chiaro di cosa sta succedendo in otto paesi Europei (Bulgaria, Cipro, Repubblica Ceca, Grecia, Germania, Italia, Romania e Inghilterra) per identificare, motivare e supportare i talenti matematici. Cominceremo dandovi alcuni dettagli di come le attività sono organizzate dalle Società Matematiche, e da Math Unions, le Università e di come i membri dei paesi partecipano al progetto.

Cipro
La didattica matematica a Cipro è in crescita. C'è un grande interesse tra gli studenti di Matematica di Cipro che identifica e motiva gli studenti attraverso le competizioni. Gli studenti stanno cercando duramente di entrare nei gruppi nazionali. La Math Society (CMS) di Cipro sostiene gli studenti con pubblicazioni, prepaRapportone di programmi e organizzando la scuola di Matematica estiva.

La società Matematica di Cipro, che fù fondata nel 1983, ha lo scopo di promuovere la didattica matematica e le scienze. La CMS e un'organizzazzione no-profit e i suoi membri sono volontari. La CMS (Cipro Math Society) conta più di 600 membri. Per promuovere i propri scopi, CMS organizza competizioni matematiche tra gli studenti di Cipro. Il CMS organizza annualmente conferenze matematiche e seminari.

A Cipro per identificare i talenti matematici vengono utilizzate: 1. Competizioni cittadine nelle città di Nicosia, Limassol, Larnaca e Ammohostos, Paphos; 2. Competizioni nazionali per il ginnasio e il Liceo e esami di selezione; 3. Olimpiadi nazionali matematiche dal quarto al dodicesimo grado.

Per motivare, Cipro, organizza ceremonie per il National Teams per 1.BMO, 2.JBMO, 3.IMO, 4. International Contest per la scuola primaria.

Bulgaria

Le Istituzioni Matematiche e Informatiche (IMI) in Bulgaria organizzano ricerche in Matematica pura e applicata e Informatica. In accordo anche con iniziative del settore educativo per la prepaRapportone di specialisti altamente qualificati in tutte le più importanti branche della Matematica e dell'Informatica. L'Istituto di Matematica e Informatica (IMI) comprende circa 180 persone. 130 delle quali hanno conseguito una laurea scientifica. (Doctor di Sciences). Un terzo dei quali è temporaneamente all'estero per altre ricerche e istituzioni educative in altre parti del mondo. L'Istituto di Matematica e Informatica (IMI) promuove la scienza e cerca di attirare giovani talenti ad intraprendere carriere scientifiche. Inoltre l'Istituto ha una chiara visione per l'identificazione dei talenti matematici.

L'Unione dei matematici Bulgari gioca un ruolo importante nelle Olimpiadi matematiche (sia regionali che internazionali). L'Unione prepara gli studenti con letture e organizza seminari nelle città di tutta la Bulgaria. Si cerca di identificare e portare i talenti matematici attraverso lavori individuali, con attività come escursioni, pomeriggi dedicati alla matematica, giornate di matematica e competizioni. In Bulgaria i migliori studenti sanno che possono studiare nelle migliori Università americane. Questa è una grande motivazione e la maggior parte di loro dà il meglio durante le competizioni. La scuola, gli insegnanti e i genitori hanno un'idea molto alta di chi prende parte a questi eventi. Sfortunatamente l'Europa non è paricolarmente favorevole ai talenti matematici in quanto l'america assorbe tutti i talenti del mondo. Se uno studentessa in Francia per studiare avrà bisogno di sostenere le proprie spese, invece in america le avrebbe pagate.

L'identificazione dei talenti in Bulgaria è basata su: TV, Internet e giornali, 2. Competizioni tra scuole matematiche (città, inter-città), 3.Competizioni Nazionali (Inverno, Primavera, 'Atanas Radev", 'Sly Peter", 'Ivan Salabashev', 'Akad Kiril Popov', 'Peter Beron', 'Chernorizec Hrabar', Scuole di lingua, Tornei Matematici (Sdiia, Pazardjic, Kardiali), 4.Olimpiadi Nazionali (School Round, City Round, Regional Round, National Round, 5. Selection per IMO (Competizioni Nazionali, Competizioni Internazionali, Convegni dell'Union Bulgarian Mathematician, Scuole Estive), 6. Competizioni Internazionali, 7. Balkan Olimpiade di Matematica (Junior level, Senior level), 8.Tornei di Città, 9. Competizioni Kangaroo (French Kangaroo, Australian Kangaroo), 10. International Mathematics Olimpiade (Junior level, Senior level).

La Bulgaria per motivare gli studenti li segue nelle partecipazioni 1. National Teams fper: i. Balkan Mathematics Olimpiadi – Junior, ii. IMO – Junior e Senior levels, 2. KANGAROO Contests – Europei, 3. Tornei di Città, 4. Studi in Europa, USA, Canada etc, 5. Cerimonie premi. Ci sono anche Società che sostengono l'organizzazzione e i processi formativi in tre stages: 1) Forza l'interesse degli studenti; 2) Crea un alto livello di conoscenze e competenze; 3) Sviluppa le abilità degli studenti. L'organizzazzione dei processi formativi dipende dall'interesse degli studenti e dalle loro abilità. La personalità dell'insegnante che forma è una motivazione importante per gli studenti. Tra le più forti motivazioni c'è la possibilità di essere uno studente universitario senza sostenere l'esame di ammissione. I talenti Bulgari hanno un grande prestigio. Infine una forte motivazione degli studenti Bulgari è il sostegno dei genitori.

Per gli studenti la Bulgaria ha deciso che 1. lavori individuali per studenti promettenti durante le ore ordinarie in classe, 2.eventi extra-curriculari con attività matematiche come escursioni, pomeriggi matematici, contesti matematici 3. Circoli scolasctici matematici, 4. circoli matematici cittadini come gruppi Ordinari e Speciali. 5. Circoli brevi matematici come "Green, Summer, Winter e Sea", 6. "Circoli Extramural" matematici che sostengono la formazione degli studenti con problemi, soluzioni, valutazioni e commenti, 7. Corrispondenza di prepaRapportoni tra Problemi e Letteratura. 8. Letture di speciali argomenti matematici attraverso l'invito di professori universitari. 9. Conferenza Primaverile dell'Unione Bulgara di Matematici 10. Istituto scolastico di Matematica e Informatica con l'obiettivo: PrepaRapportone di Saggi Matematici da studenti che includono "School Round, City Round, Regional Round, National Round".
Inoltre un ulteriore scopo della scuola di Matematica e informatica è la Selezione per il Centro di Eccellenza di Educazione di Boston in USA.

- **<u>Repubblica Ceca</u>**

La Repubblica Ceca organizza molte competizioni matematiche e prende parte alle Olimpiadi matematiche. In particolare per il 1° stage (dalla quarta classe e sperimentale dalla terza classe) Olimpiadi Matematiche e Kangaroo. Per il 2° stage (dalla sesta classe di BS (11 anni) C'è L'Olimpiade Matematica, Kangaroo, altre competizioni (Dejte Ulavydohromody, Pythagoridda, Prazsled strela, Dopplerova vlua) e molte competizioni locali (a scuola, in città). Per il 3° stage (dalla prima classe di SS (15 anni) Olimpiade Matematica e Kangaroo per il 4° stage (dal primo anno di studi universitari 19 anni). Le Categorie per le Olimpiadi Matematiche sono: 1. Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9 – per BS, 2. C- per la prima classe di SS, 3. B - per la seconda classe di SS, 4. A - per la terza e quarta classe di SS, 5. Tutti insieme circa 20 – 30 allievi, 6. Diversi tempi. Le categorie per Kangaroo sono 1. Klobaluek-quarta e quinta classe di BS, 2. Benjamin - la sesta e settima classe di BS, 3. Kadet- l'ottava e nona classe di BS, 4. Junior - la prima e la seconda classe di SS, 5. Student - La terza e quarta classe di SS, 6. Tutti insiene sono circa 300,000 allievi partecipanti. Tutte le attività sono sostenute dallo stato.

Le più ricorrenti forme di sostentamento organizzate nella Repubblica Ceca, sono per il primo stage, (dalla quarta classe di BS 9 anni) (sperimentale dalla terza) sono classi speciali con insegnamento esteso alle lingue straniere o alle matematiche dopo aver sostenuto un'esame speciale e un "Correpondence seminars" (competizioni). Per il secondo stages, sono organizzati dalla sesta classe di BS (11 anni) alle classi con insegnamenti estesi, in special modo per la lingua straniera o matematica (o fisica) (dopo uno speciale esame), Correspondence seminari, campi estivi per insegnamenti di matematica e fisica, lingue straniere, sports. La Repubblica Ceca per il terzo stage (dalla prima classe di SS, (15 anni) organizza speciali classi con insegnamenti estesi alla lingua straniera e matematica o altre materie (fisica, chimica, informatica, sport speciali, e arti), Seminari per Corrispondenza, SOC in molte branche come Olimpiadi, Prepazione di competizioni per allievi di BS e CLII. Per il quarto stage, dal primo anno di studi universitari (19 anni) lo staff organizza speciali facoltà di matematica e fisica, SVOC in molte branche (come OU SS), PrepaRapportone competizioni per allievi di BS e SS: Infine, per il quinto stage (dal Phd) (generalmente intorno ai 24 anni) la Repubblica Ceca organizza PhD studi e prepara competizioni per allievi di BS e SS.

- **<u>Germania</u>**

Le Università di Duisburg e Essen stanno cercando di interessare gli studenti organizzando workshops e altre attività ma il numero degli studenti di matematica sta diminuendo fino al punto di non avere organizzazzioni professionali che possano promuovere i talenti matematici.

La Germania utilizza le Competizioni Matematiche per identificare i talenti matematici. Il primo è il "Bundeswettsewers Mailmatir" che si svolge in tre tempi.
Il primo tempo include 4 "homework" (1-Marzo→1-Giugno), il secondo tempo include 4 "homework" (1-Giugno→1-Settembre) e il terzo tempo include il colloquio. Nel 2003 c'erano 1146 participanti, 90% in classi 9-13.
"Bundeswettsewers Mailmatir" è organizzato dall "Vertin Bildung e Begabung e.v." ed è sostenuto dal Ministero di Educazione e Ricerca.
In Germania le olimpiadi matematiche (Univ. Rostoor) esistono dal 1994. Ci sono anche altre competizioni come "Arbeitsgemeisdaft des bundeswite Sdilerwettscwerse & Volrswapastiltang". Dal 2003 ci sono 14 progetti nel programma "Verbeslerng des Mailmatir-unlimcsrles". La Germania, per motivare gli studenti dà diverse valutazioni, che sono: I, II, III, A, No.

Per sostenere i talenti all'università viene assegnato uno stipendio per gli studenti eccellenti (in tutte le aree). Ci sono fondazioni private che sostengono i talenti matematici.

- **<u>Grecia</u>**

Non ci sono scuole per i talenti matematici in Grecia. Alcune scuole sono state chiuse 20 anni fa e l'Unione Europea non incoraggia più queste pratiche. La Società Matematica Ellenica offre molti aiuti per i talenti matematici. La Società Matematica Ellenica organizza molte attività come seminari, competizioni e pubblicazioni per preparare gli studenti alle olimpiadi internazionali. Tutte le attività della società sono sostenute dal ministero dell'Educazione.

Ancora, un grande svantaggio è quello dell'esame di ammissione. Tutti studiano duramente per entrare all'università e non c'è tempo per sforzi ulteriori. La società matematica distribuisce un giornale ma questo giornale non è veramente specifico per i "cervelli matematici". In Grecia ci sono molti studenti bravi che non hanno mai preso parte a competizioni matematiche perché credono che queste portano via molto tempo.

La maggior parte degli studenti che ottengono medaglie, diventano finalmente Matematici. In Grecia la Società Matematica organizza competizioni con lo scopo di identificare i migliori studenti in matematica. Queste competizioni si svolgono come segue: 1.Thales. Questa competizione comincia alla fine di Ottobre, a livello locale. È aperta a tutti gli studenti volenterosi, dal secondo Ginnasio (12 anni) all'ultimo anno di scuola (17 anni); ci sono domande diverse per ogni classe. IL Syllabus include quello che gli studenti hanno imparato in classe. Approssimativamente 15000 studenti hanno partecipato negli anni 2002/3. 2. Euclid. Questa competizione si svolge a metà Dicembre ad Atene. La partecipazione dipende dal grado della competizione di Thales. Questo grado è stabilito dall'Organizzazione, a seconda dei risultati dei partecipanti. I partecipanti DimostRapportoningono dal secondo Ginnasio (12 anni) fino all'ultimo anno scolastico (17 anni): ci sono diverse domande per ogni classe. Il Syllabus include quello che gli studenti hanno imparato nei precedenti tre mesi scolastici. Approssimativamente 1600 studenti hanno partecipato negli anni 2002/3. 3.· Archimedes. Questa competizione si svolge all'inizio di Febbraio, ad Atene. La partecipazione si ottiene tramite invito in accordo al successo in Euclid. Questa competizione è aperta a tutti i giovani studenti del Ginnasio e del Liceo. Il Syllabus include le stesse cose di IMO. 300 studenti hanno preso parte nel 2002/3. 4) Competizioni come Informatica (http://www.epy.gr) e due competizioni, utilizzando Internet nella competizione finale. Possiamo aggiungere la partecipazione a BOI e IOI.

In Grecia la Hellenic Mathematics Society per motivare gli studenti dà valutazioni ad ogni esame. In special modo, più di 300 studenti per classe sono stati valutati, tramite competizioni organizzate localmente. Circa 50 o 60 studenti per classe hanno avuto una valutazione per il progetto Euclid. 25 gli studenti del Ginnasio e 25 studenti del liceo hanno ricevuto valutazioni per la competizione Archimede. Inoltre circa 25 giovani e 25 vecchi partecipano a formazioni e competizioni interne. Il BMO e IMO gruppi sono selezionati da questi gruppi.

La Hellenic Mathematics Society cerca di informare, incoraggiare e sostenere gli studenti tramite scuole e locali autorità educative per partecipare alle competizioni. La partecipazione a Euclid è fatta tramite invito secondo il successo in Euclid. Sfortunatamente gli studenti in grecia si auto-preparano.

- **Italia**

L'Università di Palermo, in cooperazionie con l'Università di Pisa, organizza competizioni matematiche regionali per identificare studenti che mostrano talenti matematici. Queste competizioni sono: 1.Competizioni Matematiche provinciali si tengono a Palermo e riguardano studenti di età compresa tra 11-13 anni. 2. Competizioni Matematiche a livello nazionale sono organizzate dall'Università di Milano (Lettera Pristem: Palermo-Milan) e dall'Università di Pisa.
Particolare attenzione viene posta : 1. Il ruolo dei processi di divulgazione della conoscenza in situazioni di insegnamento/aprendimeno. 2. La costruzione di particolari situazioni didattiche che possano seguire il precedente processo. 3. La possibilità di essere capaci alla socializzazione. 4. La possibilità di essere capaci a divulgare procedure, schemi e ragionamenti, strategie decisive di situazioni/problemi.
L'italia, per sostenere studenti, fa quanto segue: I vincitori delle competizioni matematiche per le 'Scuole superiori' (16-18) sono utilizzati come Tutor nelle competizioni matematiche delle scuole medie inferiori (11-13). Inoltre esistono siti web dove si trovano problemi e soluzioni degli stessi e molte pubblicazioni.

- **Romania**

In Romania esiste una lunga tradizione nella formazione di insegnanti altamente qualificati per il sistema educativo pre-universitario, attraverso la formazione continua degli insegnanti. Un gruppo di lavoro (Centro di Eccellenza in Matematica) è coinvolto nella formazione di talenti nelle scuole superiori e univesrsità per le competizioni matematiche (sia regionali che nazionali).
L'obiettivo della Romanian Math Society, che fu fondata nel 1910 e si compone di più di 10.000 membri, è sostenere la comunitàà matematica in Romania. Dal 1895 la RMS distribuisce mensilmente un giornale di cultura matematica indirizzato ai giovani (Gazette Matematica). Questo giornale, da più di 100 anni, ha contribuito sostanzialmente allo sviluppo dell'educazione matematica in Romania. Il giornale è indirizzato a studenti e insegnanti che sono interessati alla Matematica e pubblica documenti matematici, materie dalle competizioni e dagli esami matematici delle Olimpiadi. La Società in questo momento è in disaccordo con il ministero dell'Educazione in riferimento al regolamento delle Olimpiadi Matematiche. Il ministro è più interessato al numero di premi rilasciati piuttosto che allo spirito che gli studenti hanno nell'affrontare la competizione stessa
La Società cerca di attrarre e motivare gli studenti allo studio della matematica. In Romania gli studenti stanno lasciato i paesi per andare negli Stati Uniti (fuga di cervelli). 10 anni fa gli studenti avevano l'abitudine di andare in Germania ma per la legislazione, il permesso di lavoro è stato un

grande inconveniente. Gli studenti potrebbero andare in Europa per studiare. Dopo aver completato il proprio PhD, ritornano in Romania dove non trovano lavoro. Gli Stati Uniti, avendo classificato le scuole in Romania, accettano i loror migliori studenti nelle loro migliori scuole ed Università. La MOE ha deciso di diminuire i premi nelle Olimpiadi nazionali e questo ha fatto diminuire la motivazione non solo nei partecipanti alle Olimpiadi, ma nella matematica stessa. La Romania ha una lunga tradizione nella formazione e selezione dei talenti matematici. Il record della prima competizione della scuola primaria fu raggiunto dagli studenti nel 1885. Nel 1897 il primo tentativo fu fatto per organizzare una gara nazionale matematica. Nel 1902 l'annuale gara "Gazeta Matematica" fu fatta per e-mail. Sette anni dopo, i concorrenti (selezionati tra i migliori risolutori di problemi) fecero un esame scritto e orale. Nel 1949: la "National Mathematics Olimpiad" fu creata e organizzata da RMS e dal Ministro dell'Educazione. Adesso si svolgono molte competizioni in Romania. Ci sono: Mathematics Olimpiade per tutti i livelli scolastici (primario, secondario, e scuole di specializzazzione), School Round, City Round, District (County) Round, Final (National) Round. 550-600 studenti (Forms 7-12) si qualifica ogni anno per il Final Round. Inoltre si svolge una competizione annuale "Gazeta Matematica" organizzata ogni estate per i migliori risolutori di problemi. Ci sono anche Competizioni Internazionali come JBMO, BMO, IMO. Un Team selezionato si forma durante il Final Round delle "National Mathematics Olimpiad".

Inoltre ci sono speciali stages di formazione, Kangaroo, Intercounty Matematiche Competizioni (organizzati durante l'anno accademico, la maggior parte dei quali tra il County Round e il Final Round delle National Mathematics Olimpiade). I più importanti dei quali sono: "Gh. Titeica" , "Gr. C. Moisil", "Tr. Lalescu" e "L. Duican".

Il più importante motivo per gli studenti è la prospettiva di studiare negli Stati Uniti. Ci sono anche altri motivi per gli studenti che mostrano talento in matematica, ogni gara ha una premiazione. La prima competizione per gli studenti di scuola primaria fu nel 1885 quando furono esaminati 70 partecipanti, 9 ragazzi, 2 ragazze furono premiati. Ai giorni nostri, c'è una cerimonia di premiazione al Final Round di NMO. I premi sono assegnati dal Ministero dell'Educazione, il County Authorities dove NMO è organizzato, la Romanian Mathematics Society, sponsors etc. La selezione del JBMO, BMO e IMO estesa al gruppo è anche un altra importante motivazione per gli studenti della Romania. A livello regionale sono premiati da RMS, e sponsors locali. I vincitori di medaglie a JBMO, BMO, IMO sono premiati durante una cerimonia speciale dal Ministro dell'Educazione, il Primo Ministro o il Presidente della Romania. Ai vincitori sono offerti viaggi all'estero.

La Romania sta cercando di sostenere I talenti matematici da molti anni. Per esempio, sono stati pubblicate le prime stampe di Scientific Recreations: "matematica; fisica; chimica etc." con problemi, note, e articoli dal 1883.

La prima pubblicazione della Gazeta Matematica, il più rispettabile giornale Rumeno, dedicato alla matematica elementare fu pubblicato nel 1895; è probabilmrente responsabile di aver creato, migliorato, e mantenuto un elevato interesse per i talenti matematici. Pubblica 12 documenti l'anno senza mai interruzione nel corso degli anni. Le prime Olimpiadi Matematiche Internazionali (IMO) si tennero nel 1959 a Bucarest, nel 1999 le quarantesime si tennero anche a Bucarest. Durante gli anni 1971-1973 classi eccellenti di: matematica, fisica, chimica e biologia sono state organizzate dal ministero dell'Educazione, Mircea Malita. La rete Nazionale dei Centri di Eccellenza è stata fondata nel 2001. Il Centro di Eccellenza nella regione di Maramures è stato fondato nell'Ottobre 2002. Inoltre la rivista 'LUCRARILE SEMINATULUI DE CREATIVITATE MATEMATICA' che significa "Seminario di Matematica Creativa", ha articoli di studenti con articoli, note scritte dagli studenti, o dagli insegnanti di scuole medie e superiori, e insegnanti universitari. In questa rivista ci sono anche articoli dedicati alla soluzione di problemi euristici e la maggior parte dei quali preposti per lo sviluppo delle abilità inventive attraverso la risoluzione di problemi; questo apre il lavoro di ricerca.
Il Centro di Eccellenza in Matematica (NUBM) fu fondato nell'ottobre 1991 e da allora in poi si sono tenuti seminari di Metmatica Creativa. Nel 2000 è stao fondato "Il Centro per la prepaRapportone di

studenti dotati". I principali obiettivi e scopi sono: 1. Lavorare con studenti universitari, 2. Identificare e portare talenti nelle scuole superiori per le competizioni matematiche come "National Mathematics Olimpiad", "Inter-county Mathematics Contests", "American Math" Competizioni, 3. Pubblicare gli ultimi materiali nella rivista "Seminarul de Creativitate Matematica", problemi e altri libri matematici, 4. Organizzare le Competizioni Matematiche inter regionali "Gr. C. Moisoil": problemi, proposti e coordinazione degli stessi 5. Aiutare l'organizzazzione dei campi invernali matematici: letture e formazione degli studenti. 6. Istruire gli studenti universitari per le Competizioni Matematiche ("Tr. Lalescu" math.comp' International Maths Competition: IMC – 2001 (Prague); 2002 (Warsaw)).

- **<u>Inghilterra</u>**

L'Inghilterra organizza competizioni matematiche per identificare talenti matematici, come 1. "Junior Challenge" Anni 7 e 8, (12 e 13 anni). Agli studenti viene dato un foglio contenente 25 domande a risposte multiple per 60 minuti. A questa competizione partecipano 240.000 candidati da più di 3.200 scuole. 2. La tappa successiva al "Junior Olimpiad" sono le "Junior Mathematics Olimpiad". Questo evento si tiene generalmente il primo e il secondo martedì di Giugno. 1.204 dei migliori studenti, nel 2003, sono stati invitati a prendere parte alle "Junior Mathematics Olimpiad". Il test delle "Junior Mathematics Olimpiad" è un foglio di due sezioni e l'esame dura due ore: Section A è composto da 10 domande ed agli allievi è richiesto di dare una sola risposta. Section B si compone di sei quesiti per i quali sono richieste risposte scritte. "Intermediate Challenge", (anni 10, 11 e 12 e 14, 15 e 16). Gli studenti hanno a disposizione 60 minuti per rispondere a 25 domande a risposta multipla. Più di 207,000 candidati partecipano, DimostRapportoninienti da più di 2.700 scuole. 4. La successiva competizione a "Intermediate Challenge" sono Europei Kangaroo e "IMOK Olimpiade". 1.000 allievi per ognuno di 9, 10 e 11 anni (E&W), S2, S3 e S4 (Scot.),e 10, 11 e 12 anni (N.I.) sono invitati a partecipare a Europei Kangaroo. Questo esame ha la durata di un'ora e si compone di 25 domande a risposta multipla date dagli studenti per essere ammessi alle DimostRapportoni Europee. Nel 2003 il Kangaroo Europeo si è tenuto Martedi' 20 Marzo. Tutti i partecipanti hanno ricevuto un Certificato di partecipazione o Certificato di merito 5. ("Senior Challenge", anni 13 e 14, anni 17 e 18). Agli studenti vengono dati 90 minuti e un foglio contenente 25 domande a risposta multipla. Più di 60.000 partecipanti DimostRapportoninienti da più di 1.500 scuole. 6. "British Mathematics" (1° Round). Più di 1.000 che conseguono un alto punteggio saranno inviatati a partecipare al "British Mathematics" (1° Round). Questo può condurre a BMO2. Sei partecipanti faranno il "International Mathematics Olimpiad". 7. BMO2. 8. "International Mathematics Olimpiad", (solo sei partecipanti).
La motivazione all'educazione matematica in Inghilterra è connessa con la partecipazione a gruppi nazionali. Come, ad esempio, "Junior Challenge" Anni 7 e 8, (anni 12 e 13), chi ottiene un risultato alto è invitato a partecipare al "Junior Olimpiade" (UK JMC).
Tutti quelli che partecipano alle "Junior Matematiche Olimpiadi" ricevono un certificato: I primi 25% ricevono Certificato di Distinzione e il rimanente riceve Certificato di Partecipazione. Medaglie sono vinte dai migliori candidati e i migliori 50 ricevono anche un premio. Chi ricece alte votazioni in "Intermediate Challenge", (anni 10, 11 e 12 anni 14, 15 e 16) è invitato a partecipare al seguente round: "Intermediate Matematica Olimpiade" e Kangaroo (IMOK). Tutti quelli che partecipano a Europei Kangaroo ricevono un Certificato di Partecipazione o Certificato di Merito. Più di 1,000 altamente valutati in "Senior Challenge", (anni 13 e 14, anni 17 e 18) sono invitati a partecipare al "British Mathematics" (1°Round). Con valutazioni alte al "British Mathematics" (1° Round) si può partecipare al BMO2, da qui, sei partecipanti prenderano parte All'Olimpiade Internazionale di Matematica.

Nella tavola 5 presentiamo le attività di Identificazione, Motivazione e Supporto che ogni paese utilizza per l'educazione matematica. Daremoi nomi delle competizioni e Olimpiadi, tempo, competitori, classi di studenti, nome dei premi, e nome dei Certificati di Partecipazione etc.

<u>Risultati - Commenti</u>

I risultati parlano da soli e ci fanno osservare che altri paesi hanno maggiori punti forti per identificare, sostenere e motivare gli studenti che presentano talenti matematici e utilizzano più competizioni possibili. Preparano i loro studenti per le competizioni e creano le migliori competizioni che possono per promuoverle.

In particolare, il processo di identificazione è dato a Cipro utilizzando 1. Competizioni cittadine, 2 Competizioni Nazionali; 3 Olimpiadi Nazionali Matematiche. In Bulgaria si tengono molte competizioni 1. Competizioni in TV ed Internet, 2. Competizioni matematiche scolastiche, 3. Competizioni Nazionali, 4 Olimpiadi Nazionali, 5.Selectioni per IMO, 6. Competizioni Internationali, 7. Olimpiadi matematiche dei Balcani, , 8. Tornei di Città, 9. Kangaroo Competizioni, 10. Olimpiadi Internazionali Matematiche. La Repubblica Ceca utilizza 1Olimpiadi Matematiche, 2.Kangaroo,3. Locali competizioni (a scuola, nelle città). In Germania, l'identificazione dei migliori studenti in matematica è fatta attraverso 1. Competizioni Matematiche 2. Olimpiadi Matematiche. In Grecia e in Italia si tengono Competizioni Matematiche e in Romania l'identificazione dei migliori studenti in matematica è data da 1. competizioni Matematiche, 2. Olimpiadi Matematiche. Infine, in Inghilterra l'identificazione dei migliori studenti è data da 1. Competizioni Matematiche, 2 Olimpiadi Matematiche. La motivazione degli allievi nella formazione matematica è connessa alla partecipazione in gruppi nazionali come ad esempio 1..BMO, 2.JBMO, 3.IMO, L'opportunità di studiare in altri paesi attraverso la scolarizzazione (specialmente negli Stati Uniti, in Canada, in Europa), Cerimonia dei premi, il Certificato di Partecipazione o Certificato di Merito. Esiste anche un premio prestigioso ottenuto dai talenti superiori e dalle loro famiglie.

Le città cercano di sostenere i propri talenti in molti modi. Per esempio la Bulgaria assegna lavori individuali a studenti promettenti durante le ore ordinarie di matematica in classe. C'è una speciale Scuola dove si tengono attività matematiche. Inoltre, ci sono tre circoli scolastici matematici, circoli cittadini matematici, Piccoli Circoli Matematici, e "Extramural" Circoli Matematici. Provvede anche agli studenti attraverso PrepaRapportone per Corrispondenza e letture su temi specifici di matematica invitando insegnanti universitari e eminenti insegnanti. L'Unione Matematica Bulgara organizza convegni ed ha la scuola di Matematica e Informatica con l'obiettivo di Preparare le DimostRapportoni da parte degli studenti. Cipro ha un programma di prepaRapportone, e una Scuola Estiva di Matematica. Si occupa anche di fare pubblicare molto agli studenti. La Repubblica Ceca ha Classi Speciali con insegnamenti estesi alle lingue straniere e matematica (dopo un esame speciale). Ci sono classi con insegnamenti estesi alle lingue straniere o matematica o fisica dopo uno speciale esame e campi estivi con insegnamenti di matematica e fisica, lingue straniere, e sports. In più prepara competizioni per allievi di BS & SS.

In Grecia ci sono competizioni matematiche ma gli studenti sono ampiamente autodidatti. L'Italia provvede attraverso siti web e pubblicazioni. Infine, la Romania provvede attraverso molte pubblicazioni dedite alla matematica elementare; è la principale responsabile per quanto riguarda la creazione, la crescita di un alto interesse nell'attrarre talenti. Inoltre provvede a seminari sulla Matematica Creativa e dedica articoli alla risoluzione euristica di problemi e disegna lo sviluppo di abilità creative per la risoluzione di problemi e apre la strada ai lavori di ricerca. In Romania c'è un centro di "Centro di prepaRapportone di alunni dotati" 2001; un Centro di Eccellenza in Matematica i cui obiettivi e scopi sono: 1. Lavorare con studenti universitari di primo livello, 2. Identificare e portare talenti delle scuole superiori alle competizioni matematiche come le Olimpiadi Matematiche Nazionali, Competizioni Americane di Matematica, 3. pubblicare i materiali, problemi, libri, etc, 4. Organizzare Competizioni Matematiche all'interno del paese. 5. Aiutare l'organizzazzione dei Campi Invernali di Matematica: letture e formazione degli studenti e infine 6. Portare gli studenti Universitari alle competizioni matematiche.

Ma l'importante domanda è chi provvede al supporto economico dei talenti per tenere queste intelligenze in europa?

Parte II: Supporto di allievi con talento

In questo paragrafo presenteremo il supporto (1. Governo, Ministeri, 2. Instituzioni, Università, Fondazioni, 3. Società, 4. Supporto individuale, 5. Publicazioni/Riviste, 6. Autorità Locali 7. Attraverso corsi per insegnanti che formino gli allievi per affrontare le Competizioni Matematiche che possono essere dati da paesi (partners) che partecipano a questo progetto.

Bulgaria

Il supporto ai talenti matematici è dato da:

1. Governo – Il Ministero dell'educazione e delle Scienze paga solo i salari e le assicuRapportoni sociali degli staff nel "Centre for Students Technical e Scientific Creativity" (CSTSC).
2. Istituzioni (Università, Fondazioni, etc) – Le Università assistono con letture, aule e facilitazioni di lavori extra-curriculari. Le Fondazioni assistono con alcune piccole somme di denaro individuali e progetti connessi ai lavori con talenti matematici ("Bistra e Galina" in Russia, per esempio). Le Fondazioni come "St Ciril & St Methodius" e "Eureca" rilasciano premi ai migliori insegnanti che lavorano con talenti matematici. Alcune Compagnie private (come "Mobiltel", per esempio) provvedono al necessario sostentamento per quanto riguarda la biglietteria aerea per la Bulgaria.
3. Società – L'Unione dei Matematici Bulgari (UBM) si focalizza su ogni tipo di sostegno per I talenti matematici – denaro, letture, aule, agevolazioni. L'Unione degli Scienziati (per esempio - in Russia) assiste nella pubblicazione di documenti scientifici di alcuni insegnanti che intraprendono lavori con talenti matematici.
4. Supporto individuale – dai genitori dei talenti e da alcune "former talented students" che vivono all'estero o in Bulgaria.
5. Publicazioni/riviste – organizzzano corsi a premi (denaro, libri, campi estivi, etc.) per i migliori studenti.
6. Autorità Locali - Il Governo locale paga il denaro necessario per eletticità, acqua e riscaldamento per il "CSTSC". La "Schools Boards di Trustees" (SBT) aiuta con alcuni seminari di eminenti insegnanti per i lavori extra-curriculari e molti campi di prepaRapportoni estivi, invernali, autunnali per talenti.
7. Attraverso la formazione di insegnanti - UBM e alcuni SBT aiutano con seminari di eminenti insegnanti per lavori extra-curriculari di studenti.

- **Cipro**

Il sostegno agli studenti è dato da:

1. Il Governo (Ministero di Educazione e Cultura) attraverso il pre-servizio della formazione degli insegnanti di matematica. Il pre-servizio di programma di formazione aiuta gli insegnanti a identificare e dare un supporto basilare ai talenti nelle loro classi.
2. la "Cipro Mathematics Society" (CMS):

i) In collaboRapportone con il Ministero dell'educazione e Cultura (sostegno economico) CMS provvede alla maggior parte delle lezioni extracurriculari per i talenti.

ii) Organizza la scuola matematica estiva. Questa scuola provvede agli opportuni insegnamenti per i talenti matematici ed ad attività basate sullo sviluppo delle loro potenzialità.

- **Republica Ceca**

Il supporto agli studenti è dato da:

1. Supporto materiale ed economico.

i) Ministero dell'Educazione, Gioventù e Sports.

iii) Unione di Matematici e Fisici Cechi

iv) Sponsors (in minima parte)
2) Supporto Organizzativo
i) Scuole
ii) Municipalità
iii) Individui
Tipi di supporto organizzativo:
PrepaRapportone di problemi e delle loro soluzioni
Correzione di soluzioni
Organizzazzione di competizioni a vario livello
Organizzazzione di corsi per talenti.
Organizzazzione di seminari

Germania
Il supporto di talenti è dato da:
1. Governo. Il ministero dell'Educazione e Ricerca (Bundesminsterium fuer Bildung und Forschung) sostiene finanziariamente i seguenti due principali eventi: (competizioni nationali).
i) Bundeswettbewerb Mathematik
ii) Jugend forscht.
Il "Studienstiftung des Deutschen Volkes" supporta principalmente studenti dell'Università ma anche eccezionalmente talenti frequenrtanti la scuola superiore.
2. Istituzioni. Generalmente le fondazioni offrono supporto agli studenti universitari. Il "Volkswagenstiftung" ha iniziato un programma "ImDimostRapportoniment Mathematics Education" nel 2001 che include 14 progetti in Didattica della Matematica.
Molte Università hanno cominciato programmi speciali e iniziative per rendere gli studi matematici più attraenti per gli studenti. Generalmente hanno carattere regionale come ad esempio i seguenti siti internet:
http://www.ma.tum.de (Technical University Muenchen)
http://www.uni-duisburg.de/FB11/SMS (Univeristy di Duisburg--Essen)
3. Società. La Società Matematica Tedesca (Deutsche Mailmatiker Vereinigung, DMV) provvede a documentazioni come "Begabtenfoerderung im Fach Mailmatik" che osserva la corrente attività dei talenti matematici, vedi www.mailmatik.de

4. Individuali. Basati su iniziative di insegnanti di matematica e studenti interessati a clubs locali che si sono stabiliti in molte scuole. Una lista di indirizzi si può trovare in www.mailmatik.de o alla fine di questa sezione.

Mint-EC
Verein mailmatisch-naturwissenschaftlicher Excellence-Centre an Schulen e.V. http://www.mint-ec.de
Arbeitsgemeinschaft der bundesweiten Schuelerwettbewerbe. Mailmatik-Olimpiadeen e. V. (Univ. Rostock)

Nach Bundesländern grsuperioripieren Übersichtskarte

06122 Halle	LItaliaesweite Korrespondenzzirkel der mailmatisch-naturwissenschaftlichen Spezialschulen	
07743 Jena	Arbeitsgrsuperioripe zur Förderung mailmatischer Begabungen im Grundschulalter - Schülerzirkel "Die Mailasse"	website
07743 Jena	Carl-Zeiss-Gymnasium mit math.-naturw.-techn. Spezialklassen	website
07443 Jena	Mailmatik-Olimpiadee	website
09120 Chemnitz	Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung mailmatisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler	website

10099 Berlin	Mailmatische Spezialklasse an der Italiareas-Oberschule in Zusammenarbeit mit der Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mailmatik	website
10117 Berlin	Spezialklasse an der Italiareas-Oberschule (Senatsverwaltung für Schule, Jugend und Sport)	
10117 Berlin	KoopeRapportin der Humboldt-Universität mit Oberschulen (Senatsverwaltung für Schule, Jugend und Sport)	
14469 Potsdam	Mailmatikklub des Treffpunkts Freizeit Potsdam	
14974 Potsdam	Pädagogisches LItaliaesinstitut BrItaliaenburg (PLIB)	
15711 Königs Wusterhausen	Friedrich-Wilhelm-Gymnasium	
15711 Königs Wusterhausen	Schülerfreizeitzentrum der JUH e.V.	
17235 Neustrelitz	Gymnasium Carolinum	
17491 Greifswald	AlexItaliaer-von-Humboldt-Gymnasium	
18051 Rostock	Korrespondenzzirkel Mailmatik an der Universität	
18051 Rostock	Kreativität und Beharrlichkeit-Zauberworte für die Mailmatik	website
18528 Bergen	Ernst-Moritz-Arndt-Gymnasium	
20146 Hamburg	Schülerzirkel Mailmatik	
20146 Hamburg	Förderkurse für mailmatisch besonders befähigte Schüler (Hamburger Modell	website
20146 Hamburg	Mailzirkel zur Förderung mailmatisch interessierter Grundschulkinder	
20146 Hamburg	Besondere mailmatische Begabung im Grundschulalter - ein Forschungs- und Förderprojekt	
21629 Neu Wulmstorf	Talentförderung Mailmatik am Gymnasium Neu Wulmstorf	website
27570 Bremerhaven	Schülerzirkel Mailmatik	
28215 Bremen	Schülerzirkel Mailmatik	
34281 Gudensberg	Synapse	
34369 Hdigeismar	primatha	
35578 Wetzlar	Zentrum für Mailmatik e.V.	website
37073 Göttingen	Mailmatischer Korrespondenzzirkel	website
38104 Braunschweig	CJD Jugenddorf - Chrisverticiherusschule BS	website
39114 Magdeburg	Korrespondenzzirkel des Olimpiadeekomitees für die Mailmatik-Olimpiadee in Sachsen-Anhalt	
39114 Magdeburg	Spezialistenlager (Wochenlehrgänge mit Vorträgen, Seminaren und Übungen)	
39126 Magdeburg	LItaliaesweite Korrespondenzzirkel der mailmatisch-naturwissenschaftlichen Spezialschulen	
41334 Nettetal	PIN Privates (Psychologisches Institut am Niederrhein)	
64625 Bensheim	Samstagsakademie	website
64625 Bensheim	Zentrum für Mailmatik e.V.	website

64625 Bensheim	MailTreff 3456	website
66119 Saarbrücken	Gymnasium am Schloss	
67663 Kaiserslautern	Fachbereich Mailmatik, Universität Kaiserslautern, Arbeitsgrsuperioripe Technomailmatik	
66763 Dillingen	Zentrum für Begabtenförderung - Technisch-Wissenschaftliches Gymnasium Dillingen	
70029 Stuttgart	Problem des Monats (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport BW)	website
79102 Freiburg	Freiburg-Seminar für Mailmatik und Naturwissenschaften	website
85579 Neubiberg	Begabtenförderung Mailmatik e.V.	
89017 Ulm	MINT	
97070 Würzburg	LItaliaeswettbewerb Mailmatik Bayern	
99867 Gotha	Mail-Club	

5. Publicazioni /Riviste: vedere www.mailmatik.de
6. Autorità locali: Non ci sono informazioni utili.
7. Attraverso la formazioni di insegnanti: non ci sono informazioni utili.

- **Italia**

Il supporto ai talenti è dato da:
1. Supporto materiale ed economico.

i) U.M.I. (Unione Matematica Italiana)
ii) Gruppi di ricerca in Didattica della matematica (nei Dipartimenti di Mailmatica delle Università italiane di: Torino, Genova, Trieste, Udine, Padova, Modena, Pisa, Siena, Roma, Bari, Catania, Palermo.
iii) P.RI.ST.EM., Progetto Ricerche Storiche E Metodologiche (Università "Bocconi" di Milano)
iv) G.R.I.M. (Gruppi di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche), Dipartimento di Matematica, Università di Palermo

- MATHESIS (Associazione Nazionale di Insegnanti di Matematica con sedi in molte città italiane);
- A.I.C.M. (Associazione Insegnanti e Cultori di Matematiche, Associazione Siciliana);
- Ministero dell'educazione;
- Autorità scolastiche regionali;
- Sponsors (in minima parte).

2. Supporto Organizzativo

i) Scuole
ii) Municipalità
iii) Individuali
iv) E tutti i gruppi menzionati in 1

Tipi di Supporto organizzativo:
i) PrepaRapportone di problemi e relativa soluzione
ii) Correzione di soluzioni.
iii) Organizzazzione di competizioni a vario livello.
iv) Organizzazzione di seminari
v) Organizzazzione di conferenze per studenti e insegnanti implicati nelle competizioni.
vi) Siti web con problemi e soluzioni:

1. http://www.collegiopiox.com/contents/home/gm_2004.htm (pagina di PRISTEM, Università Bocconi Milano.

2. http://olimpiadi.ing.unipi.it/ (pagina dell'UMI per le Olimpiadi di Matematica, ci sono anche riviste on-line per studenti con problemi e molte soluzioni per studenti italiani)
3. http://dipmat.math.unipa.it/~grim/aicm/index.htm (pagina di AICM nel sito web di GRIM, Palermo)

Giochi e Ricreazioni Matematiche

1. **Progetto di olimpiadi matematiche**

Tutte le novità concernenti le Olimpiadi Matematiche: forum, news, storia delle Olimpiadi. Lingua italiana.
http://olimpiadi.ing.unipi.it/

2. **Puzzles e giochi matematici**

Puzzles e i più conosciuti giochi, facilmente accessibili e ben illustrati. http://digilItaliaer.iol.it/enigmiegiochi/index.htm

3. **"Base cinque"**

Un lato divertente della matematica, edito da Gianfranco B. Una ricca collezione di quesiti matematici, Lingua Italiana.
http://digilItaliaer.iol.it/basecinque/index.htm

4. **Divertimento matematico**

Edito da Giovanni Pontani, insegnante di matematica e fisica. Domande e giochi, note storiche, curiosiotà, cose che fanno riconoscere ad un matematico la matematica. Lingua Italiana.
http://space.tin.it/clubnet/hlhmpo/
http://www.matematicadivertente.com/

5. **Matematica Magica**

Una collezione di giochi matematici ai quali ognuno può contribuire per migliorare le soluzioni e proporne di nuove.
http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/archive.html

6. **la pagina di Tangram**

http://www.worldtel.it/varie/giochi/tangram/tangram.html

7. Come comincia la sfida

http://digilItaliaer.iol.it/atlantide75/giochi.htm
Le informazioni per I siti web di educazione matematica, storia, competizioni, all'indirizzo: http://math.unipa.it/~grim/SITI.htm

- **Romania**

Il supporto agli studenti è dato da:
1. Governo. Supporto economico per organizzare le principali competizioni per i talenti. Olimpiadi nazionali matematiche. Il ministero dell'educazione ha uno speciale budget per sostenere la partecipazione di tutti gli studenti qualificati al round finale. Il ministero dell'educazione supporta anche tutte le spese che necessitano al Gruppo Rumeno IMO. Tutti i vincitori di IMO ottengono generalmente premi significativi (in denaro, viaggi all'estero, etc.) nel contesto di una speciale cerimonia organizzata dal presidente della Romania.
2. Istituzioni. Molte Università in Romania hanno le loro proprie speciali attività (contesti matematici, programmi di formazione etc.) per talenti di scuole superiori. La maggior parte della università ammettono (senza sostenere esami di ammissione) studenti che hanno vinto premi durante le competizioni matematiche.
3. Società. La "Romanian Mathematics Society" era ed è ancora fortemente coinvolta nel sostentamento dei talenti in diversi modi. È uno dei principali organizzatori di gare matematiche ed ha un proprio sistema di premiazione dei talenti.
4. Supporto individuale. I genitori stessi offrono il loro sostegno ai talenti.

5. Publicazioni / riviste. Ci sono diverse riviste, ognuna dà un supporto o un contributo all'organizzazione di contesti matematici o fa pubblicità in riferimento ai migliori studenti. Provvedono inoltre a vari premi.
6. Autorità Locali. Le autorità locali supportano l'organizzazione di competizioni matematiche locali e regionali, offrono supporto per la formazione della competizione finale di NMO e provvedono anche all'assegnazione di diversi tipi di premi (denaro, libri, certificati di distinzione, viaggi etc.)

7. Attraverso la formazione di insegnanti. Gli insegnanti che sono coinvolti nella formazione di talenti matematici sono riconosciuti dalla loro autorità scolastiche ed autorità locali e, ricevono medaglie IMO dal Ministero dell'Educazione (da tempo la formazione di talenti matematici dipende dal Ministero).

Discussione e Osservazione

E' evidente, come abbiamo detto precedentemente, che i paesi europei, ottengono risultati nell'identificazione, motivazione e supporto, utilizzando le competizioni come possono. Preparano i loro studenti per le competizioni e creano le migliori condizioni per promuoverli. E' anche evidente che tutti I paesi siano convinti che è di fondamentale importanza tenere I talenti matematici in Europa, e quindi offrire un significativo supporto agli stessi. Governi, Ministeri dell' Educazione e Istituti di Scienze, Università, Fondazioni, Società, Autorità locali, pubblicazioni e riviste, offrono il loro supporto ma non finanziariamente. Vi è l'esigenza di un sistema di supporto dalle Autorità Educative per provvedere meglio ad uno sviluppo sostanziale dei talenti matematici.

