MAPPA CONCETTUALE E CONVERSAZIONE CLINICA: DUE TECNICHE DELLA DIDATTICA PER CONCETTI NELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

Nucleo di ricerca in didattica della Matematica,
Università di Udine *

25 maggio 2001

Sommario

Lo scopo delle attività descritte in questo lavoro era quello di sperimentare l'efficacia didattica delle mappe concettuali e delle conversazioni cliniche (interviste semi-strutturate) nell'insegnamento della matematica nella scuola elementare e media superiore.

Le mappe sono state usate all'inizio di ogni unità didattica, per progettare il relativo percorso; poi, durante le lezioni, per abbreviarle, introducendo concetti affini, ed alla fine per verificare l'efficacia dell'insegnamento.

Le conversazioni cliniche sono state organizzate sulla base delle relative mappe concettuali, e miravano ad esplicitare le pre-conoscenze degli allievi, a catturare la loro attenzione, a confrontare le loro esperienze e a discutere le loro diverse opinioni sugli argomenti scelti per la nostra ricerca (geometria dello spazio alle elementari, trasformazioni geometriche, vettori, equazioni ed introduzione al metedo assiomatico alle medie superiori). In conclusione, questi strumenti didattici sono risultati molto utili nel promuovere un apprendimento attivo da parte degli studenti ed una maggior consapevolezza del proprio ruolo da parte degli insegnanti.

*Dipartimento di Matematica e Informatica, Viale delle Scienze 206, 33100 Udine, Italia

Abstract

The aim of the activities reported in this paper was to assess the pedagogical effectivness of conceptual maps and semi-structured interviews in teaching mathematics in primary and secondary schools.

The maps were used at first to set up the lessons' path and then in the actual teaching sessions, in order to framing the topics taught, introducing analogue concepts and assessing the effectivness of learning.

The interviews were organized according to the related map and aimed to expose any previous knowledge of the pupils, to catch their attention, to compare their experiences and to discuss their different opinions on the topics covered by our research: space geometry in primary school, geometrical transformations, vectors, equations and introduction to the axiomatic method in secondary school.

Finally, these tools appeared very useful in promoting an active learning from the pupils, as well in developing in the teachers a better consciousness of their role.

Sommaire

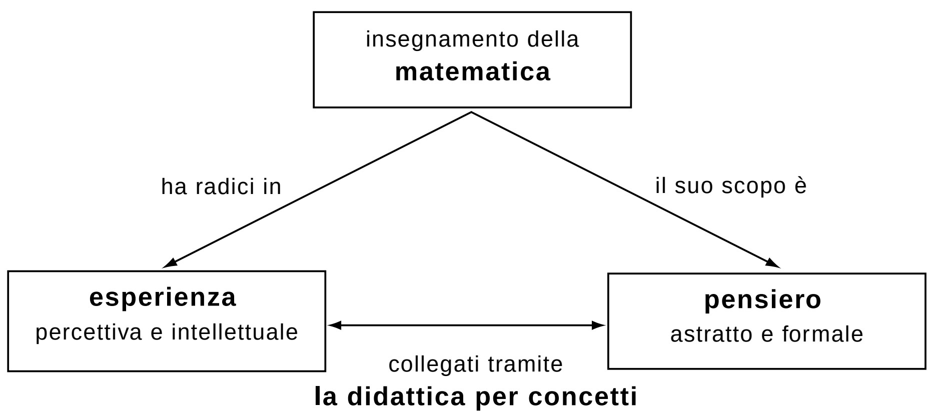
L'objectif des activités décrites dans cet article était d'expérimenter l'efficacité didactique des cartes conceptuelles et des conversations cliniques (interviews semi-structurées) dans l'enseignement de la mathématique à l'école élémentaire et dans l'enseignement secondaire.

Les cartes conceptuelles ont été utilisées par l'enseignant au début de chaque unité didactique, pour en projeter le parcours; puis, durant les leçons, pour introduire avec un gain de temps des concepts contigus, et à la fin pour vérifier l'efficacité de l'enseignement.

Les conversations cliniques ont été organisées à partir des cartes conceptuelles correspondantes et avaient comme objectif d'expliciter les connaissances antérieures des élèves, de capturer leur attention, de comparer leurs expériences et de discuter leurs diverses opinions sur les sujets choisis pour notre recherche (Géométrie dans l'espace dans les classes élémentaires, transformations géométriques, vecteurs, équations et introduction à la méthode axiomatique dans les classes secondaires). En conclusion, ces instruments didactiques ont été très utiles pour promouvoir une étude active de la part des élèves et une majeure conscience du propre rôle de la part des enseignants.

1 Premessa

La matematica presenta sfaccettature molto diverse e comunque interessanti per la formazione di base; tra esse in questo lavoro si privilegia l'educazione al pensiero formale, caratteristico della matematica, tenendo presente che le radici storiche ed epistemologiche di questo pensiero, come della conoscenza in genere, si nutrono dell'esperienza personale sia percettiva che intellettuale dell'uomo. Per un apprendimento significativo e duraturo è quindi necessario collegare i due poli *"esperienza"* e *"pensiero formale"* ([14], [33]). Per questo collegamento il Nucleo di ricerca in didattica della matematica di Udine ha scelto di sperimentare la metodologia della Didattica Per Concetti (DPC), come è stata proposta da E. Damiano, nei suoi testi [9], [10], [11] e nei seminari tenuti presso i Dipartimenti di Matematica dell'Università Cattolica di Brescia ([6]) e di Matematica e Informatica dell'Università di Udine.



In questa relazione, dopo una schematica presentazione della DPC, si commentano i primi due strumenti proposti da questo metodo, la *mappa concettuale* e la *conversazione clinica*, e si descrive come essi sono stati usati nella pratica scolastica di alcune classi elementari e medie superiori. Vengono quindi analizzati vantaggi e difficoltà riscontrati e, alla fine, si producono i protocolli, le descrizioni delle attività svolte in classe e i relativi commenti.

Questo lavoro è da ritenersi frutto della collaborazione di tutti i membri del Nucleo, salvo le relazioni riportate alla fine, dove venga indicato uno specifico autore.

Fanno parte del Nucleo: Maurizio Trombetta (direttore), Evi Azzali (coordinatrice), Marinella Bassi, Sylviane Beltrame, Diana Bitto, Marco Calvani, Giuliana Catanese, Agostino Margari, Silvana Sclippa, Sergio Stella, Giuseppina Trifiletti, Ida Visintin.

2 La didattica per concetti

Per una trattazione della DPC si rimanda il lettore ai lavori di E. Damiano [9], [10], [11], C. Pontecorvo [30], M. Pellerey [29], [31] D. Hawkins [18] e altri. La Guida alla didattica per concetti, a cura di E. Damiano [10], anche se dedicata alla scuola elementare, risulta utile ad insegnanti di ogni livello scolastico, in particolare nella seconda parte, dove si trovano alcuni brani significativi, tratti da vari testi, la cui lettura offre una prima visione d'insieme dei problemi ed uno stimolo al loro approfondimento. Qui ci si limita a riassumere i motivi ed i temi che riguardano piú da vicino questo lavoro.

La DPC si basa su teorie della conoscenza e dell'apprendimento ([2]), diffuse oggi tra i ricercatori ([16], [31]), sviluppate anche sotto la spinta delle esigenze dell'informatica e dell'intelligenza artificiale e propone delle tecniche di insegnamento che ne tengano conto. I principi cardine che la caratterizzano sono:

- il concetto ha una struttura dinamica; in esso sono comprese la definizione formale e le conseguenti proprietà, ma anche esempi e controesempi, collegamenti, analogie, esperienze e quindi emozioni; è qualcosa che evolve e si precisa col procedere dell'esperienza pratica e intellettuale del singolo o del gruppo discente ([19], [27]);

- la conoscenza significativa e duratura è organizzata secondo un modello reticolare, in cui i concetti sono collegati tra loro da relazioni e gerarchie ([2], [26], [28]);

- l'apprendimento è tanto piú stabile quanto piú numerosi sono gli agganci tra i nuovi concetti e le precedenti conoscenze, scolastiche e non ([30], [?]);

- le conoscenze pregresse dello studente hanno spesso radici profonde e sono coerenti con le sue esperienze; esse vanno quindi valorizzate, anche se ingenue ([30], [38]);

- l'allievo è il protagonista del proprio apprendimento (vedi la teoria del costruttivismo in [36]): il compito dell'insegnante è quello di guidarlo in questo percorso, senza sostituirlo.

Quest'ultimo punto è veramente essenziale, com'è dimostrato anche da ricerche sul recupero in matematica ([40], [41]): per ottenere un buon risultato è necessario rendere lo studente corresponsabile del suo apprendimento.

Sono principi sui quali in teoria ci si trova spesso d'accordo, ma dei quali altrettanto spesso non si tiene conto nella didattica effettiva. Ci si accorge di questo per la difficoltà che inizialmente si incontra ad usare le tecniche della DPC e per il cambiamento che la loro introduzione induce nel rapporto tra insegnanti e allievi. Inoltre, il poco tempo disponibile rende difficile lasciare che l'allievo sia protagonista del proprio apprendimento: nasce quindi l'esigenza di sviluppare strategie che consentano di conciliare i tempi curriculari con quelli degli allievi.

