

## Il concetto di “relazione” nel linguaggio algebrico con riferimenti agli aspetti morfologici della lingua araba.

Munder A Mohamed

Faculty of Education, University of Garyounis (Benghazi, Libya)

PhD Student in Mathematics Education, Department of Mathematics and Computer Science, University of Palermo.

E-mail: [mother\\_math@yahoo.it](mailto:mother_math@yahoo.it)

**Abstract** L’obiettivo del presente lavoro quello di analizzare le relazioni esistenti tra Lingua Araba scritta e Linguaggi Matematici. L’analisi epistemologica e storico-epistemologica si avvarrà di studi già fatti in questo ambito (Rashed R., 2002) (Yakut .M.S., 1999). In particolare l’analisi sarà orientata alla morfologia della lingua e agli eventuali collegamenti con il concetto di relazione. Questo concetto verrà interpretato nell’equilibrio morfologico (elm al sarf) e nel concetto di funzione (parola-peso). Questo lavoro è di preparazione a lavori sperimentali riguardanti la comparazione dei processi di insegnamento/apprendimento delle Matematiche nei paesi di lingua araba e di lingua neo-latina. Pertanto i concetti di uguaglianza e similitudine saranno analizzati nel corso di questa analisi epistemologica.

### Introduzione

Alcuni credono che vi sia una divergenza tra la matematica e la costruzione della lingua. Questa divergenza nasce dal fatto che la matematica generalmente si occupa di simboli e di astrazione mentre la lingua si occupa di cose concrete. Questa divergenza proviene dalla inesistente collaborazione tra queste discipline. E come se ognuno di loro si comportasse come una squadra di atleti nella quale ognuno lavora in modo isolato dall’altro.

Credo che ci sia una stretta relazione tra la matematica e la lingua e che questa relazione si rifletta sui meccanismi del pensiero, emotivamente e volontariamente. Non è possibile analizzare qualsiasi immagine o idea del nostro pensiero o caratteristiche ad esso collegate senza l’uso della parola, che è uno strumento della lingua naturale, o senza l’uso dei simboli che sono uno strumento dei matematici.

Allora la lingua naturale rappresenta il fondamento di base per i processi di vari tipi di conoscenza compreso quella scientifica. Non è un caso che in tutti i trattati di Storia delle Scienze il primo capitolo è dedicato allo studio della lingua naturale (Ad esempio: Needham, ....; Storia della Scienza, ...).

La seguente tabella è stata presa, nella sua parte iniziale, da Rashed R., 2002.

### 1.0 L’alfabeto arabo

L’alfabeto arabo è composto da 28 lettere che, come quelle dell’alfabeto latino, derivano da quello fenicio: mentre però i latini (dopo i greci) hanno deciso di scrivere da sinistra verso destra, gli arabi scrivono da destra verso sinistra.

Le lettere si legano alla lettera precedente e a quella seguente, cioè sia verso destra sia verso sinistra, tranne sei che legano solo alla lettera che le precede, cioè verso destra. Non esiste distinzione fra maiuscole e minuscole e fra scrittura corsiva e stampatello, quindi le lettere vengono scritte in modo analogo nei giornali, nei libri e nella scrittura a mano.<sup>1</sup>

L’alfabeto arabo si chiama *Abjadiyyah*, è un nome che proviene dall’arabo antico. Le uniche modifiche riguardano l’ordine delle lettere. Con l’espressione “vecchio ordine dell’alfabeto” intendiamo esattamente questo.

Il vecchio ordine dell’alfabeto arabo corrisponde all’alfabeto ebraico. La corrispondenza con l’alfabeto ebraico è sino alla lettera (ת) e in arabo si aggiungono le lettere (ث, خ, ذ, ض, ظ, غ).

In particolare queste lettere avevano un valore numerico: abbiamo una **aritmetica delle frasi** (حساب الجُمَل), ad ogni lettera corrisponde un certo numero, come nella tabella 1:

---

<sup>1</sup> Claudia Maria Tresso “Lingua Araba Contemporanea” 1997 p. 1

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص	ق	
20	30	40	50	60	70	80	90	100	
ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ	
200	300	400	500	600	700	800	900	1000	

**Tabella 1 Valore numerico dell'alfabeto Abjadiyyah**

### 1.1 Il sistema numerico dell'alfabeto Abjadiyyah

Prima dell'introduzione dei numeri arabi, i numeri dell'alfabeto *Abjadiyyah* sono stati utilizzati per scopi matematici. In arabo moderno, sono usati principalmente per la numerazione ordinale, l'ordine degli elenchi e gli indicatori ordinali di informazione. In Italiano e nelle lingue neo-latine gli indicatori ordinali di informazione a volte sono denominati "A", "B" e "C", in arabo, sono "أ", "ب", "ج", che ovviamente non sono le prime tre lettere dell'ordine dell'alfabeto arabo moderno. I numeri *Abjadiyyah* sono un sistema numerico decimale in cui le 28 lettere dell'alfabeto arabo vengono dal sistema *Abjadiyyah*. La prima lettera dell'alfabeto arabo, *alif*, è usato per rappresentare 1, la seconda lettera, *bā*, è utilizzato per rappresentare 2, ecc... Singole lettere rappresentano anche 10 e 100: l' *yā* per 10, il *kāf* per 20 ed il *qāf* per 100, ecc..