Tavola 5: Identificazione, Motivazione, Attività di supporto

PAESI	IDENTIFICAZIONE	MOTIVAZIONE	SUPPORTO
Cipro	1.competizioni cittadine *Nicosia *Limassol *Larnaca e Ammohostos *Paphos 2. Competizioni Nationali *Gymnasium *dal 10° Grado *dal 11° + 12° grado *Esami di Selezione 3. Olimpiade Matematica Nazionale Dal 4° grado al 12° grado	Ceremonia Premi Teams Nazionali per 1.BMO 2.JBMO 3.IMO 4. Contesti Internationali per allievi di Scuola Primaria	1.PrepaRapportone di programmi 2. Scuole estive di matematica 3.Publicazioni
BULGARIA	1.TV, Internet e competizioni di riviste 2. competizioni scolastiche matematiche *citttadine *inter citttadine 3. Competizioni Nationali *invernali *primaverili * 'Atanas Radev" * 'Sly Peter" * 'Ivan Salabashev' * 'Akad Kiril Popov' * 'Peter Beron' * 'Chernorizec Hrabar' *Scuole di lingua *natale *Pasqua *Tornei Matematici (Sdiia, Pazardjic, Kardiali).	1. Teams Nazionali per : i. Olimpiadi matematiche dei Balcani – Junior ii. IMO – Junior e Senior livello 2. KANGAROO – Europei 3. Tornei di Città 4. Studi in Europa, USA, Canada etc 5. Cerimonia Primi - Società di supporto - organizazzione dei processi di formazione in tre stages: 1) forzare l'interesse degli studenti 2) formazione di un alto livello di conoscenze ed abilità ; 3) sviluppare le abilità degli studenti . - organizazzione dei processi di formazione che dipendono dall'interesse e dalle abilità degli studenti; - personale formazione insegnanti; - possibilità sostenere esami di ammissione ; - prestigio ; - supporto della famiglia;	1. lovoro individuale con studenti promettenti durante le ore ordinarie di matematica in classe 2. Attività matematiche extra scolastiche *escursioni *Eventi Matematici *Giornate di Matematici Famosi & Contesti Matematici etc 3. Circoli Matematici scolastici 4. Circoli Matematici Cittadini *Gruppi Ordinari *Gruppi Speciali 5. Piccoli Circoli Matematici *Green *Summer

	4. Olimpiadi Nazionali *School Round *City Round *Regional Round *National Round 5. Selezioni per IMO * Competizioni Nazionali e Olimpiadi *Competizioni Internazionali e Olimpiadi *Conferenze Estive dell'Unione Bulgara dei matematici *Un mese di Scuola Estiva *Speciale Controllo di documenti durante la Scuola Estiva *Valutazione finale 6. Competizioni Internazionali 7. Olimpiadi Matematiche dei Balcani *Junior level *Senior level 8. Tornei di Città 9. Kangaroo Competizioni *French Kangaroo *Australian Kangaroo 10.Olimpiadi Internazionali Matematiche *Junior level *Senior level		*Winter *Sea 6.Circoli matematici Extramural *problemi *soluzioni *valutazioni *commenti 7.PrepaRapportoni per Corrispondenza *Problemi *Letteratura 8. Letture speciali di argomaneti matematici afforntati da insegnanti universitari e insegnanti eminenti 9. Conferenza di primavera dell'unione dei Matematici Bulgari . 10. Istituto scolastico di Matematica e Informatica con l'obiettivo di: PrepaRapportone di DimostRapportoni matematiche da parte degli studenti *School Round *City Round *Regional Round *National Round *Selezione per il centro di eccellenza in Didattica, Boston, USA
REPUBBLICA CECA	1° stage:dalla 4° classe di BS (9 anni) sperimentalmente dalla terza classe		<u>Le più ricorrenti forme in pratica:</u> 1° stage: dalla 4°th classe di

	* Olimpiade Matematica *Kangaroo 2° stage: dalla sesta classe di BS (11 anni) * Olimpiade Matematica *Kangaroo *Altre competizioni (Dejte Ulavydohromody, Pythagoridda, Prazsled strela, Dopplerova vlua, …) *Molte competizioni locali (a scuola, nelle città) 3° stage: dalla 1 classe di SS (15 anni) *Mathematics Olimpiad *Kangaroo 4° stage: dal 1° anno di studi universitari		BS (9anni) sperimentalmente dalla 3° classe *Speciali classi con insegnanti di lingue straniere o matematica dopo aver sostenuto un esame speciale *Correspondence seminars (competizioni) 2° stage: dalla 6° classe di BS (11 anni) *Classi con ulteriori insegnanti (specialmente) di lingue straniere o matematica (o fisica) (dopo uno speciale esame) *Correspondence seminars *Campi estivi con insegnanti di matematica e fisica, lingue straniere, sports, 3° stage: dalla 1° classe di SS (15 anni) *Speciali classi con insegnanti di lingue straniere o matematica o di altre branche come (fisica, chimica, informatica, corsi di fisica, speciali sports, arte,…) *Seminari per Corispondenza *PrepaRapportone di competizioni per allievi allievi di BS 4° stage: dal 1 anno di studi

	<u>Olimpiade Matematica</u> Categorie: *Z4, Z5, Z6, Z7, Z8, Z9 –per BS *C- per la 1° classe di SS *B- per la 2° classe di SS *A- per il 3° e la 4 classe di SS *Insieme circa 20-30 allievi *Differenti conpetizioni <u>Kangaroo</u> Categories: *Klobaluek- 4° e 5° classe di BS *Benjamin- dalla 6° alla 7° classe di BS *Kadet- dall'8° alla 9° classe di BS *Junior- dalla 1° alla 2° classe di SS *Studenti- dalla 3° alla °4 classe di SS *insieme circa 300,000 allievi		universitari in (19 anni) *Speciali facoltà di, matematica e fisica *SVOC in molti rami come (OU SS) *PrepaRapportone di competizioni per allievi di BS & SS 5° stage: da PhD studi (generalmente 24 anni) *PhD studi *PrepaRapportone di competizioni per allievi di BS & SS
GERMANiA	Competizioni Matematiche "Bundeswettsewers Mathematir" 1.Round: 4 homework 1-Marzo→1-Giugno 2.Round: 4 homework 1-Giugno →1-Settembre. 3.Round: Colloquio *In 2003: 1146 partecipanti, 90% generalmente in classi 9-13. Livelli I, II, III, A, No *Organizzato da il "Vertin Bildung Italia Begabung e.v." (Supportato dal ministero dell'educazione e Ricerca e dal Ministero di Educazione e Ricerca) * Olimpiadi Matematica (Univ. Rostoor) dal 1994 *Arbeitsgemeisdaft des "bundeswite" Sdilerwettscwerse *Volrswapastiltang Dal 02/03 14 progetti in programma	Livelli I,II,III,A,No	Supporto di talenti all'università *"Studienstiftang des Deutschen Volres" danno stipendi agli studenti eccellenti (tutte le aree) *ulteriori fondazioni private

	„Verbeslerng des Mailmatir-unlimcsrles“.		
GRECIA	1) Società Matematica Ellenica: 1.Thales Tempo : fine di Ottobre, Posto: Locale Participazione: Aperto a tutti coloro che vogliono partecipare Approssivativamente 15000 studenti parteciparono nel 2002/3. Livello: Dal 2 Ginnasio (età 12) alla scuola finale (età 17), domande differenziate per ogni classe Syllabus: Se gli studenti hanno imparato di più di quello previsto per la classe 2.Euclid Tempo : Metà Dicembre Posto : Atene Partecipazione: tramite invito in base al grado ottenuto in Thales, Questo grado è stabilito dall'organizzataore, in base ai risultati dei partecipanti,	1.Thales Numeri: più di 300 studenti *per classe* hanno pagato una quota di iscrizione, organizzata localmente 2.Euclid Numeri: circa 50 o 60 studenti *per classe.*	3. Thales Informazioni e incoraggiamenti attraverso le locali autorità di Educazione 2.Euclid Participazione : tramite invito in base al grado di Thales,

	Approssimativamente 1600 studenti parteciparone nel 2002/3. Livello: come in Thales. Syllabus: Gli studenti che avevano imparato di più negli ultimi tre mesi nella loro classe. 3.Archimedes Tempo: inizia in Febbraio Posto: Atene Partecipazione: tramite invito secondo il successo in Euclid , 300 studenti hanno partecipato nel 2002/3. Livello: giovani (Ginnasio) e vecchi (Liceo). Syllabus:come per IMO. 4) altre Competizioni a)Informatica (http://www.epy.gr) Due competizioni utilizzano Internet e poi le competizioni finali, Partecipazione in BOI e IOI.	3.Archimedes Numeri: 25 giovani 25 vecchi partecipanti Circa 25 nuovi e 25 vecchi partecipanti delle passate competizioni. Da loro sono selezionati i partecipanti a BMO e IMO	3.Archimedes Partecipazione: tramite invito secondo il successo ottenuto in Euclid, Gli studenti sono ampiemente autodidatti .

ITALIA	1. Competizioni Matematiche a livello provinciale (età 11-13) 2.Competizioni Matematiche a livello nazionale si tengono all'Università di Milano (Lettera Pristem) e all'Università di Pisa 3.Ruolo dei processi di socializzazzione delle conoscenze in situazioni di insegnamento/apprendimento. 4.La costruzione di particolari situazioni didattiche che possono seguire questa socializzazzione. 5.La possibilità di essere capaci di socializzare. 5.la possibilità di esere capaci a rendere sociali procedure, schemi di ragionamento, strategie decisive di situazioni/problemi.		1. I vincitori di competizioni matematiche per le 'Scuole Superiori' (16-18) come Tutor nelle matematiche competizioni sono stati utilizzati nelle scuole medie. (11-13). 2.siti web con problemi e sluzioni. 3.introduzione ai siti web 4.Publicazioni.
ROMANIA	Romania: una lunga tradizione nella selezione e formazione di talenti *1885: prima competizione per studenti della scuola primaria. *1897: Primo tentativo di organizzare un contesto <u>nazionale</u> matematico *1902: Contesto annuale "Gazeta Matematica" (mail) *1909: Contestants (selezionati tra I migliori risolutori) prevede un esame scritto e uno orale. *1949: Olimpiade Nazionale Matematica (organizzata da RMS e Ministero di Educazione) * Olimpiade Matematica in Romania (livelli: primario, secondario, scuola superiore) School Round City Round District (County Round) Final (National Round)	Studi in USA *1885: prima Competizione per studenti di scuola Primaria 70 participanti; 11 vincitori (9 ragazzi, 2 ragazze) - Ceremonia Premi al Final Round di NMO: premiati dal Ministero di Educazione, Società Rumena Matematica, sponsors - Selezione in JBMO, BMO e IMO - a livello regionale: numeri premiati da RMS, sponsors locali - Medaglie per JBMO, BMO, IMO (ceremonia, Ministero di Educazione, Primo Ministro o Presidente della Romania) - Previsti anche premi in viaggi per i vincitori di medaglie.	*1883: Prima Pubblicazione di Ricreazioni Scientifiche: matematica; fisica; chimica etc." problemi, note, articoli (→1889) *1895 (Sett. 15): Prima Pubblicazione della Gazeta Matematica la più rispettabile rivista Rumena dedita alla matematica elementare, che è il responsabile principale per la creazione, crescita di un alto interesse nell'attrarre giovani talenti matematici 12 numeri/anno; pubblicato continuamente *1959: Prima edizione dell'olimpiade Internazionale di (IMO):

	550-600 studenti (da 7-12) si qualificano ogni anno per il Final Round Annuale competizione "Gazeta Matematica" organizzata ogni estate per i migliori risolutori della rivista Competizioni Internationali -JBMO -BMO -IMO Team selezionati durante il Final Round di Olimpiade Matematiche Nazionale Speciali Stages di formazione Kangaroo Competizioni Matematiche Interregionali (organizzate durante l'anno accademico, per lo più tra il County Round e il Final Round delle Olimpiadi Matematiche Nazionali) I più importanti sono: "Gh. Titeica" "Gr. C. Moisil" "Tr. Lalescu" "L. Duican"		Bucharest 1960, 1978 (20ª ed.), 1999 (40ª ed.): Bucharest *1971-1973: Classi eccellenti in : Matematica, Fisica, Chimica e biologia (Ministero di Educazione: Mircea Malita) *2001: Rete Nazionale di Centri di Eccellenza (grandi città) *2002 (Ott. 1): Centro di Eccellenza di Maramures *La rivista : LUCRARILE SEMINATULUI DE CREATIVITATE MATEMATICA (Seminari su Matematica Creativa) Articoli, note scritte da studenti , Insegnanti di scuole medie e superiori, insegnanti universitari: • Ci sono articoli dedicati alla risoluzione euristica di problemi matematici • La maggior parte dei quali atti allo sviluppo di abilità inventive per la risoluzione dei problemi e aperti al lavoro di ricerca. Centro di Eccellenza in Matematica (NUBM) Fondato: Ottobre 1991: Seminari su Matematica Creativa

			2000: “Centro di prepaRapportone di studenti dotati”: Centro di Eccellenza in Matematica **Obiettivi e Scopi:** 1.Lavorare con studenti universitari di primo livello. Risoluzione di problemi → prima ricerca in matematica 2.Identificare e portare gli studenti di scuola superiore alle competizioni matematiche: * Olimpiade Matematica Nazionale *Contesti Matematici interregionali * Competizioni Americane di Matematica 3.Pubblicare i più recenti materiali. * rivista “Seminarul de Creativitate Matematica” * libri di problemi *libri 4.Organizzare le competizioni matematiche inter-regionali “Gr. C. Moisoil”: problemi proposte & coordinamento 5.Aiutare l’organizzazione dei Campi Ivernali: formazione di studenti (At 2), 4) e 5) in collaboRapportone con RMS-Maramures Br.) 6. Portare gli studenti

			universitari alle Competizioni Matematiche ("Tr. Lalescu" International Maths Competizioni: IMC – 2001 (Prague); 2002 (Warsaw) A livello nazionale (NMO): Maramures County:, 3-5 posti in 2002 (Ci sono 41 regioni in Romania) Generalmente: 15-20
Inghilterra	1.Sfide Junior Anni 7 e 8, Età 12 e 13 Format: 60 minuti per rispondere a 25 domande a risposta multipla Numero di partecipanti: più di 240,000 DimostRapportoninienti da 3,200 scuole. 2. Olimpiade Matematiche Junior Il turno seguente alle Junior Olimpiade e il Junior Matematiche Olimpiadi. Si é tenuto Martedì 10 giugno 2003, e generalmente si tiene il primo o il secondo martedì del mese 1,204 delle migliori performances degli studenti del 2003 di Junior Challenge sono stati invitati alle Junior Matematiche Olimpiadi. Le Junior Matematiche Olimpiadi sono divise in due sezioni di due ore ciascuna: Section A prevede 10 domande e agli allievi è richiesto di dare una sola risposta. Section B prevede sei domande per le quali sono previste risposte	1.Sfida Junior Anni 7 e 8, Età 12 e 13 Seguente: Chi ha ricevuto voti alti sarà inviatato a partecipare alla Junior Olimpiade (UK JMC). 2. Olimpiade Matematiche Junior Tutti quelli che ne prendono parte ricevono un certificato: i primi 25% ricevono un Certificato di Distinzione, il resto riceve un Certificato di Partecipazione. Medaglie sono vinte dai migliori candidati e i primi 50 ricevono anche un premio.	

	aperte. 3. Intermediate Challenge, Anni 10, 11 e 12 Età 14, 15 e 16 Format: 60 minuti per rispondere a 25 domande a risposta multipla Numero partecipanti: Più di 207,000 DimostRapportoninienti da 2,700 scuole . 4. Intermedie Matematiche Olimpiadi e Kangaroo (IMOK) seguono competizioni di „Intermediate Challenge“ sono gli Europei Kangaroo e il IMOK Olimpiade. Europei Kangaroo 1,000 allievi in ognuno di Y9, Y10 e Y11 (E&W), S2, S3 e S4 (Scot.), e Y10, Y11 eY12 (N.I.) sono invitati a partecipare a Europei Kangaroo. E‘ prevista un ora per rispondere a 25 domande a risposta multipla. Il gruppo dell’anno più basso partecipa a Kangaroo 'Grey'. Nel 2003 gli Europei Kangaroo si tennero martedì 20 Marzo. Tutti i partecipanti ricevono un Certificato di Partecipazione o un Certificato di Merito. 5.Senior Challenge, Anni 13 e 14, Età 17 e 18 Format: 90 minute per rispondere a 25 domande a risposta multipla Numeroi partecipanti: Più di 60,000 DimostRapportoninienti da 1,500 scuole. Seguenti rounds: 6. British Matematiche (Round 1) Le votazioni Superiori a 1,000 sono invitate a partecipare al: British Matematiche (Round 1). Possono condurre BMO2. Sei partecipanti faranno le Olimpiadi Matematiche Internazionali. 7.BMO2 8. Olimpiadi Matematiche Internazionali. Sei partecipanti	3.Intermediate Challenge, Anni 10, 11 e 12 Età 14, 15 e 16 Seguono: Le votazioni alte saranno invitate a partecipare ai seguenti rounds: Intermedie Matematiche Olimpiade e Kangaroo (IMOK) 4.Europei Kangaroo Tutti i partecipanti ricevono un Certificato di Partecipazione o Certificato di Merito. 5.Senior Challenge, Anni 13 e 14, Età 17 e 18 Seguono: Valutazioni Superiori a 1,000 saranno invitate a partecipare al: British Matematiche (Round 1). 6. British Matematiche (Round 1) possono seguire i BMO2. 7.BMO2 Sei partecipanti prendono parte alle Olimpiadi Matematiche Internazionali.	

CURRICULUM nelle scuole Europee Part I:

Sommario

In questa parte di studi comparativi, cercheremo di dare un quadro chiaro di cosa stia accadendo in otto paesi Europei.
(Bulgaria, Cipro , Repubblica Ceca , Grecia , Germania, Italia, Romania e l'Inghilterra) per capire se i concetti che decidiamo di includere nel progetto e che sono stati pensati, e a che età esattamente gli allievi pensano a queste nozioni. É sottointeso che non è possibile che tutti i paesi insegnino gli stessi concetti allo stesso modo e con gli stessi risultati.

Introduzione

I partecipanti al progetto decidono come gli elementi concettuali dovrebbero essere separati: hanno deciso di avere due livelli, il primo riguarda l'età 9-14, Livello 1 (Primario) e Secondario, Livello 2 riguarda l'età 15-18. presentiamo gli elementi del primo livello in dieci categorie. Poi segue uno studio comparativo che riguarda gli insegnamenti di quelle categorie di entrambe i livelli in Italia e in otto paesi Europei (Bulgaria, Cipro, Repubblica Ceca , Grecia , Germania, Italia, Romania e Inghilterra).

Elementi di Livello 1 (Primario), Età 9-14:
Combinatoria (Principio della Piccionaia (Principio di Dirichlet), Insiemi finiti, Principio di Inclusione ed Esclusione),
Teoria dei numeri (Divisibilità di numeri (criteri, Divisione Euclidea, Algoritmo Euclideo), numeri Primi (includendo la la scomposizione dei numeri), Proprietà di Numeri, Base reppresentativa di numeri),
Piano Geometrico Euclideo (Dirichlet, Principi di Geometria, Geometria Combinatoria, Taglia e ricopri, Aree di Figure, Geometria del Triangolo, Geometria del Cerchio),
Diseguaglianze (Algebriche e Geometriche),
Polinomi (Fattorizzazione di Polinomi, equazioni lineari e quadratiche),
Modelli Matematici semplici (al posto di "Problemi con parole"), Problemi con parole, Processsi di Problemi, Storie di Problemi,
Funzioni (Dipendenze di Corrispondenze, Funzioni Lineari),
Matematica Discreta (Probabilità Elementare, Elementi di Teoria dei grafi, Successioni),
Invarianti (Scoperta di invarianti (cominciando con la divisibilità), Giochi di strategie basati su invarianti),
Trasformazioni (Traslazioni Riflessioni, Rotazioni, Inversioni (tutte definite geometricamente), Proprietà di Figure, Composizioni di trasformazioni (dello stesso tipo) (Tavola 1).
Infine, dopo un esame finale dei curricula di ognuno degli otto paesi saremo in condizione di fare uno studio comparativo che mostri per ogni concetto principale a che età e in quali paesi sia stato pensato. Daremo inoltre una tabella (Tavola 1) che mostri quali argomenti e a quale età e in ogni paese sia stato pensato e quanto sia lontano dal primo libvello che lo riguarda.

Resultati

Combinatoria
Le categorie di compilazione si riferiscono alla Combinatoria, il Principio della Piccionaia (Principio di Dirichlet) e non sono insegnate in nessuno degli otto paesi partecipanti. Il concetto di Cardinalità e Calcolo di Insiemi Finiti è insegnato a Cipro agli studenti di 12-13 anni e in Romania agli studenti di 10-14 anni. Queste nozioni non includono i curricula scolastici della Bulgaria, la Repubblica Ceca, Germania, Grecia, Italia e Inghilterra. Il Principio di Inclusione ed Esclusione è compreso solo in Romania e riguarda gli studenti di 13-14 anni. In conclusione possiamo dire che Solo Cipro e la Romania affrontano alcuni elementi della categoria Combinatoria.

Teoria dei Numeri
La teoria dei numeri è un argomento ben conosciuto in tutti i paesi. La sola differenza è l'età nella quale gli studenti familiarizzano con la Teoria dei numeri come si evince dalla tabella 1. Gli studenti cominciano ad incontrare questo concetto all'età di 9 anni. In particolar modo, a Cipro agli studenti viene insegnato il concetto di Divisibilità di numeri (criteri, Divisione Euclidea, Algoritmo Euclideo) durante l'età che va dai 9 ai 13 anni; I numeri Primi (includendo la scomposizione dei numeri) tra i 9 e i 14 anni e la Proprietà dei Numeri tra gli 11 e i 13 anni. Infine, viene insegnato loro la rappresentazione della Base dei Numeri tra i 12 e i 13 anni.

In Bulgaria la Divisibilità di numeri (criteri, Divisione Euclidea, Algoritmo Euclideo) viene insegnato tra i 10 e gli11 anni – e la representazione della Base di numeri è insegnata agli studenti da 11 a 12 anni. Agli studenti di 9-14 anni in Bulgaria non vengono insegnati i numeri Primi (includendo la scomposizione dei numeri), e Proprietà dei Numeri.

Nella Repubblica Ceca, agli studenti di 11-12 anni diventa familiare la Divisibilità di numeri (criteri, Divisione Euclidea, Algoritmo Euclideo) e i numeri Primi (includendo la scomposizione dei numeri). Agli studenti di 10-11 anni della Repubblica Ceca viene insegnata la Proprietà dei Numeri. La rappresentazione della base dei numeri non viene insegnata agli studenti della Repubblica Ceca non prima dei 9-14 anni.

In Germania il concetto di Divisibilità di numeri (criteri, Divisione Euclidea, Algoritmo Euclideo) viene insegnato agli studenti di età compresa tra i 9 e i 13 anni. Il concetto di numeri Primi (include la scomposizione dei numeri). La Proprietà e la rappresentazione della Base dei Numeri viene insegnata all'età di 11 anni.

In Grecia il concetto di Divisibilità di numeri (criteri, Divisione Euclidea, Algoritmo Euclideo) viene insegnato tra i 9 e i 13 anni. I Numeri Primi (includendo la scomposizione dei numeri) vengono insegnati tra gli 11 e i 12 anni. La Proprietà di Numeri viene insegnata tra i 10 e gli 11 anni. La rappresentazione della base dei numeri viene insegnata agli studenti tra i 9 e i 14 anni.
E tra 11-14 anni vengono insegnati tutti gli elementi della categoria della Teoria dei Numeri.
In Romania il concetto di Divisibilità di numeri (criterio, Divisione Euclidea, Algoritmo Euclideo) è insegnato tra 9-13 anni . I numeri Primi (includendo la la scomposizione dei numeri) sono insegnati tra i 11-12 in Italia e i 13-14 anni, la Proprietà di Numeri è insegnata tra i 10-13 anni; la rappresentazione della base dei numeri è insegnata tra i 9-13

Geometria piana Euclidea

La Geometria piana Euclidea, Dirichlet, I principi di Geometria, Geometria Combinatoria e Taglia e ricopri, non sono inseriti nei curriculum scolasctici degli otto paesi partecipanti. L'area di figure, la geometria del triangolo e del cerchio sono conosciute bene dagli studenti degli otto paesi. Agli studenti vengono insegnate queste nozioni, a cominciare dall'età di 9 fino all'età di 14. In ognuna delle classi corrispondenti si ha un diverso grado di difficoltà. In particulare, elementi di Area di Figure, Geometria del Triangolo, e Geometria del Cerchio a Cipro è insegnata a studenti di 9-13 anni.

In Bulgaria l'area delle figure è insegnata tra gli 11-14 anni e la geometria del triangolo è insegnata tra i 12-14 anni. La geometria di un cerchio non compare nei Curriculum Bulgari se non all'età di 9-14 anni .

Nella Repubblica Ceca l'area delle figure è insegnata tra i 9-13 anni, la Geometria del triangolo è insegnata tra i 9-12 anni e la geometria del cerchio si apprende tra i 9-14 anni.

In Germania la geometria del triangolo viene insegnata tra gli 11-14 anni e la geometria del cerchio è insegnata a studenti di età compresa tra gli 11-13 anni. Nozioni connesse all'area delle figure non compare in Bulgaria non prima dei di 9-14 anni.

In Grecia l'area delle figure è insegnata tra i 9-14 anni, geometria del triangolo tra i 10-13 anni. La geometria del cerchio è insegnata tra i 9-14 anni.

In Italia tra gli 11-14 anni sono insegnati gli elementi dell'area delle figure e la geometria del Triangolo e del cerchio.
L'area delle figure è insegnata tra i 9-13 anni agli studenti rumeni. Inoltre la geometria del triangolo e del cerchio è insegnata agli studenti rumeni tragli 11 e i 13 anni. In Inghilterra tra 11-14 anni agli studenti vengono insegnati gli elementi delle aree delle figure e la geometria del triangolo e del cerchio.

diseguaglianze
la categoria delle diseguaglianze algebriche, è insegnata agli studenti dagli insegnanti di matematica in tutti i paesi eccetto nella Repubblica Ceca. In special modo, l'insegnamento delle diseguaglianze algebriche a Cipro riguarda gli studenti di età compresa tra i 9-14 anni, in Bulgaria tra i 12-14 anni, in Germania tra i 11-13 anni, in Grecia tra i 13-14 anni, in Italia tra i 11-14 anni, in Romania tra i 10-14 anni e infine in Italia e in il Inghilterra tra i 11-14 anni. Le diseguaglianze geometriche non compaiono a Cipro, Repubblica Ceca, Germania, Grecia , Romania, Italia e Inghilterra. In Bulgaria e in Italia non sono incluse queste nozioni, nella 7 classe in Bulgaria e nella 6 e 8 classe in Italia.

Polinomi
La quinta categoria di livello 1, Polinomi, non compare per niente nei curricula Bulgari e Italiani. Le equazioni semplici e quadrate sono insegnate nell'ottava classe nel resto dei paesi. Inoltre agli studenti della Romania prendono familiarità con la fattorizzazione di polinomi.

Modelli matematici semplici. Agli studenti di Cipro, Bulgaria, Germania, Grecia, Romania, Italia e Inghilterra è chiesto di familiarizzare con le categorie di semplici modelli matematici. L'insegnamento di semplici modelli matematici a Cipro riguarda gli studenti di età compresa tra i 9 e i 14 anni, in Bulgaria tra i 10-14 anni, in Germania e in Grecia tra i 9-14 anni, in Romania tra i 10-13 anni in Italia infine e in Inghilterra tra i 9-14 anni. L'Italia e la Repubblica Ceca includono nei loro curriculum scolastici non prima dei 9-14 anni, la categoria di semplici modelli matematici. Non è incluso inoltre nei curriculum degli studenti il concetto di Cardinalità e Calcolo di Insiemi Finiti tra 9-14 anni in Italia e nella Repubblica Ceca .

Funzioni
La seguente categoria (tavola 1) chiamata 'funzioni' compare nei curricula scolastici di Bulgaria, Germania, Grecia, Romania, Italia e Inghilterra. In Inghilterra gli studenti incontrano funzioni dall'inizio del quarto grado e continua fino all'ottavo grado, in Bulgaria tra il quinto e l'ottavo grado, in Italia e nel resto dei paesi nell'ottavo grado. Solo in Germania agli studenti dell'ottavo gravo vengono insegnate le funzioni lineari.
Cipro, la Repubblica Ceca e l' Italia non includono la categoria di funzioni nei loro curriculum scolastici fino ai 9-14 anni.

Matematica Discreta
La nozione di probabilità elementare e la teoria dei Grafi sono comuni in tutti i paesi partecipanti , nella classe 4 a Cipro, Germania, Romania e Inghilterra, e in altri gradi nel resto dei paesi. In special modo, l'insegnamento di Probalità elementare a Cipro riguarda gli studenti di età compresa tra i 9-12 anni, in Bulgaria tra i 10-13 anni, nella Repubblica Ceca tra 11-12 anni, in Italia tra 11-14 anni, in Romania tra 9-13 anni e infine in Inghilterra tra 9-14 anni. L'insegnamento di Teoria di Elementi di Grafi in Germania concerne gli stedenti di 9 anni, in Grecia di 11-12 anni, in Italia di 11-14 anni e in Romania tra i 11-14 anni. La successione non compare in nessuno degli otto paesi.

Invarianti
Le categorie di Invarianti appaiano nei curriculum Italiani tra i 11-14 anni.

Trasformazioni
L'ultima categoria sono le Trasformazioni, l'unico paese che non le insegna per niente è la Bulgaria. L'insegnamento di traslazioni, riflessioni, rotazioni, inversioni (tutte definite geometricamente) è insegnato a Cipro nella 5 classe, nella Repubblica Ceca tra i 9-13 anni-, in Germania tra 9-14 anni, in Italia tra 11-14 anni, in Romania tra 9-14 anni e infine in Inghilterra tra 9-14 anni. Gli elementi di questa categoria sono chiamati Proprietà di Figure e Composizioni di trasformazioni (dello stesso tipo) non compaiono in altri paesi.

Presentiamo gli elementi di secondo livello (Livello 2) che includono 19 categorie.

Elementi di Livello 2 (Secondario), Età 15-18:

Combinatoria (Principio della Piccionaia (Algebra, Geometria), concetto di Cardinalità e Calcolo di Insiemi Finiti, problemi di Logica combinatoriale, Probabilità, Inclusione, Principio di Esclusione,
Teoria dei numeri Proprietà di interi (divisibilità), numeri Primi, IrRazionaliità, equazioni Diofantee, Congruenze, Applicazioni (e.g. in crittografia),
Geometria del piano Triangoli, Poligoni, Cerchi, Ottimizzazione di problemi, Luoghi Geometrici, Costruzione di problemi, Trasformazioni (Similitudine, Inversione), Teoremi Speciali (Euler, Ceva, Simpson, etc.), proprietà Metriche (area, etc.), diseguaglianze Geometriche,
Geometria dei Solidi (Proprietà di rette e piani, Solidi, corpi convessi, proprietà Metriche, Problemi Esterni, DimostRapportoni con esiti spaziali diseguaglianze Geometriche nello spazio),
Diseguaglianze (Algebriche, Trigonometriche)
Polinomi (Proprietà, divisione di Euclide, fattorizzazione, Soluzioni, funzioni Simmetriche),
Modelli Matematici, problemi, logica,
Funzioni (Grafi, Equazioni, proprietà e relazione di funzioni, Funzioni speciali (trigonometria, espomenziale, etc.)),
Numeri Complessi (Proprietà, Applicazioni alla geometria),
Matematica Discreta (Ricorrenze, Algoritmo, Logica Proposizionale, Teoria dei Grafi),
Induzioni Matematiche (Varianti di metodi di induzione, Applicazioni in algebra, geometria, Combinatoria, etc.),
Trigonometria (Proprietà, Applicazioni in geometria),
Successioni (Proprietà, limiti, Serie (Finite, infinite, convergenze))
Statistica (Proprietà, concetti base, Applicazioni),
Invarianti (Applicazioni),
Algebra Lineare (Vettori, Determinanti, Matrici),
Geometria Analitica (Rette, Sezioni Coniche, Applicazioni),
Metodi di Trasformazione (Filosofia di teorie di trasformazione, Applicazioni),
Giochi Matematici
Dopo aver chiuso l'esame dei curricula di ognuno degli otto paesi, siamo nella posizione di fare uno studio comparativo che mostri i concetti fondamentali, a quale età e in quale paese vengano insegnati e dare anche una tavola at (Tavola 2) dimostrativa.

Resultati
La prima categoria esaminata è la Combinatoria
Il concetto di Cardinalità e Calcolo di Insiemi Finiti, problemi di Logica combinatoriale, Probabilità sono insegnati a Cipro nella 12 classe, e in Bulgaria nella 10^a classe. Di questi (tavola 2) solo il concetto di Probabilità è insegnato in Germania e in Grecia. L'insegnamento di Probabilità in Germania riguarda studenti di 19 anni, in Grecia 14-15 e 17-18 anni.
L'Italia non include Combinatoria nei programmi scolastici. In Romania problemi di Logica combinatoriale e Probabilità esiste nei programmi scolastici e riguarda gli studenti della 10^a classe. Infine, Il concetto di Cardinalità e Calcolo di Insiemi Finiti e Probabilità compare nei curriculum matematici, Il concetto di Cardinalità e Calcolo di Insiemi Finiti tra il 17-18 anni e Probabilità tra 14-18 anni.

La seconda categoria esaminata è la Teoria dei Numeri.

Elementi di Teoria dei Numeri sono insegnati in tutti i paesi partecipanti eccetto che in Italia. La teoria dei Numeri si riferisce alle Proprietà di Interi (divisibilità), numeri Primi, IrRazionaliità, equazioni Diofantee compaiono nell'11 classe a Cipro. Il concetto di Congruenza, Applicazioni (e.g. in crittografia) non sono insegnati a Cipro.

Il concetto di IrRazionaliità e Congruenza, Applicazioni (e.g. in crittografia) sono i soli concetti della categoria della Teoria dei numeri che vengono insegnati a studenti greci di 14-15 anni.

Nella Repubblica Ceca: Proprietà di interi (divisibilità) e numeri Primi sono insegnati a studenti della 10° classe.

In Germania l'IrRazionaliità è insegnata a studenti della 10^a classe.

Proprietà di interi (divisibilità), numeri Primi, IrRazionaliità compare nell'11° classe in Grecia. In Romania l'IrRazionaliità è insegnata tra 14-15 anni. Proprietà di interi (divisibilità), numeri Primi, IrRazionaliità compaiono in Inghilterra nella 9^a e 12^a classe.

La terza categoria esaminata è la Geometria del piano.

La Geometria del piano sembra essere molto popolare nei paesi Europei. Tutti i concetti che si riferiscono a questa categoria cominciano ad essere insegnati dalla 9^a classe fino alla 12^a classe.

In Particolar modo, a Cipro agli studenti viene insegnato il Triangolo (punti principali del triangolo) all'età di 14-16 anni, i Poligoni trai 14 e i 17 anni. Il Cerchio tra i 15 e i 17 anni, il Luoghi Geometrici tra i 15 e i 18, La costruzione di problemi tra i 14 e i 18 anni, Trasformazioni (Similitudine, Inversioni) tra i 15 e i 17 anni, Teoremi Speciali (Euler, Ceva, Simpson, etc.) tra i 14 e i 15 anni, proprietà Metriche (area, etc.) tra i 17 e i 18, diseguaglianze Geometriche tra i 14 e i 16 . A Cipro agli studenti di questo livello non viene insegnata l'Ottimizzazione di problemi.

In Bulgaria gli studenti imparano il Triangolo (punti principali del triangolo) trai 14 e i 16 anni, i Poligoni tra i 14 e i 16 anni, Costruzione di problemi tra i 14 e i 16 anni, Trasformazioni (Similitudine, Inversioni) tra i 14 e i 15, Teoremi speciali (Euler, Ceva, Simpson, etc.) tra i 15 e i 16 anni, e le diseguaglianze geometriche tra i 15 e i 16 anni. In Bulgaria gli studenti di questo livello non imparano il cerchio, Ottimizzazione di problemi, Luoghi Geometrici e proprietà Metriche (area, etc).

Nella Repubblica Ceca gli studenti imparano i Poligoni tra i 15 e i 16 anni, il Cerchio tra i 15 e i 16, il Luoghi Geometrici tra i 15 e i 16, Costruzione di problemi tra i 15 e i 16 anni, Trasformazioni (Similitudine, Inversioni) tra i 14 e i 16 anni, Teoremi Speciali (Euler, Ceva, Simpson, etc.) tra i 15 e i 16 anni, proprietà Metriche (area, etc.) tra i 17 e i 18 anni.

Nella Repubblica Ceca gli studenti imparano il il Triangolo (punti fondamentali del triangolo), Ottimizzazione di problemi e Diseguaglianze Geometriche.

In Germania gli studenti imparano il Luoghi Geometrici tra i 15 e i 19 anni, Gli studenti imparano i Luoghi Geometrici all'età di 15 e 19, Trasformazioni (Similitudine, Inversioni) all'età di 15, teoremi Speciali (Euler, Ceva, Simpson, etc.) e Geometric Diseguaglianze da elementi della terza categoria all'età di 15.

In Grecia gli studenti imparano il Triangolo (punti fondamentali del triangolo) in il 10^a classe, i Poligoni ed i Luoghi Geometrici tra la 10^a e l' 11^a classe, Costruzione di problemi nell'11^a classe, Trasformazioni (Similitudine, Inversioni) tra la 9 e la 10 classe. Le Proprietà Metriche (area, etc.) sono insegnate agli studenti Greci tra i 15 e i 17 anni, diseguaglianze Geometriche tra i 14 e i 15 anni. In Grecia agli studenti di secondo livello non è insegnato il cerchio, Ottimizzazione di problemi e Teoremi Speciali (Euler, Ceva, Simpson, etc.)

In Italia agli studenti viene insegnato il Triangolo (punti principali del triangolo) e dei Poligoni tra i 15 e i 16 anni, il cerchio tra i 14 e i 17, Trasformazioni (Similitudine, Inversioni) tra i 15 e i 17, teoremi speciali tra i 14 e i 18 anni, (Euler, Ceva, Simpson, etc.), proprietà Metriche (area, etc.) tra i 15 e i 16, Disegueglianze geometriche tra i 14 e i 15 anni. In Italia agli studenti di secondo livello non è insegnato il cerchio, ottimizzazione di problemi, Luoghi Geometrici, e Costruzioni di problemi.

In Romania agli studenti vengono insegnati i Luoghi Geometrici e le disegueglianze geometriche nell'11 classe e i teoremi speciali nella 12 classe. (Euler, Ceva, Simpson, etc.).
Infine, Poligoni, Cerchio e Luoghi Geometrici sono gli unici elementi di questa categoria, chiamata Geometria del piano che sono insegnati agli studenti inglesi dalla 9 alla 12 classe.

La quarta categoria è la geometria dei solidi.
La geometria dei solidi, la geometria delle diseguaglianze nello spazio, non sono previste nei curricula scolastici degli otto paesi partecipanti.
Proprietà di rette e corpi solidi convessi sono insegnati a Cipro tra la nona e la decima classe. A Cipro agli studenti di secondo livello non vengono insegnate la proprietà Metriche e l'ottimizzazione di problemi.
In Bulgaria le Proprietà di rette e piani e corpi solidi convessi, ottimizzazione di problemi vengono insegnati nella 12 classe. In Bulgaria agli studenti di secondo livello non vengono insegnate le proprietà metriche. Nella Repubblica Ceca le Proprietà di rette e piani sono insegnate agli studenti di 11 e 12 classe, corpi solidi convessi e ottimizzazione di problemi sono insegnati tra la 9 e la 12 classe. Nella Repubblica Ceca agli studenti di secondo livello non sono insegnate le proprietà Metriche e l'ottimizzazione di problemi. In Germania gli studenti della 10 classe studiano solo corpi solidi convessi, e in Grecia gli studenti della 9 classe studiano corpi solidi convessi.
In Italia tra i 10 e i 17 anni si studiano i concetti di proprietà di rette e piani e corpi solidi convessi e il problemi di Metrica dall'età di 16 anni. In Italia non si studia l'ottimizzazione di problemi.
In Romania le proprietà di rette e piani sono insegnate agli studenti dell'11 classe e corpi solidi convessi agli studenti della 10 classe. Il Romania non si studia la metrica e l'ottimizzazione di problemi.
Icorpi solidi convessi sono studiati in Inghilterra dagli studenti tra la 9 e la 12 classe. É il solo elemento della quarta categoria che viene insegnato a studenti di 2 livello.

La quinta categoria sono le Diseguaglianze
Il concetto di diseguaglianze algebriche e trigonometriche non compare nel 2 livello di Germania e Italia.
Diseguaglianze trigonometriche sono insegnate nella Repubblica Ceca nella classe 11 e in Romania nella 10 classe. Gli studenti del resto dei paesi imparano le Diseguaglianze Algebriche a partire dell'età di 14 anni. A Cipro gli studenti imparano le Diseguaglianze tra i 15 e i 18 anni, in Bulgaria e nella Repubblica Ceca tra i 15 e i 16, in Grecia tra i 14 e i 16, in Romania tra i 15 e i 17 e in Inghilterra tra i 14 e i 18.

La sesta categoria sono i Polinomi
I Polinomi sono una categoria obbligatoria per gli studenti della 9 classe negli otto paesi partecipanti (Tavola 2). In particolare, a Cipro agli studenti sono insegnate la Proprietà, Divisione Euclidea, radicali, fattorizzazione di Polinomi tra i 14 e i 18 anni e la Soluzione di Polinomi tra i 14 e i 15. A Cipro non sono insegnate le Funzioni simmetrice di radici di polinomi.
Gli studenti Bulgari imparano Proprietà, Divisione Euclidea, radicali, fattorizzazione di Polinomi nella 9^a classe e non viene insegnato loro Soluzione di Polinomi e Funzioni simmetrice di radici di polinomi.
Nella Repubblica Ceca gli studenti imparano Proprietà, Divisione Euclidea, radicali, fattorizzazione di Polinomi tra i 15 e i 17 anni e la Soluzione di Polinomi tra i 15 e i 16. Le Funzioni simmetrice di radici di polinomi sono escluse dai curricula di questo paese.
In Grecia gli studenti imparano Proprietà, Divisione Euclidea, radicali, fattorizzazione di Polinomi tra i 16 e i 17 anni, Soluzione di Polinomi tra i 14 e i 15, Funzioni simmetrice di radici di polinomi tra i 16 e i 17 anni.
In Italia Proprietà, Divisione Euclidea, radicali, fattorizzazione di Polinomi vengono insegnate nella 9 classe.

In Inghilterra Proprietà, Divisione Euclidea, radicali, fattorizzazione di Polinomi, Soluzioni di Polinomi, Funzioni simmetrice di radici di polinomi sono insegnate tra la 9 e la 12 classe.

La settima categoria è Modelli Matematici
La settima categoria di livello 2, chiamata Modelli matematici, problemi con parole (in LN), logica, compaiono solo in Bulgaria e nei curricula Inghilterra, sono insegnati tra la 9 e la 12 classe.

L'ottava categoria è le Funzioni
Le Funzioni sono molto popolari nei curricula e sono insegnate in tutti i paesi (Tavola 2). Grafi, Equazioni, proprietà e relazioni di funzioni, funzioni speciali (trigonometria, esponenziale, etc.) sono nozioni di questa specifica categoria che sono ampiamnete valorizzate da tutti i paesi partecipanti.
In Particolare, a Cipro gli studenti imparani i Grafi tra i 14 e i 18 anni, proprietà e relazioni di funzioni tra i 15 e i 18 anni, e Funzioni speciali (trigonometria, esponenziale, etc.) tra i 16 e i 18.
In Bulgaria gli studenti imparano i Grafi tra i 15 e i 16 anni, equazioni, proprietà e relazioni di funzioni tra i 14 e i 18 e Funzioni speciali (trigonometria, esponenziale, etc.) tra i 14 e i 18.
Nella Repubblica Ceca gli studenti imparano i Grafi tra i 14 e i 17 anni, equazioni, proprietà e relazioni di funzioni tra i 16 e i 17 anni e Funzioni speciali (trigonometria, esponenziale, etc.) tra i 14 e i 17 anni.
In Germania gli studenti imparano equazioni, proprietà e relazioni di funzioni e Funzioni speciali (trigonometria, esponenziale, etc.) all'età di 16. In Germania gli studenti non imparano i Grafi al livello 2.
In Grecia gli studenti imparano i Grafi tra i 14 e i 18 anni, equazioni, proprietà e relazioni di funzioni tra i 15 e i 16 e speciali funzioni (trigonometria, esponenziale, etc.) tra i 14 e i 17 anni.
In Italia gli studenti imparano anche speciali funzioni (trigonometria, esponenziale, etc.) nell' 11^{th} classe. Gli studenti Italiani non studiano equazioni, proprietà e relazioni di funzioni.
In Romania gli studenti imparano i Grafi e le equazioni, proprietà e relazioni di funzioni tra i 14 e i 17 anni e funzioni speciali (trigonometria, esponenziale, etc.) tra i 15 e i 17 anni.
In Inghilterra gli studenti imparano i Grafi e le equazioni, proprietà e relazioni di funzioni e funzioni speciali (trigonometria, esponenziale, etc.) tra i 14 e i 18 anni.

La nona categoria è Numeri Complessi
La nona categoria riguarda i Numeri Complessi non sono insegnati in Germania e in Italia. A Cipro gli studenti imparano Proprietà e applicazione di Numeri Complessi tra i 16 e i 18 anni. In Bulgaria gli studenti imparano solo le Proprietà dei Numeri Complessi nella 12^{th} classe. Nella Repubblica Ceca le Proprietà dei Numeri Complessi sono insegnate nella 12^{th} classe. In Grecia gli studenti imparano le Proprietà e le applicazioni dei Numeri Complessi tra i 17 e i 18 anni. In Romania e Inghilterra i Numeri Complessi, Proprietà e loro Applicazioni alla geometria sono insegnate tra la 10^{th} e 12^{th} classe.

La decima categoria è la Matematica Discreta
La categoria chiamata Matematica Discreta è insegnata esclusivamente in Inghilterra nell'ultima classe.

L'undicesima categoria è l'Induzione Matematica
Varianti di metodi di induzione sono inclusi a Cipro, nella Repubblica Ceca, Grecia, Romania e nei curricula Inglesi. Particolarmente, a Cipro e nella Repubblica Ceca gli studenti imparano Varianti di metodi di induzione tra i 16 e i 18 anni, in Grecia tra i 16 e i 17 anni, in Romania tra i 14 e i 15 anni e in Inghilterra tra i 14 e i 18 anni.

La dodicesima categoria è Trigonometria
La *Trigonometria* (Proprietà, Applicazioni in geometria) sembra essere di primaria importanza in tutti i paesi eccetto che in Bulgaria. A Cipro gli studenti imparano la *Trigonometria* tra i 14 e i 18 anni e applicazioni alla geometria tra i 17 e i 18 anni. Nella Repubblica Ceca gli studenti imparano solo la *Trigonometria* tra i 16 e i 17. In Germania gli studenti imparano la *Trigonometria* e le applicazioni alla geometria all'età di 16 anni. In Grecia gli studenti imparano la *Trigonometria* tra i 14 e i 17 anni, e applicazioni alla geometria tra i 16 e i 17 anni. In Italia gli studenti imparano la *Trigonometria* tra i 17 e i 18 anni, e applicazioni alla geometria tra i 15 e i 18 anni. In Romania gli studenti imparano la *Trigonometria* e applicazioni alla geometria tra i 16 e i 17 anni. In Inghilterra gli studenti imparano la *Trigonometria* tra i 14 e i 18 anni.