Gli strumenti didattici proposti dalla DPC di Damiano sono:

- la *mappa concettuale*, da usare nella preparazione dell'insegnante, per evidenziare i nodi cruciali di un argomento, dando la possibilità di trovare il percorso essenziale, ed eventualmente sfrondare il programma;
- la *conversazione clinica*, o *intervista*, che viene riassunta in una *matrice cognitiva*, con funzioni di indagare sulle pre-conoscenze e sui concetti posseduti dagli allievi;
- il *compito di apprendimento* e la conseguente *rete concettuale*, ovvero il programma didattico di massima, che tiene conto da un lato dei nodi concettuali evidenziati dalla mappa concettuale e, dall'altro, della matrice cognitiva, e che - se necessario - dovrà essere cambiata dopo ogni verifica; la suddivisione in tre blocchi (*esperienza*, *esplicitazione e critica dei risultati*, *sistemazione formale*) assicura uno spazio alla discussione su conoscenze ed esperienze pregresse;
- l'*analisi della lezione*, nella quale si esaminano i *mediatori* e le modalità di raggruppamento usati dall'insegnante: per coinvolgere tutti gli alunni è necessario usare i mediatori dei tipi piú diversi, dall'esperienza diretta ai mediatori logico-formali e alternare le lezioni frontali con lezioni dialogate, attività di gruppo e individuali;
- la *verifica*, ovvero "serie di interventi che accompagnano tutta l'azione di insegnamento"; essa "...è attività di regolazione quando serve ad adattare il percorso progettato, attività consuntiva quando serve a giudicare il risultato" ([10], pag 414).

3 La mappa concettuale

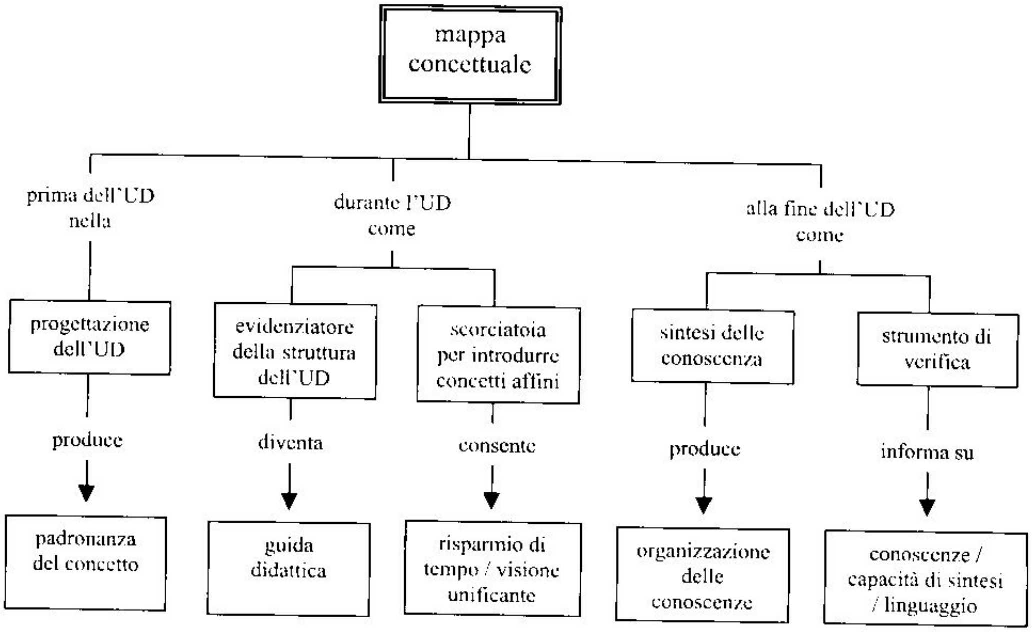
3.1 Caratteristiche

Nella nostra cultura è ormai nota a tutti l'importanza della rappresentazione e dell'organizzazione visiva delle conoscenze: l'evoluzione dell'informatica ha portato allo sviluppo di tecniche rigorose per la costruzione di ipertesti, di programmi e di modelli di dati, alcune delle quali potrebbero costituire mediatori didattici particolarmente motivanti per gli allievi. In questo lavoro ci limitiamo a considerare una sola di queste tecniche di rappresentazione (la mappa concettuale), che, nonostante la sua semplicità, introduce elementi non convenzionali nella pratica didattica.

La *mappa concettuale* è uno schema che ha l'ambizione di rappresentare in forma iconica la conoscenza di un concetto da parte di una persona o di un gruppo, combinando due elementi grafici: *cornici*, per contenere i nomi delle proprietà del concetto e quelli dei concetti ad esso correlati, e *frecce* che collegano le cornici, per rappresentare le relative relazioni, esplicitate anche a parole.

Anche la forma della mappa ha significato e veicola informazioni: ad esempio, può svilupparsi dall'alto verso il basso, passando via via dai concetti piú importanti e generali, fino a quelli di dettaglio, mantenendo alla stessa altezza concetti di eguale importanza. Oppure, la forma della mappa può mettere in evidenza analogie di struttura, rappresentando processi simili con una stessa forma grafica. Si differenzia da altri schemi analoghi per il contenuto cui si riferisce, anche se la sua distinzione da questi non è sempre cosí facile.

Nella DPC la mappa concettuale è la premessa indispensabile alla progettazione di una unità didattica (UD), ma presenta anche altre valenze, che variano a seconda del momento e del modo in cui essa interviene nel processo didattico, come si vede nel seguente schema e nella relazione sulle esperienze in classe.



3.2 La mappa come premessa del percorso didattico

La padronanza del concetto, ottenuta compilando una mappa concettuale, permette di imperniare l'unità didattica sugli elementi essenziali, di dare loro risalto e di avere un criterio di scelta, se necessario, per abbreviare il percorso previsto.

Ad esempio, la mappa sulle trasformazioni geometriche (Sez. 5.3.1), ispirata dal seminario di C.F. Manara ([21]), ha messo in risalto il fatto che i concetti di trasformazione ed uguaglianza possono essere visti come due facce di una stessa medaglia, collegate dal concetto di invariante ([25]). Questi tre concetti sono stati poi oggetto di interessanti interviste agli studenti, rivelatesi premesse significative ai successivi percorsi didattici (Sez. 5.3.2, 5.3.3 e 5.3.4).

È sempre attuale il dibattito su come introdurre e trattare la geometria elementare al biennio delle medie superiori. Un lavoro impegnativo è stato quello di tracciare la mappa concettuale sulla geometria elementare (Sez. 5.6.1), in modo che ciascun insegnante potesse scegliere con maggior consapevolezza tra le possibili alternative di ciascuno degli aspetti della geometria elementare (metodo, linguaggio, contenuto).

Durante la stesura della mappa riguardante il metodo ipotetico-deduttivo (Sez. 5.7.1) è stato vivacissimo e costruttivo il dibattito su *"teorema"* e *'de-*

finizione'", nonché sulla opportunità didattica di distinguere fra definizione, proprietà caratteristiche e descrizione di un oggetto matematico ([15], [20], [22], [23], [24]). Su questi argomenti la ricerca didattica è tuttora in corso.

3.3 La mappa per evidenziare la struttura dell'unità didattica

Alcuni libri di testo iniziano ogni capitolo con una mappa che ne illustra sia i contenuti che le relazioni che li legano; in presenza di argomenti complessi e fortemente articolati può essere utile rendere partecipi gli studenti della costruzione progressiva di questa mappa, consentendo loro di orientarsi costantemente nella teoria. L'insegnante procede nelle spiegazioni, aggiornando periodicamente la mappa alla lavagna o su un cartellone. Tale procedura è stata sperimentata proficuamente nello studio delle isometrie del piano per sottolineare l'importanza delle simmetrie assiali e la generazione a partire da esse di traslazioni, rotazioni, glissosimmetrie.

3.4 La mappa per unificare lo studio di concetti affini

Una mappa elaborata dagli studenti può costituire un punto di partenza naturale e un prezioso alleato per introdurre un concetto affine a quello trattato. Ad esempio, una mappa sul concetto di *"equazione"*, perfezionata dagli studenti dopo un lavoro in gruppo e riprodotta con le giuste dimensioni (e colori!) su un cartellone appeso in classe, ha consentito una facile introduzione del concetto di *"disequazione"* (Sez. 5.5.1).

3.5 La mappa come sintesi e organizzazione della conoscenza

Alla fine di un'unità didattica che presenti concetti numerosi e fortemente correlati fra di loro può essere utile accertarsi del grado di comprensione e organizzazione delle conoscenze degli studenti richiedendo loro di realizzare una mappa. È importante dare loro una scaletta precisa come ad esempio:

- fare l'elenco, senza ordine, come vengono in mente, di concetti, relazioni, proprietà ...
- raggruppare le parole per affinità; questi raggruppamenti dovrebbero delineare i vari rami della mappa;

- scrivere i nomi dei concetti (non discorsi!) in cornice, rappresentare le relazioni con frecce e specificarle con una frase sintetica e con una terminologia specifica;
- dare una disposizione significativa all'insieme degli elementi grafici.

Per evitare produzioni incomplete o troppo dettagliate, si può fare l'elenco delle parole con la partecipazione di tutta la classe. Successivamente ognuno predispone a casa una mappa; i lavori individuali vengono poi confrontati, migliorati con lavoro di gruppo, fino alla produzione di una mappa per ogni gruppo: la migliore tra queste, riprodotta su un cartellone appeso in classe, diviene patrimonio comune.