Forma isolata		Iniziale	Intermedia	Finale	Forma isolata		Iniziale	Intermedia	Finale
أ	Alef	...ا	...أ	...أ	ض	tā'	...ض	...ض	...ض
ب	Bā	...ب	...ب	...ب	ط	dād	...ط	...ط	...ط
ت	Tā	...ت	...ت	...ت	ظ	zā	...ظ	...ظ	...ظ
ث	tā	...ث	...ث	...ث	ع	ayn	...ع	...ع	...ع
ج	ġīm	...ج	...ج	...ج	غ	ġayn	...غ	...غ	...غ
ح	hā	...ح	...ح	...ح	ف	fā	...ف	...ف	...ف
خ	hā	...خ	...خ	...خ	ق	qāf	...ق	...ق	...ق
د	dāl	...د	...د	...د	ك	kāf	...ك	...ك	...ك
ذ	dāl	...ذ	...ذ	...ذ	ل	lām	...ل	...ل	...ل
ر	rā	...ر	...ر	...ر	م	mīm	...م	...م	...م
ز	zāī	...ز	...ز	...ز	ن	nūn	...ن	...ن	...ن
س	sīn	...س	...س	...س	هـ	hā	...هـ	...هـ	...هـ
ش	šīn	...ش	...ش	...ش	و	wāw	...و	...و	...و
ص	ṣād	...ص	...ص	...ص	ي	yā	...ي	...ي	...ي

**Tabella 2. L'alfabeto arabo moderno**

### 2.0 La Scienza della Morfologia della lingua araba ( علم الصرف Elm al SarF)

La Scienza della Morfologia della lingua araba classica si occupa di come costruire le singole parole, di come costruire i verbi, i tempi nel passato, nel presente e nel futuro.

La morfologia è la parte della grammatica o della linguistica che ha per oggetto lo studio della struttura grammaticale delle parole. Ne stabilisce la classificazione e l'appartenenza a determinate categorie come il nome, il pronome, il verbo, l'aggettivo e le forme della flessione, come la coniugazione per i verbi e la declinazione per i nomi. La morfologia nella lingua araba rappresenta l'elemento portante per la sua comprensione strutturale. Inoltre indaga i meccanismi secondo i quali le unità portatrici di significati semplici si organizzano in significati più complessi: le parole. Secondo la grammatica tradizionale, la morfologia studia la forma delle parole, come la flessione e la derivazione, mentre secondo la linguistica moderna essa studia la struttura della parola e descrive le varie forme che le parole assumono a seconda delle categorie di numero, di genere, di modo, di tempo, di persona.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Yakut .M.S., “Morfologia della lingua araba e l'applicazione nel Sacro Corano” 1999 p.5

Di conseguenza si costruiscono le singole parole, ed in particolare i verbi, i tempi nel passato, presente e futuro, compreso il nome. Per cui dalle regole di scrittura della lingua araba possiamo dedurre tutte queste informazioni strutturali.

Ad esempio, data la parola della radice كتب ktb (scrivere) si dimostra come si costruiscono le parole da questa radice. In questa tabella vediamo alcune parole che derivano dalla sua radice. La radice, come spiegheremo più avanti è l'elemento fondante.

kataba	Ha scritto	كَتَبَ
kitabun	Libro	كِتَابٌ
maktabun	Ufficio	مَكْتَبٌ
kattaba	Ha fatto scrivere a qualcuno	كَتَبَ
kateb	Scrittore	كَاتِبٌ

**Tabella 3. Le parole che derivano dalla radice كتب ktb. Si può notare che vengono derivati anche verbi.**

### 2.1 L'equilibrio morfologico nella lingua araba ( ميزان الصرف MIZAN AL SARF )

Nella lingua araba il maggior numero di parole é composto da tre caratteri. Esistono anche parole di quattro o più caratteri. Esistono anche parole di due caratteri ma sono poche e sono parole irregolari. Visto che la maggioranza delle parole arabe ha tre caratteri il ragionamento che faremo prenderà esempi di parole con tre caratteri. Un concetto molto importante è quello di equilibrio morfologico. Spieghiamo con un esempio il carattere arabo.

L'equilibrio morfologico composto da tre caratteri è alla base della nostra bilancia di equilibrio. Per le parole di due caratteri si cerca sempre la sua radice di riferimento di 3 caratteri e poi se ne toglie una in funzione dell'equilibrio morfologico determinato dal peso<sup>3</sup>. Per le parole di più di tre caratteri ci si riferirà sempre alla radice di riferimento di 3 caratteri per poi aggiungere dei caratteri bilanciando l'equilibrio morfologico. Questo sarà trattato successivamente con degli esempi.

Una ragione del fatto che l'equilibrio morfologico contiene tre caratteri base e non quattro o più risiede nel fatto che è più facile aggiungere una lettera che toglierla, sempre per la determinazione del peso della parola. Cercheremo di far vedere quale lo scopo di questo concetto.