La tredicesima categoria è Successioni
Ha una grande importanza in molti paesi. Le Successioni sono insegnate nella maggior parte dei paesi tra la 10 e l'11 classe. In particolar modo a Cipro e Grecia gli studenti imparano le Successioni tra i 16 e i 18 anni. In Bulgaria, in Italia e Romania gli studenti imparano proprietà e limiti delle Successioni nell' 11^{a} classe. Nella Repubblica Ceca gli studenti imparano proprietà e limiti delle Successioni tra i 17 e i 19 anni. In Germania gli studenti imparano proprietà e limiti di Successioni all'età di 17. In Inghilterra gli studenti imparano proprietà e limiti di Successioni tra i 17e i 18 anni .
il concetto di Successioni è insegnato a Cipro e in Inghilterra nell'ultima classe.

La quattordicesima categoria è Statistica
I concetti base, Proprietà, Applicazioni di Statistica sono insegnate nell'ultima classe a Cipro, Germania e Grecia. In Bulgaria gli studenti imparano le Proprietà, concetti base e applicazioni in Statistica tra i 16 e i 18 anni, in Romania tra i 15 e i 16 e in Inghilterra tra i 14 e i 18.

La quindicesima categoria sono gli Invarianti
Invarianti e le loro applicazioni sono insegnate solo in Germania al 15 anno.

La sedicesima categoria è l'Algebra Lineare
Il paese che non include i vettori nel suo sistema educativo è L'Italia. Gli studenti di Cipro e dell'intera Grecia studiano i vettori tra i 16 e i 17 anni, in Bulgaria tra i 17 e i 18 anni, nella Repubblica Ceca tra i 16 e i 18 anni, in Germania all'età di 15 anni, in Grecia tra i 14 e i 17 anni, in Romania tra i 15 e i 18 anni e infine, in Inghilterra tra i 14 e i 18 anni.

La dicessettesima categoria è la Geometria Analitica
La dicessettesima categoria è Geometria Analitica è insegnata in tre paesi nella 12^a classe. Questi paesi sono Repubblica Ceca**,** Grecia e Inghilterra.

La diciottesima categoria sono i Metodi di Trasformazione
Questa categoria riguarda i Metodi di Trasformazione. Solo due paesi applicano questi metodi e sono la Romania dove Metodi di Trasformazione *sono insegnati nella 10 classe* e l'Inghilterra dove i Metodi di Trasformazione sonoinsegnati tra la 9 e la 12 classe.

La dicennovesima categoria è quella dei Gioghi Matematici
Infine, l'ultimo della lista di livello 2 è quello dei Giochi Matematici che sono insegnati esclusivamente dagli insegnanti inglesi di matematica nell'ultima classe, classe 12^a, (Tavola 2).

CURRICULUM nelle scuole Europee
Part II:

Introduzione

In questa parte di studio comparativo, daremo due tavole (Tavola 3, Tavola 4) con i curricula di otto paesi Europei (Bulgaria, Cipro, Repubblica Ceca , Grecia , Germania, Italia, Romania e il Inghilterra) in grado di avere una chiara idea di cosa viene insegnato in questi paesi.
I curricula nazionali di ogni paese seguono i programmi istituzionali di insegnamento e apprendimento della matematica, e danno informazioni per aiutare gli insegnanti ad implementare la matematica nelle loro scuole. Il curriculum nazionale è abbastanza standard. Espone un chiaro, pieno e statutario elemento di insegnamento per gli allievi. Determina i contesti di quello che sarà insegnato, e le modalità stesse dell'insegnamento. Determina anche come le performance saranno valutate. Un efficace curriculum nazionale da agli insegnanti, allievi, genitori,collaboratori e all'ampia comunità un chiarimento su come le abilità e le conoscenze vengono raggiunte dai giovani a scuola.
Lascia che la scuola incontri i bisogni individuali per sviluppare i diversi caratteri e costumi delle comunità locali. Provvede alla struttura con la quale tutti i partner possono sostenere i giovani nelle loro formazione.

Deve essere abbastanza forte da definire e difendere il centro della conoscenza e dell'esperienza culturale che è un elemento di riconoscimento per ogni studente e allo stesso tempo flessibile abbastanza da dare agli insegnanti la possibilità di costruire i propri percorsi didattici nel modo che ritengono più efficace. Il punto focale di questo Curriculum Nazionale insieme con il curriculum scolastico, è di assicurare agli allievi di sviluppare in giovane età le loro abilità numeriche e letterarie; Provvede a garantire, pienamente, un elemento per l'insegnamento; per alimentare la creatività degli allievi; dare agli insegnanti discrezionalità per trovare il modo migliore che crei nei propri allievi la gioia e l'entusiasmo per l'apprendimento nel lungo periodo.

Il diritto all'apprendimento deve essere un diritto acuisito per gli allievi. Questo Curriculum Nazionale include, in un primo momento, un elenco dettagliato di argomenti e di principi che la scuole devono seguire nei loro insegnamenti, assicura la possibilità di superare, se un individuo ne ha necessità, le potenziali barriere che potrebbe incontrare.

Ognuno dei paesi che ha sviluppato il proprio curriculum base, segue più o meno i principi del Curriculum Nazionale. Cercheremo di dare più dettagli possibili circa i principi matematici che sono stati dati ai paesi partecipanti al progetto. Il materiale di insegnamento dalla classe 4 alla 12 è presentato nelle tavole 3 e 4.

Tavola 1: Livello 1

ETÀ 9-14	CIPRO	BULGARIA	REPUBLICA CECA	GERMANIA	GRECIA	ITALIA	ROMANIA	UNITED KINGDOM
• **COMBINATORIA** Classificazione principale (Principio di Dirichlet) cardinalità di insiemi finiti Principio di Inclusione ed Esclusione	12-13						10-14 13-14	
• **TEORIA DEI NUMERI** • *Divisibilità di numeri (criteri, Divisione Euclidea, Algoritmo Euclideo) *Numeri Primi (includendo la scomposizione dei numeri) *Proprietà di Numeri * rappresentazione della Base dei numeri	9-13 10-13 9-14 11-13 12-13	10-11 11-12	11-12 11-12 10-11	9-13 11 11 11	9-13 11-12 10-11	11-14 11-14 11-14 11-14 11-14	9-13 11-12 13-14 10-13 9--13	9-14 9-14 9-14
• **GEOMETRIA EUCLIDEA PIANA** *Principio di Dirichlet in Geometria * Geometria Combinatoria *Taglia e ricopri *Aree di Figure *Geometria del Triangolo *Geometria del Cerchio	9-13 9-13 9-13	11-14 12-14	9-13 9-12 9-14	11-14 11-13	9-14 10-13 9-14	11-14 11-14 11-14	9-13 11-13 11-13	9-14 9-14 9-14
• **DISEGUAGLIANZE** * diseguaglianze Algebriche * diseguaglianze Geometriche	9-14	12-14 12-13		11-13	13-14	11-14 11-14	10-14	9-14
• **POLINOMI** *Fattorizzazione di Polinomi * equazioni lineari e quadratiche	13-14		13-14	14	13-14		13-14 10-14	9-14
• **MODELLI MATEMATICI SEMPLICI** • (invece di "Problemi con parole (in LN)") *Problemi con parole (in LN) *Processi di Problemi *Storia di Problemi	9-14	10-14		10-11	9-14		10-13	9-14

• **FUNZIONI** *Dipendenze e Corrispondenze * Funzioni Lineari		11-14		14 14	13-14		13-14	9-14
• **MATEMATICA DISCRETA** * Probabilità Elementare *Elementi di Teoria dei grafi *Successioni	[9-12]	10-13	11-12	9	11-12	11-14 11-14	9-13 11-14	9-14
• **INVARIANTI** * scoperta di invarianti (cominciando con la divisibilità) *Giochi di strategia basati su invarianti						11-14		
• **TRASFORMAZIONI** *Traslazioni, Riflessioni, Rotazioni, Inversioni (tutte definite geometricamente) *Proprietà di Figure *Composizioni di trasformazioni (dello stesso tipo)	10-11		9-13	9-14	9-14	11-14	10-14	9-14

Tavola 2: Livello 2

ETÀ 15+	CIPRO	BULGARIA	REPUBLICA CECA	GERMANIA	GRECIA	ITALIA	ROMANIA	UK
<u>Combinatoria</u>								
• Principi di classificazione			18-19					
➢ Algebra								
➢ Geometria								
• Classificazione	17-18	15-16						17-18
• problemi di Logica combinatoriale	17-18	15-16	18-19				15-16	
• Probabilità	17-18	15-16		19	14-15, 17-18		15-16	14-18
• Inclusioni, principi di Esclusione								
<u>Teoria dei numeri</u>								
• Proprietà di interi (divisibilità)					16-17			14-18
• Numeri Primi	16-17		15-16					
• IrRazionalii	15-17		15-16		16-17			14-18
• Equazioni Diofantee	16-17	14-15		15-16	16-17		14-15	14-18
• Congruenze	16-17							
• Applicazioni (e.g. in crittografia)		14-15						
<u>Geometria del piano</u>								
• Triangolo (punti comuni ai triangoli)	14-16	14-16			15-16	14-16		
• Poligoni	14-17	14-16	15-16		15-17	14-16		14-18
• Cerchi	15-17		15-16			14-17		14-18
• Ottimizzazione di problemi								
• Luoghi Geometrici	15-18		15-16	15,19	15-17		16-17	14-18
• Construzione di problemi	14-18	14-16	15-16		16-17			
• Trasformazioni (Similitudine, Inversioni)	15-17	14-15	14-16 15-16	15	14-16 15-16	15-16 15-16		
• Teoremi speciali (Euler, Ceva, Simpson, etc.)	14-15 17-18	15-16	15-16 17-18	15		14-18	17-18	
• proprietà Metriche (area, etc.)	15-16	15-16		15	15-17	15-16	16-17	
• diseguaglianze Geometriche	14-15				14-15	14-15		

ETÀ 15+	CIPRO	BULGARIA	REPUBLICA CECA	GERMANIA	GRECIA	ITALIA	ROMANIA	UK
Geometria dei Solidi								
• Proprietà di rette e piani	14-16	17-18	16-18			16-17	16-17	
• Solidi, corpi convessi								
• proprietà Metriche	14-16	17-18	14-18	15,16	14-15	16-17	15-16	14-18
• Ottimizzazione di problemi						16-18		
• DimostRapportoni		17-18						
• diseguaglianze Geometriche nello spazio								
Diseguaglianze								
• Algebriche	15-18	15-16	15-16		14-16		15-17	14-18
• Trigonometriche			16-17				15-16	
Polinomi								
• Proprietà,	14-18	14-15	15-17	17	16-17	14-15		
• Divisione Euclidea, radicali, fattorizzazione	14-15		15-16		14-15		5-16	14-18 14-18
• Soluzioni				16	16-17		15-16	14-18
• funzioni Simmetriche di radici								
modelli Matematici, formulazione di problemi, logica		14-17						14-18
Funzioni			14-19					
• Grafi	14-18	15-16	14-17		14-18	17-18	14-17	14-18
• Equazioni, proprietà e relazioni di funzioni	15-18	14-18	16-17	16	15-16		14-17	14-18
• Funzioni speciali (trigonometria, esponenziali, etc.)	16-18	14-18	14-17	16	14-17	17-18	15-17	14-18
Numeri Complessi								
• Proprietà	16-18	17-18	17-18		17-18		15-16	17-18
• Applicazioni alla geometria	16-18				17-18		15-16	17-18
Matematica Discreta								
• Ricorrenza								17-18
• Algoritmi								
• Logica proposizionale								17-18
• Teoria dei grafi								

ETÀ 15+	CIPRO	BULGARIA	REPUBLICA CECA	GERMANIA	GRECIA	ITALIA	ROMANIA	UK
induzioni Matematiche • Varianti di metodi di induzione • Applic. in algebra, geometria, Combinatoria, etc.	16-18		16-18		16-17		14-15	14-18
Trigonometria • Proprietà • Applicatzioni in geometria	14-18 17-18		16-17	16 16	14-17 16-17	17-18 15-18	16-17 16-17	14-18
Successioni • Proprietà, limiti Serie (Finite, infinite, convergenze)	16-18 17-18	16-17 16-17	17-19 17-19	15 17	16-18	16-17	15-16 16-17	14-18 17-18 17-18
Statistica • Proprietà, concetti base • Applicazioni	17-18	16-18		19 19	17-18		15-16	14-18 14-18
Invarianti Applicazioni				15				
Algebra Lineare • Vettori • Determinanti • Matrici	16-17	17-18	16-18	17 19 19	14-17		15-18 16-17	14-18 17-18 17-18
Geometria Analitica • Rette • Sezioni Coniche • Applicazioni			17-18		17-18			17-18
Methodi di Trasformazione • Pilosofia della teoria della trasformazione • Applicazioni							15-16	14-18
Giochi Matematici								17-18

Tavola 3: curriculum di livello 1

	4th classe **9-10**	**5th classe** **10-11**	**6th classe** **11-12**	**7th classe** **12-13**	**8th classe** **13-14**
CIPRO	**numeri Interi: 0-10000, 10000-1000000** scrittura, confronto, ordinare Operazionii con numeri interi **Addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione.** Fattorizzazione di numeri Frazione Unità, parte Similare e diversa delle Frazione, operazionii con Frazione, Addizione, sottrazione con diverse Frazione Addizione, sottrazione con diversa Frazione Il concetto di compaRapportone di decimali primo valore; un decimo, un centesimo **Operazionii con numeri decimali** Addizione, sottrazione Arrotondare **MisuRapportone** Concetti Perimetro, area, suscettibilità, misura, tempo unità di misura (denaro, lunghezza, tempo) **Geometria** **3D forme** cubi, cuboide, **Analogie** costruzioni riconoscimento di facce, angoli, vertici	**numeri interi superiori a 1000000000** valore di una cifra (milioni, miliardi) Numeri Primi e numeri composti massimo comune divisore minimo comune multiplo scrittura di numeri, confronto **operazionii con interi** moltiplicazione a tre cifre divisione a due cifre calcolo dell'addizione, della sottrazione, moltiplicazione, divisione proprietà delle operazionii totali di fattorizzazione di numeri Frazione **Il concetto di fRapportone** Unità, parte di gruppi di cose Frazione equivalenti e non **Successioni numeriche** **numeri misti** Riduzioni Trasformazione di Frazione in numeri decimali **Operazionii con Frazione** Addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione **Il concetto di numeri decimali** Valore (dieci, cento, mille) **operazionii con decimali** Addizione, sottrazione, Moltiplicazione con numeri interi e decimali Divisione con decimali	**numeri interi superiori a miliardi** valore di una cifra (milioni, miliardi) scrittura di numeri confronto, Successioni di numeri numeri primi e numeri composti massimo comune divisore minimo comune multiplo fattorizzazione totale di numeri al quadrato **Proprietà** (concetto, riconoscimento, scrittura) **operazionii con interi** moltiplicazione a tre cifre divisione a due cifre calcolo di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, proprietà delle operazionii, fattorizzazione totale di numeri, Frazione, **Il concetto di fRapportone** Unità, parte di gruppi di cose Confronti ed equivalenze (Frazione equivalenti e non) Successioni Numeri Misti	**Insiemi** Sottoinsiemi Insiemi uguali, insiemi diversi, Proprietà di insiemi uguali Unione e sezioni di due o più insiemi Grafici Rappresentazione dell'unione di due o più insiemi L'uso di insiemi per la risoluzione di problemi **Numeri Naturalii** Definizione di numeri naturali Confronto di numeri naturali Uguaglianze o diseguaglianze Proprietà delle uguaglianze o delle disuguaglianze Uso delle quattro operazionii nell'insieme dei numeri naturali Priorità delle operazionii Equazioni Soluzione di problemi connessioni con i numeri reali **Concetti base di Geometria** Punti, rette, piani, forme, costruzioni, segmenti, punto medio di un segmentoo , unità di lunghezza, addizione o sottrazione di segmenti, definizione di angolo, tipi di angoli, costruzioni di un angolo,	**numeri Razionalii** Riconoscimento di numeri positivi e negativi, numeri opposti Confronto di numeri Razionalii definizione di valore assoluto, eliminazione di parentesi, calcolo di valore aritmetico di espressioni algebriche **Proprietà dei numeri Razionalii che hanno come esponente un numerointero** Proprietà Proprietà dei numeri Razionalii che hanno come esponente un numero intero positivo o negativo Trasformazione di proprietà di numeri Razionalii che hanno come esponente un numero intero positivo o negativo **Diseguaglianze** Diseguaglianze di formule $ax+b>c$ or $ax+b<c$ e rappresentazione grafica delle soluzioni **Equazioni** Tipi di equazioni *con soluzione o senza soluzione, o indefinite. Verrifica della soluzione di un aequazione Il concetto di Rapportonele, e analogia Proprietà di analogie, problemi di ricerca di valori sconosciuti di in una analogia **Aree di forme piane** **Stereograficihe** (Poliedri, prismi, paralleliepipedi, cuboidi, Piramide, spirale, cono, sfera, Problemi di area e misurazione di volume)

	Poligoni (triangolo, quadrato, rettangolo, parallelogrammo, pentagono, esagono) **Tipi di triangoli** Nomi, classificazioni, proprietà, costruzioni, **Angoli** Angolo retto Costruzioni, confronto **Rette** Rette, segmenti, rette Parallele e che si intersecano **Cerchio** Costruzione, raggio, diametro Simmetria –assi di simmetria completamenti di parti mancanti di figure simmetriche **Statistica** Grafi Collezione e raccolta di dati Costruzioni Ordinamento di coppie Probabilitità **Problem solving** Strategie di problem solving	Calcolo di addizione e sottrazione Arrotondamento **Rapporti, Proporzioni, Percentuali** Il concetto di Rapporto, Uguaglianza di due Rapporti Somme Proporzionali **Unità di Misura** Perimetro, area, peso, tempo Area di rettangolo quadrato, parallelogrammi, triangolo Volume di cubi, cuboide, unità metrica (cm, m, km, l,g, cm^2, m^2, cm^3 Misurazione del tempo (min, sec, mesi, giorni, anno etc,) **Geometria forme 3D** cubi, cuboide, piramidi riconoscimento di facce, angoli, vertici costruzioni Poligoni (triangolo, quadrato, rettangolo, parallelogrammo, pentagono, esagono) **Tipi di triangoli** Nomi, classificazioni, proprietà, costruzioni, **Angoli** Tipi di angoli (Retto, ottuso, acuto) Costruzioni, confronto Misurazione angoli **Rette** Rette, segmento, rette parallele, perpendicolari e che si intersecano **Cerchio** Costruzioni, raggio, diametro Perimetro, area Simmetria -assi di simmetria, completamenti	Riduzioni Trasformazione di Frazione in numeri decimali **Operazioni con frazioni** Addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione **Il concetto di numero Decimale** Valore osizionale; (dieci, cento, mille) **operazioni con decimali** Addizione, sottrazione, Moltiplicazione con numeri interi Divisione con decimali Calcolo di addizione e sottrazione Arrotondamento di numeri decimali **Rapporti, Proporzioni, Percentuali** Il concetto di Rapporto, Uguaglianza di due Rapporti Ricerca del termine mancante Uso di analogie nella risoluzione di problemi ricerca di percentuali ricerca la somma se la percentuale è conosciuta **Unità di Misura** Concetti: Perimetro, area, peso, tempo Area di rettangolo quadrato, parallelogramma,	confronto di angoli, addizione e sottrazione di angoli, costruzioni di rette perpendicolari, definizione di distanze di un punto da una retta, proprietà dielle perpendicolari, costruzioni delle intersezioni di rette, definizione di angoli adiacenti, convessi, angoli retti, complementari, supplementari, bisettrice di un angolo, costruzioni di una bisettrice di un angolo, definizione e costruzioni di un cerchio ed elementi di un cerchio, Differenze di un cerchio e settore circolare, arco, corda, definizione di angolo al centro, relazione tra un arco e un angolo al centro, posizioni di rette e cerchio, distanze dal centro di un cerchio da una retta rispetto al raggio **Rette parallele** **Triangolo** **Quadrato** **Perimetro** **Area** **Teorema di Pitagora** **Divisibilità di numeri naturali** **Frazione** **numeri Decimali**	

		di parti mancanti di figure simmetriche **Statistica** Grafi (a barre, etc) Spiegazioni Raccolte dii dati Costruzioni Ordinare per coppie Valore medio Probabilità Scrittura dei risultati Conclusioni previsioni **Problem solving** Stadi di problem solving Strategie del problem solving (costruzioni di una tabella) scegliere la giusta delle quattro operazionii utilizzare il ragionamento logico stima e controllo scrivere le domande per completare un problema **Problemi di** Esplorazione Interi, Frazione, decimali geometria misurazione proporzioni	triangolo area di cubi, cuboide, piramidi Volume di cubi, cuboide, Unità Metrica (cm, m, km l,g, cm^2, m^2, cm^3 Misurazione tempo (min, sec, mese, giorno, anno etc) Misurazione di angoli **Geometria** **Forme 3D** cubi, cuboide, piramidi riconoscimento di facce, angoli, vertici area costruzioni **Poligoni** (triangolo, quadrato, rettangolo, parallelogramma, pentagono, esagono) **Tipi di triangoli** Nomi, classificazioni, proprietà, costruzioni, **Angoli** Tipi di angoli (Retto, ottuso, acuto) angoli Complementare e supplementari Costruzioni, confronto Misurazione angoli **Rette** Rette, segmento, Rette Parallele, perpendicolari e intersecanti Cerchio Costruzioni, raggio, diametro Perimetro, area Simmetria -assi di simmetria, completamenti di parti mancanti di figure simmetriche		

			Statistica Grafi (a barre, etc) Spiegazioni Raccolta di dati Costruzioni Valore medio Probabilità Scrittura di risultati Conclusioni previsioni **Problem solving** **Stadi di problem solving** Strategie di problem solving (costruzioni di una ttabella) scegliere tra le quattro operazionii uso di ragionamento logico stima e controllo scrivere le domande per completare il problema **Problemi di** Esplorazione Interi, Frazione, decimali geometria misurazione proporzioni, percentuali, interesse		
BULGARIA		**Numeri. Algebra**. **Frazione. Decimale Numeri. Applicazioni in:** Figure e Solidi; Conoscenze logiche; Modelli. **Figure e Solidi.** **Figure Geometriche E Solidi.** **Applicazione in:** Funzioni. Misurazione; conoscenze logiche; Modelli.	**Numeri. Algebra.** **Proprietà.** **Applicazione in:** Conoscenze Logica; Elementi di Probabilità e Statistica. **Numeri. Algebra.** **Numeri Razionali.** **Applicazione in:** Funzioni. Misurazione; Conoscenza Logica; Elementi di	**Numeri. Algebra.** **Espressioni Intere** **Applicazione in:** Conoscenza Logica; Modelli. **Figure e Solidi.** **Geometria Generale Figure** Funzioni. Misurazione; Conoscenza Logica; Elementi di Probabilità e Statistica. **Numeri. Algebra** **Equazioni.**	**Numeri. Algebra** **Radice Quadrato .** **Applicazione in:** Conoscenze Logica; Modelli. **Numeri. Algebra.** **Equazioni al Quadrato.** **Applicazione in**: Conoscenze Logica. **Figure e Solidi.** **Vettori. segmento.** **Applicazione in**: Conoscenza Logica; Modelli. **Funzioni. Misurazione.** **Funzioni. Applicazione in:**

		Numeri. Algebra. Dividendi. Applicazione in: Conoscenza Logica. Numeri. Algebra. **Frazione. Applicazione in:** Conoscenza Logica; Elementi di Probabilità e Statistica; Modelli.	Probabilità e Statistica. **Figure e Solidi. Figure Geometriche e Solidi. Applicazione in: Funzioni.** Misurazione; Conoscenze Logica; Modelli; Elementi di Probabilità e Statistica. Numeri. Algebra. **Espressioni. Applicazione in:** conoscenza Logica.	**Applicazione in:** Conoscenza Logica; Modelli. **Figure E Solidi. Triangoli Uguali. Applicazione in:** Conoscenza. Logica **Numeri. Algebra. Diseguaglianze. Applicazione in:** Figure e Solidi; Conoscenza Logica; Modelli. Figure e Solidi. **Parallelogramma. Trapezio. Applicazione in:** Conoscenze Logica.	Elementi di Probabilità e Statistica; Modelli. **Funzioni. Misurazione. Uguaglianze. Applicazioni in**: Numeri. Algebra. Conoscenza Logica; Modelli. Numeri. Algebra. **Vettori di Rette** **Sistemi di equazioni con due incognite. Applicazione in:** Conoscenze Logica. Numeri. Algebra. **Sistemi di Rette** **Diseguaglianze lineari in una incognita.** Applicazione in: Conoscenze Logica. **Figure e Solidi.** **Cerchio e Poligono. Applicazione in:** Funzioni. Misurazione; Conoscenze Logica.
REPUBLICA CECA	**Numeri superiori A 1 000 000** (retta numerica, arrotondamento, operazionii, stime) **Frazione** (unità, parte, Frazione; numeratore, denominatore, mezzi, quarti, terzi, sesti, decimi) **Rette parallele e rette intersecanti,** perpendicolari, cerchio (posizione di due rette in un piano, centro e raggio) **Simmetria** (assi di simmetria, figure simmetriche, triangolo isoscele, triangolo equilatero) Area di a quadrato, rettangolo, cubo e cuboide	**Numeri Naturali** (numeri naturali superiori a un milione, successioni di numeri naturali, retta numerica, sistema dei numeri decimali, operazioni aritmetiche con Numeri Naturali e loro proprietà **numeri Decimali** (Frazione con denominatore 10 e 100 decimali; un decimo, un centesimo) **2D e 3D forme** (costruzioni di un rettangolo – inclusione di un quadrato, per unità di area (are, ettari, km^2, mm^2), superficie di area di un cuboide e cubo; uso differente di insiemi di contenitori per introdurre il il concetto di volume **Tavola, grafi, diagrammi** (variabile independente e dipendente; grafi, sistema	**Consolidmento di** conoscenze e abilità che i bambini hanno acquisito alla scuola primaria **numeri Decimali** (numeri decimali, confronto di numeri decimali, addizione e sottrazione di numeri decimali, moltiplicazione e divisione di un numero decimale con un numero naturale; moltiplicazione e divisione di numeri decimali, scrittura di algoritmo, proprietà delle operazioni aritmetiche con numeri decimali) **Divisibilità di numeri naturali** (multiplo, divisore; divisibilità tests per 2, 3, 5, 10; numeri primi,	**Frazione** (Frazione, Frazioni equivalenti, riduzioni di Frazioni, operazioni con Frazioni, comune denominatore, Frazioni reciproche, numeri misti) Interi (positivi e negativi, numero opposto, assoluto valore posizionale) decimali negativi. Numeri Razionali, operazioni. **Rapporto. proporzioni Dirette e inverse** (scale, sistema di coordinate; grafo di una proporzione diretta e inversa, regola del tre) **Percentuali.** Interessi **Congruenza**, rotazione (congruenza di figure piane; simmetria di triangoli,	**Quadrato e radice quadrato.** Teorema di Pitagora **Proprietà con esponenti natural** (operazionii, decimali notation) **Espressioni** (numero espressioni, variabili, polinomi) **Rette equazioni** (uguaglianza, rette equazioni, equivalenti rette equazioni) **Cerchio, cilindro** (cerchio, circonferenza di uncerchio, l posizione di un cerchio e una rette – tangenti, secanti posizione di due cerchi; numero π; cilindro, base,, volume e area di superficie) **Costruzioni** (base costruzioni di triangoli quadrilateri; insiemi di punti di una data proprietà)

		di coordinate.	scomposizione di un numero nei divisori primi, massimo comune divisore, minimo comune multiplo) **Angolo e misura** (angolo come misura, grandezza di un angolo, grado, minuto, angolo acuto, retto, ottuso e assi di simmetria (congruenza di Figure Geometriche, riflessione, simmetria, rette di simmetria; forme simmetriche; angoli; supplementari, opposti al vertice; addizione e sottrazione di angoli, moltiplicazione e divisione di angoli) **Triangolo** (angoli esterni e interni di un triangolo, isoscele ed equilatero, altezza di un triangolo, mediana e baricentro di un triangolo, circoscritto e inscritto in un cerchio, disuguaglianza triangolare) **Volume e area di superficie di un a cubo** (volume di un cubo, unità di volume: cm^3, m^3, dm^3, mm^3, hl, dl, cl, ml, cubo — volume, superficie area di un cuboide, facce e diagonali, rappresentazione isometrica di un cuboide 2D)	teoremi, figure simmetriche) **Quadrilateri, prisma** (parallelogramma e sua proprietà, rettangolo, rombo, quadrato; perimetro e area di un parallelogramma, area di un triangolo; trapezio, perimetro e area di un trapezio; prisma, volume e area di superficie di un prisma).	
GERMANIA	**Calcolo con numeri tra 0**	**Numeri tra 0 e**	**Calcolo in contesti:**	**Calcolo in contesti**	**Calcoli Elementari con**

	e 100 **Numeri tra 0 e 1000** **Addizione con numeri tra 0 e 1000** **Semplici compiti per moltiplicazione e divisione** **unità Misura** (denaro, lunghezza, tempo) **Geometria** (misurazione, simmetria)	**1 000000** **Addizione e sottrazione con numeri tra 0 e 1 000000** **Moltiplicazione con numeri tra 0 e 1 000000** **Divisione** (metodo di scrittura) **Unità di Misura (lunghezza, tempo, misura e volume)** **Compiti speciali** (tabelle, grafici, texts) **Geometria** (angolo di 90 gradi, parallele e applicazioni)	unità di Misura e esercizi con denaro/corrente, lunghezza, tempo, e misura. Calcolo da una unità di misura a un'altra Arrotondare per eccesso e per difetto, interpretazione rispondere a compiti riguardanti un contesto **Calcolo con numeri naturali:** l'insieme di numeri naturali successioni di numeri naturali, pari e dispari. progressione aritmetica Rappresentazione di numeri naturali in una rette numerica Definizione: somma, prodotto, differenza e quoziente operazionii: (moltiplicazione prima dell'addizione) Operazionii + -- * : Commutatività, leggi Associative e Distributive Relazioni < , > , = (Riflessività, simmetria, transitività) Algoritmi in forma scritta. **Divisibilità:** Divisibilità in N divisori e insiemi di multipli Regole per la divisibilità (ultimo numero è 2, somma di cifra decimalie	Esercizi per calcolare con Frazioni e decimali Calcolo di aree e volumi Connessione tra differenti unità di misure **Calcolo di Frazione** operazioni base con Frazione: Addizione e sottrazione Moltiplicazione con Frazione (modello di permanenzai, Frazione inversa) Divisione di Frazione con numeri naturali e con frazioni **Decimali ed operazioni.** Trasformazione di una frazione in decimale e viceversa. Addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione con decimali periodici (e.g. 3,753 periodo) **Geometria** (angoli, triangolo, cerchio) Angoli Costruzione di triangoli, quadrangoli e classificazione Poligono Triangoli ABC (con stessi lati etc.) Quadrangoli: ABCD Trapezio, parallelogramma, quadrato, Identificazione di cerchi e costruzioni di semicerchio, settori circolari, raggio. Volume di cubi.	**percentuali** Descrizioni con Frazioni, 1/4 =25 % Frazione, numeri decimalii, percentuali Visualizzazioni con diagrammi Determinazioni di percentuali di un dato oggetto Determinazioni di un valore percentuale **Calcolo con numeri Razionali** Introduzione di numeri negativi (principio di permanenza) Relazione tra numeri Razionali Addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione **Algebra** (Introduzione) Lettere come nomi per una variabile Sostituzione di un valore per una variabile in una equazione Diseguaglianze con una variabile Insieme di soluzioni Algoritmi: 1. semplificazione di termini; 2. regola di addizione; 3. regola di moltiplicazione. **Relazioni -- (Anti) proporzionalità** definizioni di "corrispondenze e funzioni", differenti modi di rappresentazione tabelle, assi, Proporzionalità e proprietà; y = ax . Applicazione Calcolo di soluzioni grafiche. **Geometria** (defnizioni fondamentali) Definizioni base, riflessione di una retta costruzioni geometriche e metodi di riflessione.

			coefficienti divisibili per 3) Scomposizione in fattori primi Massimo comune divisore e minimo comune multiplo. **Geometria:** fondamentali definizioni dello spazio piano, Rette caratterizzate da: ogni punto ha due semirette, segmenti. Vettori e rette orientate Relazioni: ortogonali, parallele, congruenti Operazioni: sottoinsieme, intersecazione, unione di insiemi Reflessione di rette e simmetria di assi Cubo, quadrato, piramidi, cilindro, cono, cerchio volume di rettangoli Modelli, mappe, piani, cerchio, strumenti per disegnare rette e angoli. **Frazione e rappresentazione di Frazione** Frazione e rappresentazione di Frazione Rappresentazioni di Frazione e loro sviluppo Scomposizioni di unità misura in Frazione Differenti rappresentazioni di Frazione (classi equivalenti).		Triangolo, cerchio, rette, segmento, semirette Segmento e lunghezza, Distanze tra due rette parallele Lunghezza di un segmento AB Distanza di un punto da una retta Parallelismo e ortogonaliità di rette Particolari angoli Riflessioni di rette e proprietà/ simmetria e assi costruzioni base con rette e cerchio (costruzioni di un punto medio di un segmento, costruzioni di rette ortogonali) costruzioni dirette parallele, ricerca dell’angolo metà] **Geometria** (riflessiva, triangoli, cerchio) forme triangolari somma di angoli in un triangolo congruenza e area di triangoli costruzioni base di triangoli Secanti, tangenti al cerchio Teorema di Talete

GRECIA	Il corso è più o meno descrittivo, gli studenti apprendono facilmente con concetti e figure. **Geometria dei Solidi** (parallelepipedo, cubi), concetto di lunghezza. Punti, angoli. Rette parallele, rette in generali, cerchio. Poligoni. **Simmetria.** Perimetro e area di figure. Volume, misura. Calcolo. **Sistema Decimalie.** Addizioni, sottazioni, moltiplicazioni, divisioni. Problemi sulle quattro operazionii. **Frazione** (operazioni, problemi). **Numeri Decimali** (annotazioni, operazioni, problemi).	**Interi decimali** annotazioni (operazioni, criterio di divisibilità, problemi). **Frazione** (operazioni, confronto, arrotondamento, conversione in decimali). **Geometria dei solidi** (parallelepipedi, angoli, rette parallele, rette perpendicolari). Misurazione di grandezze (lunghezza, area, angolo, peso, tempo). **Operazioni e problemi** con i decimali. **Operazionii e problemi** con la Frazione. **Poligoni** (triangoli, quadrilateri, parallelogrammamo). disegni in scale. **Area.** **Cerchio** (circonferenza, area), poligoni regolari. **Statistica** (manipolazione numerica di dati, charts).	**Revisione di proprietà di numeri.** Introduzione all'uso di una lettera al posto di numeri. **Problemi** (numerici o geometrici) equazioni con un incognita. Espressioni (area di un triangolo) uso di due variabili. **Numeri Primi e composti.** Rappresentazione di un numero come prodotto Minimo comune multiplo. **Proprietà delle decine.** Proprietà di figure tridimensionali e il loro sviluppo. Misurazione di grandezze. Scale. **Proporzione**. quantitià proporzionali e inversamente proporzionali Percentuali. Interessi. **Idea di un grafo.**	**Numeri Naturali e decimali** (operazioni, algoritmo Euclideo, divisibilità, proprietà). **Misurazione di grandezza** (area e volume di varie figure). **Frazione** (operazioni, conversione in decimali) **Proporzioni e scale** (percentuali, lettura di mappe). **Figure geometriche** di **Base** distanze, perpendicolarità, rette parallele, cerchio). Angoli (superiori alla somma di angoli in un triangolo). **Figure Piane** (uguaglianza di triangoli, parallelogrammamo e area). **Numeri Razionali** (positivi e negativi).	**Numeri Razionali** (proprietà). **Equazioni e diseguaglianze** (soluzioni di). **numeri Reali,** quadrato, irrazionali, piano Cartesiano, teorema di pitagora. **Trigonometra Base (**seno, coseno, tangenti. Caso di 30^0, 45^0, 60^0). **Funzioni e loro grafi** (y = ax + b, y = a/x). Statistica (diagrammi, frequenza, principali medie, mediana). **Simmetria** (rispetto a punti e rette). **Misurazione di cerchio** (poligoni regolari, circonferenza, area). **Misurazione di figure 3D** (prisma, piramidi, cilindro, cono, sfera).
ROMANIA	**Numeri naturali:** (unità, migliaia, milioni, bilioni); scrittura, confronto, ordinamento, arrotondamento Caratteristiche del sistema di numerazione che stiamo usando: decimali e scrittura con numeri romani **Operazionii con numeri naturali:** -addizioni e sottrazioni; specifica terminologia,	**Numeri Naturali** Scrittura e lettura di naturali numeri; successioni di naturali numeri Rappresentazione di numeri naturali. Confronto ed ordinamento di numeri naturali Addizioni di naturali Sottrazione di naturali Moltiplicazioni di naturali; Divisioni con resto Comune divisoree	**Algebra** **Naturali numeri** **Insieme di naturali numeri** Divisore, multiplo Criterio di divisibilità per 10, 2, 3 Proprietà di divisibilità relazione in □ numeri Primi e numeri composti La scomposizione dei numeri naturali come prodotto di numeri	**Algebra, Insieme di numeri interi, Insiemi** Il nozione di insieme; relazione (uguaglianza, inclusione): operazioni (intersezione, unione, differenza, prodotto Cartesiano) **Interi numeri** Il insieme di interi numeri; rappresentaziun on il assi; operazionii; grado di doing	**Algebra** **Numeri Reali** $\square \subset \square \subset \square \subset \square$. Varie forme di scrittura e numeri reali. Rappresentazione sulla retta. Approssimazione. Valore Assoluto di un numero reale. Intervalli intersezione ed unione. Operazioni con numeri reali della forma $\sqrt{b},\ b > 0$ (somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione, proprietà)

	somma etc. -moltiplicazioni per 1,10, 100; -moltiplicazioni che usano distribuzioni rispetto all'addizione (senza usare questa terminologia) -moltiplicazioni per fattori; casi differenti; terminologia specifica -divisioni con il resto; terminologia specifica -divisioni per 10, 100, 1000; **Problemi** che sono risolti al più con tre operazioni Problemi che sono risolti con metodi figurativi Problemi di stima; Problemi per organizzare le tabelle Problemi che riguardano più di tre operazioni; logica e probabilità **Frazione** -il concetto di Frazione; Frazione equivalenti; rappresentazioni di figure confronto di Frazioni somma e differenza di Frazione con lo stesso denominatore ricerca di Frazione e interi **Ricerca di una incognita nelle relazioni** ?+a=b; ?-a=b; ?+a <b etc. **Elementi Intuitivi di geometria** figure geometriche punto, segmento, poligoni, angolo, rette parallele **rette perpendicolari** speciali quadrilateri: rettangolo, rombo, quadrato, **parallelogramma, trapezoidi**	Divisore, multiplo, divisibilità per 10, 2, 5. Numeri pari e dispari. Soluzione e formazione di equazioni; disequazioni e problemi sulle operazioni aritmetiche studiate (inclusi elementi di gruppi superiori) Potenza di numero naturale; *quadrati perfetti Di un numero naturale. Compazione e ordinamento di potenze e relative regole Grado delle operazionii. **Regole di calcolo con le potenze* Sistema Decimali di numerazione *Storia dell'evoluzione dei sistemi di scrittura dei numeri*Base di *numerazione* proposizioni vere e false "e", "O", "Notn; "se-allora" Insiemi (descrizione e scrittura); elementi, relazione **Gli insiemi Z e Z*** numeri interi Negativi interi. L'insieme di numeri interi. Rappresentazione di un numero intero. Relazione tra insiemi, sottoinsieme Operazioni con insiemi (intersezione, unione, differenza) Esempi di insiemi finiti; L'insieme dei divisore di un numero naturale Esempi di insiemi infiniti; L'insieme di multipli di un numero naturale. **Numeri Razionali** Frazione; Rappresentazione di	primi Comune divisorei di due o più numeri naturali; massimo comune divisore; numeri Primi Comune multiplo di due o più numeri naturali; minimo comune multiplo **2. Operazioni con numeri positivi irrazionali** Differenti forme di rappresentazione di un numero Razionale. Rappresentazione in un asse della Somma di numeri positivi Razionali della Sottrazione Moltiplicazioni di numeri positivi Razionali Divisioni di numeri positivi Razionali Ordine del processo aritmetico delle operazionii. Equazioni **Rapporto e proporzioni** Rapporto Proporzioni; proprietà fondamentali delle proporzioni, ricerca di un termine sconosciuto. Percentuale. Quantitià direttamente proporzionali. Rappresentazione grafica di una proporzionalità diretta ed inversa La regola del tre e	operazionii divisibilità in □ : definizione, divisore, multiplo; equazion. **Insieme di numeri razionali** Insieme di numeri razionali (□); rappresentazione nella retta, l'opposto di un razionale; valore assoluto (modulo). Il inclusione $□ \subset □ \subset □$. Scrittura dei razionali in decimali e viceversa Somma di Razionali proprietà Sottrazione di Razionali Confronto di Razionali Moltiplicazioni di Razionali, proprietà, Divisioni di Razionali Ordine delle operazioni Potenze di □ equazioni della forma $ax+b=0,\ a\in □ *,\ b\in □$ Problemi che possono essere risolti utilizzando equazioni Rapporto; proporzioni; percentuali; successioni di uguali Rapporti Media Aritmetica e sua misura **Numeri Reali** radice quadrata di numeri naturali (quadrato perfetto) radice quadrata di un razionale positivo:Algoritmo per il calcolo della radice quadrata.	Formule con calcoli brevi $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2$ * $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm$ * $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b$ Scomposizioni in fattori Rapporto di numeri reali rappresentati da simboli (lettere) Operazionii $(+,-,*,/,\wedge)$ **Funzioni** Il concetto di funzione Funzioni definite in insiemi finiti, espresse da tabelle, formule; rappresentazione di grafi Funzioni $f: □ \to □,\ f(x)=ax+b(a,$ Grafico $f: A\to □,\ f(x)=ax+b(a,$ dove A è un intervallo o un insieme finito; Rappresentazione grafica **Equazioni e disequazioni** Equazioni $ax+b=0,\ a,b\in □$ Equazioni $ax+by+c=0,\ a,b,c\in □$ Sistemi di equazioni $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2+b_2y+c_2=0 \end{cases}$, a_i,b_i,c_i Metodi di sostituzione, riduzione, interpretazione geometrica; Soluzione di principali problemi

	perimetro (rettangolo e quadrato) area; area di rettangolo e quadrato **esercizi per l'osservazione di oggetti con forme di:** cubi, sfera, prisma, piramidi, cilindro, cono; (parallelepipedo) cuboide **Misurazione usando standards non convenzionali** Unità per la misurazione di -lunghezza: metro, multiplo, sottomultiplo, trasformazioni -capacità: litro, multiplo, sottomultiplo, trasformazioni -**superficie* (area): metro quadrato -tempo: ora, minuti, giorno, settimana, mese, anno, decade, secolo, millennio -monete e banconote	Frazioni Frazione unitrie; Frazioni Equivalenti Successioni di Frazioni uguali; Numeri Razionali positivi Comune denominatore di Frazioni Somma e sottrazione di Frazioni positive Razionali (solo per Frazione il cui comune denominatore può essere calcolato da osservazioni). Confronto di Frazioni Ricerca la Frazione da numero Scrittura di Frazione con denominatore potenza di 10 in forme decimali Confronto, ordinamento e rappresentazione di decimali. Somma e sottrazioni di numeri decimali finiti non nulli (moltiplicazioni per $10^2, n \in □$; moltiplicazioni per un numero naturale; moltiplicazioni di due decimali) Divisioni di numeri nturali che danno come risultato un numero decimale. Periodicità Divisioni di naturali numeri per $10^2, (n \in □)$ o da un naturale o da un decimale. Ordine delle operazionii con decimali. Approssimazione con decimali Soluzione e formazione di equazioni, disequazioni e	sua rappresentazione grafica Grafico rappresentativo di dati (grafici a barre); Elementi di gruppi e probabilità **Numeri Interi** Rappresentazione degli interi negli assi; opposito di un numero; valore assoluto Confronto ed ordinamento di numeri interi. Rappresentazione di un punto di coordinate intere in un sistema di assi ortogonali Addizione, Moltiplicazione, Sottrazione di numeri interi Multipli di un intero Divisioni di numeri interi quando il dividendo è un multiplo del divisore. Divisore di un numero intero Potenze con gli interi con esponente naturale Proprietà delle potenze. Risoluzione di equazioni in □ Risoluzione di diseguaglianze in □ . **Geometria** **Geometria di figure e corpi** strumenti Geometrici (regole	Approssimazioni Esempi di irrazionali; irrazionalità di $\sqrt{2}$ (dimostrazione non necessaria); insieme di numeri reali; valore assoluto; ordinare, rappresentare negli assi per approssimazioni Regole di calcolo $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$; $\sqrt{a} / \sqrt{b} = \sqrt{a/b},\ a > 0,\ b$ Inserire e togliere fattori dalla radice. **Calcoli Algebrici** Calcoli con reali da simboli: somma, sottrazione, moltiplicazione, potenze con interi; regole di calcolo con Formule $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$; * $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Soluzione il equazione della forma $x^2 = a$, con $a \in □$ Applicazioni Numeriche **Elementi di organizzazione di dati** Sistema di Assi Ortogonali; rappresentazione di punti in un piano utilizzando il sistema ortogonale; distanza tra due punti in un piano; soluzione di semplici problemi geometrici	di equazioni e sistemi di equazioni Soluzione in □ $ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in □$, scomponendo in divisori. Disequazioni della forma $ax + b > 0 (\leq, >, \geq),\ a, b \in □$ *Sistemi di due equazioni **Argomenti per la preparazione degli esami** **Geometria** **Relazione tra punti, rette e piani** Figure geometriche conosciute: cubo, rettangolo parallelepipedo, piramide, cilindro, cono, sfera (descrizione, rappresentazione nel piano, presentazione dei corpi, rotazione dei corpi) Punti, rette, piani: convenzioni del disegno e annotazioni Determinazione di una retta, del piano Tetraedo. Piramidi Relative posizioni di due rette nello spazio (utilizzando il corpi già studiati); assiomi delle parallele; parallelismo nello spazio Angoli con lati rispettivamente paralleli snza dimostrazione), angolo di due rette nello spazio; rette perpendicolari posizioni Relative a rette rispetto al piano *teorema relativo a rette parallele al piano Rette perpendicolari a un piano; distanze da un punto da un piano;Altezze di piramidi Simmetria di assi di un parallelepipedo posizioni relative di due piani Piani paralleli; distanze tra due piani paralleli Prisma: altezza, prismo retto