3.6 La mappa come strumento di verifica

È possibile utilizzare le mappe concettuali per verifiche rapide, focalizzate su un concetto significativo. Secondo la complessità del concetto, si può richiedere:

- di costruire autonomamente una mappa, essenziale e limitata, qualora il concetto non presenti troppe diramazioni (cfr. verifica su *vettore*: Sez. 5.4);
- di completare una mappa parziale, fornita dall'insegnante, se il concetto del quale si vuole verificare la padronanza risulta troppo complesso (cfr. verifica su *equazione lineare*: Sez. 5.5.2).

Può essere molto efficace perché ha i vantaggi dei test (brevi tempi di verifica, valutazione contemporanea di tutta la classe sullo stesso argomento), senza averne i limiti: non verifica solo la presenza di informazioni, ma anche la concatenazione e la rielaborazione personale dei concetti.

3.7 Osservazioni

Ormai molti testi presentano mappe concettuali, ma l'efficacia di queste rappresentazioni si rivela in modo particolare quando si cerca di costruirle da soli, e poi si confrontano e si discutono in gruppo le diverse proposte elaborate, producendo una mappa comune. La fase personale è spesso faticosa, in quanto richiede uno sforzo di pulizia di tutto ciò che non è essenziale, in modo che resti uno schema leggibile e sensato. Sembra di perdere tempo a limare idee che da un lato appaiono già chiare, e dall'altro fanno resistenza a lasciarsi comprimere su di un foglio. La discussione in gruppo è molto arricchente, ed alla fine ci si trova ad avere migliorato in consapevolezza e padronanza del concetto in questione.

Lo scopo principale della mappa concettuale è quello di mettere in moto un processo cognitivo. Rispetto a questo scopo, il procedimento di costruzione della mappa è piú importante della sua perfezione; ma è il lavoro di sistemazione formale che contribuisce allo sviluppo della capacità di comunicazione, accrescendo la padronanza del linguaggio nella varietà delle sue forme espressive.

Sempre piú spesso risulta necessario trasmettere informazioni in modo sintetico e chiaro: lo spazio a disposizione è limitato e i dati da trasmettere sono tanti. Si distribuiscono quindi le informazioni utilizzando schemi molto simili a quello di una mappa concettuale e, anche se l'obiettivo primario è diverso, le difficoltà nell'organizzazione dei dati sono le stesse: garantire l'efficacia, l'efficienza e l'elasticità della comunicazione. L'elaborazione di una mappa concettuale oltre a favorire il processo cognitivo consente quindi di aumentare la capacità di comunicare, attraverso l'acquisizione delle tecniche utilizzate nella trasmissione delle informazioni. Risulta cosí uno strumento per l'elaborazione di testi a lunghezza prestabilita, quali sono quelli previsti nella legge e nel regolamento del nuovo esame di stato, dove, per la terza prova, si parla di "trattazione sintetica", "entro i limiti di estensione indicati dalla Commissione".

L'uso delle mappe con gli studenti deve essere limitato, mirato e progressivo al fine di non scoraggiarli o renderli diffidenti davanti a questo strumento didattico completamente nuovo per loro.

È forse opportuno usare il supporto delle mappe solo quando si vuole mettere ordine in un argomento particolarmente complesso (es: le trasformazioni geometriche) oppure esaltare la generalità, la struttura unificante di un concetto (es: operazione – fra numeri, insiemi, proposizioni logiche ...).

Nelle verifiche non si richiederà la realizzazione di mappe estese e, nei lavori di gruppo, le prime mappe non coinvolgeranno troppi concetti.

Un accorgimento pratico: nella stesura della mappa capita piú volte di dover spostare gli elementi grafici. Per non riscrivere troppe volte la mappa, conviene scrivere i suoi elementi su foglietti autoadesivi e comporre la mappa con tali foglietti, facilmente ricollocabili.

4 La conversazione clinica (intervista)

4.1 Caratteristiche

Lo scopo essenziale dell'intervista iniziale è quello di esplicitare le pre-conoscenze degli allievi e le immagini mentali che essi associano al concetto da introdurre. Come in ogni processo di costruzione, anche nell'insegnamento è importante conoscere il piú possibile il terreno su cui ci si deve appoggiare e le sue eventuali asperità.

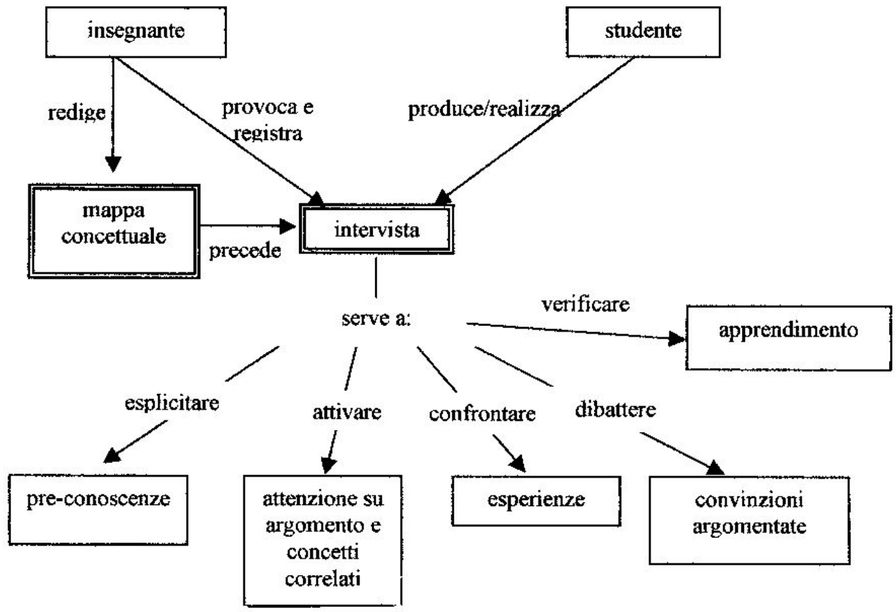
Durante l'intervista insegnante e allievi, in un certo senso, si scambiano i ruoli: è l'insegnante che impara dagli allievi quali sono le loro convinzioni e le relative giustificazioni. Questo scambio riesce abbastanza naturale in una prima fase dell'intervista, in cui l'insegnante si limita a raccogliere le risposte degli allievi, individuando cosí gli eventuali ostacoli epistemologici all'introduzione del concetto scelto.

Il ruolo dell'insegnante, invece, è piú delicato e difficile in una seconda fase, in cui si invitano gli allievi a giustificare le loro affermazioni e a ricercane le radici: è forte la tentazione di approvare o disapprovare le affermazioni, dimenticando che in questa fase esse si devono considerare frutto delle esperienze personali e quindi vere fino a prova contraria.

Nelle lezioni successive all'intervista è importante riprendere gli esempi e le situazioni citate dagli studenti, sia quelli in armonia con l'argomento, sia quelli in contrasto con esso, permettendo cosí di delimitare in modo chiaro il concetto matematico da introdurre, distinguendo i diversi significati che una stessa parola assume nel linguaggio scientifico e nel linguaggio naturale.

Altrettanto importanti ai fini didattici sono altri effetti che l'intervista, se ben condotta, induce: attiva l'attenzione dello studente sull'argomento da trattare e sui concetti correlati, permette il confronto fra diverse esperienze degli studenti stessi, stimola una discussione argomentata in difesa di convinzioni personali contrastanti. Quest'ultimo punto non si realizza nella discussione con l'insegnante, per ovvie ragioni; è quindi importante che l'intervista si svolga come discussione in classe, durante la quale l'interazione ed il reciproco insegnarsi fra studenti sono al massimo livello ([5],[37]). È esperienza comune quanto i piccolissimi, ed anche i giovani, imparino piú facilmente e velocemente dai loro coetanei piuttosto che dagli adulti.

È interessante ripetere l'intervista a distanza di tempo (ad esempio, l'anno successivo) per verificare la durata dell'apprendimento e l'eventuale persistenza di concetti ingenui.



4.2 Esperienze

Le esperienze descritte nella Sezione 5 mettono in evidenza gli eventi didattici sopra descritti. Qui sottolineiamo alcuni punti.

- All'inizio della terza elementare, l'indagine sulle pre-conoscenze riguardanti il *"parallelismo"* (Sez. 5.1) poteva a priori sembrare inopportuna, mentre ha fornito utili indicazioni sul significato che i fanciulli avevano già dato alla parola, in base all'uso che se ne fa nel linguaggio comune. Questo ha permesso di organizzare delle attività didattiche ad hoc, durante le quali essi stessi hanno convenuto di dare un significato piú ristretto e preciso alla parola nel campo geometrico ([3]).

- La breve intervista su *"angolo"*, eseguita in una quarta ginnasio (Sez. 5.2), è significativa perché vi si ritrovano ancora i concetti spontanei (l'angolo è un punto, ecc.) che si sono rilevati alle elementari ([7]); questo testimonia quanto siano resistenti le conoscenze dedotte dall'esperienza e dal linguaggio comune, e quanta cura sia necessaria per distinguerle dai concetti matematici indicati con gli stessi termini linguistici.

- L'intervista su *"parola chiave"* in una terza elementare (Sez 5.3.2) dimostra che gli alunni di questa età riescono ad essere consapevoli della conoscenza acquisita, dimostrando capacità di trasmetterla con espressioni spontanee e precise, e di usare i concetti appresi anche in contesti diversi.