### 2.2 Le caratteristiche dell'equilibrio morfologico della lingua araba

1. Se abbiamo una parola nuova inserita dal dialetto o da lingue straniere rispetto all'arabo questa potrà essere inserita dal parlato allo scritto senza creare problemi alla struttura morfologica dell'arabo. Rappresenta quindi una sorta di protezione della struttura della scrittura e quindi della lingua.
2. Permette una integrazione della parola. Conoscere le lettere che vengono eliminati dalla radice della parola
3. Opera una distinzione tra i sostantivi sia che siano di tre o di quattro o di cinque caratteri e lo stesso vale per i verbi.

### 2.3 Il meccanismo del peso morfologico

È una misura verbale, che i linguisti accettano di assumere la parola “fare” ( فَعَلَ . فَعَلَ ) come un equilibrio morfologico per le parole arabe.

Il maggior numero delle parole arabe ha la radice di tre caratteri, in questo esempio della parola “fare” ( فَعَلَ ) , che si riferisce ad un'azione sia al passato che al presente o al futuro, dovrebbe risultare più evidente la struttura. Questo esempio paradigmatico ci indica come tutte le parole di tre caratteri si misurano in questo modo. La prima lettera della radice della parola corrisponde simmetricamente al primo carattere del peso e cioè ( فَ ), la seconda lettera corrisponde a ( عَ ) e la terza con la ( لَ ).<sup>4</sup>

Si prendano in considerazione i movimenti della parola, cioè il peso della parola avrebbe preso gli stessi movimenti della parola stessa.

<sup>3</sup> La nozione di “peso” che è fondante per tutto questo ragionamento sarà introdotta successivamente. E' un riferimento legato alla radice morfologica della parola ed alla sua azione.

<sup>4</sup> Yakut .M.S., “Morfologia della lingua araba e l'applicazione nel Sacro Corano” 1999 p.43

Cosa sono i movimenti ?

### 3.0 Il concetto di “movimenti oppure le vocale” nella scrittura araba

I movimenti vengono chiamati in arabo **ḥarakāt**. Il termine **ḥarakāt** (in arabo حركات) sta ad indicare l'uso dei segni diacritici sopra e sotto le consonanti utilizzati per assicurare una corretta vocalizzazione delle parole, che altrimenti potrebbero essere di dubbia interpretazione. Di per sé la parola significa 'movimento'<sup>5</sup>.

#### 3.1 I tipi dei movimenti

I movimenti servono per aiutare una corretta pronuncia della lettera, dove la voce è seguita dal suono breve. I movimenti si possono classificare in:

1. Fatha ( in arabo فتحة ) ◌ La fatha (letteralmente apertura) è il nome che si dà alla vocale breve “ā” si disegna come un trattino al di sopra della lettera araba, ES: دَ (dā).
2. Kasra ( in arabo كسره ) ◌ La kasra è il nome che viene dato alla vocale breve “i” e si disegna come un trattino al di sotto della lettera. Es: دِ (dī).
3. Damma ( in arabo ضمه ) ◌ La damma (letteralmente riunione, con allusione alla chiusura e all’arrotondamento delle labbra) è il nome che viene dato alla vocale breve “u” si disegna come un trattino chiudendosi con un piccolo occhiello al di sopra della lettera araba. ES: دُ (du).
4. Sukun ( in arabo سكون ) ◌ Il Sukun è un segno ortografico sopra una lettera araba: indica che la consonante è muta, non è vocalizzata. è disegnato come un cerchio al di sopra delle lettere arabe ES: دْ (da)

Esempio 1:-

La traduzione della parola "nome" (si può traslitterare con ism) si scrive اِسْم in cui è evidente il segno Sukun sopra la consonante س (Sīn, la "s" in ism) che non è vocalizzata perché seguita da un'altra consonante.

Alcuni movimenti mettono in evidenza la pronuncia delle doppie nel parlato rispetto alla scrittura.

1. Shadda / ciadda ( in arabo شدة ) ◌ Shadda è un segno ortografico sopra una consonante araba, indica che la consonante raddoppia. E' disegnato come una "w" a curve, o meglio, in maniera simile alla lettera greca "ω". Ad esempio, la traduzione della parola "gatto" si scrive هِرَّة (hirrah, la prima h come nell'inglese "house", la seconda appena aspirata) in cui è evidente la Shadda, sopra la singola consonante ر (rā', la "r" in hirrah) che viene raddoppiata nella lettura e non nella scrittura.
2. Anche altri movimenti vengono rappresentati con la Shadda attraverso la pronuncia raddoppiata della lettera, ma questo dipende dal movimento che viene usato. Ad esempio,  
(Fatha , Damma , Kasra) ◌ ◌ ◌

Movimenti che indicano la lettera ( ن ن ) (in arabo, Tanwin) sono movimenti si trovano al di sopra o al di sotto della consonante araba:

1. Tanwin con Fatha si scrive con due trattini insieme sopra la lettera ◌◌.
2. Tanwin con Kasra si scrive con due trattini sotto la lettera ◌◌.
3. Tanwin con Damma si scrive con due Damma sopra la lettera ◌◌.

Quindi questi sono tutti i movimenti possibili. Essi stabiliscono certi modi di pronuncia dello stesso carattere. Cioè quando abbiamo due o tre parole con stessa scrittura ma con movimenti diversi abbiamo una interpretazione differente.