		problemi Media Aritmetica di due o più numeri; applicazione Rapporto; percentuali. L'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$ **Elementi di geometria e unità di misura** figure Geometriche: rette, curve, poligoni; angoli, triangoli, quadrangoli (disegnare una figura dalla descrizione; osservazione gli elementi: lati, vertici, angoli) Strumenti Geometrici. Disegno di figure geometriche e misura di lunghezza e angoli Rette Perpendicolari. Rette Parallele. *Localizzazione di un punto in un piano con coordinate intere Costruzioni di figure utilizzando la simmetria e la traslazione Oggetti Geometrici (descrizione; identificazione di elementi: vertici, angoli, facce) Misurazione e calcolo di lunghezza, perimetro e area, utilizzando differenti standard Misura dell'unità di misura della lunghezza; trasformazioni; area del quadrato e rettangolo superfici equivalenti Misura dell'unità di misura del volume; trasformazioni; volume di cubo e rettangolo paralleliepepedo Misura di capacità;	importanti e non; compasso, insieme delle squadre da disegno) Utilizzandoli in configurazioni di figure Geometriche: triangoli, quadrangoli, cerchi, segmenti, poligonali, rette, curve (presentata dalla descrizione e dal disegno): intersezione di due cerchi (presentazione intuitiva) Corpi Geometrici: cubo, paralleliepipedo, piramidi, sfera, cilindro, cono (descrizione e distinzione di elementi: vertici, angoli, facce; sviluppo di un cubo di un parallepipedo rettangolo) Identificazione di alcune figure geometriche di corpi geometrici conosciuti **Rette** Punto, rette, piani, sempiano, semiretta, segmento (descrizione, rappresentazione) Relative posizioni di un punto rispetto a una retta; punti; "attraverso due distinti punti passa una sola retta" Relative posizioni di due rette: rette coincidenti, parallele,	utilizzando la rappresentazione di punti in un sistema ortogonale; rappresentazione di numeri reali sugli assi, utilizzando compasso. Rappresentazione attraverso tabelle, diagrammi e grafici di dependenze funzionali. Calcolo di probabilità di eventi **Equazioni e sistemi di equazioni** Proprietà della relazione "=" nell'insieme dei numeri reali Equazioni della forma $ax+b=0,\ a,b\in\mathbb{R}$; insieme di soluzioni; equazioni equivalenti; soluzione equazioni *Utilizzando formule nella soluzione di equazioni riducibili a equazioni della forma $ax+b>0\ (<,\geq,\leq),\ a,b\in$ Insieme di soluzioni Equazioni della forma $ax+by+c=0,\ a,b,c\in\mathbb{R}$ Sistemi di equazioni con due incognite $\begin{cases} a_1x+b_1=c_1 \\ a_2x+b_2=c_2 \end{cases}$; Soluzione per riduzione e sostituzione Risoluzione di semplici problemi, che utilizzano equazioni,disequazioni e sistemi di equazioni. **Geometria Argomenti per le**	*prisma obliquo Sezioni parallele alla base di corpi già studiati, tronco di piramide. **Proiezioni Ortogonali in un piano** Proiezioni di punti, rette, segmenti angolo di rette con un piano; lunghezza della proiezione di un segmento. Teorema delle tre perpendicolari. Distanze da un punto a una retta. *Teorema dell'angolo diedro; piani perpendicolari Angolo piano corrispondente all'angolo diedro di due piani Calcolo di distanze e misura di angoli della stessa faccia orientati di corpi già studiati **Calcolo di area e volumi** Area e volume di un corpo geometrico Superficie laterale e totale, volume di prisma retto avendo come base un triangolo equilatero, un quadrato, un esagno regolare. Superficie laterale e totale, volume di piramidi regolari triangolari, esagonole regolare Cilindro circolare retto: descrizione, sezioni parallele e non di una base, Superfice totale, volume Cono circolare retto: descrizione, sezioni parallele di una base, Superfice totale, volume. Sfera: descrizione, area, volume

		trasformazioni Misura di massa; trasformazioni Misura del tempo; trasformazioni	non situate nello stesso piano Distanze tra due punti; lunghezza di un segmento; figure congruenti Segmenti Congruenti; Punto medio di un segmento; costruzioni di un segmento **Angoli** Definizioni, elementi; interini ed esterni, angolo nullo; angolo con Misurazione di angoli con il goniometro; costruzioni utilizzando il goniometro. Angoli Congruenti Angolo retto, acuto, ottuso Calcolo con misura di angoli espressi in decimali gradi, minuti, secondi Angoli adiacenti Bisettrice di un angolo; Angoli supplementari e complementari Angoli al vertice e loro congruenza; angoli intorno ad un punto **Congruenza di triangoli** Triangolo: definizione dei suoi elementi; Differenti tipi di triangoli: scaleno, isoscele, equilatero, rettangolo, ottuso (definizioni, disegno); perimetro di un triangolo, angolo	**competizioni** Angoli al vertice Congruenza di triangoli. Importanti rette in un triangolo Condizioni sufficienti perhé un parallelogramma diventi un rettangolo, un rombo, un quadrato Centro di simmetria e assi di simmetria per lo studio dei poligoni studiati. Trapezoidi classificazioni; isoscele proprietà. Area (triangoli, quadrangoli); calcolo di area di superfici utilizzando ricoprimento, punti, pavimentazioni, o utilizzando formule Calcolo di area laterale e totale di poliedri, **Similitudine di triangoli** Rapporto e proporzioni forme di lunghezza di segmenti, teorema di Talete. Reciproco del teorema di Talete. Dividendo un segmento in parti proporzionali a dati numeri (segmenti) Rette mediane in un triangolo; proprietà. Centro di gravità di un triangolo Triangoli simili. Teoremi fondamentali di similitudine e criteri. **Relazioni metriche in un triangolo rettangolo** Proiezioni ortogonali di	

			esterno di un triangolo (definizione) Costruzioni di triangoli: i casi SAS, ASA, SSS. Congruenza di arbitrari triangoli, congruenza criterio di triangoli SAS, ASA, SSS Elementi di ragionamento geometrico (Ipotesi, conclusione, dimostrazione, assioma, teorema) Metodo di congruenza dei triangoli. **Perpendicolariià (ortogonaliità)** Rette Perpendicolari (definizione, annotazioni, costruzioni con squadre); obliquo; distanza da un punto da una retta Casi di costruzioni e criterio di congruenza per il triangolo rettangolo perpendicolari di un segmento; proprietà di punti situati su una perpendicolare di un segmento (dimostrazione); costruzioni di perpendicolari utilizzando riga e compasso; **il cerchio circoscritto ad un triangolo* Proprietà di punti situati sulla bisettrice	una retta. Teoremi dell'altezza, del cateto e di Pitagora. Inverso del Teorema di Pitagora. Rapporti costanti in un triangolo rettangolo: sin, cos, tg, ctg; con le tavole trigonometriche; angoli $30^0, 45^0$ e 60^0. Risoluzione del triangolo rettangolo. Area di poligoni studiati. **Cerchio** Cerchio: definizioni; elementi di un cerchio: centro, raggio, corda, diametro, arco, interno, esterno; disco Angolo al centro; misurazione di archi; archi congruenti Corde e archi in un cerchio Angolo iscritto in un cerchio; triangolo iscritto in un cerchio; quadrangolo iscritto in un cerchio; poligono regolare: costruzioni, elementi * quadrangolo posizioni relative di rette rispetto al cerchio; tangente al cerchio; triangolo circoscritto al cerchio posizioni relative a due cerchi Calcolo di elementi in poligoni regolari: triangolo equilatero, quadrato, esagono regolare (lato ipotenusa, area, perimetro) Lunghezza di un	

			di un angolo (dimostrazione); costruzioni di bisettrice utilizzando riga e compasso; *cerchio iscritto in un triangolo **Parallelismo** Rette Parallele (definizione, annotazioni); costruzioni di rette parallele; assioma delle parallele "Due rette distinte, parallele ad una terza, sono parallele Criteri dei parallelogrammi (teoremi riguardanti angoli ottenuti da due rette parallele e secanti) **Proprietà di triangoli** somma degli angoli interni di un triangolo (dimostrazione); teorema dell'angolo esterno (definizione), disegno di: triangolo acutangolo, rettangolo, ottusangolo; Area di un triangolo; la mediana, definizione; proprietà di una mediana per dividere in due triangoli di area uguale) Coincidenza di altezza e mediana (non necessaria la dimostrazione) simmetria rispetto a rette; proprietà del triangolo isoscele (angoli, importanti	cerchio e area; lunghezza di un arco di un cerchio; area di un settore di un cerchio.	

			rette, simmetria); proprietà di triangolo equilatero (angoli; importanti rette, simmetria). **Quadrangoli** Quadrangolo convesso (definizioni, disegno); particolari quadrangoli (parallelogramma, rettangolo, rombo, quadrato, trapezoide - definizione, disegno) Somma di angoli di un quadrangolo convesso Parallelogramma: proprietà (di lati, angoli, diagonali); simmetria rispetto a un punto proprietà di particolari parallelogrammi.		
Inghilterra	**Chiave stages 2** **Si utilizza e si applica il numero** soluzione di problemi Ragionamento **Numeri e il sistema numerico** Conteggio Numeri e successioni Interi Frazione, percentuali e Rapporto Decimali **Calcoli** **Numero operazioni e** relazioni tra metodi mentali e metodi scritti metodi di calcolo **Soluzione numeriche di problemi** **Si utilizza e si applica forma, spazio e misura**	**Chiave stages 3** **Numero e Algebra** **Si utilizza e si applica il numero e l'algebra** soluzione di problemi Comunicazione Ragionamento **Numero e sistema numerico** Interi Proprietà e radicali Frazione Decimali Percentuali **Calcolo** **Numero, operazioni e relazioni tra loro** metodi scritti **Soluzione numeriche di problemi** **Equazioni, formule e**	**Chiave stages 4** **Numero e algebra** soluzione di problemi Comunicazione Ragionamento **Numeri e sistema numerico** Interi Proprietà e radicali Frazione Decimali **Chiave stages** Percentuali Rapporto **Calcolo** Numero operazioni e relazioni tra loro Metodi scritti metodi di calcolo **Soluzione numerica di problemi** **Equazioni, formule e**	**Chiave stages 4** **HIGH MATEMATICA** **Numero Italia algebra** soluzione di problemi Comunicazione Ragionamento **Numeri Italia il numero sistema** Interi Proprietà e radicali Frazione Decimali **Chiave stages** Percentuali Rapporto **Calcolo** Numero operazionii e relazioni tra loro Metodi scritti metodi di calcolo **Soluzione numerica di problemi**	

	soluzione di problemi Comunicazione Ragionamento **Comprensione di misure proprietà di forme** **Comprensione di proprietà di forme , posizioni e movimenti** **Comprensione di misure utilizzando e applicando dati** soluzione di problemi **Comunicazione** **Processi, rappresentazione e interpretazione di dati**	**identità** Uso di simboli annotazioni Equazioni Equazioni lineari Formule Proporzionalità diretta equazioni lineari immediate Diseguaglianze metodi numerici **Successioni, funzioni e grafi** Successioni Funzioni Gradi **forma, spazio e misura** soluzione di problemi Comunicazione Ragionamento **ragionamento geometrico** Angoli Proprietà di triangoli e loro formule dirette Proprietà dei cerchi 3-D formule **Trasformazioni e coordinate** Trasformazioni specifiche Proprietà di trasformazioni Coordinate **Misure e costruzioni** Misura Costruzioni Misurazione Luoghi Geometrici **Manipolazione di dati utilizzando e applicando la manipolazione di dati** soluzione di problemi Comunicazione Ragionamento **Specificazione del problema e pianificazione** **Raccolta di dati** **Processi e**	**identitià** Uso di simboli Annotazioni Diseguaglianze Equazioni Formule **Successioni, funzioni e grafi** Successioni Grafi di rette funzioni Gradi Interpretazione grafica di formule **Forma, spazio e misura** **Si utilizzano e si applicano forma, spazio e misura** soluzione di problemi Comunicazione Ragionamento **ragionamento Geometrico** Angoli Proprietà del cerchio 3-D formule **Trasformazioni e coordinate** Trasformazioni specifiche Proprietà di trasformazioni Coordinate **Misura e costruzioni** Misura Costruzioni Misurazione Luoghi Geometrici **Manipolazione di dati utilizzando e applicando la manipolazione di dati** soluzione di problemi Comunicazione Ragionamento **Specificazione del**	**Equazioni, formule e identità** Uso di simboli annotazioni Diseguaglianze Equazioni lineari Formule **Successioni, funzioni e grafi** Successioni Grafi di rette, funzioni gradi Interpretazione grafica di formule funzioni quadratiche funzioni, trasformazione di funzioni **Forma, spazio e misura** **Si utilizzano e si applicano forma, spazio e misura** Problemi soluzione Comunicazione Ragionamento **ragionamento geometrico** Angoli Proprietà di cerchi 30D formule **Trasformazioni e coordinate** Trasformazioni specifiche Proprietà di trasformazioni Coordinate **Misura e costruzioni** Misura Costruzioni Misurazione Luoghi Geometrici **Manipolazione di dati utilizzando e applicando la manipolazione di dati** soluzione di problemi Comunicazione	

		rappresentazione di dati **Interpretazione e discussione dei risultati**	**problema e pianificazione** **Raccolta di dati** **Processi e rappresentazione di dati** **Interpretazione e discussione dei risultati**	Ragionamento **Specificazione del problema e pianificazione** **Raccolta di dati** **Processi e rappresentazione di dati** **Interpretazione e discussione dei risultati**	
ITALIA **13-18 anni** In questo momento in Italia non ci sono programmi ministeriali uguali per tutte le scuole pubbliche. La suddivisione per anni è fatta dai singoli insegnanti delle singole scuole in piena autonomia. I programmi presentati sono stati tratti dai più diffusi libri di testo di matematica.					**Il numero** I numeri interi e l'Aritmetica della Scuola Primaria: multipli e divisori di un numero; Numeri primi e numeri composti minimo comune multiplo, massimo comune divisore; potenze ed operazioni, proprietà; Ampliamenti numerici da Z a Q. **Fare proprio il concetto di:** Frazione come operatore e come quoziente; Trasformazione di numeri decimali in razionali e viceversa; Confronto tra numeri razionali relativi e relative operazioni. Numeri irrazionali: Significato di Radice quadrata e estrazione di radice Radice quadrata come operazione inversa di elevamento al quadrato. Radice quadrata di un prodotto e di un quoziente. **Geometria** Geometria piana e solida della scuola Primaria. Padronanza e analisi di figure piane. Elementi principali e proprietà del triangolo e del quadrilatero. Poligoni concavi e convessi. Poligoni regolari, cerchio e circonferenza. Trasformazioni geometriche: Il concetto di "uguale" e di

					“invariante”. Nozioni intuitive di trasformazioni geometriche. Le Isometrie: translazione, rotazione, simmetria. Analisi in contesti concreti di trasformazioni non isometriche. Relazioni tra quantità geometriche. Concetto di contorno e superficie. Calcolo di area e perimetro di alcune figure piane. La similitudine Teoremi di Pitagora ed Euclide. Introduzione al concetto di sistema di riferimento: Coordinate Cartesiane, piano cartesiano. **Misura** Le quantità geometriche Il sistema internazionale di misura. **Dati e previsioni** Fasi di investigazione statistica. Concetto di campione di una popolazione. Esempi di campioni rappresentativi e non rappresentativi. Probabilità di un evento: Valutazione di probabilità in semplici casi. **Connessione tra aspetti storici e matematici** Il metodo di Eratostene per misurare il raggio della Terra. **La misura delle distanze nella geometria medioevale.**

	9ª classe 14-15	10ª classe 15-16	11ª classe 16-17	12ª classe 17-18	18-19
CIPRO	**Algebra** Rappresentazione algebriche polinomiali Fattorizzazione di Polinomi e Frazioni Algebriche, **Geometria** Nozioni base di geometria Uguaglianza di triangoli Trigonometra Geometria del parallelogrammamo e del trapezio **Grafici** Grafici di formule y=ax, y=ax+b, y=k, x=l **Sistemi** equazioni lineari di due equazioni con due incognite.	**Algebra** Equazioni e Sistemi di equazioni di primo grado Sistemi di equazioni lineari con due incognite. (Soluzioni di equazioni sia algebriche che grafiche) Soluzione di problemi con l'aiuto di una o due equazioni. **Radicali** Proprietà di radicali Proprietà con esponenti Frazionari **Funzioni** Il concetto di corrispondenza Modi di rappresentare la corrispondenza Il concetto di funzione Dominio, codominio Grafi di funzioni Rette, y=kx+b funzioni y=a/x funzioni y=ax^2+bx+c Equazioni e diseguaglianze di di secondo grado Somma e prodotto di radicali di equazioni di secondo grado Segni di espressioni ax^2+bx+c I trinomi Diseguaglianze di secondo grado Geometria Ricorrenza di concetti base **Uguaglianza di triangoli** Definizioni di triangoli uguaglianza Criterio di uguaglianza di triangoli Proprietà e criteri del triangolo isoscele **Parallelogrammo** Definizione e proprietà di un parallelogramma Applicazioni Proprietà del rettangolo triangolo rettangolo	**Rappresentazione grafica di rette** Sistemi di equazioni primo grado Soluzioni di equazioni di secondo grado Grafico di y=ax2+bx+c Teorema di Pitagora Progressione Aritmetica e Geometrica Logaritmi ed equazioni esponenziali Proprietà dei logaritmi Equazioni Logaritmiche **Trigonometra** Numeri Trigonometrici Leggi del Seno e del Coseno Area di triangolo Soluzione di triangolo Equazioni trigonometriche **Geometria** Area Forme simili Poligoni Regolari cerchio (solo per studenti in indirizzati) **Algebra** Valore assoluto di un numero reale **Funzioni** Dominio, codominio , uguaglianza, operazioni, composizione, funzioni inverse, **Limiti** di funzioni, proprietà di limiti **Numeri complessi** Applicazioni di equazioni di secondo grado. Rappresentazione di un numero complesso in un piano **Induzione** **Successioni** **Progressioni** **Funzioni Esponenziali e funzioni logaritmiche** **Continuità di funzioni** **Derivate** Funzioni Derivate, derivative di funzioni composte,	**Statistica** Nozioni base Presentazione di dati statistici **Combinatoria** n!, Cardinalità e Calcolo di Insiemi Finiti, Commutazione di n oggetti su k **Probabilità** **Poliedri** **Stereometria** Area e volume di cilindro, cono, sfera (solo per studenti indirizzati) **Funzioni** Funzioni parametriche **Funzioni derivate** Derivate di funzioni parametriche Applicazioni **Grafici** Teorema del valore medio Estremenati locali Funzioni Concave e Convesse, Asintoti Grafici di funzioni Problemi con massimo e minimo **Funzioni trigonometriche Inverse** **Anti-derivate** Definizioni Derivate notevoli Proprietà e Metodi di derivazione **Derivate** Proprietà, Applicazioni **Il simbolo di somma** Esempi di somme Proprietà, Somme di n termini di una	

		Rombo, Quadrato, Trapezio **Cerchio** Il concetto di cerchio e elementi del cerchio Relazione di angoli al centro con corrispondenti archi e corde Posizione di un punto e un cerchio Posizione di una retta e un cerchio Posizione di due cerchi Inscritti in un angolo Angolo sotto corda e tangente **Triangoli e poligoni simili** Il concetto di Similitudine **Relazione Metrica nei triangoli rettangoli** **Trigonometria** Introduzione alla Trigonometria Numeri Trigonometrici di un angolo acuto Angolo e cerchio Trigonometrico Segni di numeri trigonometrici di un angolo Relazioni numei trigonometrici di due angoli supplementari	derivative di funzioni esponenziali e logaritmiche **Polinomi** Uguaglianza di Polinomi, valore aritmetico, operazioni con Polinomi, radice di Polinomi. **Geometria Analitica** Vettori Equazioni rette **Geometria** Triangoli inscritti e circoswtritti ad un cerchio. Poligoni Normali, metodi di costruzioni composizione **Geometria dello spazio** Posizione di due rette nello spazio**,** Poliedro, Cardinalità e Calcolo di Insiemi Finiti poliedro, Stereometria, cilindro, cono, sfera, settore sferico **Trigonometria** Seno, Coseno, legge diell'area, formule di addizione e duplicazione Equazioni Trigonometriche Programma di arrichimento **Teoria dei numeri** **Numeri Complessi** **Geometria** Metodi analitici-sintetici Applicazioni di luoghi geometrici **Struttura Analitica** Relazioni binarie, Gruppi	successioni **Combinatoria** Proprietà di combinazioni n su k **Tabelle** **Statistiche** **Settori Conici** Cerchio, Parabola Ellisse, Iperbole **Lezione arrichita** **Programmazione** **Lineare** Soluzioni di sistemi di equazioni diseguaglianze di primo grado Applicazioni alla programmazione di **Numeri Complessi** Il insieme C dei Complessi numeri Rappresentazione geometrica dei numeri complessi Coordinate Polari Rappresentazione trigonometrica di un numero complesso Radici di un complesso **Applicazioni di derivate** Differenziali e sue applicazioni Problemi di massimo e minimo **Integrali applicazioni** metodi Primo Teorema di Pappo **Geometria Analitica** Applicazioni di analitica geometria in luoghi geometrici Trasformazioni di piani Equazioni generali di secondo grado	
BULGARI A	**Numeri. Algebra.** **1. Espressioni Razionali. Equazioni Razionali.** Applicazione in: Algoritmo.	**Numeri. Algebra.** **1. Numero reale.** Applicazione in: Numero reale ed asse reale. Corrispondenza biunivoca. **Funzioni. Misurazioni.**	**Funzioni. Misurazione.** **1. Successioni numeriche.** Applicazioni in: Successioni. Monotone Successioni di Numeri.	**Funzioni. Misurazione.** **1. Elementi di analisi matematica.** Applicazione in: Operazioni con funzioni.	

	Equazioni quadratiche e biquadrate. **Conoscenze Logica.** **2. Logica Terminologia** Contraddizioni. Contro-esempi. Razionaliità. Applicazioni in: Condizione necessaria e Condizione sufficiente.. teoremi. **Modelli.** **Modelli con Equazioni lineari e quadratiche.** Valutazione di soluzioni. Stima e controllo di risultati finali.. Applicazioni in: Situazioni reali: Economiche, Finanziarie etc. Problemi. Numeri. **Algebra.** **4. Sistemi di Equazioni di gecondo grado con due incognite** Teoremi di Equivalenze. Ordine di coppie di numeri. Applicazione in: **Equazioni di secondo grado con due incognite** Soluzioni Geometriche. **Numeri. Algebra.** **5. Espressioni Irrazionali. Applicazioni in:** Trasformazioni.equivalenze standard Equivalenze di Espressioni. Razionalizzazioni **Conoscenze Logica.** **6. Congiunzione per Esistenza e Contraddizioni.** Applicazioni in: Ricerca del possibile Valore numerico di una	**2. Funzione quadratica.** Applicazione in: Parabola, Vertice, Asse. Funzione crescente e decrescente. Valori superiori ed inferiori della funzione. **Conoscenza logica.** **3. Valutazione di veridicità e la Razionalità della scelta.** Applicazione in: Conoscenza logica; Usando metodo grafico. **Numeri. Algebra.** **4. Diseguaglianze Razionali.** Applicazioni in: Diseguaglianza quadratica, biquadratica e frazionaria Metodo degli intervalli. **Conoscenza logica.** **5. Congiunzioni logiche: "E", "o" e "equivalenza."** Applicazione in: Scelta del giusto algoritmo per risolvere diseguaglianze razionali e valutare il risultato finale. **Numeri. Algebra.** **6. Potenze.** Applicazione in: Radice ennesima. Razionalizzazione. Logaritmo. Base. **Conoscenza logica.** **7. Vero.** Razionalità. Applicazione in: Conoscenza delle potenze. Scelta razionale di algoritmo. **Funzioni. Misurazione.** **8. Funzioni trigonometriche.** Applicazione in: Funzioni trigonometriche. Identità trigonometriche. Figure. Solidi. **9. Triangolo. Applicazione in:** Teoremi di seno e coseno. Risoluzione di triangoli, Parallelogramma e trapezoide. Conoscenza logica.	Aritmetiche e Geometriche Progressione. **Conoscenze Logica.`** **2. Logica Congiunzione.** Contraddizione. Applicazioni in: Condizione necessaria e sufficiente. Formulazione di asserzioni. **Modelli.** **3. Modelli con Sistemi di equazioni di secondo grado con due incognite.** Applicazioni in: Progressioni. Interesse Semplice e Composto. **Probabilità e Statistica.** **4. Dati Statistici.** Applicazione in: Presentazione di Dati Statistici. Terminologia e misura della dispersione Diagramma a barre **Conoscenza logica.`** **5. Scelta in situazioni concrete.** Applicazione in: Media. Scelta di metodi statistici. L'efficacia dei dati. Modelli. **6. Valutazione di risultati.** Applicazione in: Analisi di dati statistici. Interpretazione di informazioni finite. **Funzioni. Misurazioni.** **7. Funzioni trigonometriche.** Applicazione **in:** Identità trigonometriche di base. Funzione pari e dispari. Funzione periodica. Figure e Solidi. **8. Risoluzione di un Triangolo Arbitrario.** Applicazione **in:** Identità di triangolo di base. Modelli con la trigonometria. Conoscenza logica. **9. Contraddizione. Domanda in:** Contraddizione di asserzioni. Scelta di metodi razionali per risolvere un triangolo.	Limite di funzione. Funzione composta. Funzione continua Punti di discontinuità. Derivate della funzione. Estremante locale. Funzione convessa e concava. Asintoto. **Conoscenza logica.** **2. Proprietà di relazioni ed operazioni.** Applicazione in: Uso della funzione composita per risolvere problemi. **Funzioni. Misurazione.** **3. Rotazione Solidi.** Applicazione in: Area di superficie. Volume. Sfere inscritte e circoscritte. Figure e Solidi. **4. La trigonometria nella geometria solida.** Applicazione in: Problemi geometrici con rotazione Solidi e Poliedri. **Conoscenza logica.** **5. Concretizzazione di asserzione generale.** Applicazione in: Condizione necessaria e sufficiente. Problemi piani come componenti per risolvere problemi solidi. **Probabilità e statistica.** **6. Statistiche.** Applicazione in: Generalizzare la combinazione. Frequenza statistica. Valore medio. Deviazione quadrata. Dispersione. Curva normale. **Numeri. Algebra**	

	espressione Irrazionale. Trasformazioni di espressioni razionali ed irrazionali. **Numeri. Algebra.** **7. Equazioni Irrazionali**. Applicazioni in: Equazioni ed equivalenze irrazionali. **Figure e Solidi.** **8. Similitudine.** **Applicazioni in**: Rapporto e proporzione di segmenti. Triangoli simili Coefficiente di similitudine, quarto proporzionale **Conoscenze Logica.** **9. Condizioni Necessarie e Sufficienti.** Applicazioni in: Teorema e teorema opposto. Contraddizioni. **Modelli.** **10. Modelli con Rette ed Equazioni quadratiche.** Applicazioni in: Modelli geometrici Problemi con Equazioni e Sistemi di Equazioni. Interpretazioni di risultati ottenuti e stimati. **Funzioni. Misurazioni.** **11. Triangolo Rettangolo.** Applicazioni in: Funzioni Trigonometriche. Metrica Dipendenza. Identità Trigonometriche. **Figure e Solidi.** **12. Risoluzione di Triangolo Rettangolo.** Applicazione in: Ricerca degli elementi base di un triangolo rettangolo, Triangolo Isoscele e trapezio Isoscele.	**10. Vero. Razionalità.** **Applicazione in:** Risoluzione di triangoli. Le abilità per scoprire e creare percorsi per risolvere triangoli **Modelli.** **11. Modelli con equazioni lineari e quadratiche. Applicazione in:** Problemi geometrici. Interpretazione e valutazione di risultato ottenuto e valutato.		**7. Numeri complessi.** Applicazione **in:** Rappresentazione algebrica e trigonometrica. Operazioni con numeri complessi. Formula di Moavre. Zeri di polinomi **Modelli.** **8. Elementi della geometria analitica nel piano.** Applicazione in: Vettori. Lunghezza di intervallo. Angolo tra due rette. L'equazione di Descartes di una retta nel piano. Elementi di triangolo. Equazioni canoniche di curve di cono ed i suoi grafici. **Conoscenza logica.** **9. Proprietà di relazioni ed operazioni.** Applicazione in: Rappresentazione di Numeri. Valutazione di risultato stimato. .	

	Conoscenze Logica. **13. Il significato di "condizione necessaria",** "Condizione sufficiente e "Condizioni Necessarie e Sufficienti". Applicazioni in: Triangolo Rettangolo (teorema diretto ed inverso). Uso delle conoscenze di Logica in situazioni concrete **Modelli.** **14. Modelli con Rette ed equazioni Quadratiche**. Applicazioni in: Modelli in situazioni con Triangoli Rettangoli con Equazioni e Sistemi. Interpretazioni di risultati ottenuti e stimati**.**				
REPUBLICA CECA	**Espressioni Frazionarie**. Equazioni incognita al denominatore **Sistemi** di rette e equazioni con due incognite Funzioni (range e dominio, variabile dipendente ed indipendente, funzioni crescenti e decrescenti, funzione costante, funzione lineare, funzione quadratica, proporzione inversa. **Similitudine. Funzioni Trigonometriche** seno e tangente in un triangolo rettangolo (fattore di scala; similitudine di triangoli, teoremi; due segmenti in un rapporto; mappe; funzioni trigonometriche in un triangolo rettangolo) **Piramidi, cono, sfera**	**Sistemi numerici, proprietà di numeri reali** Revisione di concetti algebrici (fattorizzazione di polinomi quadratici, Frazione) **Equazioni (quadratiche, con l'incognita al denominatore)** **Equazioni quadratiche col parametro** Potenze, radici **Semplificazioni di espressioni algebriche** **Equazioni con valore assoluto, con radici** **Basi della geometria piana** (forme piane, coppie di angoli, angoli in poligoni, nel cerchio insieme di punti di una proprietà determinata) **Diseguaglianza** (lineare, con l'incognita al denominatore) **Diseguaglianza** (con valore assoluto, con radici) **Sistemi** di equazioni, le diseguaglianze ed i loro sistemi **Equazioni,** le diseguaglianze e	**Semplificazioni di espressioni algebriche. revisione** Trasformazioni e funzioni. Concetti base. Uso di tabelle di punti per costruire grafici Proprietà generali di funzioni. Funzioni lineari e quadratiche **Funzione composta** Polinomi e funzioni Razionali (Frazione di polinomi) Presentazione del concetto di funzione inversa Logaritmi. Funzioni esponenziali e logaritmiche Funzioni trigonometriche Seno e teoremi del coseno, Applicazioni Soluzione di tutti i tipi di equazioni e disequazioni praticate. Revisione Soluzioni grafiche di semplici sistemi Vettori. Prodotto scalare. Retta nel piano e nello spazio Piani nello spazio. Posizione reciproca di una retta di un piano e in un piano. Applicazioni	**Vettori. Revisione** **Rette nel piano.** Piani nello spazio. Posizione reciproca di una retta ed un piano **Coniche.** proprietà generali Coniche. posizione reciproca di una retta ed un conica. Tangenti **Geometria piana.** volumi e superfici di corpi Sezioni piane di corpi **Numeri complessi. forma algebrica e trigonometrica, operazioni base.** Teorema di Moivre radici ennesime. Equazioni binomiali Soluzioni di equazioni nel dominio dei numeri complessi Insiemi di una data proprietà in C **Successioni**	**Successioni – revisione**. Applicazioni di successioni geometriche. Induzione Matematica Limiti di una successione. Somma di una serie di numeri. Applicazioni Limite di una funzione Asintoti del grafico di una funzione **Derivate** Estremanti locali, convessiità e concavità di funzioni Regola di De l'Hopital, Primitiva di una funzione, Metodo di sostituzione,

	Concetti base di Matematica finanziaria (interesse, principale, interesse semplice e composto)	sistemi - soluzione grafica **Funzione di trasformazione geometrica** nel piano (simmetrie e la loro composizione, omotetia, similitudine) **Costruzioni** **Teorema di Pitagora, teoremi di Euclide** Insiemi e proposizioni **Teoria dei numeri elementare** (la divisibilità, i Numeri Primi, minimo comune multiplo, massimo comune divisore)		proprietà base Induzione matematica	integrazione per parti, Integrale definito, Applicazioni geometriche efisiche dell'integrale. **Combinatoria –** permutazione, combinazione, Teorema Binomiale, teoremi Base di probabilità
GERMANIA	**Sistemi di equazioni lineari** Equazioni lineari con due variabli (ax + by = c) rispetto a y =…. Rappresentazione grafica della soluzione e Determinazione della soluzione di equazioni lineari con due variabili **Numeri reali e radici** Introduzione ai numeri irrazionali Algoritmo di intervallo Successione infinita di intervalli Successione di punti da destra (decrescente) Successione di punti da sinistra (crescente) Successione differenza è nulla successione di numeri irrazionali stanno contenendo numeri razionali Radici quadratiche e cubiche Leggi per i prodotti e quozienti di radici quadratiche **Teoremi su Pitagora (teoremi per triangoli con angoli di 90°)**	**Misurazione di corpi (Volumi)** Volume ed area di superficie di (ortogonali) piramidi Sezioni di coni ortogonali Volume e superficie (in R^3) Compiti applicativi **Potenze** Potenze con esponenti naturali Priorità delle regole Potenze con esponenti interi Regole delle potenze Funzioni di potenza Potenze con esponenti razionali Calcoli di termini con radici **Calcolo in contesti** Problemi che trattano con domande: soldi / valute, unità di misura, tasse, costi, percentuali, elezioni **Trigonometria** Misurazione per angoli Seno e coseno, cerchio unitario. Funzione Tangente tangenti al triangolo con 90° Teorema del Seno e Coseno Calcolo su triangoli arbitrari **Funzione esponenziale e logaritmica** Funzioni esponenziali ed i loro grafici Funzioni logaritmiche Funzione inversa della funzione esponenziale	**Discussione di funzioni senza calcolo differenziale** Funzioni lineari (y=ax+n) Funzioni standard (potenze, seno ecc…) La determinazione di zeri di polinomi Divisione polinomiale Bisezione, Regola falsa posizione **Successioni e limiti (teoremi sui limiti)** Successioni aritmetiche e geometriche limite di una successione Successioni nulle Teoremi sui limiti: somma, differenza, prodotto e quoziente **Derivate (di funzioni intero-Razionali)** Derivata come limite di rapporto incrementale Derivate in contesto ed applicazioni Derivate di funzioni intero-Razionali **Discussione di funzioni con calcolo differenziale** Discussione di funzioni: Simmetria (y (- x) = y (x)) zeri y (x) = 0 Punti con tangenti orizzontali (y' (x) = 0), punti critici Convessità (punti con y"(x) = 0) Metodi per calcolare zeri (metodo di Newton)	**Calcolo differenziale e funzioni continue** Teoremi su funzioni differenziabili e continue Regole per la differenziazione Estremanti (Fermat) Teorema del valore medio Teorema di Rolle Problema per la determinazione di aree L'approssimazione di aree Area come limite Definito integrale--area Calcolo con integrali definito **Teoria di integrazione** Teorema del valore medio dell'integrazione Collegamento tra calcolo differenziale ed integrale, integrale indefinito Calcolo di integrali definiti Area tra due grafici Integrazione per sostituzione Integrazione numerica Volume di solidi di rotazione Lunghezza di curve Integrale indefinito **Funzioni Razionali** Insieme di definizione	**Sistemi di equazioni lineari** Soluzioni con l'algoritmo di Gauss. Equazioni omogenee ed eterogenee. Dipendenza lineare di vettori. Rango di un sistema lineare di equazioni Spazi vettoriali. **Geometria Analitica** Prodotto sacalare (Applicazioni, Calcolo di area, lunghezza di un vettore, distanza, angolo) Vettore prodotto Equazioni per iper-piani (Hessiana normale, coordinate, parametri) Iper-piani nello spazio Matrici (addizione, moltiplicazione, leggi inverse)

	Teorema di Pitagora $a^2+b^2 =c^2$: $a^2 = p * c$ Teorema dell'altezza: $h^2=p*q$ Compiti applicativi (lunghezza di segmenti) **Equazioni quadratiche** Equazioni quadratiche pure Equazioni quadratiche senza termine noto Formula per le soluzioni di un'equazione quadratica Calcoli di equivalenza Applicazioni **Teoremi con proporzioni** **("Strahlen-satz") e** similitudine Dilatazione centrale Centri Invarianti, proporzioni di segmenti e di area Teorema Similitudine dei triangoli Applicazioni **Misura di Area e i** **volume;** cerchio, cilindro Lunghezza del cerchio ed area del disco (nel piano) Arco e settore di un disco. Volume ed area di superficie del (ortogonale) cilindro Applicazioni **Calcolo in contesti:** la proporzionalità, calcolo per percento e percentuali Applicazioni	Leggi per logaritmi Applicazioni per le leggi sui logaritmi, (percento e percentuali)	**Introduzione alla geometria** **analitica** Punti in sistemi di coordinata Distanza **Vettori nel sistema di coordinata** **Cartesiano** I calcoli con vettori Somma, Anti-vettore (- x), vettore nullo, moltiplicazione Lunghezza di un vettore, vettore unità Punto medio di un segmento Equazione di una retta in forma vettoriale **Rette (e cerchi)** nel piano	Poli, Comportamento asintotico Discussione di funzioni razionali Integrali definiti di funzioni razionali **Funzione esponenziale /** **Funzione Logaritmica** Derivata dell'inverso di Funzione irrazionali e applicazioni Domande I numeri di Eulero Regola di De l'Hopital Discussione di funzioni e la determinazione dell'area Equazioni differenziali	Sezioni di cono (cerchio, ellisse, parabola, iperbole) Fuochi Costruzione di punti inetresezione di sezioni di cono Equazioni. **Fondamenti di** **Teoria della** **probabilità** Probabilità definita da dati statistici Processi stocastici (modello di Galton, Lotto) Definizioni base (esperimenti casuali, eventi insieme di eventi, probabilità relativa, probabilità) simulazioni Modelli (combinatori, alberi, tabelle) Regole: prodotto e somma Indipendenza di due eventi Probabilità condizionata Probabilità totale **Distribuzione** **statistica** Variabile casuale come funzione di una distribuzione di probabilità di una serie di numeri. Valore atteso. Varianza Disuguaglianza di Tchebychev Bernoulli Distribuzione normale Statistica descrittiva

					Test per ipotesi Livello di significatività Intervallo di confidenza Catene di Markov
GRECIA	**Numeri Reali** (operazioni, radici l'ordine). Espressioni algebriche (polinomi, identità di base, fattorizzazioni, funzioni Razionali). Equazioni (primo e secondo grado). Funzioni e loro grafici (y=ax2+bx+c, y=a / x). **Statistiche** (frequenza, varianza, probabilità). **Similitudine** (il Teorema di Talete, poligoni simili, confronto di aree e volumi di figure simili). **Trigonometria** (relazione tra numeri trigonometrici, regola di seno e coseno in un triangolo) Sistemi lineari e sistemi di diseguaglianze lineari (inclusa soluzione grafica). **Vettori** (somma, sottrazione, prodotto scalare). **La sfera** (varie proprietà, Terra, longitudine, latitudine).	**Algebra** **Numeri Reali** (operazioni, ordine, valore assoluto, soluzione di equazioni lineari e le diseguaglianze). **Funzioni e loro grafici.** **Sistemi di equazioni lineari con due o più incognite.** Equazioni di secondo grado e le diseguaglianze. **Trigonometria** (rapporti trigonometrici di angoli generali). **Geometria Euclidea** Assiomi. **Triangoli (**criteri di uguaglianza**).** **Rette parallele.** Somma di angoli di un triangolo. Proprietà. **Parallelogrammi.** Coincidenza di varie rette in un triangolo. **Cerchio.** Angoli al centro. Tangenza. Figure inscritte. Luoghi Geometrici. Proporzione. Teorema di Talete. Bisettrici di un triangolo. Cerchio di Apollonio. **Similitudine.** Criteri di Similitudine.	**Algebra Trigonometria** (equazioni trigonometriche base, numeri trigonometrici di angolo doppio, la funzione y=a sinx + bcosx, risoluzione di triangoli) **Polinomi** (divisione di polinomi, equazioni polinomiali) **Progressioni** (progressioni aritmetiche e geometriche) Funzioni esponenziali e logaritmiche **Geometria Euclidea** Relazioni metriche (Pitagora, mediane di un cerchio, costruzioni geometriche). Area (formula di Erone). Misura di un cerchio (iscrizione di un poligono egolare , circonferenza, area, lunghezza di arco, area di settore). c) Solo per studenti di “Scienze” o “Tecnologia”. **Vettori .** Prodotto di vettori Equazione della retta, circonferenza e sezioni coniche. **Elementi di teoria dei numeri** (Algoritmo Euclideo, divisibilità, numeri primi, equazione lineare Diofantea, aritmetica modulare).	a) (solo per studenti in "Scienza" o in "Tecnologia") **Numeri complessi** (operazioni, moduli, forma trigonometrica). **Limiti e continuità di funzioni.** **Calcolo differenziale** (regole della differenziazione Teorema del Valore Medio, Estrremanti locali La regola di De l'Hopital, grafici di funzioni). Integrazione come inversa della differenziazione (tecniche dell'integrazione, l'integrazione da parti e per cambio di variabile), equazioni differenziali (separazione di variabili, primo ordine lineare), l'integrale come area (Teorema Fondamentale del Calcolo, il Teorema del valor medio). **Probabilità di base e statistica.** (Media, variazione, tabelle raccolta di dati).	