Nella stessa classe si è tenuta un'intervista su *"uguale"*. Gli alunni hanno fornito molti copioni di diverso tipo, che si prestano bene per introdurre la relatività del concetto di uguaglianza, sia nel linguaggio naturale, sia nelle accezioni particolari che assume in aritmetica e in geometria.

- Nell'intervista su *"uguaglianza"* in quarta ginnasio (Sez. 5.3.3), è scaturita tra gli allievi la discussione sulla relatività di tale concetto e sulla necessità di chiarire le convenzioni iniziali e di classificare le diverse situazioni, preparando cosí il terreno alla classificazione della geometria di Klein ([35]). Lo stesso discorso, presentato dall'insegnante con una lezione frontale, sarebbe apparso ai piú una sadica pedanteria.

- Le interviste su *"trasformazione"* (Sez. 5.3.4 e 5.3.5), mettono in risalto come sia naturale studiare questo concetto attraverso l'analisi di proprietà varianti e invarianti; nella successiva attività i ragazzi sono stati in grado di proseguire con notevole autonomia nello studio delle trasformazioni geometriche a partire da alcune semplici esperienze suggerite dall'insegnante.

4.3 Osservazioni e commenti

Dalle esperienze in classe gli insegnanti del Nucleo hanno ricavato alcune osservazioni.

- La preventiva elaborazione di una mappa concettuale è indispensabile alla buona riuscita dell'intervista.

- L'intervista è molto utile quando si deve introdurre un concetto importante o nei casi in cui un termine ha significato matematico diverso da quello dell'esperienza comune. Anche solo la prima fase dell'intervista (la semplice raccolta delle prime risposte) dà dei risultati utili a programmare delle attività didattiche piú efficaci. Con questo metodo i ragazzi risultano piú curiosi e motivati allo studio del nuovo argomento, rassicurati che anche le loro pre-conoscenze sono considerate, e stimolati a ripensare criticamente alcuni concetti accettati solo per consuetudine.

- In alcune classi, all'inizio, c'è una forte resistenza ad esporsi: i ragazzi sono abituati ad aspettare di sapere dall'insegnante ciò che egli vuole che essi ripetano, e a ritenere che le loro acquisizioni personali non abbiano alcun valore per la scuola ([12]).

- Il dibattito in classe, una volta avviato, è sempre stato produttivo, tranne in un caso, in cui la mappa concettuale di riferimento e le domande stimolo, preparate nel seminario didattico, si sono rivelate troppo generali perché un allievo quattordicenne potesse collegarle con la sua esperienza (Sez. 5.6.2).

- Alle volte sono stati proprio gli allievi piú bravi a partecipare poco attivamente, forse perché abituati a parlare solo su argomenti su cui si sentivano preparati. Si deve tener conto che, in genere, c'è un gruppo che si espone, mentre gli altri tendono a tacere.

- All'inizio dell'esperienza, si sono verificati momenti di incertezza, da parte dell'insegnante, nella conduzione di interviste su argomenti nuovi, dovuta al fatto che non c'era una previsione di massima delle possibili risposte. Si è visto che i tempi di intervista, con un po' di esperienza, possono essere ridotti anche ad una decina di minuti, quando sono già emersi spunti e considerazioni utili, oppure quando l'argomento non riesce a coinvolgere la classe.

- Il pericolo maggiore, nella conduzione dell'intervista, è quello di esprimere giudizi di approvazione o disapprovazione su quanto viene detto, oppure di passare direttamente alla lezione, quando si presenta qualche spunto significativo, e di non lasciare agli studenti tempo sufficiente per organizzare le proprie conoscenze. Da queste tentazioni ci si salva con l'esperienza.

- In generale, è stata molto utile la registrazione sia delle interviste sia delle lezioni, per poter analizzare meglio il proprio lavoro, e recuperare alcuni interventi degli allievi che, al momento, non sono stati colti nel loro giusto valore. Non sempre e non tutto si può registrare, ma già farlo alcune volte permette di individuare i difetti in cui si tende a cadere piú spesso ed aiuta a mettersi in un atteggiamento critico davanti al proprio insegnamento.

- La griglia per l'analisi della conversazione clinica, proposta in [10], è difficile da usare senza la guida di un esperto, ma è comunque molto utile provare a compilarla, perché suggerisce alcune modalità di intervento non direttivo da parte dell'insegnante.

4.4 Varianti e deviazioni

Per ovviare alla difficoltà di avviare un colloquio e alla mancanza di tempo si è trovato talvolta utile far precedere l'intervista da un semplice questionario scritto. Questo, pur non avendo tutta la ricchezza dell'intervista orale, serve a prepararla: dà maggiore sicurezza all'insegnante, fornisce molte informazioni sulle pre-conoscenze, offre uno spunto per rompere il ghiaccio ed avviare la discussione seguente, costringe tutti gli studenti ad esprimersi in qualche modo, come risulta dalle seguenti esperienze.

- I risultati del questionario, presentato in prima liceo scientifico, sulle parole *"ipotesi"*, *"tesi"*, *"dimostrazione"*, *"ragionamento logico"* e *"verità"* (Sez. 5.7.2) si commentano da sé e costituiscono un buon punto di partenza per una discussione che prepara la presentazione del significato matematico di questi termini ([15], [22], [23]).

- Il questionario su *"verifica"* e *"dimostrazione"*, presentato anch'esso in una prima liceo scientifico (Sez. 5.7.3), mostra come la vicinanza di alcune parole, piuttosto che di altre, faccia pensare a significati diversi; in questo caso molti ragazzi hanno pensato a *verifica* e *dimostrazione* come riferite ad abilità o capacità di un soggetto; il buon esito di questa esperienza è legato alla cura con la quale l'insegnante ha individuato la situazione di conflitto cognitivo e le parole chiave associate, nonché all'attenta analisi e valorizzazione delle risposte degli studenti.

È stata utilizzata anche un'altra forma di indagine, piú originale ma piú difficile da realizzare. Invece di porre la domanda in forma verbale e diretta sul significante da esaminare, vengono presentate per iscritto alcune situazioni, riguardanti il significato di ciò che si vuole studiare, situazioni che fanno parte dell'esperienza comune e vengono considerate banali, ma che - accompagnate da opportune domande - rivelano conflitti cognitivi. I ragazzi hanno alcuni giorni per pensare alle risposte; in classe, poi, la difficoltà di trovare una risposta comune offre lo spunto per esplicitare e discutere le pre-conoscenze relative al concetto sotto analisi. Riportiamo un esempio di questo approccio.

- In una prima liceo scientifico (Sez. 5.3.5) sono state prese in considerazione due situazioni di questo tipo: la rappresentazione grafica di un campo di calcio, visto da varie angolazioni, e alcune figure formate con il tangram. Le relative domande hanno messo in crisi il concetto di *"uguaglianza"*, costringendo gli studenti a rivedere le loro conoscenze a questo proposito, e hanno resa significativa l'introduzione dei concetti matematici di *"uguaglianza"*, *"trasformazione"* e *"invariante"*.

Si presti attenzione al fatto che la discussione, in questi casi, può avere due esiti, che dipendono dal ruolo che l'insegnante assume nella discussione stessa. Può essere semplice osservatore e animatore, ed allora il risultato sarà analogo a quello dell'intervista, nel senso sopra definito; può invece assumere il ruolo di guida in una discussione didattica, realizzando una lezione in forma dialogata, esito che non rientra negli strumenti analizzati in questo lavoro.

Per un'indagine condotta in questi termini, non è sempre facile trovare situazioni di partenza adatte allo scopo. Esse infatti devono essere semplici perché lo studente sia invogliato a ricavare le risposte dalla proprie conoscenze, senza cercarle altrove; devono mettere in discussione acquisizioni date per scontate e devono anche avere attinenza con il concetto da analizzare.

5 Protocolli e commenti

5.1 Primi concetti di geometria dello spazio: piano, retta, parallelismo

Conversazione clinica

(di Ida Visintin - III Elementare)

Prima di avviare uno studio sistematico nel piano di tali concetti, si accerta, in una conversazione clinica, a quale grado di concettualizzazione spontanea siano giunti gli alunni e che cosa significhino per loro le parole *piano, retta, parallelo.*[1]

Il concetto di piano

★ Se dico la parola *"piano"* che cosa vi viene in mente?
□ Oggetto liscio.
□ Non può rotolare, ma può strisciare.
□ Una superficie, può poggiare, sta ferma, non cade.
□ Sta sotto le forme, è liscio.
□ È liscio, un tavolo.
□ Base liscia, piatta, diritta, non rotola.
□ I piani di una casa.
□ Lento. Un progetto. Superficie dritta, non curva.
□ Vuol dire quando è spesso.
□ È una superficie piana.

[1] Il simbolo ★ indica gli interventi dell'insegnante; il simbolo □ indica gli interventi degli allievi

☐ Correre piano.
☐ Pianoforte.
☐ Piano dei ladri per scappare.
☐ Piano di appartamento.
☐ Piano è una superficie di una forma geometrica.
☐ Superficie di una forma.
☐ Superficie di un tavolo.
☐ Piano terra.
☐ Superficie quadrata.
☐ Superficie di un oggetto.
☐ Siamo pieni di superfici.

Il concetto di retta

★ E la parola *"retta"* che cosa vi suggerisce?
☐ Linea non curva.
☐ Linea con il righello.
☐ Ha una direzione e non curva.
☐ Dritta, non curva.
☐ Strada dritta.
☐ Una linea dritta, non curva. Muri dritti.
☐ Uno spago dritto diventa retta. Stecca di legno.
☐ Linea del parallelepipedo.