Esempio 2 :-

Le parole ( قَلَمٌ و قَلَمٌ ) hanno un'unica scrittura ma con due significati diversi: sono rispettivamente khallam e Khalam cioè tagliare e penna .

Questo esempio sarà ripreso quando si cercherà di introdurre i concetti di uguaglianza e somiglianza.

---

<sup>5</sup> “I movimenti” sono stati introdotti da Al-Hajjaj ibn Yusuf per assicurare la corretta lettura del Corano, e anche per aiutare quelli che usano la lingua araba come seconda lingua.

**Ibn Yusuf al-Hajjaj** (661-714), il più importante generale arabo al servizio dei primi califfi della prima epoca Omayyade.

		I movimenti										I movimenti							
Le lettere		Fatha		Kasra		Damma		Sukun		Le lettere		Fatha		Kasra		Damma		Sukun	
أ	A-lef	أ	A ā	إ	Ai	أ	Au	أ	Aa	ض	tā	ض	thā	ض	thi	ض	thu	ض	th a
ب	Bā	ب	B ā	ب	Bi	ب	Bu	ب	Ba	ط	dād	ط	ttā	ط	tti	ط	ttu	ط	tta
ت	Tā	ت	Tā	ت	Ti	ت	Tu	ت	Ta	ظ	zā	ظ	zā	ظ	zi	ظ	zu	ظ	za
ث	tā	ث	tā	ث	ti	ث	tu	ث	ta	ع	ayn	ع	aā	ع	ai	ع	au	ع	aa
ج	ġīm	ج	ġā	ج	ġi	ج	ġu	ج	ġa	غ	ġay n	غ	ġā	غ	ġi	غ	ġu	غ	ġa
ح	hā	ح	hā	ح	hi	ح	hu	ح	ha	ف	fā	ف	fā	ف	fi	ف	fu	ف	fa
خ	hā	خ	hā	خ	hi	خ	hu	خ	ha	ق	qāf	ق	qā	ق	qi	ق	qu	ق	qa
د	dāl	د	dā	د	di	د	du	د	da	ك	kāf	ك	kā	ك	ki	ك	ku	ك	ka
ذ	dāl	ذ	dā	ذ	di	ذ	du	ذ	da	ل	lām	ل	lā	ل	li	ل	lu	ل	la
ر	rā	ر	rā	ر	ri	ر	ru	ر	ra	م	mīm	م	mā	م	mi	م	mu	م	ma
ز	zāī	ز	zā	ز	zi	ز	zu	ز	za	ن	nūn	ن	nā	ن	ni	ن	nu	ن	na
س	sīn	س	sā	س	si	س	su	س	sa	ه	hā	ه	hā	ه	hi	ه	hu	ه	ha
ش	šīn	ش	šā	ش	ši	ش	šu	ش	ša	و	wā w	و	wā	و	wi	و	wu	و	wa
ص	šād	ص	ss ā	ص	ssi	ص	ssu	ص	ssa	ي	yā	ي	yā	ي	yi	ي	yu	ي	ya

**Tabella 4 I movimenti oppure le vocale per ogni lettera dell'alfabeto arabo**

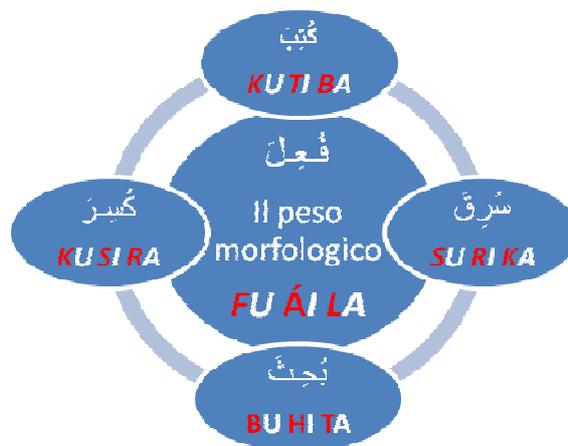
#### 4. I pesi morfologici delle parole

Il peso è diverso tra le parole, dipende dal numero dei caratteri della parola, ma dipende anche dalla radice della parola.

##### 4.1 Il peso delle parole con tre caratteri.

Prendiamo in considerazione le parole che hanno la stessa struttura di peso e stessi movimenti e che compiono la stessa azione. Questo ci permette di poter pensare a questo gruppo di parole legate strutturalmente dal peso e che si evocano tra di loro. Con un linguaggio matematico possiamo parlare di classe di equivalenza, come sarà meglio spiegato nel seguente paragrafo.

Esempio 3 :-



**Figura 1. Alcune parole con stesso peso e con gli stessi movimenti**

Le parole che hanno movimenti diversi non hanno un peso completamente uguale ma l'azione è diversa. Possiamo dire che saranno simili in quanto contengono la stessa quantità di caratteri. Ma parole con gli stessi caratteri possono avere peso diverso anche in relazione a chi fa l'azione e/o il tempo in cui questa azione è stata svolta.