ITALIA **13-18** In questo momento in Italia non ci sono programmi ministeriali uguali per tutte le scuole pubbliche. La suddivisione per anni è fatta dai singoli insegnanti delle singole scuole in piena autonomia. I programmi presentati sono stati tratti dai più diffusi libri di testo di matematica. Sono stati scelti i programmi per il Liceo Classico ed il Liceo Scientifico.	***Liceo Classico*** ***Algebra:*** Casi semplici di scomposizione di polinomi in fattori. Frazioni algebriche; calcolo con esse. Equazioni e problemi di primo grado a una incognita. ***Geometria:*** Circonferenza e cerchio. Mutuo comportamento di rette e circonferenze: cenni sul mutuo comportamento di circonferenze complanari. Angoli nel cerchio (al centro o alla circonferenza). Poligoni regolari. Qualche problema grafico fondamentale. Poligoni equivalenti. Teorema di Pitagora. **Liceo Scientifico** Concetto di numero reale. Calcolo dei radicali; cenno sulle potenze con esponenti frazionari. Equazioni di 2° grado o ad esse riconducibili. Esempi di sistemi di equazioni di grado superiore al I° risolubili con equazioni di I° e 2° grado. Cenni sulle progressioni aritmetiche e geometriche. Coordinate cartesiane ortogonali nel piano. Funzioni di una variabile e loro rappresentazione grafica;in particolare le funzioni ax + b; ax2; -x. Proporzioni tra grandezze, similitudine dei triangoli e dei poligoni, teoria della misura, area	**Liceo Classico** ***Algebra:*** Sistemi di equazioni di primo grado. Concetto di numero reale. Calcolo dei radicali: cenno sulle potenze con esponente frazionario. Equazioni di secondo grado e facilmente riducibili al primo grado. Semplici esempi di sistemi di equazioni di grado superiore al primo. ***Geometria:*** Proporzioni tra grandezze. Similitudine dei triangoli e di poligoni, teoria della misura (cenni), area dei poligoni. **Liceo Scientifico** Equazioni esponenziali e logaritmi. Uso delle tavole logaritmiche ed applicazione al calcolo del valore di espressioni numeriche. Cenni sull'uso del regolo calcolatore. Rettificazione della circonferenza e quadratura del cerchio. Rette e piani nello spazio: ortogonalità e parallelismo. Diedri, angoloidi. Poliedri, in particolare prismi e piramidi. Cilindro, cono, sfera.	**Liceo Classico** ***Algebra****:* Progressioni aritmetiche e geometriche. Equazioni esponenziali e logaritmi. Uso delle tavole logaritmiche ed applicazione al calcolo di espressioni numeriche. ***Geometria:*** Rettificazione delle circonferenze e quadratura del cerchio. Rette e piani nello spazio: ortogonalità e parallelismo. Diedri, triedri, angoloidi. Poliedri (in particolare prismi e piramidi). Cilindro, cono, sfera. **Liceo Scientifico** Funzioni geometriche. Curve dei seni e delle tangenti. Formule per l'addizione, la sottrazione, la duplicazione e la bisezione degli argomenti. Qualche semplice equazione goniometrica. Risoluzione dei triangoli rettilinei. La nozione di limite di una funzione. Derivata di una funzione di una variabile e suo significato geometrico e fisico. Derivate di x^2, di senx, cosx, tgx. Esercizi di derivazione. Nozioni di equivalenza delle figure solide. Equivalenza di prismi e piramidi. Regole pratiche per la determinazione delle aree e dei volumi dei solidi studiati.	**Liceo Classico** ***Trigonometria****:* Le funzioni goniometriche: seno, coseno e tangente. Formule per l'addizione, la sottrazione, la duplicazione e la bisezione degli argomenti. Uso delle tavole goniometriche ed applicazione alla risoluzione dei triangoli rettilinei. *Geometria:* Cenni sui poliedri equivalenti, sulla base, eventualmente, del principio di Cavalieri. Regole pratiche per la determinazione di aree e volumi dei solidi studiati. ***Nelle tre classi:*** esercizi semplici di applicazione dell'algebra alla geometria. **Liceo Scientifico** Massimi e minimi con il metodo delle derivate, applicazioni. Nozione di integrale con qualche applicazione. Disposizioni, permutazioni e combinazioni semplici. Binomio di Newton. Nelle ultime quattro classi: applicazioni dell'algebra alla geometria di I° e 2° grado con relativa discussione.	

	dei poligoni.				
ROMANIA	**Algebra** **1. Operazioni coi numeri reali** -forme per scrivere i numeri reali **potenze** con esponenti interi radici di ordine 2 e 3; radici di ordine n **potenze con esponente Razionale** operazioni coi numeri reali; valore assoluto; **diseguaglianze** -parte intera, parte frazionaria, arrotondamento; approssimazioni **Equazioni della forma** $ax+b=0,\ a,b\in$ □ Equazioni della forma $ax^2+bx+c=0,\ a,b,c\in$ □ $,a\neq 0$ Equazioni irrazionali (radici di ordine 2 e 3)	**Progressioni:** aritmetica, geometrica **Funzioni:** esponenziale; logaritmica; equazioni ed disequazioni esponenziali e/o logaritmiche; sistemi di equazioni esponenziali o logaritmiche Monotona, convessa, concava, asintoti, iniettiva, suriettiva e biettiva. **Inverse di funzioni trigonometriche;** disequazioni trigonometriche (soluzione grafica) **Elementi della geometria (piana e dello spazio)** -numeri complessi in forma algebrica; operazionii -interpretazione geometrica di +, -, * -numeri complessi in forma trigonometrica: prodotto, potenze (formula di Moivre), radici di ordine	**Elementi di algebra lineare e geometria analitica** Sistema cartesiano nel piano e nello spazio. Equazioni di una retta nel piano; equazioni di un piano e retta nello spazio. Condizioni di parallelismo e perpendicolarità. **Luoghi Geometrici** **Matrici,** operazioni (+, moltiplicazioni per un numero, *), proprietà Determinanti (matrici di grado ≤ 4), proprietà; Inverse di una matrice; **Matrici ed equazioni** Applicazioni: area di un triangolo; lollinearità di tre punti. **volumi etc**. **Luoghi Geometrici:** cerchio, elisse, iperbole, parabola **Sistemi lineari** (≤ 4 incognite); matrici formule Rango di una matrice. Metodi per risolvere sistemi lineari: matrici	**Elementi di algebra** Relazioni di equivalenza. Partizioni. Operazioni: interne, tabella delle operazioni, proprietà. **Gruppo:** Definizione, esempi: gruppi numerici, gruppi di matrici. **altri gruppi *sottogruppi* Anelli: definizione, esempi (□ , □ $_n$ anelli di funzioni polinomiali, quadrati, matrici) Sottoanellii: definizione, esempi (□ ,□ ,□ ,□ $_p$ P primo) Morfismi e isomorfismi Spazi vettoriali ed operatori lineari	

	Equazioni riducibili ad equazioni già studiate **Elementi di logica matematica** -asserzione, proposta, valore di verità -predicato, quantificatori -operazionii di logica di elemenatari -*condizioni necessarie; condizioni sufficienti -vari generi di ragionamenti matematici: ragionamento “per assurdo”, induzione matematica **Funzioni** -Prodotto Cartesiano, rappresentazione per punti -funzione: definizione, uguaglianza grafico ecc. -funzione lineare -monotona, segno, rappresentazione grafica -sistemi lineari di due equazioni -disequazioni lineari -separazione del piano in regioni -funzione quadrata: monotona, grafico, segno -applicazioni a disequazioni di secondo grado Sistemi simmetrici della forma $\{\begin{matrix} x+y=s, \\ xy=p \end{matrix}$. Sistemi della forma$\{\begin{matrix} mx+n=y, \\ ax^2+bx+c=y \end{matrix}$ *sistemi che riducibile a sistemi già studiati; sistemi di disequazioni -operazioni con funzioni: +, -, ° -*inversa; altri esempi di funzioni	n di unità, interpretazione geometrica *trasformazione geometrica (tutti)* -prodotto scalare di due vettori nel piano e nello spazio; le condizioni di perpendicolarità -posizioni relative nello spazio: rette ed piani nello spazio, due piani nello spazio (incidente, paralleli, perpendicolari) -angolo di due rette, di due piani, di una retta ed un piano. Distanze, aree o volumi che usano vettori o no **Problemi (sezioni, principio di Cavalieri; corpi inscritti e circoscritti)* **Polinomi** forma algebrica; grado, +, *; radice; funzione polinomiale, equazioni divisione; teorema fondamentale della divisione per x-a **La divisibilità di polinomi* Scomposizione in fattori fattore. Teorema di Bezout relazioni tra radici e coefficienti (formule di Viete) Radici di polinomi con reali, razionali, coefficienti interi Elementi di Combinatoria -Problemi di contare -permutazioni, disposizioni, combinazioni -Binomio di Newton Elementi di statistica e probabilità -Dati statistici; rappresentazioni -frequenza, significato; -operazioni con eventi; probabilità **Schma classico (Poisson, Bernoulli) ed altri*	metodo; regola di Cramer; metodo di Gauss; interpretazione geometrica di un sistema lineare *3x3* Applicazioni: semipiani, elementi di programmazione lineare **Elementi di Analisi** Successioni di numeri reali, retta reale monotona, estremo superiore di un insieme Limite; successione convergente; esempi; Operazioni con successioni che hanno un limite; eccetto casi di Limiti di successioni monotone. Numero *e*; **Criterio del Confronto* Limite di una funzione: in un punto, interpretazione geometrica Funzioni elementari; Operazioni con limiti. Calcolo di limiti.. Metodi per eliminare l’indeterminazione Funzioni continue in un punto; discontinuità; operazioni con funzioni continue; proprietà; applicazioni (equazioni, disequazioni) ***Derivate*** Differenziabilità in un punto; in un intervallo; interpretazione geometrica di derivata Regole di derivazione; derivazione di elementari funzioni; di funzioni composte Teoremi di Fermat, Rolle, Lagrange; Applicazioni Regola di De L’Hopital Rappresentazione grafica di una funzione utilizzando le derivate il ruolo della derivata prima; monotona, punti estremanti il ruolo della derivata seconda: convessità e concavità, punto di flesso Disegno del grafico (inclusi asintoti) Rappresentazione grafica di	Spazio vettoriale su di un campo commutativo, Definizioni, esempi, basi di spazi vettoriali $\square^2$, $\square^2$ Basi canoniche Operatori lineari, proiezioni **altro* Forma matriciale di un operatore lineare. Operazioni **Elementi di Analisi** La nozione di integrale (area esempio) Primitive. Integrale indefinito. Primitive comuni. Metodi per cercare le primitive, integrale per parti, sostituzione, integrale di funzioni razionali Integrale definito Teorema fondamentale del Calcolo integrale (formula di Leibniz-Newton) Linearità dell’integrale, additività rispetto al dominio di integrazione **Integrale di Riemann di funzioni con un numero finito di punti di discontinuità* Metodi per il calcolo di integrali definiti Integrazione per parti. Sostituzione Applicazioni - area formata da due curve - Volumi * altri: lunghezza di una curva, area di superfici di rotazione, centro di gravità	

	La geometria e la trigonometria **5. Parallelismo ed algebra vettoriale** -vettori, uguaglianza, somma -prodotto di un vettore con un reale -decomposizione in due direzioni date - col linearità di due vettori; problemi -Sistema Cartesiano, coordinate; distanzi tra due punti -coordinate di un vettore, somma, prodotto -equazione di una retta data da un punto ad una retta. -riconoscimento del parallelismo e congruenza di due rette -*traslazione; -*homotetia. **6. Relazioni metriche nel piano** -risoluzione di un triangolo rettangolo -cerchio trigonometrico; sin, cos, tg, cotg, -riduzione al primo quadrante; formule trigonometriche fondamentali: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \cos(a \pm$ -altre formule trigonometriche (sin 2x, cos 2x tg 2x, *sin x/2 ecc.) -*somme che trasformano in prodotti, esprimendo sin x, cos x, tg x come una funzione di tg (x/2) -vari modi per calcolare la lunghezza di un intervallo e misura di un angolo -teorema di seno, teorema di coseno,		coniche (cerchio, elisse, parabola, iperbole) *Proprietà Geometriche*	* Equazioni differenziali (elementari):esempi, equazioni differenziali a varaibili separabili; equazioni differenziali lineari di orine 1 e 2.	

	risoluzione di triangoli arbitrari -*angoli e distanze nello spazio -funzioni trigonometriche sin, cos, tg, cotg: * la parità, periodicità; grafico -equazioni trigonometriche fondamentali che risolvono; *equazioni riducibili				

1.10 Approcci Pedagogici Generali

La crescente popolarità di programmi educativi ritagliati sui bisogni degli studenti dotati in matematica rende importanti le ricerche in educazione che sono state da supporto a questi programmi.

Una delle maggiori sfide nell'educazione dei talenti è di convincere le autorità del bisogno di personale specializzato e di modelli differenti di insegnamento per gli studenti dotati di talento. (Gallagher, 1997; Renzulli, 1982; Renzulli & Reis, 1998) bisognrebbe far cambiare la seguente posizione "gli studenti dotati di talento possono costruire loro stessi". La comunicazione della relativa ricerca sta cercando di creare un convincimento sul perchè il tradizionale metodo di insegnamento utilizzato nelle classi è inadeguato per i bisogni degli studenti dotati (Park, 1989; Westberg, Arcohambault, Dobyns, & Salvin, 1993).

I talenti in Matematica

Le basi per ogni discussione riguardo l'insegnamento a livello appropriato per i talenti matematici, comincia con un generale giudizio di ineguatezza, in quanto non c'è ancora una definizione accettata universalmente di talento matematico (Gagne, 1995; Piùlock, 1996; Sternberg, 1993). Questa fondamentale mancanza di accordo di estende alla matematica in generale, dove le descrizioni di prestazioni matematiche ed abilità differiscono molto in letteratura (Sowell, I993) che documenta una vastità di aggettivi per la descrizione di studenti dotati di talento. Questa descrizione include "promettenti", "portati per l' apprendimento", "dotati di ingegno e talento ", e "accademicamente superiori". Questa molteciplità di descrizioni senza uno specifico dominio di parallelismi matematici fa sì che l'espressione talento diventi generica.

Nonostante queste differenze descrizioni di studenti con alto potenziale, la discussa letteratura su questi studenti (Sowell et al., 1990) concorda sul fatto che gli studenti dotati di talento matematico sono capaci di matematica in modo tipico rispetto agli studenti più vecchi o prendono parte nel pensare matematico, in maniera qualitativamente diversa rispetto ai loro compagni di classe o pari. Questa letteratura incornicia anche un ritratto del talento matematico che corrisponde ad una comprensione di talento come un dinamico ed emergendo tratto. La NCTM Task Force su Studenti Matematicamente Promettenti (Sheffield, 1999) riconosce che i dotati matematicamente entrano in tutte le categorie, età, e livelli di conseguimento accademico e non possono avere tratti identici. Inoltre, la Task Force evitò di definire promessa matematica come dotati di talento. Invece, loro definirono studenti matematicamente promettenti come "quelli che hanno il potenziale per divenire i leader e risolutori di problema del futuro" (Sheffield, p. 9)

I Si accetta estesamente che studenti matematicamente dotato d'ingegno hanno necessità che differiscono in natura da quelli di altri studenti. I talenti matematici differiscono dai loro compagni di classe per quanto concerne il ritmo con il quale loro imparano, la loro profondità di capire e gli interessi che loro coltivano. Loro, differiscono anche dal gruppo generale di studenti nelle abilità seguenti: la formazione spontanea di problemi, flessibilità nell'occuparsi di dati, vivacità mentale nella scorrevolezza delle idee, abilità di organizzazione di dati e l'originalità di interpretazione, abilità di trasferire le idee, e l'abilità di generalizzare. I talenti matematici possono occuparsi di livelli alti dell'estRapportone, e loro hanno le abilità pensanti critiche e forti. È probabile che capiscano rapidamente le idee matematiche e hanno un approccio creativo nelrisolvere problemi. Loro sono capaci di vedere relazioni tra concetti matematici e procedure, lavorare sistematicamente ed accuratamente ed applicare la loro conoscenza e le abilità a situazioni nuove e poco familiari. Inoltre, loro persistono nel completare i compiti. Di conseguenza, richiedono, una differente istruzione, definita da Tomlinson, Callahan, Luna, Tomchin, Landrum, Imbeau, Hunsaker, ed Eiss (1995) come "utilizzo di costante varietà di approcci istruttivi per cambiare contenuto, processo, e/o prodotti per sviluppare la prontezza ed interesse di studenti accademicamente diversi." Ancora i recenti studi hanno trovato poche le modifiche istruttive o curricolari apportate in classi elementari e regolari. Due approcci didatticamente diversi sono usati come una maniera di differenziazione per le matematiche che che sono acceleRapportone e programmi di arricchimento. Comunque, i più esperti raccomandano una combinazione di loro.

Motivazione agli studenti dotati di ingegno

La richiesta di motivare studenti d'ingegni è divenuta una preoccupazione principale per educatori in matematiche in molti paesi. La motivazione di studenti diviene specialmente attinente ad istruzione di matematiche in Europa alla luce di ricorrere alle sfide per attirare gli studenti più d'ingegnosi a rimanere nel continente europeo e contribuire alla visione dell'Unione europea per realizzare lo sviluppo economico e scientifico più alto.

La sfida è una mezzo che l'insegnante può usare per aumentare la motivazione intrinseca di studenti d'ingegnosi. Gli studenti matematicamente dotati d'ingegno, in nessuna materia, hanno bisogno di adattare le loro caratteristiche individuali, le necessità, le abilità, ed interessi, ai curricula stabiliti. In generale, sembrano essere importanti aspetti il creare programmi di curriculum diversi per studenti matematicamente d'ingegni, per accrescere il loro interesse. (Mugnaio, 1990; Stanley, 1991). Motivazione ed atteggiamento positivo verso le Matematiche e in generale una guida propria che porta studenti d'ingegno ad intraprendere un corso di azione. C'è stata una ricerca estesa sul ruolo di atteggiamenti e motivazioni nell'imparare le matematiche. Le scoperte mostrano che atteggiamenti positivi e motivazione sono riferite al successo nell'imparare. La ricerca non può indicare precisamente sfortunatamente, come la motivazione colpisce la cultura. Ovvero, noi non sappiamo se è la motivazione che produce la cultura o la cultura che migliorano la motivazione.

Curriculum di Talenti Matematici

Anche se le matematiche sono considerate un lido nella teoria dell'intelligenza generalmente (Gardner, 1999; Sternberg, 1985), la natura di essere donato matematicamente e come le necessità di studenti matematicamente dotati d'ingegno possono essere incontrate è relativamente area inesplorata. Così, gli studi di ricerca hanno dimostrato il bisogno per studenti dotati d'ingegno di avere accesso a contenuti matematici avanzati (Johnson & l'ampere; Sher, 1997) ed esposizione a problemi di matematiche autentici e difficili (Johnson, 1993; Kolitch & l'ampere; Brody, 1992).

Comunque, curricula matematici e modifiche istruttive costituite per studenti dotati d'ingegno sono spesso improprie a causa della natura estremamente ripetitiva dei corsi e la loro mancanza di profondità (Johnson & l'ampere; Sher, 1997; Kolitch & l'ampere; Brody, 1992; Parcheggi, 1989; Al di et di Westberg., 1993). C'è così, un bisogno forte di ricercare su quale genere di esperienze istruttive dovrebbero essere offerte a studenti matematicamente dotati d'ingegno, così come ricercare nell'uso di mezzi tecnologici un miglioramento dell'efficacia di istruzione.

I Curricula di Talenti Matematici di studenti dovrebbe portare gli studenti a lavorare collaborativamente (al di et di Tomlinson., 1995). Gli studenti trarranno grande profitto, accademicamente ed emotivamente, da questo tipo di esperimenti. Impareranno l'uno dall'altro, si rinforzeranno l'un l'altro, ed si aiuteranno l'un l'altro sulle difficoltà. Gli Studenti d'ingegno imparano meglio in un ambiente emotivamente studente-centrato che incoraggia l'indagine e l'indipendenza, include una varietà larga di mezzi, è generalmente complesso, e connette le esperienze scolastiche con quelle del mondo più grande.

I seguenti suggerimenti per rendere differente l'insegnamento (1) accertamento, (2) materiali di curriculum, tecniche istruttive (2) e (4) raggruppamento di modelli. Queste opportunità dovrebbero essere largamente disponibili a qualsiasi studente con interesse all'utilizzo delle stesse.

- Il pre-accertamento dovrebbero essere fatto agli studenti dotati d'ingegno che già conoscono il materiale e non devono ripeterlo ma possono essere sostituiti con istruzione e le attività che sono significative. Nei livelli elementari, Gli studenti dotati hanno ancora bisogno di conoscere ed approfondire le basi del loro sapere. Se non lo fanno, non si escludono dagli altri compiti più complessi, ma continuano a lavorare sulle basi.
- Una delle caratteristiche degli studenti dotati è che loro loro si sforzano per dominare temi matematici e tecniche per la loro comprensione profonda. Loro dovrebbero afferrare regolarmente comunque, lavoro difficile perché il lavoro standard in classe non basta. Gli

Studenti dotati hanno bisogno di risolvere problemi più duri, oltre il requisito del curriculum standard così gli insegnanti dovrebbero creare accertamenti che lascino spazio alle differenze nel capire, creatività e completamento; e si dia agli studenti un'opportunità di mostrare quello che loro hanno imparato, chiedendo agli studenti di spiegare oralmente e per iscritto il loro ragionamento.

- Gli insegnanti dovrebbero scegliere manuali che offrano le opportunità più arricchite. I manuali di matematica ripetono temi di anno in anno. Siccome, per lo più i manuali sono scritti per la popolazione generale, non sono sempre adatti per gli studenti dotati d'ingegno. Sono necessarie risorse diversificate. Nessun testo da solo incontrerà adeguatamente le necessità di questi studenti.

- Il curriculum matematico dovrebbe accentuare il ragionamento matematico e dovrebbe sviluppare le abilità esplorative ed indipendenti (Niederer & l'ampere; Irwin, 2001). Per esempio, si può esemplificare ciò usando la soluzione dei problemi e il metodo della scoperta, prendendo parte a progetti speciali in matematiche, scoprendo formule, cercando modelli, ed organizzando dati per trovare relazioni. Le attività dovrebbero aiutare gli studenti a sviluppare la struttura di indagine, rinforzare le abilità di sintesi, sviluppare le abitudini di studio efficienti, ed incoraggiare le domande divergenti. Gli Studenti matematicamente ingegnosi hanno bisogno di una dilazione di opportunità di arricchimento. Lo scopo del curriculum di matematica dovrebbe essere esteso da offrire una fondazione adeguata per studenti che possono divenire matematici nel futuro. Il curriculum di matematica dovrebbe essere seguito (sulla base di un accertamento della conoscenza di studenti e l'abilità) flessibilmente. Curricula per studenti matematicamente dotati dovrebbero promuovere la cultura e la crescita. Lo studente dovrebbe essere soddisfatto, per come impara, sperimenta, per l'avanzamento accelerato, per compattezza, per varietà di temi, per la riorganizzazione flessibilmente, per un uso di concetti più avanzati o complessi, di astrazioni, e materiali.

- Indagine-base, gli approcci di scoperta-apprendimento che enfatizzano i problemi aperti con soluzioni multiple o percorsi multipli è estremamente efficace. Gli studenti possono disegnare i loro propri modi di trovare le risposte a domande complesse. Molte domande di alto-livello nella giustificazione e discussione di problemi dovrebbero essere messe da parte

- Una efficace tecnica istruttiva per studenti dotati d'ingegno che promuovono la cultura auto-promossa e auto-diretta è l'uso di situazioni a-didattiche. Nella "teoria delle situazioni" di G. Brousseau (1997), le situazioni a-didattiche hanno tre fasi: fase di azione, fase della formulazione e fase di validazione. La fase di azione corrisponde alle matematiche nella realtà e consiste nella creazione corretta di strategie decisive in una situazione di concretezza. La fase di comunicazione consiste nella scoperta di un codice di comunicazione per comunicare le strategie che sono state usate. Finalmente, la situazione di validazione consiste nel fatto che i partecipanti decidono quale siano le strategie ottimali. Per rispondere a questa domanda gli studenti devono formulare "teoremi d'azione" che permettono l'ottimizzazione di possibili soluzioni. Da un punto di vista pedagogico, il "gioco" presume così, un ruolo molto importante. Lo studente impara a passare dalla fase di azione alla negoziazione pubblica (in classe e senza l'intervento diretto dell'insegnante) di tutte le possibili strategie (i teoremi d'azione). L'insegnante prepara la situazione a-didattica e rimane arbitro delle regole che hanno bisogno di essere rispettate. Tutte le fasi sono vissute direttamente dagli studenti.

- La tecnologia può offrire un mezzo, un'inspirazione, o un ambiente di cultura indipendente per ciascuno studente, ma per il dotato spesso è un mezzo per arrivare alla profondità adatta del curriculum e ad una opportunità di prodotto avanzate. Le calcolatrici possono essere usate come un mezzo di esplorazione per risolvere complessi e interessanti problemi. La programmazione al computer è un'abilità di livello più alta che migliora le abilità di soluzione dei problemi e promuove il ragionamento accurato e la creatività. L'uso di un data-base, foglio di calcolo elettronico, calcolatrice grafica, o calcolatrice scientifica possono facilitare l'analisi potente di dati. La World Wide Web è una fonte enorme ed eccitante di problemi, dispute, di arricchimento, risorse per l'insegnante, ed informazioni su idee matematiche che non sono presente nei manuali. La tecnologia è un'area dove studenti dotati e svantaggiati possono essere rifiutati a causa di mancanza di accesso e di fiducia. È essenziale che studenti che non ne hanno accesso a casa trovino occasione di esposizione a scuola così che loro non restino indietro rispetto alle esperienze di altri studenti.

PARTE I. IDENTIFICAZIONE

1.11 Scopi dell'identificazione

Un'assunzione molto riconosciuta è che gli studenti matematicamente dotati siano nati con questo talento (la Maggiorana & l'ampere; Nelson, 1985).[1] Questo non è sempre vero. Alcuni non potrebbero essere mai identificati come individui matematicamente dotati. Il solito metodo per identificare tali studenti nei paesi europei sono le competizioni, ma generalmente si accetta che molti studenti d'ingegno in matematica non siano scoperti mai semplicemente perché non partecipano a competizioni o semplicemente perché loro non erano fra i primi dieci durante la competizione perché non ottengono performance considerevoli in limiti di tempo ristretti.

Inoltre, alcuni studenti possono trovarsi in ambienti culturali matematicamente "poveri" e non potranno arrivare al loro più alto potenziale. Ancora altri non sono motivati abbastanza e trovano che altre cose siano nel lungo periodo più rimunerative e perdono interesse alle matematiche per cercare ricompense tangibili (Mingus, 1999). Solo pochi, sono scoperti in ambienti di cultura matematicamente "ricchi" nei quali l'insegnante è istruito bene in matematica, e la scuola è d'appoggio, hanno ampie opportunità di sviluppare le loro abilità, e le organizzazioni pubblico / privato e le università ricompensano e promuovono la crescita matematica (Perleth & l'ampere; Heller, 1994). Questi bambini richiedono che la cultura si adatti a facilitare il loro sviluppo conoscitivo ed emotivo (Henningsen & l'ampere; Stein, 1997; Hoeflinger, 1998).
Studenti matematicamente ingegnosi hanno bisogno per prima cosa, di essere identificati in fasi iniziali ed in modo sistematico (Kissane, 1986). Le informazioni disponibile su bambini matematicamente d'ingegno è basata soprattutto su ricerche condotte su bambini a livello di scuola superiore (al di et di Niederer, 2003). Comunque, ricercatori ed educatori enfatizzano il valore della prima identificazione di bambini d'ingegno (Clark, 1997). Mentre i talenti sono stati riconosciuti in molti casi in tenera età, ci sono comunque dubbi sull'accuratezza dell'identificazione e l'obiettività di genitori ed insegnanti (Buescher, 1987).

Gli elementi del talento matematico

Il talento matematico si riferisce ad un'abilità insolitamente alta di capire le idee matematiche e matematicamente ragionevoli, piuttosto che solo un'abilità alta per fare i calcoli di aritmetica (Mugnaio, 1990; Stanley & l'ampere; Benbow, 1986). Secondo molti studiosi, termini come matematicamente d'ingegno, matematicamente dotato d'ingegno, ed estremamente capace in matematiche si riferisce a studenti la cui abilità nelle matematiche li mette generalmente nella cima 2% o 3% della popolazione. Delle caratteristiche che possono produrre gli importanti indizi nello scoprire individui matematicamente d'ingegni sono le seguenti:

1. Una consapevolezza insolitamente acuta e la curiosità intensa sulle matematiche.
2. Una rapidità insolita nell'apprendere, comprendere, ed applicare le idee matematiche.
3. Un'abilità alta di pensare e lavorare astrattamente e l'abilità di vedere modelli matematici e le loro relazioni.
4. Un'abilità insolita di pensare e lavorare con problemi matematici in modo flessibile, creativo piuttosto che in una maniera stereotipata.
5. Un'abilità insolita nel trasferire situazioni matematiche in situazioni nuove, o non apprese prima. (Krutetski, 1976; Maitra, 2000; Mugnaio, 1990)

Tutti gli studenti che realizzano i risultati di Dimostrazione più alti o ricevono i livelli più alti nella classe di matematica non necessariamente sono ingegni matematici. Inoltre, molti dei programmi di matematica nelle nostre scuole è dedicato pesantemente allo sviluppo delle abilità di calcolo ed offre una piccola opportunità per questi studenti di dimostrare i ragionamenti complessi che sono una caratteristica degli studenti veramente d'ingegno (Mugnaio, 1990; Spanna & l'ampere; Overtoom-Corsmit, 1986). Mentre, il conseguimento di votazioni alte nella scuola certamente può

[1] Alcuni studiosi (e.g. Gagné, 1985) "matematicamente preferisce il termine donato" a "matematicamente d'ingegno" perché loro vedono giftedness come un'abilità inerente piuttosto che, come è probabile che il termine "talento" suggerisca, la manifestazione di alcuno spettacolo notevole. Ci sono evidentemente, i certi vantaggi e svantaggi dall'usare entrambi questi due termini.

essere un indizio all'abilità alta in matematiche, e non occorrono informazioni supplementari (Buescher, 1987).
D'altra parte alcuni studenti matematicamente d'ingegno non dimostrano un curriculo accademico notevole o entusiasmo verso i programmi (Tirosh, 1989) di matematica a scuola. Molti studenti matematicamente d'ingegno non sembrano essere sfidati pienamente dal loro compito in classe e hanno bisogno di guida speciale ed attenzione che li aiuti a rivelare e sviluppare il loro pieno potenziale (Grassl & l'ampere; Mingus, 1999). In tali casi la loro abilità in matematica può essere trascurata facilmente, anche se possono esibire gli altri indizi che suggeriscono l'abilità alta in matematiche. Perciò, è estremamente importante sviluppare e identificare le abilità di questi studenti.

1.12 Metodi dell'identificazione

In generale, i metodi utilizzati per identificare studenti matematicamente dotati possono essere divisi in due grandi categorie: (a) test standardizzati; e (b) interviste approfondite ed esami con dati da raggruppare, o amministrare compiti matematici speciali. Tutta questa evidenza può condurre alla creazione di una Bagaglio di Talento. I due metodi dell'identificazione di studenti d'ingegno sono descritti sotto. In un secondo momento, combineremo questi metodi per proporre un processo sistematico che identifichi studenti matematicamente d'ingegno.
A. Tests standardizzati (adattati da Mugnaio, 1990; Clark, 1997)

DimostRapportoni di intelligenza
I risultati del IQ possono offrire degli indizi all'esistenza del talento matematico. Comunque, l'uso da solo di queste Dimostrazioni è sufficiente per identificare studenti d'ingegno matematico. Il talento matematico è una specifica attitudine, il risultato di IQ è una somma di molte attitudini diverse e abilità.

Dimostrazioni di creatività
Ci sono differenti opinioni su come i risultati di Dimostrazioni di creatività possano essere usati per aiutare l'identificazione del talento matematico. Anche se studenti talenti esprimono creatività quando trattano con idee matematiche, questo non è un risultato che prova che ci sia creatività sempre. Comunque, accertamenti di creatività alti, insieme ad indicazioni di interesse alto in matematica possono offrire indizi significativi del talento matematico.

Il risultato di Dimostrazioni matematiche
I risultati di Dimostrazioni matematiche possono offrire anche indizi preziosi nell'identificare il talento matematico, ma i risultati di queste Dimostrazioni devono essere interpretati attentamente. Le Dimostrazioni matematiche spesso sono calcolo-orientate e danno piccole informazioni su come un studente davvero ragiona matematicamente. Le Dimostrazioni raramente hanno anche, problemi abbastanza difficili per stimare i limiti superiori dell'abilità di un studente d'ingegno o mostrare che questa abilità è qualitativamente diversa da quello di altro, ma non veramente matematicamente d'ingegno. Se ci si ricorda di queste limitazioni, i risultati delle Dimostrazioni di matematica possono essere utili. Studenti che hanno un punteggio superiore ai 95 o 97 percentile, su norme nazionali possono avere grandi abilità in matematica, ma ulteriori informazioni hanno bisogno di distinguire il risultato alto dal veramente dotato d'ingegno. Non si dovrebbe presumere che non ci siano studenti matematicamente d'ingegno fra quelli che segnano sotto i 95 percentile; questi studenti devono essere riconosciuti attraverso altri metodi.

Esami attitudinali di matematiche
Esami attitudinali di matematiche standardizzati possono essere usati fondamentalmente nello stesso modo come Dimostrazioni matematiche. Gli esami attitudinali hanno alcune delle stesse limitazioni come Dimostrazioni di conseguimento a meno che, perché sono progettate per mettere meno enfasi sulle abilità computative e più enfasi su abilità ragionevoli e matematiche, i risultati di queste Dimostrazioni possono essere spesso più utili nell'identificare studenti matematicamente d'ingegno

Esami attitudinali di matematiche di fuori-di-grado-livello
Finalmente, molte delle limitazioni associate al conseguimento di risultati nelle dimostrazioni matematiche o esami attitudinali possono essere indirizzate facendo esami attitudinali fuori esterni alle prove stesse. Si suppone che questo processo sia usato solamente con studenti che già hanno dimostrato le abilità di matematiche forti, o quelli che mostrano segnali ben definiti sull'abilità matematica alta. Il vantaggio di queste dimostrazioni è che loro offrono un accertamento migliore delle abilità razionali e matematiche perché lo studente deve trovare modi di risolvere molti problemi che a lui o lei non sono stati insegnati. Come è riportato nella letteratura (particolarmente negli Stati Uniti negli ultimi venti anni), la procedura testare il livello fuori dagli schemi è usata con successo e percorre programmi di scolastici di matematica con studenti di

liceo minori e senior. Programmi simili sono stati usati con successo più recentemente, per identificare studenti matematicamente d'ingegno nei livelli elementari.

B. Interviste profonde ed esami di atteggiamento completarono con dati i compiti matematici e speciali.

In questa categoria, i metodi seguenti di identificazione di studenti matematicamente d'ingegno possono essere usati: interviste profonde con studenti, genitori ed insegnanti per raggruppare informazioni sulla sicurezza di sé come studente, atteggiamenti, ed interessi (vedi Elenco di Domande di Intervista); esami di atteggiamento; e, compiti matematici attentamente costruiti nei quali gli studenti hanno l'opportunità di spiegare all'intervistatore i loro metodi di ragionamento per risolvere i problemi. Questa metodologia di raccolta di dati eventualmente può condurre alla creazione di una Bagaglio per il Talento, un veicolo per raggrupparlo sistematicamente e registrare informazioni sulle abilità di uno studente, interessi, e preferenze di stile e di cultura.

C. Un processo sistematico per identificare studenti matematicamente d'ingegno

Evidentemente, identificare studenti matematicamente d'ingegno non è un compito semplice, e c'è più che un modo di andare verso ciò. Delle caratteristiche comuni di processi di identificazione sono combinate nel modello seguente (adattato da Mugnaio, 1990; Clark, 1997).

Fase 1: Proteggere

L'obiettivo in fase uno è proteggere gli studenti sospettati di avere abilità alta in matematica. Questi studenti saranno valutati ulteriormente nella prossima fase.

Passo uno. Una lista di identificazione può essere creata per raggruppare degli indizi che suggeriscono il talento matematico. Per esempio, studenti che hanno un punteggio sopra i 95 percentili su un esame attitudinale di matematica sono entrati primi. In secondo luogo, sono aggiunti all’elenco, quelli che segnano sopra i 95 percentili nelle Dimostrazioni (chi già non è sull'elenco). In una maniera simile, studenti che hanno risultati di IQ alti; studenti che sono creativi e hanno un interesse alto per la matematica; e agli studenti, possono essere aggiunti nominati dai genitori, insegnanti, o pari.

Passo due. Le informazioni dell’elenco per ogni studente sono riviste sulle interviste iniziali agli studenti. Se le informazioni raccolte, per un particolare studente, non sono significative allora non è consigliabile continuare, il nome dello studente dovrebbe essere rimosso, perché la fase due può danneggiare l’ego di studenti che non eccellono in matematiche realmente. Comunque, la cautela dovrebbe essere esercitata per non eliminare studenti d'ingegno in questo processo. È raccomandato anche il coinvolgimento di genitori in queste decisioni.

Fase fase 2: Accertamento di abilità matematiche secondo la suddetta procedura (o una combinazione di altre Dimostrazioni standardizzate)

L'obiettivo in fase due è disgiungere gli studenti dotati di talento matematico da quelli che sono studenti che ottengono soltanto buoni risultati e cominciare a stimare l'estensione delle abilità degli studenti di talento.

Passo uno. Studenti che sono elencati per fare il test di fuori-di-grado-livello, insieme ai loro genitori dovrebbero essere informati sulla natura di questo test e la ragione del test stesso. Il test di fuori-di-grado-livello sarebbe condotto poi con gli studente che hanno il beneplacito dei genitori. È riportato nella letteratura che il test di fuori-di-grado-livello è costruito per studenti di ètà tre volte superiore all'età del bambino che è esaminato di solito. Un esempio è offerto sotto (Figura 1)

Classe Currente (Fall)	Out-di-Classe-Livello Test
1st	3rd classe - Fall
2nd	4th classe - Fall
3rd	5th classe - Spring
4th	7th classe - Fall
5th	8th classe - Fall
6th	9th classe - Spring
7th	11th classe - Fall
8th	12th classe – Fall

Figura 1. Sample Testing Schedule

Passo due. I risultati del test di fuori-di-grado-livello di ogni studente dovrebbero essere valutati insieme ai risultati di programmazione. Il risultato di fuori-di-grado-livello dello studente offrirà un'indicazione del grado del talento matematico. Risultati sopra i 74 percentile rappresentano un grado del talento matematico. Questo livello del talento mette lo studente sopra l'1% della popolazione in abilità matematiche. Risultati sopra ai 64 percentile denotano un livello del talento per la maggior parte di studenti superiore al 3% rispetto al resto della popolazione. Studenti in questi due gruppi sarebbero identificati come matematicamente ingegnosi.

Fase 3: Infine, l'obiettivo in fase tre deve confermare i talenti e le necessità di studenti matematicamente dotati d'ingegno. Qui noi possiamo usare interviste profonde con ogni studente identificato come d'ingegno, ed interviste con genitori ed insegnanti per raggruppare informazioni sulla sicurezza di sé dello studente, atteggiamenti che lo interessano ecc. Noi possiamo amministrare esami di atteggiamento completati da compiti matematici ed attentamente costruiti nei quali ogni studente ha l'opportunità di spiegare all'intervistatore i suoi metodi di ragionamento per risolvere il problema. Tutti i dati raccolti possono essere inclusi in un Bagaglio di Talento.

Domande dell'intervista

Per gli studenti

1. Quale tipo di attività matematica ti piace di più? Perché?

2. Quale è il tuo principale obiettivo che ti aspetti di raggiungere in matematica?

3. Come sono state raggiunte le tue aspettative o ti hanno sfidato fino all'inizio di questo anno scolastico? L'anno scorso? Pochi anni fa?

4. Quanto spesso e quando hai l'opportunità di intraprendere attività matematiche che trovi come una sfida? Perché trovi queste attività come una sfida?

5. Cosa pensi ci sia di buono nella matematica?

6. Quali attitudini e quali abilità pensi di possedere in matematica? Come identifichi le tue speciali caratteristiche? Hai un modo preferito di imparare la matematica?

7. Sei bravo a risolvere i problemi? Perché? Cosa fai quando risolvi un problema? Ci sono tappe che segui?

8. Quando finisci di studiare matematica, pensi a come hai lavorato bene mentre la studiavi?

9. Pensi che potresti fare meglio in matematica? Come?

10. Raccontami una storia di quando hai raggiunto un risultato matematico in tempi rispettabili. Perché è stato importante per te?

11. Come ti influenzano le tue esperienze nell'apprendimento della matematica?

12. Quale pensi che sia il lato forte del tuo programma di matematica? Qual è il principale punto debole della tua aerea di miglioramento?

13. Come la tua classe/scuola/insegnante ha aumentato le tue incomprensioni matematiche?

14. Quali sono le più interessanti o importanti cose che hai imparato in riferimento alla matematica nella tua classe/scuola?

15. La matematica ha influenzato i tuoi interessi formativi/scelte di carriera? Come?

16. Vuoi aggiungere qualcos'altro?

Per gli Insegnanti

Domande generali:

1. C'è un curriculum matematico ben stabilito che è seguito nella sua scuola? Come si riferisce a studenti matematicamente d'ingegno? Che opportunità o servizi specializzati offre la scuola specificamente per studenti matematicamente d'ingegno?

2. La procedura corrente nella sua scuola (sistema) identifica adeguatamente studenti matematicamente di talento? Il criterio e le procedure sono abbastanza flessibili per gli studenti che mostrano una serie di livelli di abilità in matematica? Secondo la Sua opinione, quale è è la componente più forte e quella più debole di queste procedure?

3. Il programma di matematica attuale incontra i bisogni degli studenti d'ingegno nella sua scuola? Come? Come potrebbe essere fatto differentemente?

4. Quanta flessibilità ha nello sviluppare i talenti matematici dei Suoi studenti, non solo in termini delle necessità intellettuali ma anche in termini delle necessità psicologiche o sociali?

5. Come documenta le necessità di studenti matematicamente d'ingegno? Come risponde a quelle necessità? Quale è il modo più comune per lei di valutare questi studenti (e.g. Dimostrazioni, compiti, portfolio, ecc.)? Come esamina il progresso di questi studenti? Come potrebbe fare differentemente questo?

6. Quanto sono invogliati gli studenti a lavorare con gli altri studenti (dello stesso livello di grado / di un livello di grado diverso?) Quando e in che circostanze questo succederebbe?

7. Studenti matematicamente dotati d'ingegno sono assegnati a progetti specializzati? Come sono sviluppati i progetti? Questi studenti lavorano indipendentemente o con Lei (o con gli altri insegnanti) per completare questi progetti?

8. Ha opportunità per i curricula che progetta, su come identificare, su come sviluppare professionalmente e motivare gli studenti matematicamente d'ingegno? Che genere di tali opportunità ha avuto finora? È soddisfatto? Di che opportunità ha bisogno per fare questo lavoro con più successo?

9. Ci sono insegnanti che sono formati o hanno esperienza di lavoro con studenti matematicamente d'ingegno? Si sente a Suo agio nel lavorare con studenti matematicamente dotati d'ingegno?

10. E' consentito agli studenti di lasciare la propria classe per seguire studi specializzati (e.g. frequentare classi di un'università locale, partecipare ad un programma avanzato)?

11. Quanto sono incoraggiati studenti matematicamente dotati d'ingegno a fare domanda per varie borse di studio? Quale è il processo?

12. Come lavora con studenti matematicamente d'ingegno per sviluppare le loro abilità organizzative, la loro disciplina e le abitudini di lavoro?

Domande specifiche riguardo ad uno studente che potrebbe essere matematicamente d'ingegno:

1. Quale è la Sua opinione generale sul sentirsi uno Studente di livello A? Quali sono le sue forze e debolezze?

2. Cosa Le fa pensare che uno studentedi livello A sia matematicamente d'ingegno? Quali sono alcune delle caratteristiche che Lei pensa fanno questo studente matematicamente d'ingegno? Come sa questo?

3. Come fa uno studente di livello A a lavorare bene? Che genere di strategie utilizzano lui/lei per risolvere problemi? Che tipo di criticità osserva? Come si occupa di queste?

4. Che strategie usa: (a) identifichi i bisogni dello Studente di livello A (b) sostiene e motiva questo studente per sviluppare le sue abilità matematiche? Queste strategie differiscono da studente a studente? In tal caso, come?

5. Che genere di comunicazione / collabozione ha con i genitori degli studenti? Come si occupa delle loro preoccupazioni?

6. Vuole aggiungere qualcos'altro circa gli studenti?

Per genitori

1. Quali sono gli interessi, mete, forze, e debolezze in matematica di suo figlio?

2. Cosa Le fa pensare che Suo figlio sia uno studente matematicamente dotato d'ingegno ? Quali sono alcune delle caratteristiche che Lei pensa fanno di Suo figlio uno studente matematicamente d'ingegno? Come sa questo?

3. Come lavora bene indipendentemente suo figlio? Che genere di strategie usa lui/lei per risolvere problemi? Quali sono i dubbi che esprime? Come si occupa di queste preoccupazioni?

4. Che strategie Lei usa: (a) identificare i bisogni di suo figlio e (b) appoggio e motiva suo figlio per sviluppare le sue abilità matematiche? Di che assistenza / informazioni ha bisogno per offrire il migliore appoggio a Suo figlio?

5. Che genere di comunicazione / collaborazione ha con l'insegnante di matematica di Suo figlio? Quali sono le Sue richieste / suggerimenti al suo insegnante?

6. Il programma di matematica attuale della scuola incontra i bisogni di Suo figlio? Come? Come potrebbe essere fatto differentemente?

7. Che generi di appoggio / risorse sono offerti dall'insegnante / scuola a Suo figlio per motivare i suoi interessi matematici e le abilità? È soddisfatto? Perché? Come potrebbe essere migliorato questo appoggio?

8. Vuole aggiungere qualcos’altro su Suo figlio?

1.13 Tests

IDENTIFICAZIONE DI STUDENTI DOTATI DI TALENTO MATEMATICO
by Mircea Becheanu

Parte I (Età: 10-11.)

GEOMETRIA.

Problema 1.
Su un foglio di carta é disegnata un quadrato di area $4cm^2$. Usando un nuovo foglio di carta ed un paio di forbici, costruire un quadrato di area $9cm^2$.

Soluzione.
Tagliare il quadrato dato in quattro quadrati unitari. Poi costruire un nuovo quadrato di nove quadrati unitari.

Problema 2.
Tre segmenti escono dal punto M , sai che MA, MB, MC sono costruiti da

$MA^2 = MC^2 = \frac{1}{2}MB^2$. Trova $\angle MAC$.

Soluzione.
La figura $MABC$ è un quadrato. AC è una diagonale e $\angle MAC = 45^0$.

Problema 3.
Il triangolo BXC è isoscele dato che $BX = CX = 4$. Quanti triangoli equilateri ΔABC I cui lati hanno la stessa lunghezza possono essere costruiti, dato che X è un lato di questi triangoli.

Soluzione.
BC dovrebbe essere un intero, è uno dei numeri $1,2,...,7$. Prendendo in considerazione la condizione che X è un lato del triangolo ABC segue che $BC < 4$, così ci sono tre triangoli.

Problema 4.
È dato un triangolo arbitrario. Mostra che è possibile coprire il piano con molto triangoli identici col triangolo determinato, in modo tale che due triangoli arbitrari non si ricoprano.

Soluzione.
Due triangoli identici con il triangolo dato si uniscono per ottenere un parallelogramma. Molti di tali parallelogrammi si sono associati per ottenere una striscia limitata da due rette parallele. Il piano può essere coperto da un numero infinito di strisce.

Problema 5.
M *è un* punto arbitrario del lato BC di un quadrato $ABCD$. La bisecante dell'angolo MAD incontra il lato CD in un punto K. Mostra come $BM + DK = AM$.

Soluzione.
Prendi il punto N di una linea CD come $DN = BM$ e D è tra C ed N. Il triangoli ABM e ADN sono congruenti (uguali). Segue che, $AN = AM$, $\angle DAN = \angle BAM$. Adesso è facile vedere che il triangolo AKN è isoscele e quindi $AM = AN = NK = ND + DK = BM + DK$.

TEORIA DEI NUMERI

Problema 6.
Trova il numero intero positivo che ha tre cifre divisibili per 2, 3 e 5 e da resto 1.

Soluzione.
Il numero 1 soddisfà le condizioni di divisibilità. Nessun altro numero che soddisfa la condizioni è ottenuto dal suo addendo come multiplo di $2.3.5.=30$. Quindi, il numero richiesto è 121.

Problema 7.
Quanti numeri sono divisibili per 13 fra i primi 1000 numeri interi positivi? Quanti numeri sono relativamente primi a 13 nello stesso insieme di numeri?

Soluzioni.
Ci sono $\left[\frac{1000}{13}\right]=76$ numeri che sono divisibili per 13. Un numero è relativamente primo a 13 se e solo se non è divisibile per 13. Così, ci sono 1000-76=924 numeri relativamente primi a 13.

Problema 8.
Trova un numero a tre cifre la cui somma di cifre é uguale a 5, e tale che i numeri:

a) non contengano zero
b) possono contenere zero.

Trova i più piccoli di questi numeri per ognuno dei casi a) e b).

Soluzione.
Le sezioni di 5 con al massimo 3 parti sono:

$$1+1+1;\ \ 1+2+2;\ \ 2+3;\ \ 1+4;\ \ 5.$$

Cominciando da questo si pssono costruire tutti i numeri richiesti, contenendo o non contenendo uno zero. Il minimo numero in caso a) è 113 ed in caso b) è 104.

Problema 9.

a) Mostra che 27 è la somma di tre numeri interi consecutivi.
b) Mostra che 35 è la somma di tre numeri interi consecutivi.
c) Mostra che nessun numero divisibile per 3 è la somma di tre numeri interi consecutivi.
d) Mostra che 3100 è la somma di nove numeri interi consecutivi.

Soluzione. La risposta è basata sull'identità:

$$3k=(k-1)+k+(k+1).$$

Problema 10.
Trova il numero più grande intero che non ha due cifre identiche ed il prodotto delle sue cifre uguaglia 72.

Soluzione.
La possible fattorizzazione di 72 senza ripetizione fattoriale sono: $1\cdot8\cdot9$, $1\cdot2\cdot4\cdot9$, e $1\cdot3\cdot4\cdot6$. Il più grande numero è quindi 9421.

Problema 11.
Mostra che l'equazione $x^3+y^4=7$ non ha soluzioni negli interi positivi.

Soluzione.

Prendendo l'equazione modulo 13 noi abbiamo x^3 i possibili residui 0,1,5,8,12 e per y^4; i possibili residui 0,1,3,9.. Quindi, non possiamo ottenere una somma uguale a 7.

ALGEBRA.

Problema 12..

Mostra che

$$\frac{1}{2.7}+\frac{1}{7.12}+\frac{1}{12.17}+....+\frac{1}{47.52}<\frac{1}{10}.$$

Soluzione.

Si può usare l'identità:

$$\frac{1}{n(n+5)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+5}\right).$$

la somma può essere computata in $\frac{1}{10}-\frac{1}{5.52}$. L'ineguaglianza richiesta è ovvia.

Problema 13..

Sono dati i numeri:

$$\frac{a_1}{b_1}=1;\ \frac{a_2}{b_2}=2;\ ....\ \frac{a_{100}}{b_{100}}=100.$$

trova il numero

$$A=\frac{a_1+a_2+...+a_{100}}{b_1+2b_2+...+100b_{100}}.$$

Soluzione.