Il concetto di parallelismo

★ E che cosa ti viene in mente quando dico *"parallelo"*?
☐ Due linee parallele messe nello stesso posto.
☐ Si disegna una linea, si fa una piegatura, si disegna un'altra linea.
☐ I segni degli sci. Due strade vicine.
☐ Due cose che sono vicine, partono da uno stesso punto e arrivano allo stesso punto e non un po' qua e un po' là.
☐ Una cosa è nello stesso piano dell'altra cosa.
★ Fammi un esempio.
☐ Questo cilindro è parallelo alla matita. (*Il bambino accosta alla matita il temperamatite a forma cilindrica.*)
☐ Mia mamma dice: 'Mettiti parallela a tua sorella per vedere quanto sei cresciuta!'.
☐ Quando due persone corrono e stanno sempre vicine.
☐ Paralleli sono due oggetti attaccati cosí. (*L'alunno prende l'astuccio e posa sopra una matita.*)
☐ Due oggetti nello stesso punto.

Matrice cognitiva

Nelle prime due indagini si osserva una certa commistione tra piano e retta legata alla parola *"dritto"* e una concezione del piano legata alla giacitura orizzontale.

Nella terza, il concetto di parallelismo talvolta è legato al concetto di direzione, altre volte a quello di vicinanza e di concomitanza (*"partenza" e "arrivo" comuni*), in conformità all'uso del linguaggio comune (*"procedere in parallelo"*).

Questi rilievi hanno indotto a ricercare delle attività che mettessero in crisi i concetti preesistenti.

Tempo: 2 ore.

5.2 L'angolo

Conversazione clinica

(di Marco Calvani – IV Ginnasio)

In precedenza sono state preparate le domande sui seguenti argomenti:

- utilizzo del termine angolo nella vita comune;
- definizione di angolo in geometria;
- uso dell'angolo in geometria.

★ Parliamo di *"angolo"*; secondo voi in quale circostanza della vita comune si parla di angoli?
□ In geografia, per esempio, per i poli, la latitudine.
□ In educazione stradale, all'angolo (*risata generale*).
□ Il calcio d'angolo, il corner.
★ Poi?
□ Quando la mamma pulisce la casa e trova difficile pulire negli angoli.
□ Tutta la vita è composta da angoli, questo banco, non so, la lavagna.
□ In alcuni negozi c'è l'angolo della musica.
★ Serve, quindi, anche ad indicare dei luoghi, qualcuno vuole aggiungere altro sugli angoli nella vita comune? Va beh!! In conclusione la nostra vita è fatta di angoli ... Passiamo alla geometria; che cosa è l'angolo in geometria?
□ Una sezione di piano.
★ Una sezione di piano ... e come è fatta questa sezione di piano?
□ È delimitata da due rette.

□ È il punto di incontro di due rette.

★ C'è qualcuno che ha detto "guarda che è il punto, il punto di incontro di due rette".

□ Due rette incidenti formano un punto e quindi un angolo.

★ Due rette incidenti formano un punto e quindi un angolo ... tutti d'accordo?

(*Piú di uno studente risponde con un "no!" deciso*)

□ È una parte di piano delimitata da due semirette.

□ Ma prof, dovevo dirla io quella roba lí!

□ Io ho da mezzora la mano alzata.

★ Ma se è una parte di piano, cosa è allora?

(*Confusione*)

★ Secondo voi a che cosa serve l'angolo?

□ A chiudere una figura.

□ A racchiudere una figura ...

□ A delimitare uno spazio.

□ A darci la possibilità di classificare una figura in funzione dell'ampiezza dei suoi angoli.

★ Serve a classificare una figura in funzione degli angoli, siete d'accordo?

(*Piú di uno studente risponde con un "no!!"deciso*)

★ Allora fornite un'altra versione.

□ A dare la fisionomia di una figura.

★ Quindi sei d'accordo con il compagno di classe!! Ma si misurano gli angoli, secondo voi?

(*Piú di uno studente risponde con un "sí!!" deciso*)

□ Con il goniometro.

□ Si misura con l'ampiezza.

★ Quindi si possono anche confrontare?

(*Confusione*)

★ Ci sono angoli piú o meno importanti, secondo voi?

□ No, sono tutti importanti.

□ Quello retto.

★ Quello retto. Perché è il piú importante?

□ Perché è piú usato!!

□ Perché serve a distinguere figure geometriche da altre.

★ Poi? Tutti d'accordo con questa osservazione? Serve a distinguere delle figure geometriche da altre.

□ Anche perché con l'angolo retto possiamo misurare, per esempio, il triangolo in cui abbiamo identificato un angolo retto; con l'angolo retto possiamo ricavare, possiamo fare riferimento.

★ Facciamo un esempio, possiamo fare riferimento come?

□ Viene molto usato l'angolo retto piú di altri angoli.

★ Dove viene piú usato l'angolo retto?

□ Con il teorema di Pitagora.

□ In natura ...

★ Ed in natura, perché viene piú usato?

□ Perché è dritto, è piú facile da usare.

□ Forse perché usando l'angolo retto possiamo dire che l'altro è convesso o concavo.

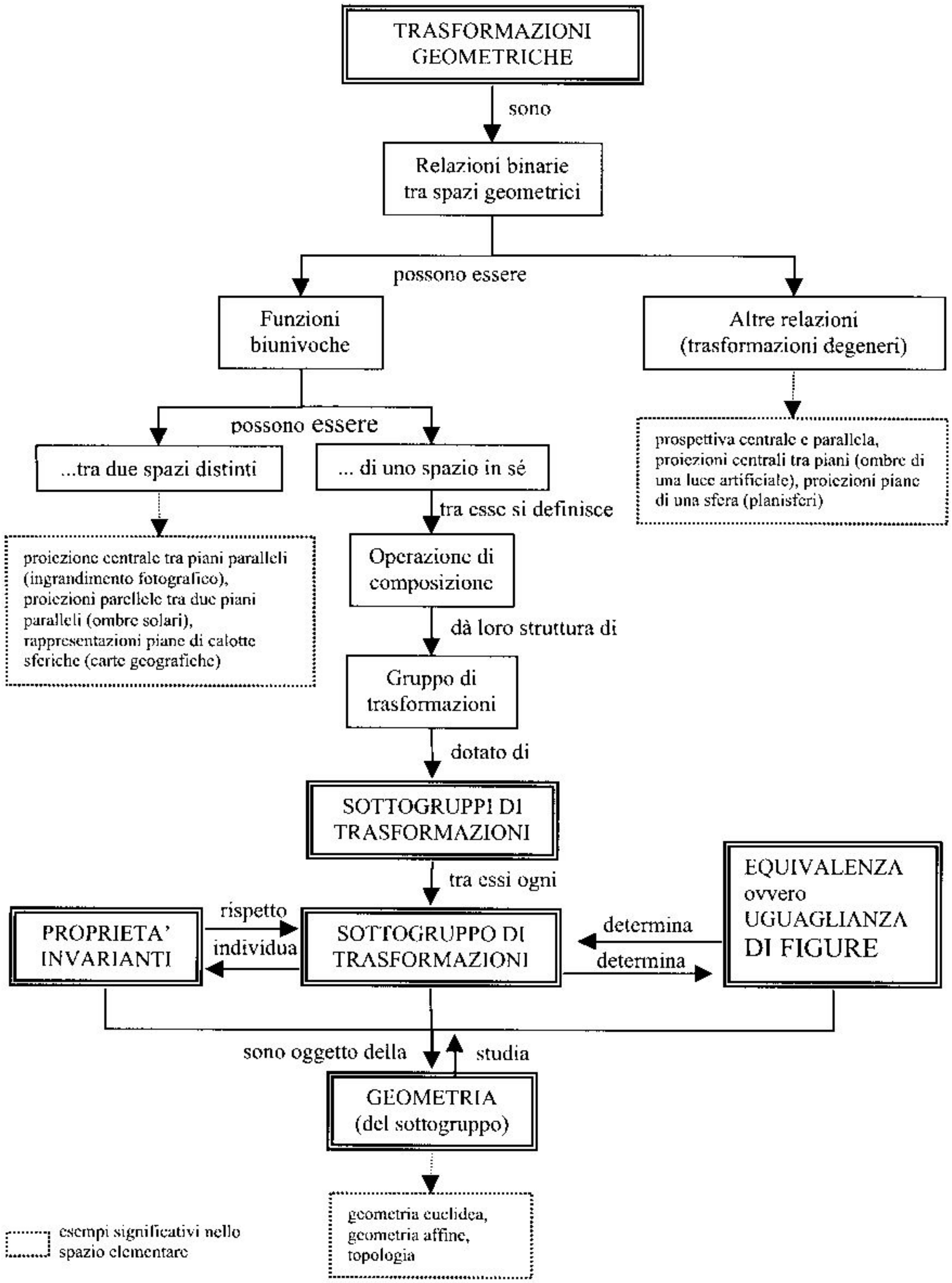
Matrice cognitiva e commento

Dalla conversazione sono emerse le seguenti considerazioni:

- le nozioni geometriche sono assimilate come formule avulse da un significato concreto (vedi le risposte sull'angolo retto)([12]);
- persiste in alcuni il concetto spontaneo che identifica l'angolo col suo vertice o con una regione non ben definita ma limitata del piano ad esso vicina;
- l'angolo come relazione tra due direzioni o come rotazione sembra essere presente solo in modo molto nascosto ("serve a chiudere una figura");
- gli studenti sembrano disorientati dalla mancanza di un giudizio piú o meno favorevole alle loro considerazioni.