Le parole		Il peso	
كُتِبَ	KU TI BA	فَعِلُ	FU AILA
شَرِبَ	SHA RI BA	فَعِلُ	FA AILA

**Tabella 5. Peso di parole con diversi movimenti**

#### 4.2 *Peso di parole che non sono di tre caratteri: che hanno procedure diverse per assegnare il peso*

Per costruire il peso tutti i caratteri della parola sono indispensabili, cioè parlando di radice di parola contiene più di tre lettere, quindi se togliessi una lettera qualsiasi, la parola non avrebbe senso. Consideriamo di voler trovare il peso di una parola di quattro caratteri. La procedura del peso è la corrispondenza della prima lettera con ( F ف ) e la seconda con ( A ع ), la terza con ( L ل ), rimane quindi la quarta lettera senza corrispondenza perché sappiamo che il peso stato stabilito è di tre lettere solo. In questo caso ripetiamo l'ultima lettera del peso ( L ل ).<sup>6</sup> Questo ci consente di non aggiungere nulla e di far accordare il peso.

Esempio 4 :-

ZALZALA ( زَلْزَلَ agitato ) il peso è → FA ÁL ALA ( فَعَلَّأ )

Quando alcuni caratteri della parola non sono indispensabili, cioè se eliminassi uno dei caratteri qualsiasi della tabella successiva, la parola avrebbe sempre un senso. La seguente tabella riporta i dieci caratteri chiamati d'aumento e che hanno la funzione di far rimanere invariato il senso della parola quando vengono inseriti nelle parole di qualsiasi quantità di lettere.<sup>7</sup>

م	ي	ل	س	ت	و	ء	ا	ن	د
M	I	L	S	T	W	Á	A	N	H

**Tabella 6. Lettere d'aumento**

Esempio 6 :-

ASTAKRAGA ( اسْتَخْرَجَ estrarre ) il peso è → ASTAF Á ALA ( اسْتَفَعَلَّ )

Le lettere con colore blu sono le lettere d'aumento, le lettere con il colore nero sono i movimenti e le lettere con il colore rosso rappresentano la radice della parola.

Se esiste una parola di due caratteri, che ha un senso ovviamente, a questo punto cerchiamo la radice della parola stessa. Dalla radice vediamo quale era la lettera mancante e poi andiamo a scrivere il peso. Togliamo poi dal peso la lettera corrispondente alla radice della parola.<sup>8</sup>

Esempio 7 :-

L'imperativo del verbo ( tornare عاد ÁAD ) è ( ÁUD عُدُ torna ) dove U è uno dei movimenti. Allora il peso della parola ( عاد ÁAD ) il peso è → ( FÁL فعل ), La parola ( ÁUD عُدُ ) è derivata dalla radice ( عاد ÁAD

<sup>6</sup> Yakut .M.S., “Morfologia della lingua araba e l'applicazione nel Sacro Corano” 1999 p.44

<sup>7</sup> Yakut .M.S., “Morfologia della lingua araba e l'applicazione nel Sacro Corano” 1999 p.45

<sup>8</sup> Yakut .M.S., “Morfologia della lingua araba e l'applicazione nel Sacro Corano” 1999 p.48

), quindi il peso sarà ( أَوْدُ عُدُّ )  $\xrightarrow{\text{il peso è}}$  ( فُلُّ ), qui abbiamo tolto dal peso la lettere ( أَ ع ). Poiché non esiste nella parola o piuttosto nella radice la lettera che le corrisponde.

## 5.0 Il concetto di “relazione” nella morfologia della lingua araba e nella matematica

### 5.1 La “Relazione” in Matematica e nella Morfologia della lingua araba.

Si considerino due insiemi  $A, B$ , dove  $A$  è l’insieme delle parole e  $B$  l’insieme di tutto il peso possibile. Secondo l’equilibrio morfologico non esiste nessuna parola senza peso, ma non esiste una parola con due pesi diversi. Per quanto riguarda i pesi, ogni parola avrà un peso, nel senso che ogni peso viene costruito dalla parola stessa. Non esiste quindi un peso isolato dalla parola. Ogni parola è strettamente vincolato al suo peso e viceversa. Ma possiamo anche dire che ogni peso ha una certa azione e questa azione è collegata ad almeno una parola.

Quindi si può definire questo collegamento di azione tra le parole e pesi come una **relazione binaria**. Nel linguaggio matematico si formalizza una **relazione o corrispondenza** tra due insiemi. Più formalmente chiameremo **relazione binaria** tra gli insiemi  $A, B$  l’insieme delle coppie aventi il primo componente in  $X$  il secondo in  $Y$ .

Un insieme  $R$  sottoinsieme del prodotto cartesiano  $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$  (che è l’insieme di tutte le coppie ordinate possibili) determinerà la relazione binaria.<sup>9</sup>

Per le relazioni binarie è molto comune usare notazioni  $xRy$  per esprimere il fatto che la coppia  $(x, y)$  appartiene ad  $R$ , cioè per individuare i singoli elementi dell’insieme prodotto cartesiano.

Per indicare ad esempio che il numero reale  $x$  sia minore del numero reale  $y$ , e si scrive scrivere  $x < y$ . Per ricondursi alla definizione di relazione si dovrebbe scrivere  $(x, y) \in I$ , dove  $I$  è la nostra relazione “... essere minore di ...” che individua uno dei possibili sottoinsiemi del prodotto cartesiano  $R \times R$  formato dalle coppie ordinate dove il primo elemento è minore del secondo ( $<$ ).