Da $a_1=b_1,\ a_2=2b_2,...,\ a_{100}=100b_{1000}$ segue che

$$a_1+a_2+...+a_{100}=b_1+2b_2+...+100b_{1000}$$

e $A=1$.

Problema 14.

Sono dati due numeri naturali. Se noi aggiungiamo il triplo di numeri primi alla metà del secondo troviamo lo stesso risultato quando noi aggiungiamo il primo numero e due volte del secondo. Trova due tali numeri.

Soluzione.

Siano dati i numeri a e b. Da $3a+\frac{b}{2}=a+2b$ e $4a=3b$. So, $a=3k$ e $b=4k$. Questi sono tutti i numeri con la proprietà determinata.

Problema 15.
x, y, z come numeri positivi tali che:

$$x=\frac{2y}{y+1},\ \ y=\frac{2z}{z+1},\ \ z=\frac{2x}{x+1}.$$

Dimostrazione che $x=y=z=1$.

Soluzione.

Supponiamo che $x>y$. Da $x-y=\dfrac{2(y-z)}{(y+1)(z+1)}$ segue che $y>z$. Ripetiamo e otteniamo $z>x$. Abbiamo una contraddizione. Quindi $x=y=z$. È facile vedere che il loro valore è 1.

Problema 16.
Sono dati sette distinti interi positivi superiori a 100. Mostra che ci sono tre di loro la cui somma è meno di 50.

Soluzione.
Supponiamo che i numeri siano $a_1<a_2<...<a_7$.

Se $a_4 \geq 15$ abbiamo

$$a_5+a_6+a_7 \geq 16+17+18=51$$

e.

Se $a_4 \leq 14$ abbiamo

$$a_1+a_2+a_3+a_4 \leq 11+12+13+14=50.$$

In questo caso,

$$a_5+a_6+a_7 \geq 100-50=50.$$

Problema 17.
x, y sono numeri positivi. Dimostra che:

1) $\dfrac{x^2}{x+y} \geq \dfrac{3x-y}{4}$;

2) $\dfrac{x^3}{x+y}+\dfrac{y^3}{y+z}+\dfrac{z^3}{z+x} \geq \dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

Soluzione.
Il punto (1) può essere sostituito da una computazione diretta:

$$\frac{x^2}{x+y}-\frac{3x-y}{4}=\frac{(x-y)^2}{4(x+y)} \geq 0.$$

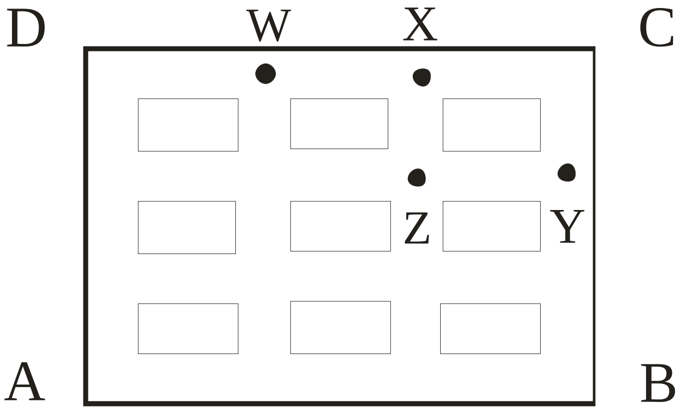
Per il punto (2) si usa il precedente punto e sommando alle diseguaglianze otteniamo:

$$\sum\frac{x^3}{x+y} \geq \frac{1}{4}\left(3x^2-xy+3y^2-yz+3z^2-zx\right) \geq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Combinatoria.

Problema 18.

Nella figura puoi vedere un blocco di case. Ci sono strade tra loro. Quanti modi differenti ci sono per andare da A a C se cammini solo nelle strade del lato retto?



Soluzione. Ogni passo attraverserà i punti X e Y. Ogni passo che attraversa X passa per il punto Z o W. In questo modo si hanno tutti i possibili passi da A a X e si trova 10 passi. Così che, da A a C si arriva in 20 passi.

Problema 19.
John costruisce con cubi. La figura 1 mostra cosa si vede di fronte e la figura Figure 2 da dietro.

a) Disegna un lato possibile.
b) Trova il minimo ed il massimo numero di cubi necessario per costruire la figura.

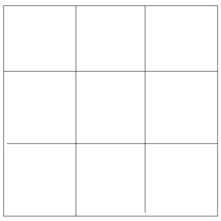


Figura 1

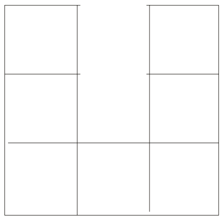


Figura 2

Soluzione.
Il minimo numero di cubi è $9+4=13$. Il massimo numero di cubi è $9+6+6=21$, dipende dal numero di livello ad est ed ovest della figura.

Problema 20.
Dividi l'insieme di numeri interi da 1 a 100 in sei gruppi superiori. Dimostrazione che si possono sempre trovare gruppi superiori che possono contenere due differenti numeri ognuno dei quali è divisibile per l'altro.

Soluzione.
Abbiamo sette differenti proprietà di due nell'insieme dato. Di conseguenza, dividendoli in sei gruppi, sarà conseguente, che un gruppo contenebnte due poteri diversi da due, il più piccolo che divide il più grande.

Problema 21.
Tre persone, chiamate A, B e C, hanno una conversazione.

A dice che B sta mentendo.
B dice che C sta mentendo.
C dice che sia A, che B stanno mentendo.

Chi sta mentendo, chi sta dicendo la verità?

Soluzione.

Se A sta dicendo la verità e B sta mentendo e C dice la verità, chi contraddice quello che dice C. Se A mente, B dice la verità, e di conseguenza C mente, e quello che C dice non è vero, così solo A mente. Quindi A mente, B dice la verità e C mente.

PROBLEMI MISTI

Problema 22.
Una corsa equina tra tre squadre è lunga 10 km. Ciascuna delle corse equine con una veLuoghi Geometricità continua. Quando il vincitore finì la corsa era 2 km. avanti del secondo e 4 km avanti del terzo. Quanto era avanti dal terzo il secondo quando finì la corsa?

Soluzione.
x,y,z sono rispettivamente a costante veLuoghi Geometricità del primo, il secondo e il terzo cavallo,.
$\frac{10}{x}=\frac{8}{y}=\frac{6}{z}$. La distanza richiesta *d* tra il secondo e il terzo dovrebbe soddisfare la proporzione: $\frac{10}{y}=\frac{10-d}{z}$. Dal $\frac{y}{z}=\frac{4}{3}$ segue d = 2.5*km*.

Problema 23.
I numeri di telefono di una piccola città consistono in due numeri digitati tra 00 e 99. Possibilmente, tutti i numeri non sono usati. Se un numero sottoscritto è letto nell'ordine inverso si ottiene un numero non usato o un numero usato dallo stesso abbonato. Trova il numero più grande di abbonati telefonici della città.

Soluzione.
Noi consideriamo un ordine del 100x100 di scatole quadrate ed assegniamo ad ogni scatola uno dei numeri 00, 01, 02. . . ,99, in ordine crescente dalla fila superiore alla fila più in basso. Il numero ab e e ba che sono simmetrici riguardo alla diagonale è usato dalla stessa persona, segue che solamente i numeri sopra alla diagonale sono usati. Quindi il numero massimo di abbonati è

$$1+2+3+...+50=\frac{50\times 51}{2}=1275$$

Problema 24.
Su una strada ci sono 150 case. Ogni mattina tre giornali diversi, indicati con A, B, C sono distribuiti nelle case. Noi sappiamo che il giornale A è distribuito in 40 case, B in 35 case e C in 60 case. In 7 case sono distribuite anche, sia A e B, in 10 case C, e in 4 case sono distribuite A e C. Nessuno giornale è distribuito in 34 case. Quante case ricevono tutti i tre giornali?

Soluzione.
Notiamo che il numero di case dove il giornale A è distribuito, da ab il numero di case dove i giornali A e B sono distribuiti, ecc. Usando il principio di inclusione-esclusione (o, alternativamente, un diagramma di Euler-Ven) si ha:

$$150-34=a+b+c-ab-bc-ca+abc\,.$$

Tenendo conto che $a=40,\ b=35,\ c=60,\ ab=7,\ bc=10,\ ca=4$, si ottiene

$$abc=116-\left(40+35+60\right)+\left(7+10+4\right)=2\,.$$

Parte II (Età:13-14)

TEORIA DEI NUMERI .

Problema 1.
Dimostra che $a_n = 2^4.3^{16} + 5^2.3^{14} + 3^n$, dove $n \geq 1$, non è un perfetto quadrato.

Soluzione.
Tutti i numeri a_n are pari. Un numero pari che sia un quadrato è congruente a 0 mod4. Abbiamo $a_n \equiv (-1)^{14} + (-1)^n \equiv 1 + (-1)^n \,(mod\,4)$. Quindi, possiamo aggiungere.
Da $2^4.3^{16} + 5^2.3^{14} = 169.3^{14}$ segue che $a_n = 169.3^{14} + 3^n = b^2$. Se $n < 14$ segue che a_n contiene una proprietà di di 3 e, può non essere un perfetto quadrato. Se $n > 14$ segue che il numero $169 + 3^{n-14}$ è un perfetto quadrato, che è impossibile. Questo può essere visto nelle Diofantee equazioni $3^x = y^2 - 13^2$.

Problema 2.
Traduci in numeri interi la seguente equazione: $x + y = x^2 - xy + y^2$.

Soluzione.
Multiplo di equazioni divisibili per 2 per ottenere una nuova equazione: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = 2$.

Problema 3.
Dimostra che il numero $n^2 + 3n + 5$ non può essere divisibile per 121, per nessuno $n, n \in \mathbb{N}$.

Soluzione.
Da $n^2 + 3n + 5 = (n+7)(n-4) + 33$ otteniamo che $n \equiv 4(mod\,11)$.

.

Scrittura $n = 11k + 4$ e si ottiene: $n^2 + 3n + 5 = 121k(k+1) + 33$, che non è divisibile per 121.

Problema 4.
Trova l'intero minimo positivo n con la seguente proprietà: $\frac{n}{2}$ è un quadrato, $\frac{n}{3}$ è un cubo e $\frac{n}{5}$ è una 5th proprietà.

Soluzione.
Il numero richiesto è $2^{15}3^{10}5^6$, n è necessario e divisibile per 2,3 e 5, così che la formula $n = 2^x3^y5^z$, x è divisibile per 3 e 5, etc.

Problema 5.
Considera tutti i possibili prodotti di 2 consecutivi interi tra i quali il massimo è un quadrato perfetto. Trova il numero che è il comune divisore di tutti questi numeri.

Soluzioni.
I numeri sono $n^2, n^2 - 1$. Il prodotto è $(n-1)(n+1)n^2$. Dal $(n-1)$, $(n+1)$, n^2 sono tre consecutivi interi, il prodotto è divisibile per 3. Se n è pari, n^2 è divisibile per 4. Se n è dispari, $(n-1)(n+1)$ è divisibile per 4. Quindi, tutti questi numeri sono divisibili per 12. Da 12 = 3 × 4^2 ne consegue che il numero richiesto è12.

GEOMETRIA.

Problem 6.
Dato un triangolo arbitrario *ABC.* Costruisci un nuovo triangolo nel quale un angolo sia uguale ad un angolo di *ABC* e la cui area sia due volte l'area di ΔABC .

Soluzione.
Estendi il lato *AB* con un nuovo segmento *BD* in modo che *AB = BD* . *ABD* è il triangolo richiesto.

Problema 7.
ABC è un triangolo e *D* , *E* sono punti del lato *AC* , *AB*. Le rette *BD* e *CE* incontra in un punto F l'area dei triangoli *BEF*, *BFC* e *CFD* sono 5, 12, e 4 unità. Trova l'area di *ABC*.

Soluzione.
Notiamo che *x, y* l'area dei triangoli *AEF*, *AFD*. Le uguaglianze sono::

$$\frac{EF}{FC}=\frac{x}{4+y}=\frac{5}{12},$$

$$\frac{BF}{FD}=\frac{5+x}{y}=\frac{12}{4}=3$$

Questo è un sistema di equazioni. Dalla soluzione si ottiene che $x=\frac{85}{31}$ Italia *y* $=\frac{80}{31}$. Così, l'area richiesta è $F_{\Delta ABC}=5+12+4=\frac{85}{31}+\frac{80}{31}=\frac{816}{31}$

Problema 8.
Costruisci un parallelogramma la cui area è la stessa dell'area di un dato triangolo e l'angolo sia uguale a un angolo del triangolo.

Soluzione.
ABC è un dato triangolo e fissa il vertice *A*. esiste un punto *D* in un piano dove *ABDC* è un parallelogramma. Disegna una linea che colleghi il punto centrale di un lato raw a rette which *AB* e *CD*. Ottieni il parallelogramma richiesto.

Problema 9.
Dividi un esagono regolare in 8 parti uguali. Definisci ogni parte.

Soluzione.
Nota che l' esagono da *ABCDEF* e lascia *O* al suo centro. Se *M, N, P, K, L, R* sono il punto centrale dei segmenti*AO, BO, CO, DO, EO, FO*. Le figure *ABNM, BCPN, CDKP, DELK, EFRL, FAMR, RPNM* e *RPKL* sono trapezi uguali..

Problema 10.
La bisettrice interna s degli angoli *A, B, C* di un triangolo *ABC* incontrano il lato opposto *D, E, F*. Dimostra che se la perpendicolare ai lati *D, E, F*, sono concorrenti, il triangolo è isoscele.

Soluzione.
Il Teorema di Pitagora, dice: $BD^2+CE^2+AF^2=DC^2+EA^2+FB^2$.

Ma il segmento posteriore può essere dato da *BD* = $BD=\frac{ca}{b+c}$, etc. Quindi

$$\frac{c^2a^2}{(b+c)^2}+\frac{a^2b^2}{(c+a)^2}+\frac{b^2c^2}{(a+b)^2}=\frac{a^2b^2}{(b+c)^2}+\frac{b^2c^2}{(c+a)^2}+\frac{c^2a^2}{(a+b)^2}.$$

Chiarendo i denominatori questo può essere applicato alle formule.

: $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)=0$

Dalle quail risulta quanto segue.

Problema 11.

ABC è un triangolo che ha le seguenti proprietà:

- $BC=2(AC-CB)$;
- esiste un punto *K* sul lato *BC* come $\angle ABK=2\angle AKB$.

Dimostra che $BC=4CK$.

Soluzione.

Per brevità notiamo $AB=c, BC=a, CA=b$. *D* la base di un altitudine da *A* e *E* un punto sul segmento *BC* tale da $BD=DE$. Ne consegue che I triangoli *BAE* e *AEK* sono isosceli così come $AB=AE=EK=c$.

.

Adesso, torniamo alla condizione $a=2(b-c)$. Dal

$$b^2-c^2=AC^2-AB^2=CD^2-BD^2=a(CD-BD)$$

segue che $b+c=2(CD-BD)$. L' ultima uguaglianza, insieme alla condizione $a=2(b-c)$ dà $CE=c+\frac{a}{4}$. IIn, $CK=CE-EK=\frac{a}{4}$.

Problema 12.

In un dato triangolo *ABC* i mediani *AD* e *BE* sono perpendicolari. Determina lalunghezza del terzo mediano *CF* in termini di il lunghezzas $BC=a$ e $AC=b$.

Soluzione.

G è il punto comune dei mediani e nota *AB* = *c*. Il triangolo *AGB* è un triangolo retto e *GF* è il suo corrispondente mediano all' angolo retto. In $GF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}c$. Dal $CF=3GF$, è sufficiente per trovare *GF*. É conosciuto che la lunghezza di un mediano, chiamato *CF* è data dalla formula:

$$CF^2=\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

Quindi, abbiamo l' uguaglianza:

$$\frac{9c^2}{4}=\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

Da questa otteniamo $c=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{5}$. Il risultato è: *CF* = $\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$.

ALGEBRA.

Problema 13.

Dimostra che il numero $\sqrt{n^2+n+1}$ è un numero irRazionalie, per tutti gli interi positivi. n.(VB)

Soluzione 1.

Il numero $\sqrt{n^2+n+1}$ è Razionalii se e solo se n^2+n+1 è un perfetto quadrato: $n^2+n+1=m^2$, dove $m \in \mathbb{N}$. Multiplo di uguaglianza per 4 per creare un perfetto quadrato:

$$\left(2n^2+1\right)^2+3=\left(2m\right)^2 .$$

Da questo otteniamo la scomposizione: $\left(2m+2n+1\right)\left(2m-2n-1\right)=3$. Il 3 è un numero primo é necessaria l'uguaglianza: $2m+2n+1=3$ Italia $2m-2n-1=1$. Questo è un sistema dal quale abbiamo: $n=0$ Italia $m=1$.

.

Soluzione 2. (smarter).

Dalle diseguaglianze $n^2<n^2+n+1<\left(n+1\right)^2$ segue che n^2+n+1 non può essere un perfetto quadrato.

Problema 14.

α è un numero positivo reale e *a, b* è il radicale di un equazione: $x^2-\left(\alpha+1\right)x+\alpha=0$. Dimostra che se 2, *a, b* sono i lati di un triangolo, $1<\alpha<3$.

Soluzione.

Il radicale delle equazioni sono 1 e α. Così, 1 , 2 , α sono i lati di un triangolo. Dalla disuguaglianza del triangolo abbiamo α < 1 + 2 e 2 < 1 + α . Segue il risultato.

Problema 15.

Risolvi l'equazione:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+\ldots+x}=\frac{200}{101} .$$

Soluzione.

Usiamo la formula: $1+2+\ldots+x=\dfrac{x(x+1)}{2}$. L'equazione diventa

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{x(x+1)}=\frac{100}{101}$$

Usando la formula $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$ ottieni l'equazione $1-\dfrac{1}{x+1}=1-\dfrac{1}{101}$, con soluzione $x=100$.

Problema 16.

Trova le funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ che soddisfano le condizioni $f\left(x+1\right)+3f\left(-x\right)=2x+1$ per tutti $x\in\mathbb{R}$.

Soluzione.

Fissa -*x* - 1 al posto di *x* nella data condizione e ottieni la relazione:

$$f\left(-x\right)+3f\left(x+1\right)=-2x-1$$

Insieme alla data condizione ottieni un sistema di equazioni lineri. Risolvi il sistema $f\left(x\right)=-x-\dfrac{1}{2}$

Problema 17.

Data il numero $m=\frac{8}{9}+\frac{9}{11}+\frac{11}{13}+\frac{13}{15}$. Trova in *m* il numero

$$M=\frac{37}{9}+\frac{13}{11}+\frac{41}{13}+\frac{17}{15}.$$

Soluzione.

Abbiamo $\frac{37}{9}=5-\frac{8}{9},\frac{13}{11}=2-\frac{9}{11},\frac{41}{13}=4-\frac{11}{13},\frac{17}{15}=2-\frac{13}{15}$. Così , *M* = 13 - *m*.

Problema 18.

Quante cifre ci sono nel numero

$$N=1234...200320042005$$

Soluzione.

Ci sono 9 cifre in numeri di una cifra, 90 in quelli di due cifre, 900 in quelli di tre e 1006 in quelli di 4. Ci sono 6913 cifre in tutto.

Problema 19.

Quanti zeri 0 ci sono alla fine del numero

$$N=1.2.3...(2004).(2005)?$$

Soluzione.

Abbiamo contato la potenza di 2 e 5 in N. Così $N = 2^a 5^b M$ dove $a > b$ è sufficiente per calcolare *b*. L'esponente *b* appare in multipli di $5, 5^2, 5^3, 5^4$. Il numero di questi multipli è

$$\left[\frac{2005}{5}\right]+\left[\frac{2005}{25}\right]+\left[\frac{2005}{625}\right]+\left[\frac{2005}{625}\right]=401+80+16+3=500.$$

Problema 20.

La funzione f è definita da $f(t)=\frac{t}{1-t}$ per tutti $t\neq 1$. Sia $f(x)=y$. Trova x nei termini di f e y.

Soluzione.

Da $\frac{x}{1-x}=y$ segue $x=y-xy$ e finalmente , $x=\frac{y}{1+y}=-f(-y)$

Problema 21.

Trova tutte le soluzioni reali dellìequazione:

$$(x-y-3)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=3.$$

Soluzione.

Nota $x-y-3=a, y-z=b, z-x=c$. Allora $a+b+c=-3$ e $a^2+b^2+c^2=3$. Squadrando l'uguaglianza $a+b+c=3$ e settando $a^2+b^2+c^2=3$ si ottiene $\sum ab=3$. Fintanto che $\sum a^2=\sum ab$ segue $a=b=c$. Da $3a+3=0$ segue $a=b=c=-1$. Fissando questi valori nel sistema x,y,z si ottiene $x-y=2;\ y-z=-1;\ z-x=-1$. Questo sistema lineare non ha un unica soluzione. Prendendo *z* come paramentro si ha la soluzione $(x,y,z)=(z+1,z-1,z)$.

COMBINATORIA.

Problema 22.
Trova il numero di tutte le possibili rappresentazioni del numero 2005 come una somma di 1's e/o 2's? Due rappresentazioni sono considerate per essere identiche se differiscono per l'ordine dei termini nella somma.

Soluzione.
Il numero di rappresentazioni è dato dal numero di apparizioni del numero 2 nella rappresentazione. Fintanto che $2005 = 1 + 2 \times 1002$ segue che le seguenti rappresentazioni sono possibili:

$$\begin{array}{lcl} 2005 & = & 1+1+1+\ldots\ \ \ldots +1+1+1+1+1 \\ 2005 & = & 1+1+1+\ldots\ \ \ldots +1+1+1+2 \\ 2005 & = & 1+1+1+\ldots\ \ \ldots +1+2+2 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2005 & = & 1+2+\ldots+2 \end{array}$$

il secondo numero nell'ultima riga essendo 1002. Ci sono 1003 rappresentazioni in tutto.

Problema 23.
Ci sono nove punti distinti dentro un quadrato di lato 1, tre non sono su una linea. Mostra che si possono trovare tre di questi tale che l'area del triangolo non è più grande di 1/8.

Soluzione.
Il quadrato è diviso in 4 quadrati uguali di area 1/4. Dalla tessera principale, ci sono tre punti in un di questi piccoli quadrati. I risultati seguono dal seguente lemma:
Lemma. L'area di un triangolo inscritto in un quadrato non può eccedere di 1/2 dell'area del quadrato.
Dimostrazioni. Il triangolo può essere inscritto in un grande triangolo con I vertici sono su I lati del quadrato.
Soluzione alternativa. Il quadrato in questione può essere diviso in 4 rettangoli di dimenzioni $(1/4) \times 1$. Dalla tessera principale ci sono tre punti in uno di questi rettangoli. L'area di un triangolo inscritta ijn un rettangolo non può eccedere di 1/2 dell'area del rettangolo.

Problema 24.
Dato un quadrato di lato 1 e 61 punti all'interno. Mostra come trovare due punti tale che la distanza tra loro non è più lunga di 1/5.

Soluzione.
Dividi ogni lato del quadrato in 5 segmenti uguali. Questi punti sono connessi da rette che sono parallele alle diagonali del quadrato. Ottieni 20 triangoli isosceli e 40 quadrati di dimenzioni $\frac{1}{5\sqrt{2}} \times \frac{1}{5\sqrt{2}}$. Così, il quadrato è diviso in 60 parti, triangoli e quadrati. Dalla casella principale, ci sono due punti in una di questa parti. La distanza tra questi non è più grande di 1/5.
Problema 25.
Remuovi un quadrato da un angolo di una scacchiera 8×8. Come possiamo coprire 63 quadrati nella restante scacchiera usando 21 tessere di dimenzioni 1×3?

Soluzione.
Considera la principale diagonale della scacchiera che contiene le parti rimosse. Colora le parti con rette perpendicolari a questa diagonale con tre colori alternati, partendo accanto la pare rimossa e prendendo l'ordine dei colori. Prenderai 22, 21 e 20 parti dello stesso coloro. Non possiamo coprire con 21 pezzi di dimenzione 1×3, perchè ogni pezzo potrebbe

contenere pezzi colorati in tre colori, ma questi numeri differiscono da 21.

Problema 26.
Ci sono tre dei seduti ijn un oracoloThere: Il dio della Verità, il dio della Saggezza e il dio della menzogna. Il dio della verità dice sempre la verità, il dio della menzogna dice sempre menzogne e il dio della saggezza dice talvolta la verita e bugie. Un giorno un filosofo va a visitarli. I dei sono seduti ognuno davanti agli altri e il filosofo vuole sapere in che ordine si sono seduti, cosiì fa la seguente domanda. Chiede al primo sulla sinistra: Chi è seduto vicino a te? La risposta fù: Il dio della Verità. Chiese al medio: Chi è? La risposta fù: Io sono il dio della Saggezza. Poi lui chiese a quello sulla destra: Chi sta sedendo vicino a te? La risposta fù: Il dio della menzogna. In che ordine i dei erano seduti?
Soluzione.
Quello sulla sinistra non può essere il dio della Verità, dato che disse che il successivo era il dio della Verità. Non può essere ne il dio della menzogna, perché quello della Saggezza deve essere nel centro ed quello giusto il dio della Verità disse che il successivo era il dio delle menzogne, e lui dice la verità. Di conseguenza quello sulla sinistra è il dio della Saggezza. In questo caso quello in mezzo ente, così lui è il dio della menzogna, ed l'altro il dio della Verità.

Problema 27.
Due tipi di persone vivono in un isola, Quelli che dicono sempre la verità e quelli che mentono. Per prima cosa chiediamo a 5 di loro, chi conosce gli altri: Quanti di voi dicono la veritàH? Avremo le seguenti risposte: 0,1,2,3,4. Quanti di questi mentono?

Soluzione.
Se almendo due dicono la verità per ciò che abbiamo chiesto, avremo due risposte uguali. Così abbiamo 0 o 1 che dicono il vero. Ma se abbiamo 0, allora chi ha risposto 1 vuol dire che dice la verità , contraddiczione. Conseguentemente abbiamo 4 mentitori, e un solo isolano dice la verità.

Problema 28.
Deue persone stanno giocando attorno ad un tavolo rotondo. Giocano 1 Euro per ogni turno. Non è ammesso posizionare una moneta su un altra. Perde chi non può completare la propria mossa. Chi vince e come (supponendo che stiano usando una buona strategia)?

Soluzione.
Vince il giocatore che inizia, e la strategia vincente è quella di mettere la prima moneta nel mezzo, quindi posizionare la successiva moneta in una posizione simmetrica (rispettivamente nel centro del tavolo) all'ultima moneta posizionata dal secondo giocatore.

PROBLEMI MISTI.

Problema 29.
Abbiamo un cubo $ABCDA'B'C'D'$ con lato $AB=1$. Trova la lunghezza del percorso più corto tra le facce del cubo e che passi nei vertici nel seguente ordine $AC'BD'A$.

Soluzione.
Il percorso consiste di due diagonali di rettangoli e di lunghezze $\sqrt{5}$ e due diagonali di quadrati di lunghezza $\sqrt{2}$. Così la risposta è $2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$.

Parte III (Età:15-16+)

GEOMETRIA

Problema 1.
Dato un triangolo con a e b, costruisci un quadrato ed un triangolo equilatero che abbiano la stessa erea come il triangolo dato.

Soluzione.
Per costruire il quadrato è necessario costruire il segmento $\sqrt{ab}$. Questa è l'area del triangolo inscritto in un cerchio di diametro *a* + *b* e questo divide il diametro in segmenti di lunghezza *a* e *b*. Lo stesso segmento può essere usato per costruire il triangolo equilatero.

Problema 2.
Sia *ABC* un triangolo isoscele tale che $CA = CB$. Trova il luogo dei punti X nel piano tale che

$$AX^2 + BX^2 = CX^2.$$

Soluzione.
Lavoriamo in coordinate. Prendi I punti $A(-a,0), B(a,0), C(0,c), X(x,y)$.

La condizione che definisce il luogo ci da l'equazione: $x^2 + y^2 + 2cy = c^2$. Questo è un cerchio.

Problema 3.
Sia A_1, A_2, A_3 un triangolo e T_1, T_2, T_3 siano I punti tangenti ai lati con un cerchio circoscritto. Vediamo che H_1, H_2, H_3 gli ortocentri dei triangoli $A_1T_2T_3,\ A_2T_3T_1,\ A_3T_1T_2$. Mostra che le rette H sono concorrenti.

Soluzione.
Useremo I seguenti risultati preliminari: se *ABC* è un triangolo, *P* è un punto interno di questo e *Q, R, S* sono segmenti di P lungo le mediane rispettivamente dei lati *BC, CA, AB*, quindi le rette *AQ*, *BR* e *CS* sono concorrenti a un punto *M* che è il mediano comune dei segmenti *AQ*, *BR*, *CS*. La Dimostrazione di questa asserzione segue dal fatto che *ABQR*, *BCRS*, *ACQS* sono tutti parallelogrammi e *AQ*, *BR*, *CS* solo le diagonali.

Nel nostro problema è sufficiente dimostrare che H_1 è il riflesso di *O* lungo la mediana del segmento T_2T_3. Quindi applica l'asserzione al triangolo T_1, T_2, T_3.

<u>*Commento.*</u> Una soluzione con I numeri compolessi è possibile. Usa la seguente proprietà: su ogni lato del triangolo I punti tangenti di un cerchi inscrittoon e un cerchi escritto sono simmetrici con I mediani dei lati.

Problema 4.
Sia *ABC* un triangolo e sia *M* il mediano del segmento *BC*. Considera un punto interno *N* tale che $\angle ABN = \angle BAM$ e $\angle ACN = \angle CAM$. Dimostra che $\angle BAN = \angle CAM$.

Soluzione.
Mostreremo che *N* coincide su *AP* della linea *AM* nell'angolo bisettore di $\angle BAC$. Ovviamente, *N* è unico definito per le sue proprietà; inoltre, se si prende un punto $S \in AP$ con queste proprietà segue la conclusione.

Prendi *D* il riflesso di *A* in *M* e definisci *S* con la relazione: $\frac{AS}{BS} = \frac{AC}{AD}$ Quindi, I triengoli *BAS* e *DAC* sono simili e sotteniamo $\angle ABS = \angle ADC = \angle MAB$. Nello stesso modo si deduce $\angle ACS = \angle ADB = \angle MAC$, e questo conclude la Dimostrazione.

Problema 5.

Sia (*O*, *r)* un cerchio, *AB* una corda di questo, *Q* la proiezione di *O* su *AB, C* un punto interno di *OB* e *M* il mediano di AC. Dimostra che

$$OM \le \frac{OB - OC}{2OB} r + \frac{OC}{OB} OQ$$

Soluzione.

Introduci numeri complessi *a* e *b* tali che $\overrightarrow{OA} = a$ e $\overrightarrow{OB} = b$. Inoltre, $|a| = |b| = r$. Se $t = \frac{OC}{OB}$, così che 0 < *t* < 1 , allora $\overrightarrow{OC} = tb$ e $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(a + tb)$. Estendi *OM* fintanto che incontra *AB* in *D*. Scrivendo il numero complesso rappresentando il vettore $\vec{OD}$ in due diversi modi e associandoli abbiamo, per reali scalari λ, v la seguente uguaglianza:

$$\frac{\lambda}{2}(a + tb) = va + (1 - v)\frac{a + b}{2}$$

Associandi I coefficenti di ogni a, b in ambo I lati e risolvendo il sistema troviamo:

$$\lambda = \frac{2}{1+t}, \quad v = \frac{1-t}{1+t}$$

Così $OD = \left| va + (1 - v)\frac{a+b}{2} \right| \le \frac{1-t}{1+t}|a| + \frac{2t}{1+t} OQ$.

Usando $OM = \frac{1}{\lambda} = \frac{1+t}{2} OD$ e $|a| = r$, il risultato è ottenuto.

ALGEBRA.

Problema 6.

Siano $x_1, x_2, ..., x_n$ numeri reali, tali che $x_i \in [0,1]$ per tutti $i = 1, 2, ..., n$. Trova il massimo per l'espressione

$$E = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - ... - x_{n-1}x_n - x_nx_1.$$

E determina tutti $x_1, x_2, ..., x_n$ per questi il massimo è ottenuto.

Soluzione.

L'espressione è ciclica per $x_1, x_2, ..., x_n$ ed è una funzione quadratica per x_1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = x^2 - (x_2 + x_n)x + x_2^2 + ... + x_n^2 - x_2x_3 - ... - x_{n-1}x_n$$

Questa funzione è decresciente per $\left(-\infty, \frac{x_2+x_n}{2}\right]$ e crescente per $\left[\frac{x_2+x_n}{2}, \infty\right)$. Fintanto che $x_2, x_n \in [0,1]$ segue che $\frac{x_2+x_n}{2} \in [0,1]$, dove il massimo valore di f nell'intervallo $[0,1]$ è o $f(0)$ oppure $f(1)$, che è $x_1 \in \{0,1\}$. Osservando di nuovo la simmetria possiamo concludere che il massimo di *E* è ottenuto soltanto dove $x_i \in \{0,1\}$, per tutti $i = 1, 2, ..., n$. Ora , considera che

$$2E = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + ... + (x_n - x_1)^2 \leq n .$$

Se n è pari il massimo di *2E* è *n* e è raggiunto quando tutti I quadrati sono 1, che è se $(x_1, x_2, ..., x_n)$ o $(1,0,1,0,...,1,0)$ oppure $(0,1,0,1...,0,1)$. Se *n* è pari il numero pari di parentesi che sono 1 è $n-1$, che è $2E \leq n-1$.

Problema 8.

Trova tutti I sistemi ordinati di numeri Razionalii positivi Find (x, y, z) tale che I numeri

$$x + \frac{1}{y},\ y + \frac{1}{z},\ z + \frac{1}{x}$$

sono tutti interi.

Soluzione.

Calcola il prodotto

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right) = \left(xyz + \frac{1}{xyz}\right) + (x+y+z) + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Fintanto che $(x+y+z) + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ è un intero, segue che $\left(xyz + \frac{1}{xyz}\right)$ è anche un intero.

L'unico Razionalie positivo *q* per ogni $q + \frac{1}{q}$ è un intero $q = 1$. Segue che $xyz = 1$. Utilizzando questa condizione supplementare si ottiene per (x, yz) le possibilità $(1,2,5)$, $(1,3,3)$, $(1,5,2)$ e questi possono essere ottenuti con permutazioni cicliche.

Problema 9.

Sia A un insieme di numeri reali che soddisfano le condizoni:

a) $1 \in A$
b) if $x \in A$ then $x^2 \in A$
c) if $(x^2 - 4x + 4) \in A$ then $x \in A$.

Dimostra che $(2004 + \sqrt{2005}) \in A$.

Soluzione.

Sia *x* un numero di A. Quindi $x^2 \in A$.Fintanto che $x^2 = ((x+2)-2)^2 = (x+2)^2 - 4(x+2) + 4$, Questo segue c) che $(x+2) \in A$. Così , abbiamo dimostrato la seguente proprietà:

(*) Se $x \in A$ allora $(x+2) \in A$..

Fintanto che $1 \in A$ segue che per induzione *A* contiene tutti I numeri pari positivi. Quindi, $2005 = \left(\left(\sqrt{2005}+2\right)-2\right)^2$. Per la condizione c) segue che $\left(\sqrt{2005}+2\right) \in A$. Ora , utilizzando di nuovo (*), otteniamo il risultato per induzione.

Problema 10.

Sia $n \geq 3$ un intero e x sia un numero reale tale che x, x^2 e x^n hanno la stessa parte fRapportonaria. Dimostra che x è un intero.

Soluzione.

Abbiamo $x^2 = x + k$ e $x^n = x + \ell$ per molti interi k, ℓ. Segue che:

$$x^3 = x^2 + kx = (k+1)x + k\ ,$$

$$x^4 = (k+1)x^2 + kx = (2k+1)x + k^2 + k\ ,$$

e per induzione matematica,

$$x^p = a_p x + b_p, \quad \forall p \geq 2,$$

dove a_p, b_p sono interi e $a_{p+1} = a_p + b_p,\ b_{p+1} = a_p$.

Fintanto che x è un numero reale e $x^2 - x - k = 0$ abbiamo $\Delta = 1 + 4k \geq 0$, quindi $k \geq 0$. Se $k = 0$ abbiamo $x^2 = x$ e x è un intero. Se $k \geq 1$, abbiamo $a_p > 1$ per $p \geq 3$ e $x^n = a_n x + b_n = x + k$ mostra che x è Razionalie. In questo caso Δ deve essere un quadrato perfetto e x un intero.

Problema 11.

Trova tutti I numeri reali x tale che $2^{2x-1} = x^2$.

Soluzione.

L'equazione può essere scritta nella forma:

$$\left(2^{x-\frac{1}{2}} - x\right)\left(2^{x-\frac{1}{2}} + x\right) = 0$$

La funzione $f(x) = 2^{x-\frac{1}{2}} + x$ è strettamente incrementante per □ e $f(-1/2) = 0$. Così $x = -1/2$ è l'unica soluzione per l'equazione $f(x) = 0$.

Sia a una soluzione dell'equazione $g(x) = 0$, dove $g(x) = 2^{x-\frac{1}{2}} - x$. Quindi $a > 0$ e ha la diseguaglianza:

$$a = 2^{a-\frac{1}{2}} > 2^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow a = 2^{a-\frac{1}{2}} > 2^{\frac{1}{5}} > 1.1 \Rightarrow a = 2^{\frac{2a-1}{2}} > 2^{\frac{2.2-1}{2}} = 2^{\frac{3}{5}} > 1.5\ ,$$

$$\Rightarrow a = 2^{\frac{2a-1}{2}} > 2^{1.5-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow a = 2^{\frac{2a-1}{2}} > 2^{\frac{3}{2}} > 2.8 \Rightarrow a > 4.$$

Il passo successivo per la soluzione mostra che non ci sono soluzioni per $a > 4$. E' facile vedere che $g(n) > 1$ per tutti gli interi $n \geq 4$. Quindi, per qualche a con $a \geq 4$, si ha

$$4 \leq [x] \leq x < [x]+1 \Rightarrow 2^{x-\frac{1}{2}} \geq 2^{[x]-\frac{1}{2}} > [x]+1 > x$$

NUMBER THEORY

<u>Problema 12.</u>
Trova tutti I numeri naturali nella forma *ABB* divisibili per 4.(Le cifre *A* e *B* sono distinti).

<u>Soluzione.</u>
Utilizza il criterio di divisibilità per 4 per ottenere tutti I numeri nella sequenza A00, A44, A88

.

<u>Problema 13</u>.
Chiamiamo un intero fortunato, se le sue cifre possono essere divise in due gruppi in modo tale che la somma dei numeri in ogni gruppo è uguale allo stesso ammontare. Per esempio, il numero 34175 è fortunato, perchè $3+7=1+4+5$. Quale è la quarta cifra come numero fortunato, quale il numero fortunato vicino?

<u>Soluzione.</u>
Il più grande in un paio di numeri fortunati deve finire con 0, altrimenti la differenza di due numeri consecutivi è 1, più che la differenza delle cifre delle somme è 1 così uno di questi è pari e l'altro dispari, e per l'ultimo non si può raggruppare le cifre in due gruppi di somme uguali. Concentratevi sul più grande dei pari, e controllateli.. I più piccoli possibili sono 1010, 1100, 1210, 1230, 1320, 1340, 1430, 1450, ... Il primo numero pari è 1450, così va anche bene 1449.

<u>Problema 14</u>.
Mostra che esistono infiniti sistemi ordinati di interi primi positivi (x, y, z, t) tale che

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^{\ 4}.$$

<u>Soluzione.</u>
Consideriamo la seguente identità:

$$(a+1)^4 - (a-1)^4 = 8a^3 + 8a$$

dove a è un intero positivo. Sia $a = b^3$, dove b è anche un intero positivo pari. Dall'identità si ottiene:

$$\left(b^3+1\right)^4 = \left(2b^3\right)^3 + (2b)^3 + \left(\left(b^3-1\right)^2\right)^2.$$

Fintanto che b è pari, $\left(b^3+1\right)$ e $\left(b^3-1\right)$ sono numeri dispari. Questo segue che $x = 2b^3,\ y = 2b,\ z = \left(b^3-1\right)^2$ e $t = b^3+1$ non ha divisori comuni più grandi di 1.

<u>Problema 15.</u>
Mostra che esistono molti interi positivi x, y, z, t tale che $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = xyzt$.

Soluzione.
Considera che $(2,2,2,2)$ e $(6,2,2,2)$ sono soluzioni. Cerchiamo soluzioni da $x = 2u$, $y = 2v$, $z=t=2$. Otteniamo l'equazioni in due variabili $u^2 + v^2 + 2 = 4uv$ o $(u-v)^2 = 2(1+uv)$. Questo mostra che $u - v$ è anche, da adesso è anche $u + v$. Quindi possiamo scrivere $u = a + b$, $v = a - b$. Otteniamol che a,b può verificare l'equazione di Pell $a^2 - 3b^2 = 1$, che ha infinite soluzioni.

Problema 16.
Trova tutti I numeri primi *p* e *q* tale che $p + q = (p-q)^3$.

Soluzione.
Dall'equazione, si ha $p > q$. Così $p - q \geq 1$. Questo da' $(p-q)^2 + 1 \geq 2$.

Dall'equazione abbiamo: $(p-q)\left((p-q)^2 + 1\right) = 2p$ e così $p - q < p$ iquesto segue $p - q = 2$, $p = 5, q = 3$.

Problema 17.
Trova tutte le triple (x, y, z) di interi positivi tale che $2x^4 + 2y^4 = z^4$.

Soluzione.
Fintanto che l'equazione è omogenea possiamo assumere che gcd $(x, y, z) = 1$. Dal teorema di Fermat $n^4 \equiv 1(mod\,5)$, per tutti inumeri *n* che non sono divisibili per 5. Così abbiamo o $z^4 = 0$ oppure $z^4 = 2$, modulo 5. Ma questo non può essere ottenuto, a meno che $x, y, z \equiv 0(mod\,5)$. Questo contraddice l'assunto che *x, y*, *z* sono rispettivamente primi. Così, l'equazione non ha per soluzione interi.

COMBINATORIA.

Problema 18.
Trova il numero di quintuple (x, y, z, u, v) tale che $1 \leq x < y < z < u < v \leq 90$ sono interi e non ci siano dei pari consecutivi tra loro.

Soluzione.
Se le condizioni dei problemi sono rispettate, le soluzioni soddisferanno

$$x + 1 \leq y,\ y + 1 \leq z,\ z + 1 \leq u,\ u + 1 \leq v$$

In altre parole

$$x \leq y - 1,\ y - 1 \leq z - 2,\ z - 2 \leq u - 3,\ u - 3 \leq v - 4\ ,$$

ipossiamo scegliere 5 numeri qualsiasi diversi fra loro fra I primi 86, che è in $\binom{86}{5}$ modi diversi, e quindi cosidera questi come I valori di $x, y-1, z-2, u-3, v-4$, e finalmente otterai *x*, *y, z, u, v* che soddisfano le cobdizoni del problema.

Problema 19.

Quanti differenti modi ci sono per salire sopra dei gradini con 10 passi, se possiamo fare 1 o 2 passi per volta?

<u>Soluzione</u>.
Osseva che possiamo fare il primo passo in un solo modo, ma il secondo in due modi diversi, 2 passi di1 o un salto di 2.Così, osserva, che per arrivare al passo n, si deve saltare dal passo $n-1$, o dal passo $n-2$. Il numero totale di possibilità è la somma delle due possibilità precedenti, che è il numero di possibilità per il passo n-1 (con un salto da 1) più quelli per il passo $n-2$ (con un salto da 2).
Così avremo $1,2,(1+2),...,N_{n-2},N_{n-1},(N_{n-2}+N_{n-1})$. Riconosci la sequenza di Fibonacci. La risposta è 1,2,3,5,8,13,21,34,55,89. Per 10 passi avremo 89 modi diversi.

<u>Problema 20.</u>
Dimostra che il numero di partizioni dell'insieme $\{1,2,...,n\}$ in *k* classi tale che nessuna classe contenga due interi consecutivi uguali al numero delle partizioni dell'insieme $\{1,2,...,n-1\}$ in $n-1$ classi.

<u>Soluzione</u>.
Sia $S(n,k)$ il primo numero e $T(n,k)$ il secondo. E' facile vedere che $S(n,2)=1$ e $S(n,k)=S(n-1,k-1)+(k-1)S(n-1,k)$, perchè *n* stesso può generare una classe o può essere aggiunto ad alcuna delle $k-1$ classi precedentemente create, che non contengano $n-1$.
In altro modo I numeri $T(n,k)$ verificano le condizioni $T(n,1)=1$ e $T(n,k)=T(n-1,k-1)+kT(n-1,k)$. Inoltre le Successioni $S(n,k),k\geq 2$ e $S(n,k-1),k\geq 2$, coincidono.

<u>Problema 21.</u>
Abbiamo una barra di cioccolato di dimensioni 5×10 cm. Quale è il minimo e il massimo numero di tagli per dividere il cioccolato in pezzi di dimenzioni 1×1 cm (non si possono sovrapporre I pezzi mentre si taglia)?

<u>Soluzione</u>.
Tagliando un pezzo ne otteniamo due, dopo il primo taglio avremo 2 pezzi, dopo il secondo ne avremo 3, e così via. In totale avremo bisogno di 49 tagli per avere 50 pezzi. Il minimo ed il massimo numero di tagli coincide.

<u>Problema 22.</u>
Abbiamo 1000 interi positivi e sappiamo che la somma dei reciproci è più grande di 10. Dimostra che gli interi non possono essere tutti diversi.

<u>Soluzione</u>.
Il reciproco del numero più piccolo è più grande, così se vogliamo avere la somma più grande possibbile per I reciproci di 1000 interi positivi dobbiamo prendere I primi 1000. Ora

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{1000}\leq$$

$$\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{1023}\leq$$

$$\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{512}+\frac{1}{512}\ldots+\frac{1}{512}=10.$$

Dobbiamo avere numeri ripetuti al di sotto di 1000, altrimenti la soma non può essere più grande di 10.

PROBLEMI MISTI

Problema 23.
Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico. Dimostra che

$$|AC-BD| \leq |AB-CD|..$$

When does the equality hold?

Soluzione.
Sia E,F il punto mediano rispettivamente delle diagonali $AC,BD,$. In ogni quadrilatero il quadrilatero di Eulero:

$$AC^2+BD^2+4EF^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2.$$

Finchè $ABCD$ è ciclico, questo verifica l'identità di Ptolemy:

$$AB.CD+BC.AD=AC.BD.$$

Così,

$$(AC-BD)^2+4EF^2=(AB-CD)^2+(AD-BC)^2.$$

E' sufficente dimostrare che $4EF^2 \geq (AD-BC)^2$. Sia M il punto mediano di AB. Nel triangolo MEF, dall'ineguaglianza del triangolo si ha $EF \geq |ME-MF| = \frac{1}{2}|AD-BC|$. Si ha l'uguaglianza se e solo se $AB \parallel CD$, Che è $ABCD$ o un trapezoide isoscele oppure un rettangolo.