5.3 Le trasformazioni geometriche

5.3.1 Mappa concettuale



5.3.2 Conversazione clinica su "parola chiave" e "uguale"

(di Evi Azzali, Elena De Colle e Ida Visintin - III elementare)

Questa intervista si è svolta grazie alla disponibilità dell'insegnante di italiano, Elena De Colle. Per mettere a loro agio gli alunni, che vedevano le intervistatrici per la prima volta, si è partiti da una conversazione sul titolo del sussidiario adottato: "Parole Chiave".

★ Che cos'è una *"parola chiave"*?

Si decide di fare un giro di opinioni in ordine di banco, perché tutti hanno la mano alzata per intervenire.

☐ Sono le parole che ti danno l'idea.
☐ Parole che ti aiutano.
☐ Ti aiutano a capire meglio il significato, riesci a capire il concetto.
☐ Parole che ti spiegano.
☐ Parole legame che ti aiutano a capire.
☐ Da quelle devi poi sapere tutta una frase.
☐ Leggendo quelle parole riusciresti a capire l'intero discorso.
☐ Da una parola ti deve venir in mente la frase.
☐ Parole importanti che ti fanno venire il riassunto di un discorso.
☐ Ti fanno capire.
☐ Hanno piú valutazione.
★ Intendi dire piú valore?
☐ Sí, piú valore.
☐ Piuttosto che scrivere una frase intera che ti interessa, scrivi la parola che è dentro e ti fa pensare a tutta la frase.
☐ La parola che ti fa venire l'idea.
☐ Puoi fare tante cose.
★ Bene, ora scegliamo una parola chiave (*scrive alla lavagna UGUALE)* e facciamo il gioco dell'immaginazione. Chiudete gli occhi e immaginate una situazione che si riferisce ad UGUALE, cosa sarà mai, che significato ha, dove l'ho sentita, chi me l'ha detta. Ciascuno abbia la sua immagine.
☐ I gemelli.
☐ Due pennarelli uguali.
☐ L'uguale come segno nelle operazioni.
☐ Due bambini che hanno qualcosa in comune.
☐ Due cose uguali: un cartellone e un altro cartellone.
☐ Due o piú banchi dei nostri che sono tutti uguali.

□ Sia il segno e poi due ciabatte.
★ Due paia di ciabatte? spiegati.
□ Due ciabatte di uno stesso paio.
□ Anche le lettere, se non fossero uguali non ci capiremmo.
□ Una data di nascita.
□ Due bambini che hanno caratteristiche uguali.
□ Due grembiuli (*la compagna mostra disaccordo e il bambino conferma*) grembiuli son sempre grembiuli.
□ Le ali delle farfalle.
★ Le ali di farfalle diverse?
□ No, le due ali di una stessa farfalla.
□ Bambini con cose uguali.
□ Due fiori, come due narcisi.
□ Per me i numeri (*fa riferimento alla tavola pitagorica che è appesa*): il 36 è nella tabellina del 6 ed è anche in quella del 9.
□ Stemmi uguali.
□ Persone con lo stesso carattere.
□ Persone uguali per aspetto e per carattere.
★ Tu conosci persone proprio uguali in tutto?
□ Io no, ma mia mamma sí.
□ Come loro che sono uguali, con i capelli uguali.
□ Quando ho scritto uguale ho visto un'operazione: un'operazione = risultato.
□ Io avrei un'altra idea: i pini non veri, ma disegnati, hanno due lati uguali, e cosí anche le forbici.
□ Un cilindro (*prende l'astuccio*), ha due parti uguali (*mostra le due basi*).
□ Le lenti di occhiali.
□ Due occhi di un bambino uguali tra loro.
□ Il quadrato ha tutti i lati uguali.
★ Scegliamo uno dei casi che avete detto, quello del paio di ciabatte. Siete tutti d'accordo con la compagna che ha detto che sono uguali?
□ No.
□ Ciabatte alla moda con un cane in un piede e un'anatra nell'altro.
□ O con la lingua di fuori e la lingua dentro.
★ Accordiamoci che siano nuove, semplici, non sporche ...
□ Non sono uguali: una va sul destro, una sul sinistro.
□ Gli strappi: uno va a sinistra e uno a destra.
□ Diverse perché le punte del piede sono diverse: una va in su e una va in giú.
★ Tu che avevi detto che erano uguali, sei ancora dello stesso parere dopo aver sentito i compagni?

☐ Sono un po' uguali e un po' no, perché al lato esterno non sono uguali, ma al centro (*le fa combaciare*) sono uguali.
☐ Non sono uguali perché non si possono mettere tutte sul piede destro.
☐ Se sono grandi, sí.
★ Ma allora?
☐ Io ho un'opinione un po' sul medio: se le guardi da fuori sono uguali, se guardi come ti sta il piede sono diverse.
★ Ma ci si può esprimere con una via di mezzo o si deve dire "o è vero che sono uguali o è vero che non sono uguali"? Pensate a qualche situazione di scuola o di casa dove c'era l'idea di uguale.
☐ Mia nonna ha detto: "mi ricordo che è lo stesso piatto che abbiamo mangiato a Natale".
★ Ma era proprio lo stesso?
☐ Era solo la stessa ricetta.
★ Torniamo a Nicholas che ha detto "tutti i grembiuli sono uguali".

La maggioranza della classe non concorda col compagno ed emergono differenze varie: Maschi / femmine, corto / lungo, colletto, cuciture, tasche, macchie ...

★ Quando vi hanno detto che a scuola dovete venire col grembiule, avete chiesto come doveva essere? come le tasche, come il colletto ... allora li avete considerati uguali?
☐ Secondo me sono tutti uguali perché hanno tutti un disegno, tutti un colletto ...
★ Abbiamo trovato due maschi col grembiule uguale (stesso taglio, stesso disegno ...) cosa possiamo dire?
☐ Uno è piú piccolo e uno è piú grande.
★ Come si potrebbe fare per vedere se è vero?

I due bambini si tolgono i grembiuli, fanno combaciare le cuciture e con l'aiuto del righello misurano la differenza: 1 cm.

★ In conclusione sono uguali o no?

Non tutti sono dello stesso parere, ma prevalgono i "no".

★ Facciamo un altro esempio, prendete un foglio a quadretti e ora copiate quello che disegno alla lavagna. (*Disegna alla lavagna un quadrato; i bambini lo riproducono sul proprio foglio.*) Cosa vuol dire copiare, Anna?
☐ Fare uguale.
★ Sono uguali il tuo e il mio disegno?

☐ No, la grandezza no, ma la forma è uguale.
★ Eppure io avevo detto di copiare.
☐ Ma la lavagna ha i quadretti piú grandi.
★ Allora diciamo che quando la maestra dice 'copiate dalla lavagna' intende dire 'fate uguale forma', ma non 'uguale misura'. Quindi la parola "uguale" ha significati diversi a seconda di ciò che stiamo facendo e voi lo capite.

La conversazione si fa abbastanza caotica, si cercano spunti dai cartelloni in aula: favole, miti, fotografie, cartellone delle temperature ... e da giochi in palestra.

★ Cerchiamo di vedere quello che avete imparato oggi pomeriggio attorno alla parola "uguale"
☐ A volte abbiamo cose in comune, ma non per questo siamo uguali, ad esempio Matteo e Luca sono entrambi biricchini ma non sono uguali.
☐ Oggi ho capito che le ciabatte, che ritenevo che fossero uguali, in realtà non lo sono.
★ Ma in definitiva esistono delle cose uguali?
☐ Sí, se questo cartoncino fosse bianco, con le stesse misure di quest'altro, potrei dire che sono uguali.
☐ Io ho imparato che esistono molte specie di "uguali".
☐ Ci sono cose proprio uguali in tutto e cose che diciamo uguali, ma hanno in realtà solo qualche caratteristica in comune.

Matrice cognitiva

Tutti gli alunni sono intervenuti dimostrando di aver preso piena coscienza del ruolo di *"parola chiave"*, molto importante per ottenere una buona organizzazione della conoscenza.

Sul concetto di *"uguale"* sono molto chiari i diversi tipi di uguaglianza citati dagli alunni.

Con riferimento al linguaggio naturale, sono particolarmente originali gli esempi che si riferiscono ad una stessa funzione (grembiuli), stesso gusto (cibo), stesso codice convenzionale (lettere dell'alfabeto). Quest'ultimo spunto si presta a vari sviluppi riguardanti codici convenzionali in generale, ed in particolare trascrizioni di suoni, e quindi confronto fra suoni, ritmi, ecc.

Con riferimento all'aritmetica, è citato il segno "=" delle operazioni, che in seguito può assumere significati diversi nel caso di equazioni e rappresentazioni parametriche.

Per la geometria si ritrova l'uguaglianza a meno di isometrie dirette, di similitudini e anche a meno di simmetrie. Di fronte ad un'obiezione, gli alunni ricorrono alla sovrapponibilità; nel caso di figure simili concludono che non sono uguali, ma hanno la stessa forma, mentre per figure simmetriche insistono nel far notare che, a pezzi, combaciano.