Quindi definiamo adesso la relazione rispetto al nostro problema morfologico.  $R(x, y) =$  “ $x$  è la parola che ha come peso  $y$ ”, sarà identificata con l’insieme di tutte le coppie dove c’è l’equilibrio morfologico avente come primo membro una parola e come seconda membro il corrispondente peso. Allora considero  $\Omega$  come l’equilibrio morfologico definito dalla suddetta relazione  $R$  e si avrà  $R(x, y) = x\Omega y$ .

$R(x, y) = x\Omega y$ .	DaHaBa $\xrightarrow{\text{il peso è}}$ FaAaLa	SuHiBa $\xrightarrow{\text{il peso è}}$ FuAiLa
KuTiBa $\xrightarrow{\text{il peso è}}$ FuAiLa		$R$
KaSaRa $\xrightarrow{\text{il peso è}}$ FaAaLa	$R$	

### 5.2 Il concetto di funzione

Un sottoinsieme del prodotto cartesiano  $A \times B$  è una particolare **relazione binaria**. Una funzione  $f: X \rightarrow Y$  tra due insiemi  $X \neq Y$  non vuoti, è una legge che a ogni elemento  $x \in X$  associa uno ad un solo elemento  $y = f(x)$  di  $Y$ . L’insieme  $X$  è il dominio della funzione, mentre l’insieme  $Y$  è il codominio. L’elemento  $f(x) \in Y$  che la funzione  $f$  associa all’elemento  $x \in X$  è l’immagine di  $x$  mediante  $f$ . L’immagine della funzione  $f$  è l’insieme delle immagini degli elementi del dominio, ossia è l’insieme  $f(X) = \{f(x) : x \in X\} = Y$ .<sup>10</sup>

Il fatto che  $f$  è una funzione da  $X$  in  $Y$  che associa a  $x$  l’elemento  $f(x)$  si può esprimere con la scrittura:

<sup>9</sup> Emanuele Munarini “ANALISI GIOMETRIA 1” primo edizione 2009 p.3

<sup>10</sup> Emanuele Munarini “ANALISI GIOMETRIA 1” primo edizione; 2009 p.35

$$f: X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto f(x)$$

Riconsideriamo adesso la relazione tra parole e pesi. È una funzione suriettiva?

Una funzione si dice suriettiva, quando l'immagine coincide con il codominio, ovvero quando ogni elemento  $y$  del codominio, sia immagine di almeno un elemento  $x$  del dominio.

Formalmente, una funzione  $f: X \rightarrow Y$  è suriettiva se  $\forall y \in Y, \exists x \in X | f(x) = y$ .

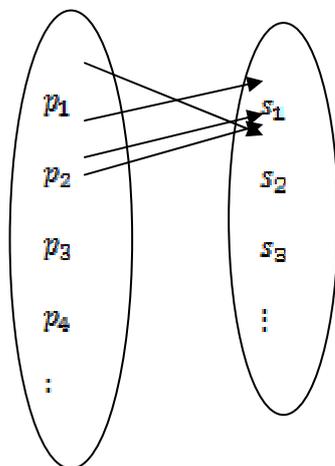
Esempio 6:-

Quindi considero due insiemi non vuoti  $X$  e  $Y$ ; con  $X$  l'insieme di parole  $p_i \in X$  e che  $Y$  è l'insieme dei pesi  $s_i \in Y$ .

Formalmente la funzione  $f: X \rightarrow Y$  è suriettiva perché  $\forall p \in Y, \exists s \in X | f(p) = s$ .

La seguente figura, già ampiamente discussa nel paragrafo precedente da un punto di vista linguistico, mette in evidenza il carattere di funzione suriettiva.

dove  $p_i = \text{parole}$  e  $s_i = \text{pesi}$



## 6. Uguaglianza in che senso? Ovvero una organizzazione della Relazione di Uguaglianza in Matematica con i suoi differenti significati.

Che cosa significa la parola uguaglianza?

E che senso ha il simbolo = nella pratica matematica?

Quali sono i suoi significati per l'insegnante e per l'allievo?

Nel linguaggio matematico l'uguaglianza generalmente riferita a quantità o riguarda equivalenza tra espressioni matematiche.

Più formalmente per uguaglianza / identità, si intende una relazione, di solito definita col simbolo =, che verifichi i seguenti assiomi:

$\forall x x = x$  *assioma di riflessività*

$\forall x, y x = y \rightarrow (P(x) \leftrightarrow P(y))$  *schema di assiomi*

L'assioma di riflessività e lo schema degli assiomi caratterizzano formalmente l'idea intuitiva di uguaglianza. Il primo assioma afferma che ogni oggetto uguale a se stesso, mentre il secondo afferma che due oggetti uguali verificano le stesse proprietà. In particolare lo schema degli assiomi afferma che due oggetti uguali sono essenzialmente la stessa cosa o si comportano allo stesso modo.

Prendiamo adesso in considerazione il concetto di equivalenza, e quali possano essere le sue relazioni con l'uguaglianza.