Problema 24.
Considera tutti I poligoni convessi o stelle regolari con n lati inscritti in un cerchio. Diciamo che du di questi poligonisono uguali se può essere ottenuto uno da un'altro attraverso una rotazione dal centro del cerchio Quanti distinti poligoni esistono?

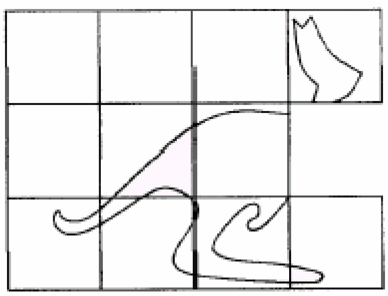
Soluzione.
Qualche poligono a forma di stella è ottenuta dalla rotazione di un poligolo con il centro nel vertice con un angolo di $\frac{2k\pi}{n}$, dove $1 \leq k \leq n$ e *g.c.d*(k, n) = 1. Così ci sono possibilità, dove $\varphi(n)$ è la funzione di Eulero. Fintanto che ci sono rotazioni orarie ed antiorarie, il numero dei distinti poligoni è $\frac{\varphi(n)}{2}$.

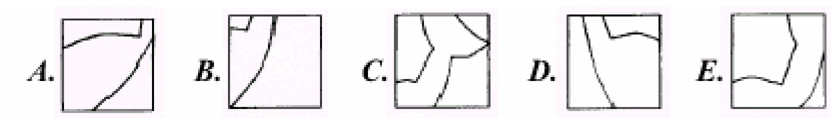
TEST A RISPOSTA MULTIPLA

LIVELLO 1

Test a risposta multipla 1

1. Quale di questi quadrati è stato tolto dall'immagine del canguro?





2. Costa ha 27 anni e suo figlio ne ha 5. Fra quanti anni l'età di Costa sarà tre volte quella di suo figlio?

A. 4 **B.** 6 **C.** 9 **D.** 15 **E.** 81

3. La somma di 101 unità, 101 decine e 101 centinaia è:

A. 101 112 **B.** 10 211 **C.** 11 111 **D.** 11 211 **E.** 10 121

4. Qual'è il più piccolo numero che diviso per quattro da 1 come resto, quando diviso per 5 da resto 2 e quando diviso per 6 da 3 come resto?

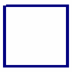
A. 57 **B.** 21 **C.** 67 **D.** 32 **E.** 42

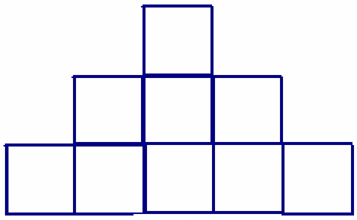
5. In un test di matematicha vengono dati 10 problemi. Per ogni risposta corretta vengono dati 5 punti mentre per ogni risposta sbagliata vengono dati 2 punti. Costas rispose a tutti i problemi e prese 29 punti. Quanti risposte corrette diede?

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8 **E.** 9

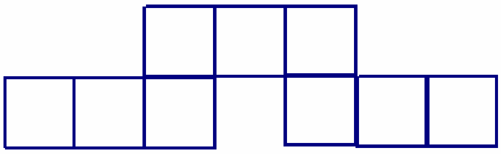
6. Ci sono 78 posti in un autobus. L'autobus lascia la stazione vuota e prende un passeggero alla prima fermata dell' autobus, due passeggeri alla seconda fermata, tre alla terza ecc. Se nessun passeggero lascia l'autobus, dopo quante fermate l'autobus sarà pieno?

A. 5 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 13 **E.** 10

7. Le forme A e B hanno la stessa area. Il perimetro di A è 48 cm. Quale è il perimetro di B? (Le piccole forme come questa , sono quadrati).



A



B

A. 48 **B.** 60 **C.** 50 **D.** 80 **E.** 10

8. A, B e C sono differenti numeri. Se

$$\begin{array}{r} A \\ B + \\ \Gamma \\ \hline AB \end{array}$$

, quale è il valore di C?

A. 9 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 8 **E.** 0

9. Quale di queste espressioni è **falsa**?

A. 28 ÷ 7 > 3 X 1

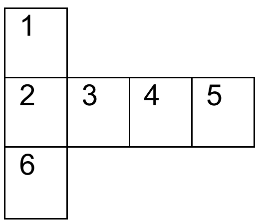
B. 9 X 6 < 7 X 8

C. 8 X 0 < 7 ÷ 7

D. 63 ÷ 7 > 64 ÷ 8

E. 48 ÷ 6 < 36 ÷ 9

10. Se pieghiamo la figura quì sotto diventa un quadrato. Quale numero sarà sul fondo del cubo, se 5 è sulla cima del cubo?

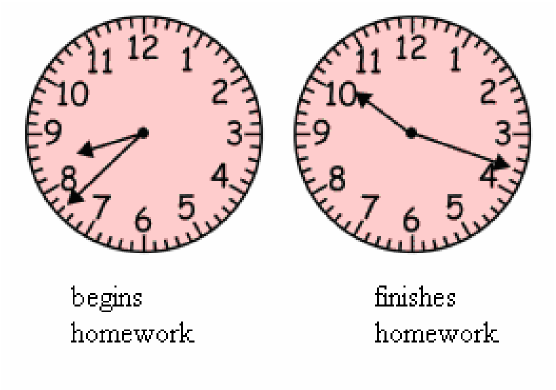


A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 6

11. Se ((x – 6) ÷ 6) + 6 = 66 ÷ 6, trova il valore di x.

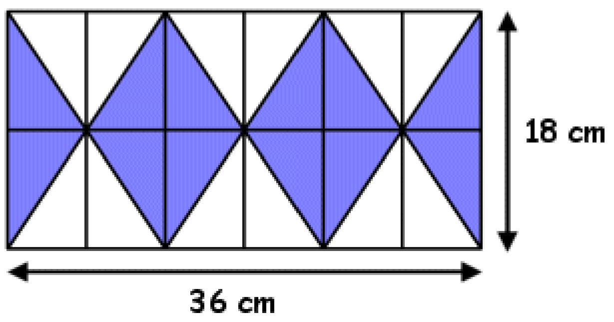
A. 16 **B.** 36 **C.** 56 **D.** 66 **E.** 366

12. Quanto tempo impiegò Costas per finire i suoi compiti?



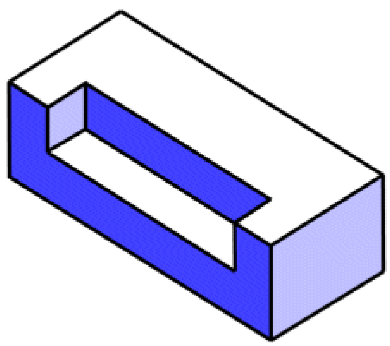
A. 90 minuti **B.** 40 minuti **C.** 100 minuti
D. 1 ora e 20 minuti **E.** 1 ora e 18 minuti

13. Trova l'area della parte ombreggiata della seguente figura.



A. 648 cm^2 **B.** 324 cm^2 **C.** 162 cm^2 **D.** 36 cm^2 **E.** 18 cm^2

14. Quante faccie ha l'oggetto seguente?



A. 8 **B.** 7 **C.** 9 **D.** 10 **E.** 12

15. Trova il numero che sia:
minore di 100;
multiplo di 3;
multiplo di 5;
dispari, e tale che,
la somma delle sue cifre è dispari.

A. 30 **B.** 75 **C.** 36 **D.** 45 **E.** 25

16. Nella sottrazione mostrata, M e N ognuno rappresenta una sola cifra. Quale è il valore di M + N?

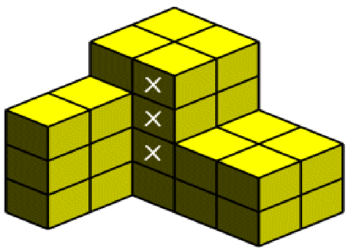
$$\begin{array}{rcc} & \boxed{M} & \boxed{4} \\ - & \boxed{3} & \boxed{N} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{6} \end{array}$$

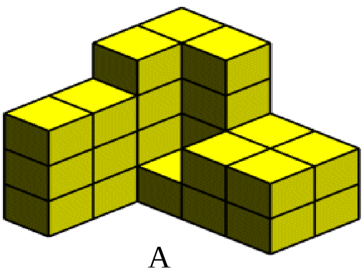
A. 14 **B.** 12 **C.** 15 **D.** 13 **E.** 11

17. Quale è il risultato:
268 + 1375 + 6179 - 168 - 1275 – 6079=

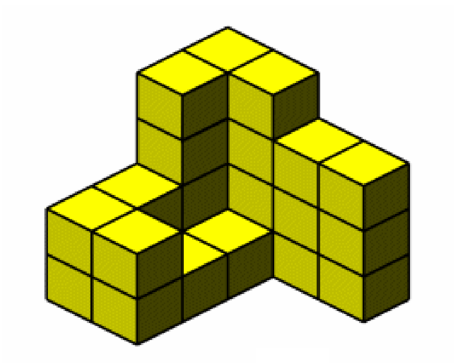
A. 300 **B.** 0 **C.** -100 **D.** 100 **E.** -300

18. Se io dalla costruzione sotto rimuovo i tre cubi indicati con X, quale di questi sarà la nuova configurata?

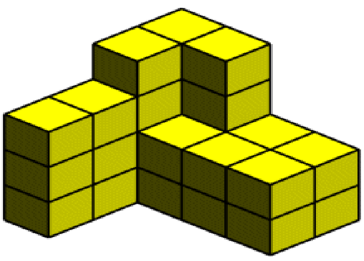




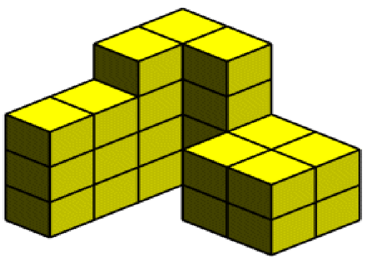
A



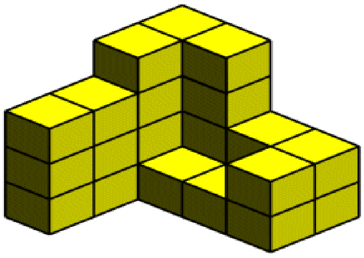
B



C

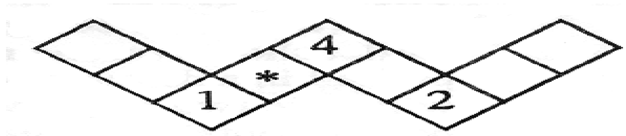


D



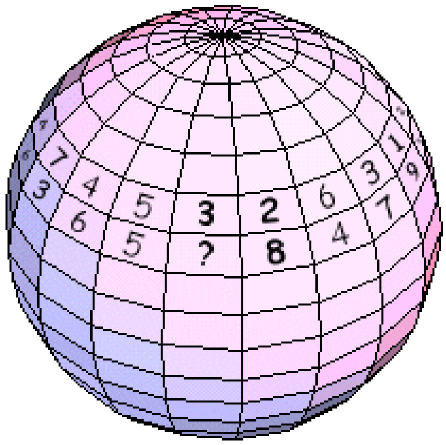
E

19. Le cifre da 1 a 9 incluse vengono inserite nella figura mostrata sotto. Solamente una cifra va in ogni quadrato. Se la somma in ognuna delle quattro rette lo stesso è quale cifra verrà sostituita *?



A. 8 **B.** 5 **C.** 9 **D.** 6 **E.** 7

20. Quale è il numero mancante;

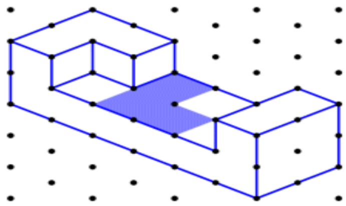


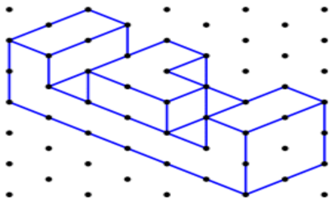
A. 1 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 7 **E.** 9

21. Quale delle seguenti è una fRapportone equivalente per $\frac{3}{7}$?

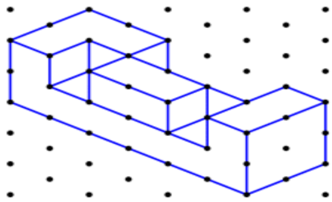
A. $\frac{18}{49}$ **B.** $\frac{27}{56}$ **C.** $\frac{33}{70}$ **D.** $\frac{42}{91}$ **E.** $\frac{48}{112}$

22. Se tre cubi vengono posizionati sulla parte ombreggiata dell'oggetto quale del seguente sarà la forma risultante?

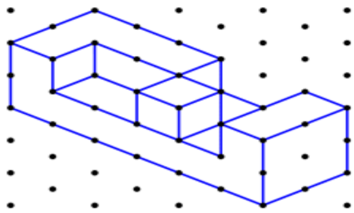




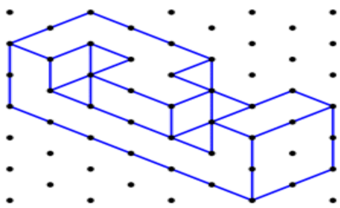
A.



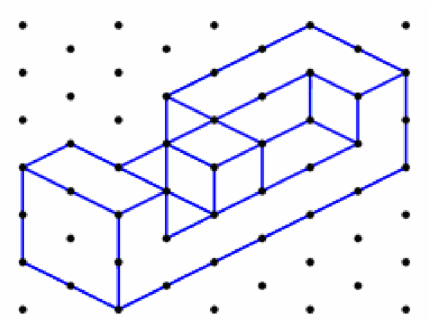
B.



C.

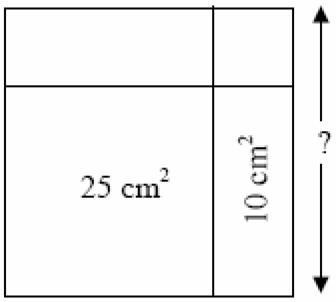


D.



E.

23. Un grande quadrato è diviso in quattro pezzi: due quadrati e due rettangoli. L'area di due di questi pezzi è scritta all'interno: $25\,cm^2$ e $10\,cm^2$. Quale è la lunghezza del lato del quadrato grande?



A. 5 cm **B.** 6 cm **C.** 7 cm **D.** 8 cm **E.** 9 cm

24. Quale delle seguenti figure ha due basi circolari?

A. Piramide **B.** Sfera **C.** Cubo **D.** Cilindro **E.** Cono

25. Trova il numero X, se il numero pari nella tavola segue la stessa regola.

A	B
2	7
3	12
4	19
6	39
X	103

A. 8 **B.** 7 **C.** 6 **D.** 3 **E.** 10

26. Trova il valore di X.

(999+999+999+999+999) ÷ 999 = 9 - X

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6 **E.** 7

27. 100 + 0,01 – 0,001 =

A. 100,09 **B.** 100,9 **C.** 99,09 **D.** 100,009 **E.** 100

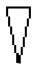
28. Sedici è chiamato un numero quadro, perché 16 = 4 X 4 Quanti numeri quadri ci sono tra 2 e 101?

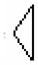
A. 7 **B. 8** **C. 9** **D. 10** **E. 11**

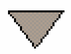
29. La zia Anna ha 42 anni. Eleni è 5 anni più giovane di Niki, e Niki ha metà degli anni della Zia Anna. Quanti anni ha Eleni?

A. 15 **B. 16** **C. 17** **D. 21** **E. 37**

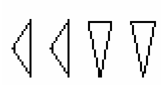
30. In Mesopotamia nel 2500 A.C.,

 Questo simbolo era usato per rappresentare 1,

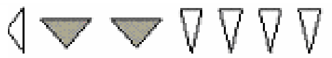
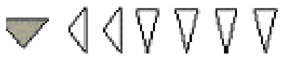
 Questo simbolo era usato per rappresentare 10 e

 Questo simbolo era usato per rappresentare 60.

Così, 22 potrebbe essere scritto in questo modo:



Come viene rappresentato 124?

A  **B**  **C** 

D  **E** 

Test a risposta multipla 2

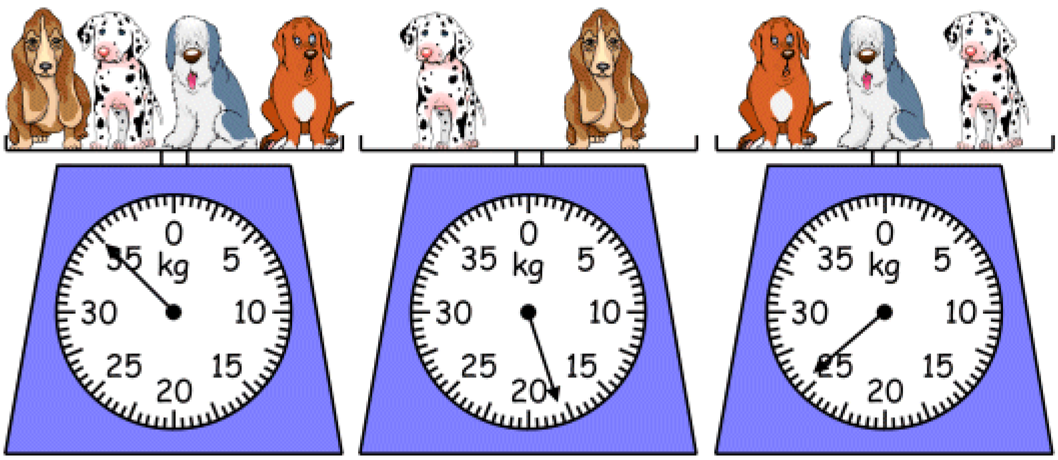
1. Quale è la somma degli angoli in un parallelogrammo?

A. 180° **B.** 225° **C.** 270° **D.** 315° **E.** 360°

2. Quale delle seguenti Frazione ha il valore più grande?

A. $\frac{7}{8}$ **B.** $\frac{66}{77}$ **C.** $\frac{555}{666}$ **D.** $\frac{444}{555}$ **E.** $\frac{3333}{4444}$

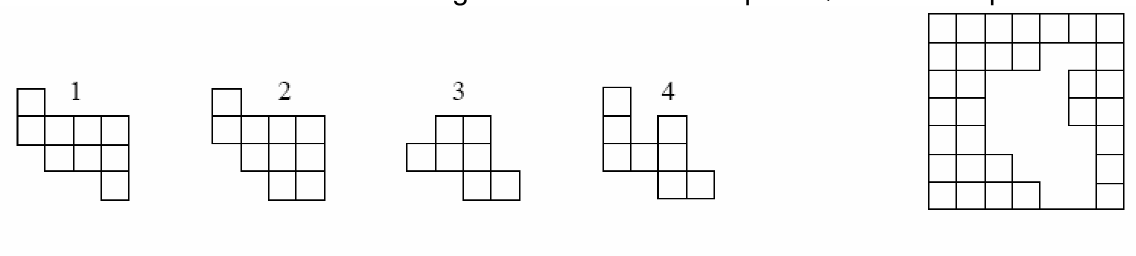
3. Guarda le seguenti figure:



Quale è il peso del cane sulla destra?

A. 8 kg
B. 8 kg e 500 g
C. 7 kg
D. 9 kg
E. 10 kg

4. La fessura sulla destra nella figura deve essere riempita. Quali dei due pezzi userai?



A. 1 e 3 **B.** 1 e 4 **C.** 2 e 3 **D.** 2 e 4 **E.** 3 e 4

5. Quali dei seguenti numeri non è un divisore di 2002?

A. 14 **B.** 26 **C.** 42 **D.** 77 **E.** 91

6. Un campanello elettrico suona ogni 10 minuti. Un secondo campanello ogni 12 minuti. Alle 12:00 entrambe i campanelli suonano contemporaneamente. Dopo quanti minuti i due campanelli suoneranno contemporaneamente?

A. 22 **B.** 30 **C.** 60 **D.** 72 **E.** 120

7. Costas pensò ad un numero, il numero "a." Lui aggiunse 5 ad "a" e raddoppia il risultato. Quindi sottrae 6 dal nuovo risultato e lo divide per 2. Finalmente, sottrae 2 e di conseguenza trova 5 come risultato. Quale del seguente numero è “a”?

A. 4 **B.** 5 **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** 7 **E.** $\frac{7}{2}$

8. Quale dei seguenti non è equivalente ad $\frac{21}{8}$?

A. $2\frac{5}{8}$ **B.** $\frac{168}{64}$ **C.** 2,625 **D.** $2\frac{20}{32}$ **E.** $\frac{189}{81}$

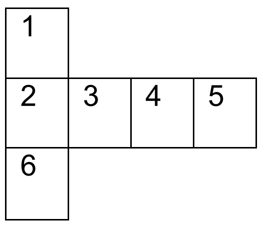
9. Se $\frac{3}{2}=1,5$, allora $\frac{0,03}{0,2}=$

A. 1,5 **B.** 0,15 **C.** 0,015 **D.** 0,0015 **E.** 0,00015

10. La somma di 5 numeri pari consecutivi è 320. Quale è il più piccolo di questi due numeri?

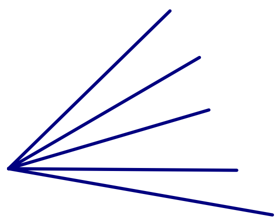
A. 2 **B.** 310 **C.** 312 **D.** 60 **E.** 160

11. Se pieghiamo la figura quì sotto diventa un quadrato. Quale numero sarà sul fondo del cubo, se 5 è sulla cima del cubo?



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 6

12. Quanti angoli acuti sono nella figura di seguito?



A. 4 **B.** 5 **C.** 10 **D.** 11 **E.** 6

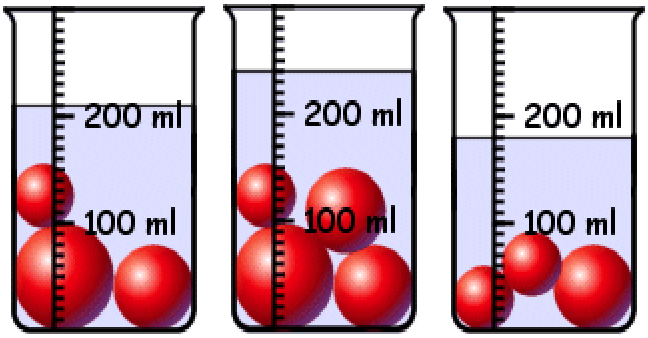
13. Harry ha delle palle gialle, verdi e blu. In totale ha 20 palle. 17 non sono verdi e 12 non sono gialle. Quante sono le palle blu?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 8 **E.** 9

14. Su un cerchio vengono marcati 5 punti. Quanti triangoli diversi possono essere formati collegando tre di questi punti?

A. 10 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 15 **E.** 7

15. I seguenti recipienti hanno la stessa quantità di acqua. Cosa dovrebbe essere letto se in uno di questi vasi ci fossero solo due piccole sfere?

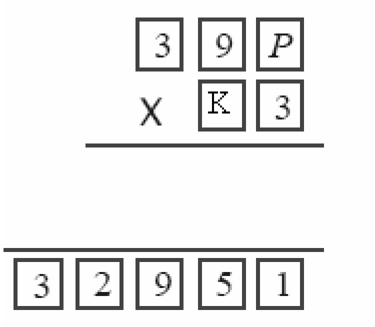


A. 130 ml **B.** 140 ml **C.** 150 ml **D.** 160 ml **E.** 170 ml

16. Se $\frac{6}{x+1} = \frac{3}{2}$, allora x è uguale a:

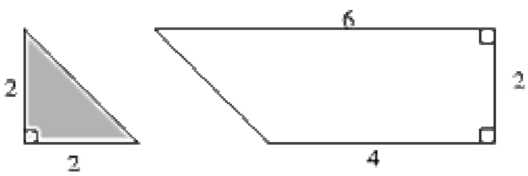
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 5

17. Nella moltiplicazione qui di seguito raffigurata, P e K rappresentano una singola cifra, e il prodotto è 32 951. Quale è il valore di P + K?



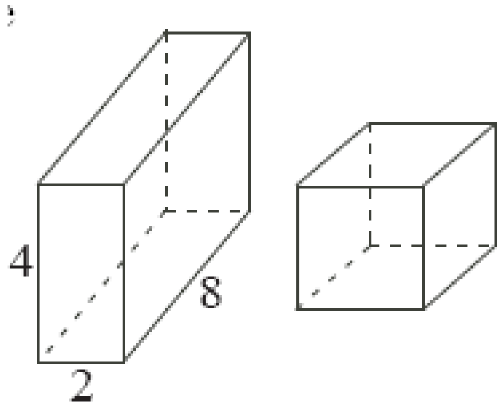
A. 14 **B.** 12 **C.** 13 **D.** 11 **E.** 15

18. Quanti triangoli della stessa forma e dimenzione come il triangolo ombreggiato possono essere inseriti all'interno del i trapezoide?



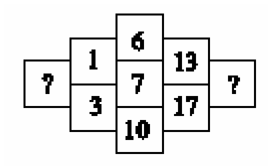
A. 3 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 6 **E.** 3,5

19. Nel diagramma, il solido rettangolare ed il cubo hanno volumi uguali. La lunghezza di ogni spigolo del cubo è:



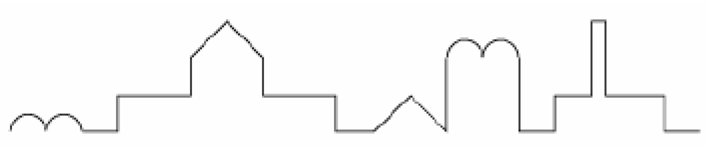
A. 2 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 16 **E.** 32

20. Che numeri dovrebbero essere nei quadrati invece del simbolo "?" ?
A. 2 e 14 **B.** 2 e 30 **C.** 3 e 221 **D.** 4 e 14

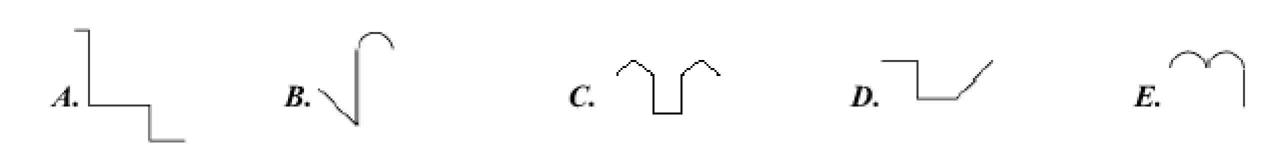


E. 4 e 30

21. Ad una certa distanza notiamo lo skyline di un castello.



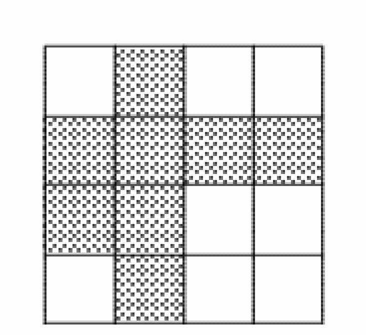
Quale dei seguenti pezzi non appartiene allo skyline?



22. In Canada parte della popolazione parla solamente inglese, parte parla solamente francese, e parte ambe due le lingue. Un esame mostra che 85% della popolazione parla inglese, 75% della popolazione parla francese. Che percentuale della popolazione parla ambe due le lingue?

A. 50 **B.** 57 **C.** 25 **D.** 60 **E.** 40

23. L'area della figura ombreggiata è 200 cm^2. Quale è il perimetro dell'area ombreggiata?



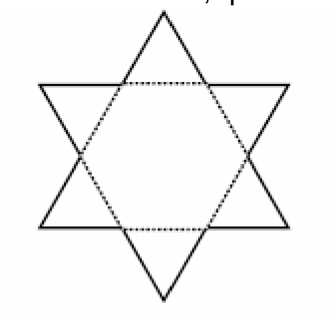
A. 50 **B.** 75 **C.** 80 **D.** 400 **E.** 16

24. Di seguito abiamo un quadrato magico. Quale è il valore di x?

	$\times$	$\frac{4}{5}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{5}$		

A. $\frac{3}{10}$ **B.** $\frac{1}{10}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{15}{10}$ **E. 1**

25. La stella qui sotto è stat costruita estendendo i lati di un esagono regolare (vedi le rette punteggiate). Se il perimetro della stella è 96 cm, quale è il perimetro?



A. 60 cm **B.** 202 cm **C.** 64 cm **D.** 12 cm **E.** 48 cm

26. Costas in un fine-settimana aveva molti compiti. Se lui avesse fatto uno quarto dei compiti il venerdì ed uno-sesto dei compiti sabato, quanti compiti sarebbero rimasti da fare domenica?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{7}{12}$ **C.** $\frac{15}{24}$ **D.** $\frac{8}{12}$ **E.** $\frac{8}{10}$

27. Se 2,125 – x = x + $\frac{5}{8}$, quale è il valore di x?

A. 0,375 **B.** 0,5 **C.** 0,625 **D.** 0,75 **E.** 1

28. Quale dei seguenti numeri è il successore?

20, 41, 83, 167, _____

A. 334 **B.** 250 **C.** 301 **D.** 335 **E.** 350

29. Quale delle seguenti ha il prodotto più grande?

A. $9{,}999 \times 9$ **B.** $999{,}9 \times 99$ **C.** $99{,}99 \times 999$ **D.** $9{,}999 \times 9{,}999$
E. $0{,}9999 \times 99{,}999$

30. Quale dei seguenti numeri è divisibile per 2, 3, 4, e 5?

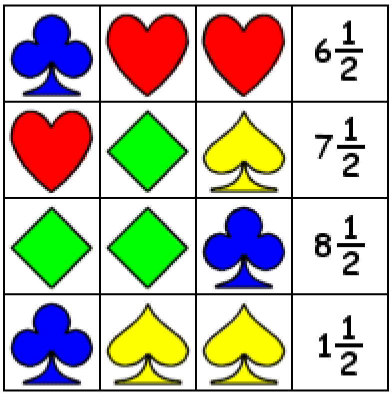
A. 60 **B.** 80 **C.** 100 **D.** 125 **E.** 160

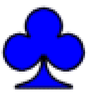
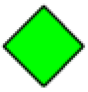
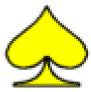
Test a risposta multipla 3

1. Quale è il 40% del 50% di £60?

A. £7 **B.** £15 **Г.** £8 **D.** £20 **E.** £12

2. Osserva la figura di seguito.



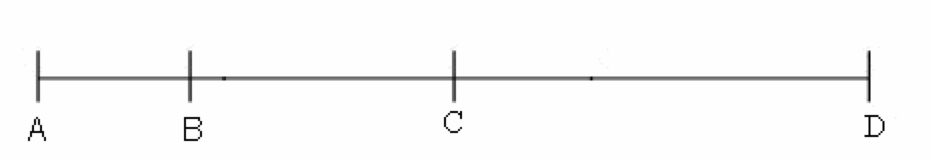
Trova la somma di  +  +  + 

A. 8 **B.** 24 **C.** 12 **D.** 6 **E.** 16

3. Se $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{X}{12}=2$, il valore di X è

A. -4 **B.** -1 **C.** 1 **D.** 13 **E.** 18

4. Nella seguente figura il rapporto fra la lunghezza AB e quella AC è 1 a 3. Il rapporto della lunghezza di AC a CD è 5 a 8. Quale è il rapporto della lunghezza di AC alla lunghezza CD?



A. 3:4 **B.** 3:5 **C.** 5:6 **D.** 4:5 **E.** 2:3

5. Trova un numero di due cifre tale che se togliamo 5, è un multiplo di 4, se togliamo 6, è un multiplo di 5, se togliamo 7, è un multiplo di 6.

A. 21 **B.** 66 **C.** 61 **D.** 31 **E.** 25

6. In a basketball match there were 500 spectators. 30% of the spectators were not students. 30% of the students were in grade 6. 60% of the grade 6 students were boys. How many grade 6 girls attended the basketball match?

In un incontro di pallacanestro ci sono 500 spettatori. 30% dei quali non sono studenti. Il 30% degli studenti era in grado 6. 60% del grado 6 studenti erano ragazzi. Quanti classificare 6 ragazze presenziate alla pallacanestro accoppiano?

A. 18 **B.** 27 **C.** 42 **D.** 54 **E.** 63

7. Quanti numeri di sei cifre diversi si possono costruire, se si usano le cifre 1, 2 3, 4 5 e 6 solamente una volta in ogni numero.

A. 24 **B.** 720 **C.** 80 **D.** 100 **E.** 120

8. Quale è il valore di K eM se $\frac{1}{3}=\frac{1}{K}+\frac{1}{M}$; (K eM rappresentano numeri interi diversi)

A. K=12, M=4
B. K=2, M=1
C. K=0, M=3
D. K=15, M=2
E. K=12, M=6

9. Il valore intermedio di cinque numeri è 18. Se io aumento il primo numero aggiungendo 1, il secondo aggiungendo 2 il terzo aggiungendo 3, il quarto aggiungendo 4 ed i quinto aggiungendo 5, quale sarà il valore intermedio di questi nuovi cinque numeri?

A. 3 **B.** 15 **C.** 21 **D.** 33 **E.** 18

10. Esprimi il 222% di $\frac{1}{2}$ come un decimale.

A. 111 **B.** 11.1 **C.** 11 **D.** 1.11 **E.** 0.11

11. Quale comune fRapportone è equivalente a 0,004375?

A. $\frac{4375}{1000}$ **B.** $\frac{4375}{10000}$ **C.** $\frac{7}{10000}$ **D.** $\frac{7}{1600}$ **E.** $\frac{7}{4000}$

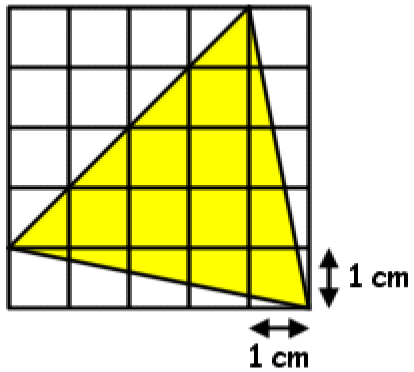
12. Quali dei seguenti calcoli **non è corretto**?

A. 4 X 5 + 67 = 45 + 6 X 7 **B.** 3 X 7 + 48 = 37 + 4 X 8

C. 6 X 3 + 85 = 63 + 8 X 5 **D.** 2 X 5 + 69 = 25 +6 X 9

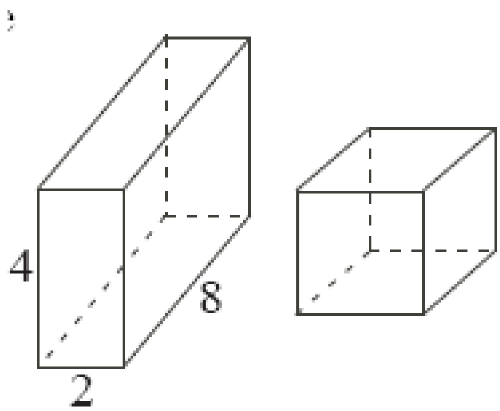
E. 9 X 6 + 73 = 96 + 7 X 3

13. Trova l'area del triangolo ombreggiato.



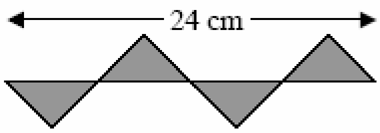
A. 14 cm^2 **B.** 10 cm^2 **C.** 13 cm^2 **D.** 12 cm^2 **E.** 24 cm^2

14. Nel diagramma, il solido rettangolare ed il cubo hanno volumi uguali. La lunghezza di ogni spigolo del cubo è



A. 2 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 16 **E.** 32

15. I quattro triangoli sono la metà di un quadrato. Sono uguali fra loro per dimensione. Quanti cm^2 è la somma dell'area dei 4 triangoli?

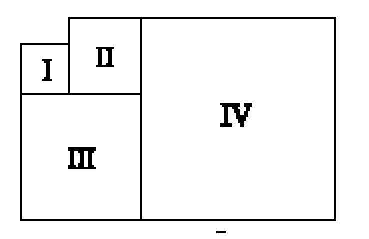


A. 20 **B.** 25 **C.** 30 **D.** 36 **E.** 45

16. In Canada parte della popolazione parla solamente inglese, parte parla solamente francese, e parte ambe due le lingue. Un esame mostra che 85% della popolazione parla inglese, 75% della popolazione parla francese. Che percentuale della popolazione parla ambe due le lingue?

A. 50 **B.** 57 **C.** 25 **D.** 60 **E.** 40

17. Le figure I, II, III e IV sono quadrati. Il perimetro del quadrato I è 16 m e il perimetro del quadrato II è 24 m.



Trova il perimetro del quadrato IV.

A. 56 m **B.** 60 m **C.** 64 m **D.** 72 m **E.** 80 m

18. Cristian aggiunge 3gr di sale a 17gr di acqua. Qual'è la percentuale di sale nella soluzione ottenuta?

A. 20% **B.** 17% **C.** 16% **D.** 15% **E.** 6%

19. Tre piatti, A, B, e C sono sistemati nell'ordine crescente per il loro peso.

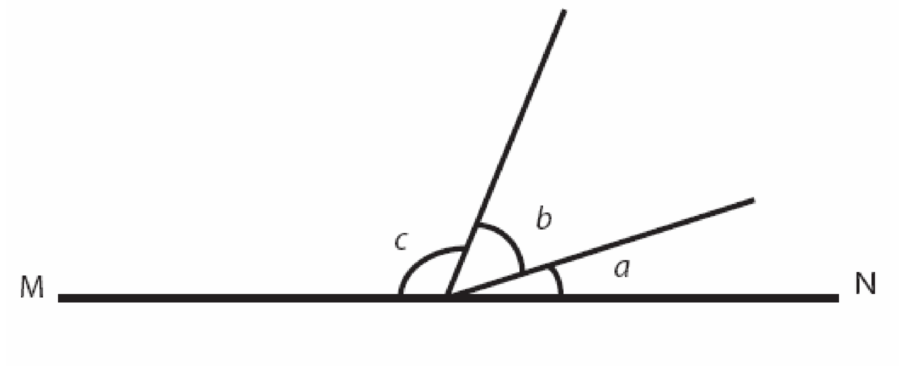
Per mantenere quest'ordine deve essere posizionato il piatto D:

A. tra A e B **B.** tra B e C

C. prima di A **D.** dopo C

E. D e C hanno lo stesso peso

20. Nella seguente figura, MN è un'unica linea dritta. Gli angoli *a, b* e *c* soddisfano la relazione, $a{:}b=1{:}2$ e $c{:}b=3{:}1$. Trova l'angolo *b*.



A. 120° **B.** 60° **C.** 40° **D.** 20° **E.** 8°

21. Ad una festa, ci sono *n* persone. Se ognuno stringe la mano una volta atutte le altre persone della festaavremo 231 strette di mano, quale è il valore di *n*?

A. 21 **B.** 22 **C.** 11 **D.** 12 **E.** 462

22. Se $5^3 - 2^4 = 4^3 + n$, quale è il valore di n?

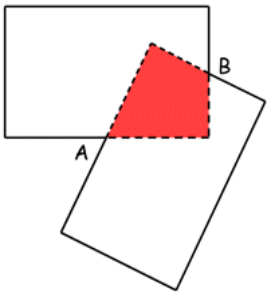
A. 29 **B.** 37 **C.** 45 **D.** 53 **E.** 61

23. Quale è il successivo numero nella seguente sequenza?

$4\frac{7}{10}, 3\frac{2}{5}, 2\frac{1}{10}, \frac{4}{5}, \_\_\_\_$

A. $-\frac{3}{10}$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** $-\frac{1}{5}$ **D.** $-\frac{2}{5}$ **E.** $-\frac{3}{5}$

24. La forma è stat costruita da due rettangoli che hanno le stesse dimensioni. La lunghezza di ogni rettangolo è 16 cm e l'ampiezza è 10 cm. A e B sono i punti di intersezione dei due rettangoi. Quale è il perimetro del quadrilatero ombreggiato?

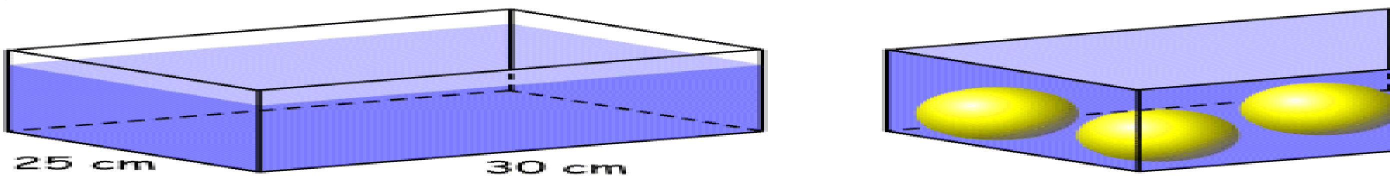


A. 13 cm **B.** 52 cm **C.** 8 cm **D.** 5 cm **E.** 26 cm

25. Le aree di tre quadrati sono 16, 49 e 169. What is the average (mean) of their side lengths?

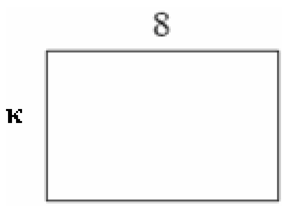
A. 8 **B.** 12 **C.** 24 **D.** 39 **E.** 32

26. Ci sono due solidi rettangolari identici e le loro dimensioni sono quelle che appaiono nella figura qui sotto. Se si aggiunge in uno di questi 12500 cm^3 di acqua, allora per $\frac{5}{6}$ verra riempita. Poi, se metto 4 palle, il solido sarà completamente pieno. Quale è il volume di ogni palla?



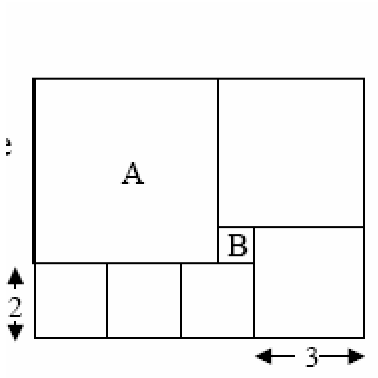
A. 2500 cm^3 **B.** 625 cm^3 **C.** 750 cm^3 **D.** $\frac{1}{6}$ cm^3 **E.** $\frac{1}{24}$ cm^3

27. Nel diagramma, il rettangolo ha un'ampiezza di κ, una lunghezza di 8, ed un perimetro di 24. Qual'è il rapporto tra la sua ampiezza e la sua lunghezza?



A. 1:4 **B.** 1:3 **C.** 1:2 **D.** 3:8 **E.** 2:3

28. Nella figura di seguito puoi vedere sette quadrati. Il quadrato A è il più grande e il quadrato B è il più piccolo. Quante volte il quadrato B è contenuto in A?



A. 16 **B.** 25 **C.** 36 **D.** 49 **E.** 64

29. Nel quadrato qui sotto, il prodotto dei numeri in ogni riga, colonna e diagonale è lo stesso. Qual'è la somma dei due numeri mancanti?

12	1	18
9	6	4
		3

A. 28 **B.** 15 **C.** 30 **D.** 38 **E.** 72

30. Quando il numero 16 è raddoppiato e la risposta è dimezzata, il risultato è

A. 2^1 **B.** 2^2 **C.** 2^3 **D.** 2^4 **E.** 2^8

Test a risposta multipla 4

Problem 1. Se $4a+8=32$, allora $a+2=$

A. 4 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 12 **E.** 16

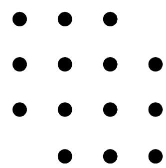
Problem 2. Se $5^{v}+5^{v}+5^{v}+5^{v}+5^{v}=5^{25}$ dove v è un intero, quindi v è uguale a:

A. 2 **B.** 5 **C.** 10 **D.** 20 **E.** 24

Problem 3. Askas ama mangiare cioccolatini che costano 1 pound. Se ogni 4 cioccolati ne ricevi uno gratis quanti cioccolatini Askas può mangiare se spende 16pounds;

A. 16 **B.** 19 **C.** 20 **D.** 21 **E.** 24

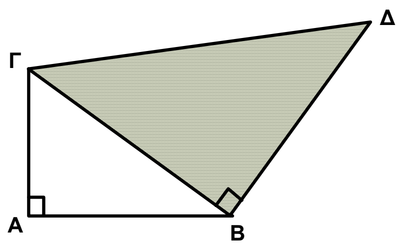
Problem 4. Quanti quadrati possono essere creati usando quattro punti come vertici;



A. 9 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13 **E.** Nessuna delle precedenti risposte

---

Problem 5. Nella seguente figura $\widehat{\Gamma AB}=90^0$, $\widehat{\Gamma B\Delta}=90^0$, $AB=5$, $A\Gamma=4$ e $\Gamma B=B\Delta$. L'area del triangolo $\Gamma B\Delta$ è uguale a:



A. 9 **B.** 4,5 **C.** 20,5 **D.** 41 **E.** 41^2

Problem 6. L'area di un quadrato è ricoperta con 9 quadrati neri di lato α e con 4 bianchi di lato 2α. The possibility that Harris stands in a white tile is equal to:

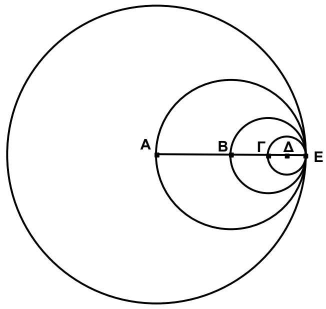
A. $\frac{4}{9}$ **B.** $\frac{16}{25}$ **C.** $\frac{8}{13}$ **D.** $\frac{4}{13}$ **E.** Nessuna delle precedenti risposte

---

Problem 7. α è un numero primo. Il prodotto dei fattori del numero α^2 è uguale a:

A. α **B.** α^2 **C.** $2\alpha^2$ **D.** α^3 **E.** $3\alpha^3$

Problem 8. A, B, C e D sono I centri di 4 cerchi che hanno come punto in comune E come mostrato in figura. Se l'area del cerchio con centro D è π, allora il raggio del cerchio con centro A è uguale a:



A. 4 **B.** 5 **C.** 8 **D.** 10 **E.** 12

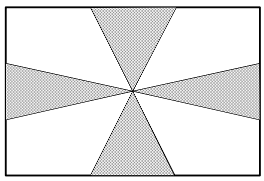
Problem 9. Il resto della divisione di un numero $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10 + 50$ con il numero 24 è uguale a:

A. 0 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 12 **E.** Nessuna delle precedenti risposte.

Problem 10. Ci vogliono 12 minuti per Giorgio per leggere dall'inizio della 12^{th} pagina fino alla fine della 17^{th} pagina di un dizionario. Se lui comincia dalla 27^{th} pagina alle 6.20p.m., allora alle 6.55p.m. sarà arrivato alla pagina …

A. 42 **B.** 43 **C.** 44 **D.** 45 **E.** 46

Problem 11. Ogni lato del rettangolo è diviso in tre segmenti uguali. I segmenti come appaiono nella figura passano tutti per il centro del rettangolo. Il rapporto tra l'area della regione ombreggiata all'area della regione non ombreggiata è uguale a:



A. $1:1$ **B.** $1:2$ **C.** $1:3$ **D.** $2:3$ **E.** $3:4$

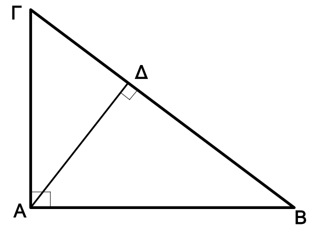
Problem 12. Se x è aumentata dela 25 percento, allora in percentuale quanto è aumentato x^2?