5.3.3 Conversazione clinica su "uguaglianza"

(di Giuliana Catanese - IV Ginnasio)

Nella classe si è parlato di uguaglianza solo tra numeri, e non si è mai fatta geometria.

Precedentemente (15 gg) è stato fatto un "sondaggio" scritto (10') in cui si richiedeva di definire l'uguaglianza in matematica, nel linguaggio comune e di portare opportuni esempi.

★ Vi leggerò alcune delle definizioni che avete dato nel test scritto su *"uguaglianza"*:

- avere le stesse caratteristiche;
- qualcosa che indica due cose uguali;
- quando due termini si equivalgono ad altri.

Avete qualcosa da aggiungere o da chiarire?

Dopo un po' di esitazione iniziale, dovuta sia ad imbarazzo che alla necessità di concentrazione, vengono proposte alcune definizioni.

□ Due cose uguali.
□ Non servono due cose perché anche uno è uguale a se stesso.
□ L'uguaglianza dipende da qualcosa (*e porta l'esempio, che poi sarà ripreso piú volte nella conversazione, di due sedie*): due sedie sono uguali in quanto sempre due sedie, ma diverse per quanto riguarda certi particolari.
□ Devono essere sovrapponibili.
★ Mi pare ci siano due diverse posizioni riguardo l'uguaglianza: la sovrapponibilità e la conservazione di alcune caratteristiche.

(*Segue un altro breve dibattito*)

□ Ma se l'uguaglianza dipende da certe caratteristiche che si analizzano, come faccio a sapere quali devo analizzare?

L'insegnante ripropone la domanda e chiede se essa abbia senso; tutti concordano che è effettivamente un problema. Il dibattito prosegue animatamente e ci sono alcune difficoltà nella terminologia.

□ Esame di confronto, tra due termini visto sotto certi punti di vista.

Alla fine si concorda che nel linguaggio comune "uguaglianza" è un legame tra due enti che può esserci o non esserci in base ad un certo criterio. Questa definizione viene accettata all'unanimità.

★ La definizione si può trasportare anche in campo matematico?
□ No, in matematica ci deve essere un unico punto di vista.
□ In matematica significa avere lo stesso valore: $6 + 4 = 10$.
★ Le due posizioni sull'uguaglianza, nel linguaggio comune e nella matematica, sono discordanti o coincidenti?
□ Due termini possono avere lo stesso valore e non essere uguali, ma se sono uguali hanno lo stesso valore.
□ $6 + 4 = 10$ sono uguali dal punto di vista del valore, ma non nella forma.

L'insegnante riprende ancora la domanda.

□ La definizione va ancora bene, perché stavolta il criterio è "avere lo stesso valore".
□ Il criterio in matematica deve essere uguale per tutti.
□ Per essere uguale, in matematica, deve esserlo sotto tutti i punti di vista.

L'insegnante invita a disegnare un quadrato uguale a quello alla lavagna. Sono tutti d'accordo che è impossibile senza andare a prendere le misure per poi riportarle esattamente sul foglio.

★ Se fissiamo l'attenzione sulla forma possiamo dire che le due figure sono uguali?
□ No, sono simili.
□ Se prendiamo in esame il criterio forma, sono uguali.

La maggioranza ritiene invece che se non sono sovrapponibili non possono essere uguali.

★ E il guanto destro e sinistro sono uguali?

La cosa porta ad un dialogo vivace e si contrappongono quelli che ritengono o no uguali i due guanti anche se non sovrapponibili o se differiscono per il colore. Poi la discussione ritorna sulle sedie, citate inizialmente, e sembra riportarci ad una situazione in cui uguaglianza è perfetta coincidenza, al che:

□ Due sedie non potranno mai essere identiche perch non provengono dallo stesso albero.
□ Ma allora non esiste niente di uguale.

☐ Bisogna distinguere tra l'uguaglianza tra le due sedie dal punto di vista concettuale e da quello visivo.

L'insegnante chiede nuovamente se ritengono ancora valida la definizione. Mentre tutti sono d'accordo per la definizione nel linguaggio comune, tranne in pochi casi non la ritengono accettabile in matematica, dove si riafferma l'uguaglianza come perfetta coincidenza.

☐ Che gran confusione che si è fatta sull'uguaglianza!
★ Che senso ha $6 + 4 = 10 = 5 + 5$?
☐ Sono uguaglianze già stabilite dalla matematica.
☐ Dipende dall'oggetto che si prende in considerazione.
☐ In matematica il "dipende" non esiste, o sono uguali o non lo sono, se sono uguali lo sono in tutto e per tutto, se non lo sono c'è almeno una minima caratteristica che li differenzia.
☐ Non può essere in matematica perché non è detto che siano uguali in tutto e per tutto; ad esempio, $6 + 4 = 10$ è una uguaglianza. Nella forma non sono uguali; ma è un'uguaglianza.

...

★ Siete cosí sicuri che $2 + 2 = 4$? attenti che, sull'orologio, $6 + 7 = 1$.
☐ Ma questo non è matematica!
☐ L'uguaglianza deve essere oggettiva, dobbiamo essere d'accordo tutti, non può essere soggettiva.
☐ Dobbiamo partire col presupposto che l'uguaglianza sia sempre vera.
☐ No, la matematica non può essere un'opinione.

(*Suono della campanella*)

☐ Ha regole fisse.
☐ Se fosse un'opinione avremmo tutti 10 in matematica.

(*La discussione prosegue alquanto animata*)

☐ $2 + 2$ deve fare 4, altrimenti a cosa serve la matematica?
☐ 1000 deve essere la stessa cosa per me e per lui.
☐ Ma cosa è essenziale allora in matematica?

Tempo impiegato 50' (potevano bastare 30').

Matrice cognitiva

Si delineano due posizioni: quelli che intendono l'uguaglianza nel linguaggio comune come perfetta sovrapposizione e quelli che la intendono come conservazione di certe caratteristiche. È interessante la domanda che un allievo pone: "come faccio a sapere quali caratteristiche devo analizzare?". La definizione di uguaglianza come conservazione di certe caratteristiche non soddisfa invece per la matematica: qualche allieva si è dichiarata molto sconcertata dal fatto che fosse possibile far dipendere la relazione di uguaglianza da un criterio. Affermano tutti che in matematica non ci possono essere criteri soggettivi.

Commento

L'atmosfera della classe si è subito rivelata di positivo interesse. Anzi, in giornate successive è stato richiesto di ripetere l'esperienza.

Non tutta la classe è intervenuta nel dibattito. Approssimativamente sei non sono mai intervenuti, quattro hanno fatto qualche raro intervento, otto sono intervenuti più volte, quattro sono intervenuti in modo continuo e determinante nel dibattito.

Sarebbe stato possibile concludere prima la C.C., in quanto le posizioni si erano chiarite abbastanza presto e c'è stata una parte della C.C. piuttosto ripetitiva.

Sarebbe anche stato utile distribuire il tempo in modo da riservarsi una fase finale, per la sintesi delle posizioni emerse e per la puntualizzazione delle problematiche discusse.

5.3.4 Conversazione clinica su "trasformazione" e "trasformazione geometrica"

(di Marinella Bassi - III Liceo Scientifico)

Viene preventivamente svolta una indagine scritta sul significato della parola *"trasformazione"* (tempo: 10 minuti). Emergono sette tipi di risposte.

1. Cambiamento di una persona, cosa, animale o pensiero da una forma all'altra, in merito a determinate condizioni che si manifestano nel tempo, nello spazio, ecc. o cambiamento di una cosa, persona o animale, magari fantasticamente, in altri.

2. Mutazione (metamorfosi - collegamento con Kafka), spostamento di una figura, di un oggetto, di una forma.

3. Un oggetto cambia forma e diventa un altro: una cosa che passa da uno stato o da una forma ad un'altra ... rimanendo per lo piú immutato il peso.

4. Mutazione di posizione o di aspetto o di caratteristiche di un oggetto.

5. È un cambiamento positivo o negativo che avviene in un oggetto o in una persona.
6. Un mutamento che avviene su un numero, figura, uguaglianza,...
7. Variazione nella struttura iniziale di una cosa (gas da aeriforme a liquido). Un corpo si modifica in modo tale che la forma cambia ma la superficie rimane invariata.

Gli studenti sono invitati a scegliere la risposta piú soddisfacente (tempo: 5 minuti).

Interventi

☐ Scelgo la 6.
☐ Se sei nello spazio deve cambiare anche il volume.
☐ Una trasformazione deve essere pertinente all'oggetto di partenza. Qualche cosa deve rimanere invariante.
☐ Potrebbe anche cambiare tutto se parto da un oggetto e vado verso un altro.
☐ Scusatemi, abbiamo qualche cosa, la trasformiamo e ne rifacciamo un'altra.
☐ Se lavoro con il pongo il volume resta costante.
☐ Se lavoro con il pensiero posso cambiare.
☐ Se lavori con il pensiero e lo sviluppi, ti resta sempre un'appendice del pensiero iniziale.
☐ Dice giusto! il pensiero è pensiero.

(*Intervento dell'insegnante con una richiesta di cominciare ad accordarsi sulla risposta.*)

☐ (*Come se non avesse sentito, segue il filo dei suoi pensieri.*) Devo cominciare a dividere l'astratto dal concreto. Nell'astratto la trasformazione porta a conclusioni diverse perché l'astratto è piú malleabile.
☐ Potrei avere il caso limite della trasformazione quando il punto di partenza è snaturato completamente.
★ Leggiamo la sintesi delle vostre risposte sulla parola trasformazione.
☐ La risposta 1 è legata all'uomo, al mondo concreto, al mondo astratto.
☐ A me basta che la forma cambi; poco importa che sia una forma fisica o se uso il concetto metaforico...
☐ Il positivo ed il negativo della 5 sono soggettivi.