Sebbene i concetti di uguaglianza ed equivalenza vengano spesso utilizzati come sinonimi, in realtà esiste

una sottile ma profonda differenza nel significato e nella valenza dei due termini. Il termine eguaglianza, come detto prima è una identità assoluta fra le oggetti. Il termine equivalente, invece, è una parola composta da *aequus* e *valere*, termine latino che significa avere forza, valore, potenza, o potere. Il termine equivalenza significa quindi avere uguale forza, uguale valore, uguale potenza e, pertanto, relativo alle potenzialità che esso possa esprimere.

*You know from your early study of fractions that each fraction has many equivalent forms .  
for example,*

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{-1}{-2}, \frac{-3}{-6}, \frac{3}{6}, \frac{15}{30}, \dots$ , and so on

*are all different ways to represent the same number . they may look different ; they may be called different names ; but they are all equal. the idea of grouping together things that " look different but are really the same " is the central idea of equivalence relations.<sup>11</sup>*

Nel caso particolare della lingua araba vi un significato implicito di uguaglianza che viene trasportato dalla relazione di equivalenza già discussa nel paragrafo precedente, ad esempio la parola  $x_1$  ha lo stesso peso di  $x_2$ . I significati non intervengono in questo discorso, la relazione è di tipo strutturale per la lingua.

Questo tipo di concezione di uguaglianza portata dalla lingua scritta potrebbe avere delle implicazioni nei fenomeni di insegnamento/apprendimento delle matematiche. Non sappiamo se questo sia stato anche un facilitatore dello sviluppo storico dell'algebra nel mondo arabo dal 80d.c. al 120d.c.

Non sappiamo neanche sino a che punto questo possa essere stato un ostacolo alla nascita dell'algebra simbolica ad esempio.

Potrebbe essere un ostacolo epistemologico da analizzare con molta attenzione.

Esempio7:-

La parola ( سيذهب *SAIADHB* →  $p_1$  ) ha come radice ( ذهب *DHB* →  $r_1$  ) e la parola ( سيكتب *SAIAKTB* →  $p_2$  ) ha come radice ( كتب *KTB* →  $r_2$  ) quindi il peso è ( سيفعل *SAIAFAL* →  $s$  ), le parole hanno due significati diversi. Ma queste due parole hanno un'azione comune. Quindi l'uguaglianza in questo caso è l'azione. Le parole contengono la stessa quantità di caratteri, l'uguaglianza è tra il peso ed il numero di caratteri.

Adesso prendiamo in considerazione l'uguaglianza come equilibrio morfologico. Due parole possono definire congruenti se hanno la stessa azione peso-carattere, hanno cioè uno stesso processo morfologico .

Considero che le lettere d'aumento *SAIA* =  $\xi$  e *SAIAFAL* →  $s = \xi s_0$

Allora la mia operazione è il peso morfologico , che ci da una uguaglianza implicita o piuttosto una equivalenza tra le parole che hanno un'Intersezione di peso tra di loro.

$$\xi r_1 \xrightarrow{\text{peso}} \xi s_0 \text{ e } \xi r_2 \xrightarrow{\text{peso}} \xi s_0 \text{ quindi } \xi r_1 \equiv \xi r_2$$

### 7.0 La concezione di uguaglianza nella lingua araba e i movimenti portano ad una concezione dinamica di uguaglianza:

Possiamo considerare simile alla concezione di uguaglianza nelle trasformazioni geometriche?

In sostanza se considero una insieme di parole con diversi interpretazione ovviamente pero hanno una unica forma , Tenendo presente l'intercettazione del concetto dei movimenti (le vocale) nella scrittura araba, se abbiamo due parole con la stessa forma, ma con diversi movimenti che ci darà un'interpretazione diversa, allora queste due parole sono definiti come simili.

cosa la somiglianza o la similitudine ?

la similitudini

Due oggetti geometrici sono chiamati simili se entrambi hanno la stessa forma. Più precisamente, uno congruente al risultato di una scalatura uniforme (ampliamento o restringimento) degli altri. Corrispondente lati dei poligoni simili sono in proporzione, e angoli corrispondenti di poligoni simili hanno la stessa misura. Si

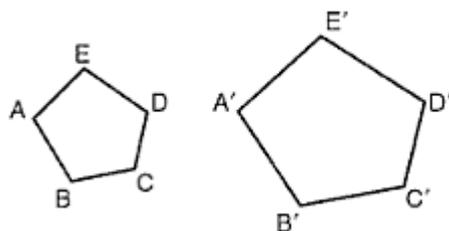
<sup>11</sup> Suasanna S .Epp Discrete Mathematics With Applications third edition p.594

può essere ottenuta dalle altre da uniformemente “stretching” la stessa quantità su tutte le direzioni, possibilmente con la rotazione e la riflessione supplementare, vale a dire, entrambi hanno la stessa forma, o si ha la stessa forma l'immagine speculare dell'altro. Per esempio, tutti gli ambienti sono simili tra loro, tutte le piazze sono simili gli uni agli altri, e tutti i triangoli equilateri sono simili tra loro. D'altra parte, le ellissi non sono tutti simili tra loro, né sono iperboli tutti simili tra loro. Se due angoli di un triangolo hanno misure uguali alle misure di due angoli di un altro triangolo, allora i triangoli sono simili.