A. $6\frac{1}{4}\%$ **B.** 25% **C.** 50% **D.** $56\frac{1}{4}\%$ **E.** $156\frac{1}{4}\%$

Problem 13. Se $x + y = \frac{1}{5}$ e $x + \omega = \frac{1}{2}$, allora il prodotto $(2x + y + \omega)(\omega - y)$ è uguale a:

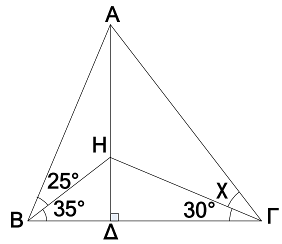
A. 0,04 **B.** 0,21 **C.** 0,7 **D.** 0,84 **E.** 1,7

Problem 14. ABC è un triangolo rettangolo ($\hat{A} = 90°$), AC=6, AB=8 e $A\Delta \perp B\Gamma$. La lunghezza di AD è uguale a:



A. 2,4 **B.** 4 **C.** 4,8 **D.** 5 **E.** 6,4

Problem 15. AD è l'altezza del triangolo ABC. Se H è un punto su AD tale che $\widehat{ABH} = 25°$, $\widehat{HB\Delta} = 35°$ e $\widehat{H\Gamma\Delta} = 30°$, la misura dell'angolo $\widehat{H\Gamma A}$ è uguale a:



A. 17,5° **B.** 20° **C.** 22,5° **D.** 23,5° **E.** 25°

Problem 16. Quando un orologio digitale legge 3:38 p.m. la somma delle cifre è 14. Quanti minuti dopo 3:38 p.m. la somma delle cifre sarà 20 per la prima volta?

A. 42 **B.** 132 **C.** 201 **D.** 251 **E.** 301

Problem 17. Da quante cifre è composto il numero $2^{12} \cdot 5^{8}$?

A. 9 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 12 **E.** 13

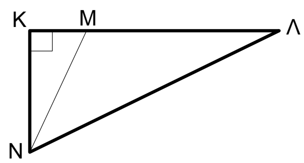
Problem 18. La somma di cinque numeri interi consecutivi è uguale ad A. Il più grande di loro in termini di A è:

A. $\frac{A-10}{5}$ **B.** $\frac{A+4}{5}$ **C.** $\frac{A+5}{4}$ **D.** $\frac{A-5}{2}$ **E.** $\frac{A+10}{5}$

Problem 19. $\frac{1}{4}$% di 2 è uguale a:

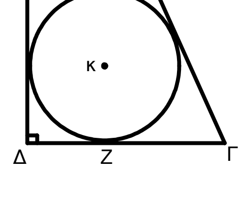
A. $\frac{1}{800}$ **B.** $\frac{1}{200}$ **C.** $\frac{8}{100}$ **D.** $\frac{1}{2}$ **E.** $\frac{1}{8}$

Problem 20. Nella figura KM=$\frac{1}{4}$MΛ, $\widehat{K} = 90^0$ e l'area del triangolo MKN è 80. L'area del triangolo KNΛ è uguale a :



A. 320 **B.** 400 **C.** 480 **D.** 500 **E.** Nessuna delle precedenti risposte.

Problem 21. Se $AE = \frac{a}{2}$ e $Z\Gamma = 2 \cdot EB$ quale delle seguenti relazioni è corretta?



A. $AE = \frac{3}{2} \cdot EB$ **B.** $AE = \sqrt{3} \cdot EB$ **C.** $AE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot EB$

D. $AE = \frac{\sqrt{8}}{2} \cdot EB$ **E.** $AE = \frac{\sqrt{8}}{3} \cdot EB$

Problem 22. Un quadrato e un triangolo equilatero hanno lo stesso perimetro. Il rapporto fra l'area del triangolo e quella del quadrato è uguale a:

A. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{1}{1}$ **D.** $\frac{4}{3}$ **E.** Non è possibile con le informazioni date.

Problem 23. Un Camion pesante e carico lungo 8 m ricopre una distanza di 40 m in 5 secondi. Quanti secondi impiega il camion per arrtaversare un ponte lungo 240 m?

A. 29 **B.** 31 **C.** 40 **D.** 41 **E.** 48

Problem 24. In un esame fra 40 alunni, 13 alunni dissero che hanno una TV nella loro camera da letto, 18 alunni che hanno un Pc nella loro camera da letto e 16 che non hanno nè TV nè PC. Quanti alunni hanno entrambe nella loro stanza?

A. 0 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6 **E.** 7

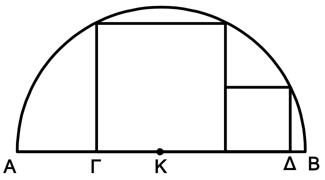
Problem 25. Un numero intero è chiamato"*octanic*" se è un multiplo di 8 o se almeno una delle cifre è 8. Gli "*octanic*" sono numeri compresi tra 1 e 100 uguali a:

A. 22 **B.** 24 **C.** 27 **D.** 30 **E.** 32

Problem 26. Demetris ha 2 fratelli più delle sorelle. La sua sorella Maria ha numero triplo di fratelli che le sorelle. Quante sorelle ha Demetris?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3 **E.** 4

Problem 27. Due quadrati sono inscritti in un semicerchio di centro K e raggio $R = 2\sqrt{5}$ come mostrato nella figura. L'area del quadrato più grande è 4 volte l'area di quello più piccolo. La lunghezza del segmento DB è uguale a:

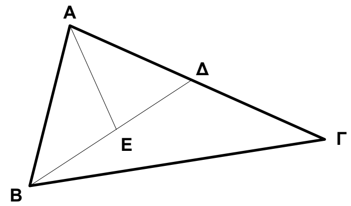


A. $2\left(\sqrt{5}-2\right)$ **B.** $2\sqrt{5}-2$ **C.** $\sqrt{5}-2$ **D.** $\sqrt{5}+2$ **E.** Nessuna delle precedenti risposte.

Problem 28. La somma di 4 interi consecutivi non può essere uguale a:

A. 22 **B.** 202 **C.** 220 **D.** 222 **E.** 2006

Problem 29. Se $\widehat{AB\Delta} = \widehat{EA\Delta} = \widehat{A\Gamma B}$ e $\widehat{AEB} = 100°$ come mostrato nella seguente figura, la misura dell'angolo $\widehat{BA\Gamma}$ è uguale a:



A. 50° **B.** 60° **C.** 70° **D.** 80° **E.** Non è possibile con le informazioni date.

Problem 30. Il numero $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2006}$. Quale delle seguenti asserzioni è vera?

A.	A è divisibile per 7.
B.	A è un numero primo.
C.	A ha 3 come ultima cifra.
D.	A è un numero dispari.
E.	A è più grande di 2^{2007}.

LIVELLO 2

Question 1. A dairy industry, in a quantity of milk with 4% fat adds a quantity of milk with 1% fat and produces

1200 kg of milk with 2% fat.

The quantity of milk with 1% fat, that was added is (in kg)

A. 1000 B. 600 C. 800 D. 120 E. 480

Question 2. L'operazionie $\alpha * \beta$ è definita con $\alpha * \beta = \alpha^2 - \beta^2 \quad \forall \alpha, \beta \in R$.

Il valore dell'esspressione $\mathrm{K} = \left[\left(1+\sqrt{3}\right) * 2 \right] * \sqrt{3}$ è

A. 3 B. 0 C. $\sqrt{3}$ D. 9 E. 1

Question 3. Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{4+2x}$ è

A. $(-2,+\infty)$ B. $[0,+\infty)$ C. $[-2,+\infty)$ D. $[-2,0]$ E. R

Question 4. Data la funzione $f(x) = \alpha x^2 + 9x + \dfrac{81}{4\alpha}$, $\alpha \neq 0$.

Quale delle seguenti è corretta, riguardo il grafico di f?

A. interseca Asse *x* B. tocca Asse *y* C. tocca Asse *x* D. ha punto minimo E. Ha punto massimo

Question 5. Se entrambe gli interi α, β sono più grandi di1 e soddisfano $\alpha^7 = \beta^8$,allora il minimo valore di

$\alpha + \beta$ è

A. 384 B. 2 C. 15 D. 56 E. 512

Question 6. Il valore dell'espressione $\mathrm{K} = \sqrt{19+8\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ è

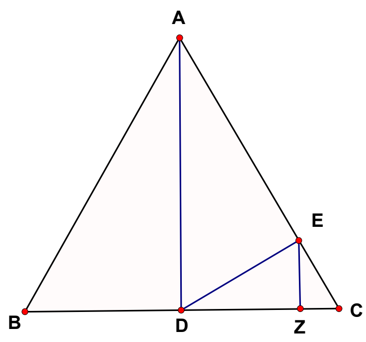
A. 4 B. $4\sqrt{3}$ C. $12+4\sqrt{3}$ D. -2 E. 2

Question 7. Nella figura, *ABC* è un triangolo equilatero

e $AD \perp BC$, $DE \perp AC$, $EZ \perp BC$.

Se $EZ = \sqrt{3}$, allora la lunghezza del lato del triangolo

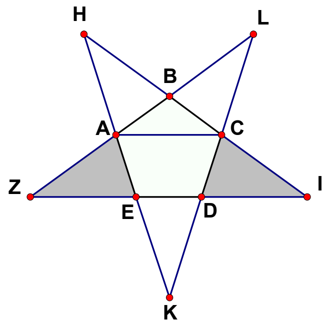
ABC è



A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. 8 C. 4 D. 3 E. 9

ABCDE iè un poligono regolare e *Z*, *H*, *L*, *I*, *K* sono i punti di intersezione dell'estenzione dei suoi lati.

Se l'area della STELLA *AHBLCIDKEZA* è 1, allora l'area del quadrilatero *ACIZ* è



A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{3}{10}$ E. nessuno di questi

Question 8. Se $x=\sqrt[3]{4}-1$ e $y=\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}$, allora quale dei seguenti sono corretti

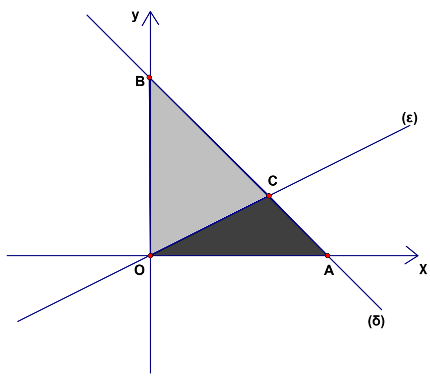
A. $x=y$ B. $x<y$ C. $x=2y$ D. $x>y$ E. nessuno di questi

Question 9. Se $2^x=15$ e $15^y=256$, allora il prodotto xy è uguale a

A. 7 B. 3 C. 1 D. 8 E. 6

Question 10. Le rette (ε): $x-2y=0$ e (D): $x+y=4$

Si intersecano al punto C. Se la linea (D) interseca Gli assi Ox και Oy rispettivamente nei punti *A* e *B* , quinil rapporto tra l'area del teriangolo *OAC* con l'area del trianggolo *OBC* è uguale a



A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{4}{9}$

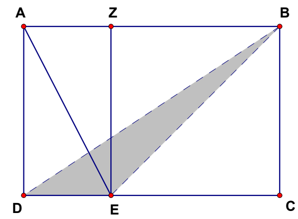
Question 11. Se $f(\alpha,\beta)=\begin{cases}\alpha & if\ \ \alpha=\beta\\ f(\alpha-\beta,\beta) & if\ \ \alpha>\beta\\ f(\beta-\alpha,\alpha) & if\ \ \alpha<\beta\end{cases}$, allora $f(28,17)$ è uguale a

A. 8 B. 0 C. 11 D. 5 E. 1

Question 12. La somma delle cifre del numero $10^{2006}-2006$ è

A. 18006 B. 20060 C. 2006 D. 18047 E. None of these

Question 13. Il rettangolo *ABCD* è un piccolo giardino diviso con il rettangolo *AZED* ed il quadrato *ZBCE*, tale che $AE = 2\sqrt{5}\,m$ e l'area ombreggiata del triangolo *DBE* is $4m^2$. L'area dell'intero giardino è



A. $24m^2$ B. $20m^2$ C. $16m^2$ D. $32m^2$ E . $10\sqrt{5}\,m^2$

Question 14. L'espressione : $\frac{1}{2+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{13}}+\frac{1}{\sqrt{13}+4}$ è uguale a

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{2}{3}$

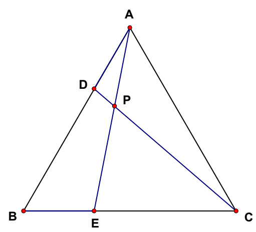
Question 15. Se x_1, x_2 sono le radici dell'equazione $x^2 - 2kx + 2m = 0$, allora $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ sono le radici dell'equazione

A. $x^2 - 2k^2x + 2m^2 = 0$ B. $x^2 - \frac{k}{m}x + \frac{1}{2m} = 0$ C. $x^2 - \frac{m}{k}x + \frac{1}{2m} = 0$ D. $2mx^2 - kx + 1 = 0$ E. $2kx^2 - 2mx + 1 = 0$

Question 16. ABC è un triangolo equilatero del lato α e

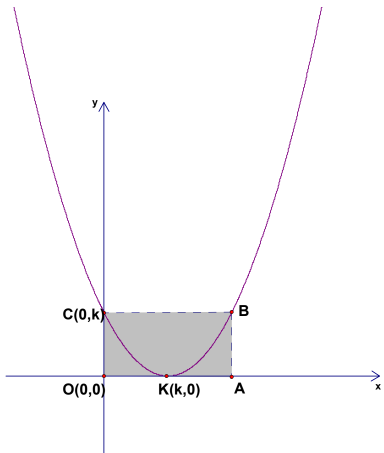
$AD = BE = \frac{\alpha}{3}$.

La misura dell'angolo $\angle CPE$ è



A. 60^0 B. 50^0 C. 40^0 D. 45^0 E. 70^0

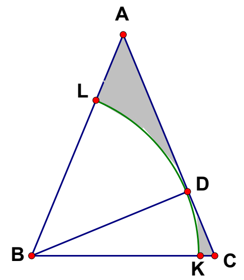
K(k,0) è il punto minimo della parabola
la parabola interseca l'asse y C (0, k).
Se l'area del rettangolo OABC è 8, allora
l'equazione della parabola è



A. $y = \frac{1}{2}(x+2)^2$ B. $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ C. $y = x^2 + 2$ D. $y = x^2 - 2x + 1$ E. $y = x^2 - 4x + 4$

Question 17. ABC è un triangolo isoscele con $AB = AC = \sqrt{2}$

e $\angle A = 45^0$. Se *BD* è l'altezza del triangolo e il settore *BLDKB* appartiene al cerchio (*B,BD*), l'area della regione ombreggiata è



A. $\dfrac{4\sqrt{3}-\pi}{6}$ B. $4\left(\sqrt{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ C. $\dfrac{8\sqrt{2}-3\pi}{16}$ D. $\dfrac{\pi}{8}$ E. Nessuna di queste

Question 18. La sequenza $f:\mathrm{N}\to R$ soddisfa $f(n)=f(n-1)-f(n-2), \forall n\geq 3$.

Dato $f(1)=f(2)=1$, allora $f(3n)$ è uguale a

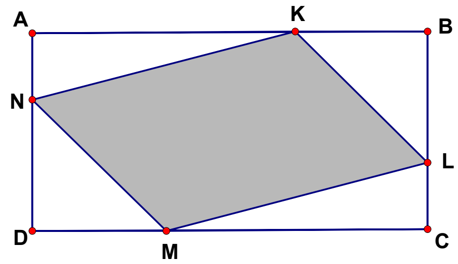
A. 3 B. -3 C. 2 D. 1 E. 0

Question 19. Un poligono convesso ha *n* lati e 740 diagonali. Quindi *n* è uguale a

A. 30 B. 40 C. 50 D. 60 E. Nessuna di queste

Question 20. *ABCD* iè un rettangolo e i punti *K,L,M,N* Toccano rispettivamente i lati *AB, BC, CD, DA* così Che $\dfrac{AK}{KB}=\dfrac{BL}{LC}=\dfrac{CM}{MD}=\dfrac{DN}{NA}=2$. Se E_1 è l'area di *KLMN* e E_2 è l'area del rettangolo *ABCD*,

Il rapporto $\dfrac{E_1}{E_2}$ è uguale a



A. $\dfrac{5}{9}$ B. $\dfrac{1}{3}$ C. $\dfrac{9}{5}$ D. $\dfrac{3}{5}$ E. Nessuna di queste

Question 21. Di 21 studenti che studiano Matematica, Fisica e Chimica, nessuno di questi studia soloamente una materia.

Il numero di studenti che studiano solo Matematica e Chimica, è pari a quattro volte il numero Di quelli che studiano Matematica e Fisica. Se il numero di studenti che studiano solo Fisica e Chimica è uguale a tre volte il numero di studenti che studiano tutte e tre le materie, quindi il numero di studenti che studiano tutte e tre le materie è

A. 0 B. 5 C. 2 D. 4 E. 1

Question 22. Il numero di divisori del numero 2006 è

A. 3 B. 4 C. 8 D. 5 E. 6

Usando gli strumenti musicali chitarra, flauto e violino creeremo 4 componenti d'orchestra che avranno almeno 2 strumenti diversi. Il numero degli orchestrali è

A. 12 B. 15 C. 11 D. 14 E. 13

Question 23. Il numero massimo di intersezioni tra tre cerchi ed una linea è

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12 E. None of these

Question 24. In the expansion of $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^4$ the value of the term which is independent of x is

A. 2 B. 6 C. 4 D. 10 E. 12

Question 25. Un triangolo isoscele ABC ha un angolo ottuso, φ è la misura di ogni angolo acuto e $AB = AC = \alpha$. Se *BD* è l'altezza del triangolo, allora *CD* è uguale a

A. $\alpha(1+\cos\varphi)$ B. $\dfrac{\alpha(1-\cos 2\varphi)}{2}$ C. $\alpha(1+\cos 2\varphi)$ D. $2\alpha(1+\cos\varphi)$ E. $\alpha(1+\sin 2\varphi)$

Question 26. Data la funzione $f:\square\to\square$ con $f(n)=\begin{cases} n+1 & ,if\ \ n\ is\ odd \\ n^2 & ,if\ \ n\ is\ even \end{cases}$.

Il valore di $f(f(f(3)))$ è

A. 27 B. 81^2 C. 128 D. 64 E. 256

Question 27. Se $x=2^{100}$, $y=3^{75}$, $z=5^{50}$, quali dei seguenti è corretta

A. $x<y<z$ B. $x<z<y$ C. $y<z<x$ D. $y<x<z$ E. Nessuna di queste

PARTE II-MOTIVAZIONE

1.14 Introduzione

Dopo aver identificato degli studenti come talenti Matematici, bisogna trovare la performance migliore da ciascun studente e lui o lei vengono motivati, perché i studenti variano per il talento e la motivazione. Ovviamente, non esiste un solo approccio per per tutti gli studenti. Il disegno del programma istruttivo di ogni studente dovrebbe essere basato su un'analisi delle abilità individuali e le necessità (Clark, 1997). Per esempio, studenti con abilità e motivazione estremamente alta possono trarre profitto più da un programma che promuove un rapido processo istruttivo; gli altri studenti possono avere risultati migliori con un programma che non è ha un processo così rapido (Mugnaio, 1990).
Comunque ha bisogno di essere enfatizzato per motivare I talenti in modo tale da migliorare le loro abilità, tutti i mezzi in possesso devono essere usati per ottenere ciò. Queste leve sono (a) apppoggioo della famiglia ; (b) supporto degli insegnati; e (c) appoggio della comunità. In altre parole, sono tre livelli diversi sui quali possono essere motivati i talenti (Fig. 1):

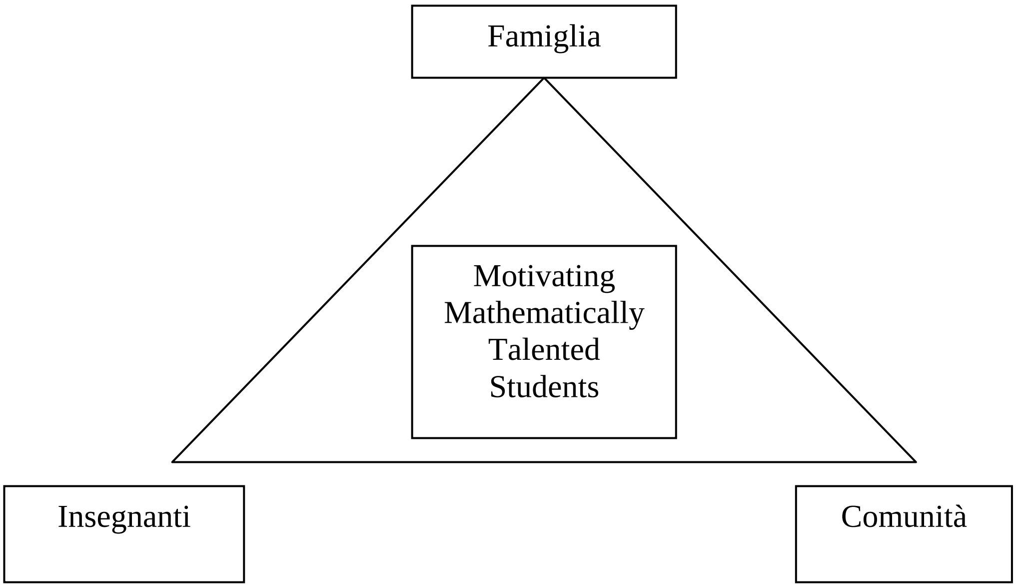


Figure 1. Three Levels of Motivating Mathematically Talented Students

Livello 1: Guida e supporto della famiglia
La ricerca ha stabilito l'importanza dell'attegiamento, della guida e del supporto della famiglia riguardo l'auto percezione accademica e and achievement of their children . Queste scoperte sono state confermate in studi su influenza della famiglia sull'autoconcetto di matematica su bambini talentuosi (McGillicuddy-De Lisi, 1985; Parsons, Adler & Kaczala, 1982). I genitori sono visti come l'influenza primaria, anche se non possono offrire istruzione matematica. Piuttosto, i genitori giocano un ruolo cruciale nell'offrire la struttura conoscitiva ed emotiva d'appoggio nella quale devono crescere i bambini, imparare lai disciplina mentale, focalizzare le loro abilità, apprezzare le proprie forze, coltivare un desiderio di imparare ed approfittare delle opportunità.

Livello 2: Teachers and Curricula
Come fonte di incoraggiamento, sfida, ed appoggio, gli insegnanti sono un'influenza molto potente su gli studenti matematicamente talentuosi. Anche, programmi competitivi all'interno di una classe può incoraggiare creatività e conseguimento di successi. Ognuno di questi fattori è discusso di seguito.

Il ruolo degli insegnanti: L'insegnante ha due ruoli di chiave nel sostenere la cultura di studenti talentuosi. Per prima cosa l'insegnante ha bisogno di selezionare I compiti che sono più appropriati al raggiungimento e alla promozione dell'apprendimento (e.g. alto-livello pensando e ragionando come esplorare I modelli e le relazioni, producendo soluzioni olistiche e laterali), metacognizione

(e.g. comparando e sviluppando i vari metodi di soluzione dei problemi) e motivazione (e.g. compiti difficili che devo essere risolti); in secondo luogo, offrire le opportunità agli studenti di prendere parte in questi compiti senza ridurre la loro capacità (Henningsen & l'ampere; Stein, 1997). In particolare, dando a studenti talentuosi compiti difficili questo tende a migliorare la loro motivazione e l l'amor proprio (al di et di Bandura., 1996; Lupkowski-Shoplik & l'ampere; Assouline, 1994; Al di et di Vallerand. 1994).
L'insegnante può offrire appoggio un *estrinseco* ed *intrinseco* agli studenti prendendo parte nella pratica di *approccio cognitivo*, i.e. le strategie che insegnano lo sviluppo di competenze (Collins, Renda bruno, & l'ampere; Newman, 1989). L'appoggio estrinseco è offerto agli studenti attraverso *struttura, modellatura, ed addestramento;* questi sono considerati fattori chiave nel facilitare il pensiero e il ragionamento di alto-livello (Henningsen & l'ampere; Stein, 1997). *L'appoggio intrinseco* è offerto dall'insegnante che facilita i processi dell'Esplorazione e riflessione sulle idee attraverso la struttura del sapere dello studente (al di et di Collins., 1989; Henningsen & l'ampere; Stein, 1997).

Il programma del curriculum per studenti matematicamente d'ingegno: In nessuna materia dove ottengono la loro istruzione, gli studenti matematicamente d'ingegno hanno bisogno di un curriculum reso differente per indirizzare le loro caratteristiche individuali, le necessità, le abilità, ed interessi. Sembra che non abbia nessuna importanza inserire aspetti che accrescano la motivazione nei programmi curriculari degli studenti dotati d'ingegno. (Miller, 1990; Rotigel & Lupkowski, 1999; Stanley, 1991; Velazquez, 1990).
1. Il curriculum di matematica dovrebbe portare gli studenti matematicamente dotati d'ingegno a lavorare collaborativamente (al di et di Tomlinson., 1997). Gli studenti trarranno grande profitto, accademicamente ed emotivamente, da questo tipo di esperimenti. Loro impareranno l'uno dall'altro, si rinforzeranno l'un l'altro, ed aiuteranno l'un l'altro sulle difficoltà. Studenti dotati d'ingegni imparano meglio nel coltivare emotivamente, il bagaglio culturale in un ambiente studente-centrato che incoraggia l'indagine e l'indipendenza, include una varietà larga di materie, è generalmente complesso, e collega la esperimentazione scuolastica col più grande mondo.
2. Il curriculum di matematica dovrebbe porre l'accento sul ragionamento matematico e dovrebbe sviluppare le abilità esplorative ed indipendenti (Niederer & l'ampere; Irwin, 2001). Per esempio, questo è esemplificato usando l'apprendimento per la scoperta e soluzione dei problemi, e prendendo parte in progetti speciali di matematica, scoprendo formule, cercando modelli, ed organizzando dati per trovare relazioni. Le attività dovrebbero aiutare gli studenti a sviluppare e strutturare, rinforzi e le abilità di sintesi, sviluppare le abitudini di studio efficienti, ed incoraggiare le domande divergenti.
3. I curricula matematici dovrebbero enfatizzare la ripetizione del lavoro. (Velazquez, 1990). Gli studenti matematicamente d'ingegno hanno bisogno opportunità di arricchimento dilatate nel tempo. Lo scopo del curriculum di matematica dovrebbe essere esteso così che possa offrire una fondazione adeguata per studenti che possano divenire matematici nel futuro. In molti programmi il curriculum di matematica doveva essere esteso in larga parte per soddisfare questo bisogno. Offrire un approccio interdisciplinare è un altro modo di incontrare le necessità di questi studenti. I ricercatori hanno trovato che gli studenti d'ingegno traggono grande profitto da un curriculum che sperimenta quelle aree tradizionali, particolarmente quando loro sono incoraggiati per acquisire una comprensione integrata di conoscenza e la struttura delle discipline.
4. Il curriculum di matematica dovrebbe essere seguito (sulla base di un accertamento della conoscenza di studenti e l'abilità) flessibilmente. Curriculum per studenti matematicamente d'ingegno dovrebbero promuovere cultura auto-iniziata e auto-diretta per la crescita. Soddisfatti di come si impara sperimentando, il curriculum può subire acceleRapportoni, mentre può essere compattato, variegato, riorganizzato, flessibilmente, per l'uso di concetti più avanzati o complessi, le estRapportoni, e materiali. In particolare, la flessibilità può essere realizzata nei modi seguenti (Mugnaio, 1990):

- *Progresso continuo.* Gli studenti ricevono istruzione adatta quotidiana e vanno avanti appena dominano contenuto e l'abilità.
- *Corsi compattati.* Gli studenti completano due o più corsi in una durata abbreviata.
- *Corsi di avanzato-livello.* Agli studenti sono presentati corsi con contenuti di grado più alto del normale.

- *Salto di Grado.* Gli studenti trasportano avanti 1 o più anni oltre il prossimo livello di promozione.
- *Primo ingresso.* Gli studenti entrano in scuola elementare, scuola media, liceo, o l'università prima dell'età solita.
- *Iscrizione concomitante o duplice.* Studenti frequentano classi ad un altro livello di scuola. Per esempio, un studente di scuola elementare può frequentare classi di scuola media.
- *Accrediti da esame.* Gli studenti ricevono credito per un corso sul completamento soddisfacente di un esame o sulla certificazione di un dominio.

Livello 3: Comunità

In fine, l'influenza della comunità è ugualmente importante nel motivare gli studenti matematicamente d'ingegno come i due fattori precedenti. Per esempio, organizzazioni locali, governi, e le università possono giocare un ruolo speciale nel sostenere la crescita di studenti matematicamente d'ingegni.

Di seguito offriamo degli esempi pratici di come promuovere la motivazione intrinseca ed estrinseca.

1.15 Motivazione intrinseca

1. *L'uso di problemi 'aperti'*

Una tecnica istruttiva estremamente importante per l'insegnamento della matematica è l'impalcatura. Un modo di promuovere l'impalcatura matematica è l'uso di problemi 'aperti' (situazioni non-didattiche, Brousseau, 1997). *Il problema aperto può essere definito come il problema che non richiede, per la risoluzione, gli specifici teoremi matematici, concetti matematici o gli specifici metodi.* Anche nel caso che un particolare teorema matematico o uno specifico concetto matematico metodo è richiesto, lo studente non ne è a conoscenza. I problemi aperti richiedono agli studenti di esplorare problemi, fare ipotesi, proporre modi di risoluzione, e convalidare le loro soluzioni.

Esempi:
a. Due individui A e B sono sullo stesso lato del fiume. Per quale il modo più veloce per A andare nel fiume, raccogliere dell'acqua e portarla all'individuo B?

Questo problema è aperto per studenti ai quali non sono stati insegnati il concetto di simmetria di asse e non hanno fatto problemi relativi allo stesso. È stato notato che quando gli studenti lavorano su questo problema, Dimostrazioneno molti modi per trovare il modo più corto (situazione di azione); spiegano questi modi agli altri studenti o all'insegnante (situazione della formulazione); e finalmente, tentano di convalidare questo processo offrendo un ragionamento matematico che giustifica la loro soluzione (situazione di convalidazione). Questo terzo passo è molto importante perché non solo richiede convalidazione personale ma anche convalidazione all'interno del loro gruppo di pari. Questo implica che lo studente non dovrebbe convincere semplicemente i suoi compagni di classe ma che dovrebbe anche prendere in esame il loro punto di vista.

Nel problema sopra esposto, per esempio, molte soluzioni possono essere proposte dagli studenti durante la situazione di convalidazione. Comunque, lo studente che convalida la sua soluzione (i.e. trovare i simmetrici di A in relazione al fiume) dovrebbe Dimostrazionere ai suoi compagni di classe che dato che l'intervallo di linea è il modo più corto tra due punti la sua soluzione è corretta (dato che gli studenti non hanno una regola per misurare le distanze, si osserva che propongono procedure erronee per risolvendo questo problema).

b. Un giocatore di football sta correndo parallelamente alla linea dell'area di meta degli oppositori. A che punto lungo questa linea, il giocatore deve tirare per avere la possibilità più alta di segnare una meta.

2. *L'uso di temi storici in matematica o problemi matematici e storici (e.g. Dimostrazioni di teoremi ben conosciuti; paradossi matematici; ostacoli di matematici conosciuti riferirti ecc. a dei concetti matematici)*

a. Per esempio, il teorema (diretto ed inverso) di Pitagora ha molte soluzioni. Può essere interessante per gli studenti presentare soluzioni proposte da individui famosi (non solo i matematici) e discutere il pensiero relativo a queste Dimostrazioni.
b. Gli studenti possono esplorare paradossi matematici e famosi nella storia delle matematiche come il Paradosso di Zeno e le Infinità di Cantore.
c. Alcuni concetti matematici sono stati segnati da ostacoli sperimentati da matematici famosi. Per esempio, consideri la regola di segnali (-) x (-) = + (G. Glaeser). Gli studenti possono esplorare gli Alembert di D o i tentativi di Euler di Dimostrazionere questa regola. Cercare gli assunti di problemi matematici e storici può essere una ricompensa ed arricchimento di sperimentazione

3. *Per incentivare la curiosità di studenti, noi usiamo problemi riferiti a figure storiche e letterarie ben conosciute. (e.g. Alessandro il Grande, Pinocchio ecc.).*

1.16 Motivazione estrinseca

1. Il primo genere di motivazione estrinseca riguarda l'organizzazione delle competizioni ed Olimpiadi, e la consegna di premi, ricompense ecc. Tutti i pedagoghi e ricercatori didattici sono concordi che il gioco è un importante mezzo per imparare. Le competizioni e premi sono importanti modi che provvedono alla motivazione di studenti matematicamente d'ingegno.
2. Il secondo genere di motivazione estrinseca è riferito all'organizzazione dell' insegnamento (irrispettoso di qualche genere di problema presentato agli studenti). Per esempio, due studenti lavorano indipendentemente sullo stesso problema. Dopo aver finito, comparano e contrappongono le loro soluzioni. Questo non solo sta motivando gli studenti a causa della curiosità coinvolta, ma anche perché è una situazione di convalidazione della soluzione per tutti e due gli studenti.
3. Il terzo genere di motivazione estrinseca è che problema proponga una costruzione (come le scale proposte in questo manuale). Qui gli studenti costruiscono problemi o le attività riferite a dei dati o concetti matematici a loro proposti.
4. Le consideRapportoni su gioco e situazioni non-didattiche. Nella "teoria delle situazioni" di G. Brousseau, le situazioni non-didattiche hanno tre fasi: fase di azione, fase della formulazione e fase di convalidazione. La fase di azione corrisponde alla matematica reale e consiste nella creazione corretta di strategie decisive in una situazione di concretezza. La fase di comunicazione consiste nella scoperta di un codice di comunicazione per comunicare la strategia che è stata usata. In fine, la situazione di convalidazione consiste nel fatto che i partecipanti decidano chi ha ottenuto la strategia ottimale. Per rispondere a questa domanda gli studenti devono formulare "teoremi in azione" che permettono l'ottimizzazione di possibili soluzioni. Da un punto di vista pedagogico, il "gioco" presume così, un ruolo molto importante. Lo studente impara a portare dalla fase di azione alla negoziazione pubblica (in classe e senza l'intervento diretto dell'insegnante) di tutte le possibili strategie (i teoremi in azione). L'insegnante prepara la situazione di non-didattica e rimane arbitro delle regole che hanno bisogno di essere rispettate. Tutte le fasi sono maneggiate direttamente dagli studenti.
5. L'uso dell'animazione nell'insegnamento delle matematiche.

1.17 Electronic Bibliograficoy

Electronic articles

1. John F. Feldhuson, *Talent Sviluppo in Ginsiemeed Educaziun*, ERIC Digest E610, 2001. http://searcoheric.org/digests/ed455657.html
2. Dana T. Johnson, *Togniing Matematica to Ginsiemeed Studenti in a Misti-Ability Classroom*, ERIC Digest E594, 2000. http://ericec.org/digests/e594.html
3. Richard C. Miller, *Discovering Matematiche Talent*, ERIC Digest E482, 1990. http://ericec.org/digests/e482.html
4. Joan Franklin Smutny, *Togniing Young Ginsiemeed Children in il Regular Classroom*, ERIC Digest E595, 2000. http://searcoheric.org/digests/ed445422.html

General Websites

www.nfer-nelson.co.uk
www.math.bas.bg/bcmi/
excalibur.math.ust.uk
www.unl.edu/amc
math.scu.edu/putnam/intex.html
www.mathleague.com
olimpiadi.win.tue.nl/imo
olemiss.edu/maild/problem.htm
mathforum.com/library
www.geom.umn.edu
problemi.math.umr.edu
www.math.fau.edu/MatematicaCompetizioni
www.schoolnet.ca
www.mathpropress.com/mathCener.htm
www.enc.org/verticiics/inquiry/ideas

Specseic Websites

1. MAILU website: http://www.mailu.org
2. Il Nazionale Ricerca Center on il Ginsiemeed Italia Talented (NRC/GT) http://www.ginsiemeed.uconn.edu/nrcgt.html
3. Johns Hopkins University: Il Center for Talented Youth (CTY) http://cty.jhu.edu/
4. Northwestern University's Center for Talent Sviluppo (CTD) http://www.ctd.northwestern.edu/
5. Il Educaziun di Ginsiemeed Italia Talented Studenti in Western Australia http://www.eddept.wa.edu.au/ginsiemetal/ginsiemetoc.htm

1.18 Books Italia Papers for Motivaziun

Assourette, S. G., & Lsuperiorikowski-Shoplik, A. (2003). Developing matematiche talent: A guide for challenging Italia educating ginsiemeed studenti. Waco, TX: Prufrock Press.

BItaliaura, A., Barbaranelli, C., Caprara, G. V., & Pastorelli, C. (1996). Multseacceed impact di self-efficacy beliefs on academic funzioneing. Child Sviluppo, 67, 1206-1222.

Brousseau, G. (1997). Ilory di didactical situations in matematica: Didactique des mailmatiques 1970-1990. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Buescher, T. (1989). A sviluppoal study di adjustment among ginsiemeed adolescents. In J. VanTassel-Baska Italia P. Olszewski-Kubilius (Eds.), Patterns di influence on ginsiemeed learners: Il home, il self, Italia il school (pp. 102-104). New York: Togniers College Press.

Clark, B. (1997). Growing superiori ginsiemeed (5th ed.). Columbus, OH: Prentice-Hall.

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive apprenticeship: Togniing il crafts di reading, scrittura, Italia matematica. In L. B. Resnick (Ed.), Knowing, learning; Italia instruction: Essays in honour di Robert Glaser (pp. 453-494). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Gagatsis, A. (1992). Concettos Italia metodi di didactics di matematica-relaziuns tra history Italia didactics di matematica. In A. Gagatsis (Ed.), Verticiics di didactics di matematica (pp. 143-170). Erasmus ICP, 91G0027/11.

Gagné, F. (1985). Ginsiemeedness Italia talent: Re-examining a re-examination di il definizioni. Ginsiemeed Child Quarterly, 29, 103-112.

Gagne, F. (1995). Daginsiemeedness to talent: A sviluppoal mode! Italia its impact on il languetà di il field. Keeper Review IS, 103-111.

Gallagher, J. J. (1997). Issues in il educaziun di ginsiemeed studenti. In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), HItaliabook di ginsiemeed educaziun (pp. 10–24). Needham Heights, MA: Allyn Italia Bacon.

Gardner, H. (1999). Intelligence reframed: Multiplo intelligences for il 21st century. New York: BasicBooks.

Grassl, R. M., & Mingus, T. Y. (1999). Nurturing il growth di young Mathematician through matematica contests. In L. Sheffield (Ed.), Developing matematichely promising studenti. Reston, VA: Nazionale Council di Togniers di Matematica.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Matematiche tasks Italia student cognition: Classroom-based divisorees that ssuperioriporto Italia inhibit high-livello matematiche thinking Italia ragionamento. Journal for Ricerca in Matematica Educaziun, 28, 524-549.

Hoeflinger, M. (1998). Developing matematichely promising studenti. Roeper Review, 20, 244-247.

Johnson, D. T. (1993). Matematica curriculum for il ginsiemeed. In J. VanTassel - Baska (Ed.), Comprehensive curriculum for ginsiemeed learners (pp. 231–261). Needham Heights, MA: Allyn Italia Bacon.

Johnson, D. T. (1994). Matematica curriculum for il ginsiemeed. In J. VanTassel-Baska (Ed.), Comprehensive curriculum for ginsiemeed learners (2nd ed.; pp. 231-261). Boston MA: Allyn Italia Bacon.

Johnson, D. T., & Sher, B. T. (1997). Resource guide to matematica curriculum materials for high-ability learners in classes K– 8. Williamsburg, VA: Center for Ginsiemeed Educaziun, College di William Italia Mary.

Kissane, B. V. (1986). Selection di matematichely talented studenti. Educaziunal Studies in Matematica, 17, 221-241.

Kolitch, E. R., & Brody, L. E. (1992). Matematica acceleRapporton di highly talented studenti: An evaluation. Ginsiemeed Child Quarterly, 36, 78–86.

Krutetski, V. A. (1976). Il psychology di matematiche abilities in school children. Chicago: Il University di Chicago Press.

Lsuperiorikowski-Shoplik, A. E., & Assourette, S. G. (1994). Evidence di extreme matematiche precocity: Case studies di talented youths. Roeper Review, 16, 144-151.

Maitra, K. (2000). Identseicaziun di il ginsiemeed—some methodologica issues. Ginsiemeed Educaziun Internazionale, 14, 296-301.

Marjoram, D. T., & Nelson, M. (1985). Matematiche ginsiemes. In J. Freeman (Ed.), Il psychology di ginsiemeed children (pp. 185-200). New York: Wiley.

McGillicuddy-De Lisi, A. (1985). Il relaziunship tra parental beliefs Italia children's cognitive livello. In R. Sigel (Ed.), Parental belief sistemi (pp. 7-24). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Miller, R.C. (1990). Discovering matematiche talent (ERIC Digest No. E482). Reston, VA: Council for Exceptional Children, ERIC Clearinghouso on Disabilities Italia Ginsiemeed Educaziun.

Mingus, T. Y. (1999). What constitutes a nurturing environment for il growth di matematichely ginsiemeed studenti? School Science & Matematica, 99, 286-294.

Piùlock, M. J. (1996). On il nature di ginsiemeedness Italia talent: Imposing grado on chaos. Roeper Review, 19, 4-12.

Niederer, K., & Irwin, K. C. (2001). Utilizzando problem soluzione to identsey matematichely ginsiemeed children. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings di il 25th Conference di il Internazionale Grosuperiori for il Psychology di Matematica Educaziun (Vol. 3, pp. 431-438). Utrecht: Il NeilrlItalias.

Niederer, K., Irwin, J, Irwin, K., & Reilly, I. (2003). Identseicaziun di matematichely ginsiemeed children in New ZealItalia. High Ability Studies, 14, 71-84.

Park, B. N. (1989). Ginsiemeed studenti in regular classrooms. Needham Heights, MA: Allyn Italia Bacon.

Parsons, J. E., Adler, T. F., & Kaczala, C. (1982). Socialization di achievement attitudes Italia beliefs: Parental influences. Child Sviluppo, 53, 310-321.

Perleth, C., & Heller, K. A. (1994). Il Munich longitudinal study di ginsiemeedness. In R. F. Subotnik & K. K. Arnold (Eds.), Beyond Terman: Contemporary longitudinal studies on ginsiemeedness Italia talent (pp. 77-114). Norwood, NJ: Ablex.

Renzulli, J. S. (1982). What makes a problem real: Stalking il illusive principaleing di qualitative differenzas in ginsiemeed educaziun. Ginsiemeed Child Quarterly, 26, 148–156.

Renzulli, J. S., & Reis, S. M. (1998). Talent sviluppo through curriculum dseferentiation. NASSP Bulletin, 82(595), 38–46.

Rotigel, J. V, & Lsuperiorikowski, S. A. (1999). Utilizzando talent searcohes to identsey Italia meet il educaziunal needs di matematichely talented youngsters. School Science Italia Matematica, 99, 330-337.

Sheffield, L J. (1999). Developing matematichely promising studenti. Reston, VA: Nazionale Council di Togniers di Matematica.

Sowell, E. J. (1993). Programs for matematichely ginsiemeed studenti: A review di empirical ricerca. Ginsiemeed Child Quarterly, 37, 124-132.

Span, P. & Overtoom-Corsmit, R. (1986). Informuleation processing by intellectually ginsiemeed allievi soluzione matematiche problemi. Educaziunal Studies in Matematica, 17, 273-295.

Stanley; J. S. (1991). An academic model for educating il matematichely talented. Ginsiemeed Child Quarterly, 35, 36-42.

Stanley, J. C., & Benbow, C. P. (1986). Youth who reason exceptionally well matematichely. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), Concettoions di ginsiemeedness (pp. 361-381). Cambridge: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J. (1985). Human abilities: An informuleation processing approach. New York: Freeman.

Sternberg, R. J. (1993). Il concetto di ginsiemeedness: A pentagonoal implicit ilory. In G. R. Block, & K. Ackrill (Eds.), Il origins Italia sviluppo di high ability (pp. 5—16). Chichester, EnglItalia: Wiley.

Tirosh, D. (1989). Togniing matematichely ginsiemeed childern. In R. M. Milgram (Ed.), Togniing ginsiemeed Italia talented learners in regular classrooms (pp. 205-222). Springfield, IL: Charles C. Thomas.

Tomlinson, C. A., Callahan, C. M., Moon, T. R., Tomchin, E. M., LItaliarum, M., Imbeau, M., Hunsaker, S. L., & Eiss, N. (1995). Preservice tognier prepaRapporton in meeting il needs di ginsiemeed Italia oilr academically diverse studenti. Stons, CT: Nazionale Ricerca Center on il Ginsiemeed Italia Talented.

Tomlinson, C. A., Callahan, C. M., Tomchin, E. M., Eiss, N., Imbeau, M., & LItaliarum, M. (1997). Becoming arcohitects di communitàies di learning: Addressing academic diversity in contemporary classrooms. Exceptional Children, 63, 269-282.

ValleItalia, R. J., Gagné, E, Senecal, C., & Pelletier, L. G. (1994). A confronto di il school intrinsic motivaziun Italia perceived competence di ginsiemeed Italia regular studenti. Ginsiemeed Child Quarterly, 38(4), 172-175.

Velazquez, R. (1990). Organizing matematica corsos for il ginsiemeed in Ontario, Canada. Ginsiemeed Child Togiorno, 13(5), 52-54.

Westberg, K. L., Arcohambault, F. X., Dobyns, S. M., & Salvin, T. J. (1993). An osservazioneal study di instructional Italia curricular practices usod con ginsiemeed Italia talented studenti in regular classrooms (Ricerca Monografico No. 93104). Storrs: Nazionale Ricerca Center on il Ginsiemeed Italia Talented, University di Connecticut.

MAILU Project
46 Makedonitissas Avenue, P.O.Box 24005, CY1700, Nicosia, Cipro
Tel. +357-22841555, Fax. +357-22352059
www.mailu.org , makrides.g@intercollege.ac.cy