In particolare:

Due figure geometriche  $F$  e  $F'$  che hanno la stessa forma ma in generale diversa estensione si dicono simili e si scrive  $F \approx F'$ . Considerando le due figure poligonali  $ABCDE$  e  $A'B'C'D'E'$  si osserva che esse sono simili: in particolare i lati dell'una sono la metà dei lati dell'altro gli angoli omonimi, a meno degli apici, sono congruenti.<sup>12</sup>



Due poligoni  $F$  e  $F'$  si dicono simili se esiste tra loro una corrispondenza biunivoca nella quale gli angoli corrispondenti sono congruenti e si mantiene costante il rapporto fra i lati corrispondenti.

È evidente nella figura seguente, la similitudine di forma delle due parole con di interpretazione diversi ovviamente. Quindi se mettiamo le stessi movimenti su due forme simili avremmo un peso unico, quindi ci dà la parola stessa definita come uguaglianza/identità fra la parola e di assioma di riflessività.



Figura 2 la similitudine nella lingua araba definita nel concetto dei Movimenti

<sup>12</sup> Collama Test Militari Volontario in Forma Prefissata quadriennale seconda edizione p.78

### Riferimenti Bibliografici

- \_ Brousseau G., Theory of didactical situations in mathematics . 1970-1990, (304 pages) traduction M. Cooper, N. Balacheff, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield. (kluwer Academic Publishers), 1997.
- \_ Claudia Maria Tresso “Lingua Araba Contemporanea” copyright © Ulrico Hoepli Editore S.P.A 1997.
- \_ Collama Test Militari Volontario in Forma Prefissata quadriennale seconda edizione, copyright © Alpha Test S.r.l. 2007
- \_ Di Paula B., Some experiment observations about the passage from the arithmetical thought to the algebraic thought, Podebrady, Czech Republic, 2004 <http://www.pedf.cuni.cz/kmdm/yerme/index.html>
- \_ Djebber A., storia della scienza araba, Scienza e idee, collana diretta da G. Giorello, Cortina Editore.2001.
- \_ Emanuele Munarini “ ANALISI e GIOMETRIA 1 “ primo edizione; stampa confezione L.E.G.O. SpA-Stabilimento di Lavis (TN) Ottobre 2009.
- \_ Favilli F ., Teaching Geometry in Somalia : Linguistic and Cultural Aspects, Proceedings of the International Congress on ethno Mathematics CD-ROM Granada, 1998.
- \_ Favilli, F ., Oliveras , M.L. and Cèsar, M., ”Bridging Mathematical Knowledge from Different cultures: proposals for International and Interdisciplinary Curriculum “ , in N. A. Pateman, B.j. Dougherty &J. Ziliox (eds.), PME27Proceedings (vol. 2,pp.365\_372). Honolulu, Hi: University of Hawaii,2003.
- \_ Favilli, F . and Tintori, S., “Intercultural mathematics education: comments about a didactical proposal” ,in Proceedings of ICME 10 .[[http://www.cuni-organisers.dk/dg15/DG15\\_FF&ST\\_final\\_ed.pdf](http://www.cuni-organisers.dk/dg15/DG15_FF&ST_final_ed.pdf) ],2004.
- \_ Gras R., Suzuki E., Guillet F., Spagnolo F., Statistical implicative Analysis, Theory and applications, studies in computational Intelligence, Springer, 2008.
- \_ Needhm J., Scienza e civiltà in Cina, III, la Matematica e le scienze del cielo e della terra, I, Matematica e astronomia, Einaudi, Torino (edizione originale: Science and civilization in China, Cambridge university Press 1959), 1985.
- \_ R. Rashed, La civiltà islamica, Storia delle scienze, Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani S.p.a.,1-941, 2002.
- \_ R. Rashed, L’algebra e linguistica. Gli inizi dell’analisi combinatoria, La civiltà islamica, Storia delle scienze, Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani S.p.a.,86-93, 2002.
- \_ Spagnolo F., 2000 The role of history of mathematics in research in mathematics Education, Proceedig, “The mathematics Education into the 21<sup>st</sup> Century Project”, Amman, Jordan.  
<http://www.math.unipa.it/~G.r.I.m./21project.htm>.
- \_ Spagnolo F., Philosophy of Mathematics Education among east and west , Philosophy of Mathematics Education Journal, ISSN 1465-2978, n.23October 2008.
- \_ Spagnolo F & Di Paolo B., European and Chinese Cognitive styles and their impact on Teaching Mathematics Studies in Computational Intelligence Springer 2010.
- \_ Spagnolo F. & Malisani E., From Arithmetical Thought to Algebraic Thought: the role of the “variable”, Educational studies in Mathematics , 0013-1954 (Print) 1573-0816 (Online),Springer, October 2008.
- \_ Spagnolo F . et alii L’epistemologia Sperimentale della Matematiche , Quaderni di Ricerca in Didattica (Sezione Matematica ), Supplemento n.1 al n. 19, ISSN 1592-4424,  
[http://www.math.unipa.it/~Grim/quaderno19\\_suppl\\_1.htm](http://www.math.unipa.it/~Grim/quaderno19_suppl_1.htm), 2009
- \_ Yakut .M.S., “Morfologia della lingua araba e l'applicazione nel Sacro Corano” Università del Kuwait , Facoltà di Lettere , Biblioteca almanara islamica per Stampa ed editoria 1999.