(Su 22 alunni 7 sono a favore della definizione 4, i rimanenti per la risposta 1.)

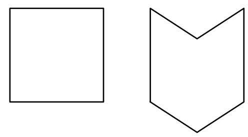
★ Scendiamo piú sullo specifico. Che cosa intendiamo per trasformazione geometrica?

(La discussione precedente porta ad escludere già certe cose.)

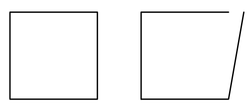
☐ Una figura cambia ma mantiene la superficie se lavoro nel piano; il volume se è una figura solida.

☐ C'è da determinare se rimane qualche cosa di invariante.

☐ (*Viene alla lavagna e disegna*) Le due figure hanno la stessa superficie.



☐ Un momento. Devo dire che cosa varia e come è fatta la trasformazione; se per esempio apro la figura che cosa rimane? il perimetro?



☐ Per trasformazione geometrica si può intendere la trasposizione di un oggetto da un piano all'altro provocando dei cambiamenti dell'oggetto.

☐ Se posso aggiungere o togliere qualche cosa e non ottengo una figura uguale allora modifico.

☐ Devo definire le azioni che faccio e ottengo una figura secondo le leggi della trasformazione.

(L'insegnante disegna una bandierina e la sua simmetrica rispetto ad un asse verticale.)

☐ Varia la posizione, guardo quello che varia.

☐ (*Ironico*) Se guardo quello che varia guardo contemporaneamente anche quello che resta invariato.

☐ Se una figura si trasforma in un'altra devo anche essere in grado di passare da quest'ultima alla prima (*reversibilità*).

Matrice cognitiva e commento

All'idea di trasformazione resta intuitivamente legato il concetto di proprietà invariante: "ci deve essere qualcosa che cambia e qualcosa che non cambia". In questo modo è stato spontaneo studiare anche le trasformazioni geometriche attraverso proprietà varianti ed invarianti: nella successiva attività, i ragazzi sono stati in grado di proseguire con notevole autonomia, a partire da alcune semplici esperienze suggerite dall'insegnante, nello studio delle isometrie.

C'è anche l'esigenza di esplicitare come opera una trasformazione.

Sono intervenuti ragazzi che non amano la matematica e ragazzi che nell'aula sono vicini di banco. Le ragazze (8) non intervengono. I piú bravi non si sbilanciano: pensano.

5.3.5 Indagine sui termini "identico", "uguale" e "trasformato" (di Diana Bitto - I Liceo Scientifico)

Questa conversazione è stata svolta all'inizio dell'anno scolastico, prima di affrontare la geometria ed era stata preceduta da una ricerca sul significato, in italiano, delle parole *"uguale"*, *"diverso"*, *"trasformato"*.

In base a quanto emerso da tale lavoro, l'insegnante ha progettato la scheda *"Disegna ed osserv"*, che è stata consegnata perché fosse completata per casa.

Scheda

"DISEGNA E OSSERVA"

1. Disegna un campo da calcio visto dall'alto.
2. Come sono tra di loro le linee che hai disegnato sul campo? Come sono le porte?
3. Disegna ora lo stesso campo visto dalla gradinata piú alta.
4. Come sono ora fra di loro le linee del campo? Come sono le porte?
5. Potresti dire che si tratta dello stesso campo?
6. Disegna ora un tavolo da bigliardo visto dall'alto e una palla al centro.
7. Ora lo stesso tavolo visto da un giocatore che sta in un angolo, sempre con la palla al centro.
8. Potrai affermare che i tuoi disegni 6 e 7 rappresentano sempre la stessa scena?

Commento alla scheda

Si voleva rilevare dal disegno se vi fosse già un'idea primitiva di invariante. In effetti la quasi totalità degli allievi ha disegnato correttamente i punti di intersezione e le posizioni reciproche degli oggetti, ma dalle risposte scritte risultava una certa confusione tra uguale e identico.

È stata quindi chiesto agli allievi di preparare per casa un Tangram con un cartoncino qualunque ed è stata poi fornita la seguente scheda:

Scheda

“TANGRAM”

Esamina il tuo Tangram:

1. Quali sono le figure geometriche che costituiscono i suoi tasselli?
2. Le possibilità di formare figure cambierebbero se variassero le dimensioni del quadrato di partenza?
3. Prova ad eseguire le seguenti figure

4. Hai potuto formarle senza mai alzare o ribaltare i tasselli e cioè solo trascinandoli sul tavolo?
5. Vi sono tasselli che a volte occorre ribaltare?
6. Quali caratteristiche hanno in comune le diverse figure formate con uno stesso Tangram?
7. Se ognuno di voi forma una figura a piacimento, quali caratteristiche rimangono comuni?
8. Se tutti noi, ognuno con il proprio Tangram, formiamo la stessa figura, potremo dire che le nostre figure sono le stesse oppure c’è solo qualche caratteristica in comune?
9. E se considero la figura che ho formato sul ripiano della lavagna luminosa e quella proiettata sul muro?
10. E se proiettassi la figura su una grande sfera?

Commento alla scheda

Al ritiro sia della prima scheda sia della seconda non è stato fatto alcun commento con la classe, ma durante una delle lezioni seguenti l’insegnante, avendo esaminato anche la seconda, le ha riconsegnate alla classe ed ha proceduto alla seguente conversazione clinica.

Interventi

★ All'interno delle nostre attività, che non abbiamo ancora commentato, voi avete esaminato parole come *"uguale"*... *"trasformato"*... e avete completato una scheda sul Tangram ... quella del campo di calcio... giusto? *(Brusio)* Ora provate a tirar fuori le vostre schede ... (scheda del campo da calcio). Allora vediamo. Qualcuno di voi vede un collegamento logico tra queste cose che abbiamo fatto? vede qualcosa su cui io potrei aver cercato delle informazioni? su di voi. .. sul vostro modo di pensare?

□ Come sono tra loro le figure?

(Vocio confuso)

□ Siccome sono... siccome vengono... come si trasformano le figure se uno le guarda da una parte o dell'altra.

★ Come si trasforma la figura ..., c'è qualcun altro che pensa che si possa osservare qualche altra cosa?

□ Le relazioni tra le figure.

★ Le relazioni tra le figure ... Beh, potrebbe essere ... Che tipo di relazioni?

□ Beh ... (*mostra due triangoli del suo Tangram di dimensioni diverse ma rettangoli isosceli*) questi due sono uguali, questi due (*mostra i due massimi*) sono identici.

★ Allora torniamo alla prima cosa che ci siamo chiesti e cioè: che differenza c'è tra identico e uguale... Siete d'accordo col vostro compagno? (*brusio*)... insomma, cosa stiamo cercando di osservare?

□ La forma delle figure.

□ La relazione tra le figure.

★ La relazione tra le figure. Cosa vuol dire?

□ Come sono tra loro.

★ Come sono tra loro nel senso di "se sono uguali"?

□ Se sono uguali ... identiche ... Stabilire se sono uguali o identiche.

★ Oh, stabilire se sono uguali o identiche. Voi avete un'idea allora di che cosa vorrà dire uguale, identico?

□ Sí ... No.

□ Identico ha tutte le stesse caratteristiche. Coincidono tutte le stesse caratteristiche.

□ Colore... la forma... grandezza.

□ Mentre uguale ha una caratteristica diversa ... Per esempio i due triangoli grandi sono tutti due blu, sono tutti e due triangoli rettangoli e i lati di ugual misura, mentre questi altri due sono sempre blu, sono rettangoli ma hanno le misure dei lati diverse, quindi sono uguali, ma non identici perché manca una caratteristica.

★ Ho capito ... Voi altri avete in mente qualcos'altro?

(Silenzio)

★ Quindi c'è una situazione per "identici" e una per "uguali". E sulla scheda del Tangram cosa avete scritto in risposta a "Come sono le figure"?
□ Hanno la stessa area.
★ Hanno la stessa area ... quindi... potremmo...
□ Sono uguali
★ Sono uguali?
□ Non identici. Uguali.
★ Sono uguali. Nel senso... vediamo: cosa vorr dire uguali?
□ Occupano lo stesso spazio.
★ Lo stesso spazio?
□ Hanno la stessa area.
★ Bon. Quindi potremo definirle uguali? (*Assenso*) Però se uno guarda sul momento le vede uguali?
□ No.
★ Allora? (*Imbarazzo*) E se io ho un Tangram... quello che ho a casa, cos'è rispetto al vostro?
□ Dipende... uguale... le dimensioni... uguale...
□ Se ha le dimensioni uguali è identico se invece non ha le dimensioni uguali è uguale.
★ È uguale... e i campi da calcio, come erano i campi da calcio? Avevo chiesto come erano quello disegnato dall'alto e quello visto dalla gradinata. Come erano in definitiva?
□ Diversi.
□ Diversi?
□ No! è la stessa cosa vista da un punto di vista diverso.

(Discussione animata)

□ Un attimo! Sta parlando dell'immagine o del campo?
★ Giusto. L'immagine o il campo? Allora parliamo del campo. Il campo come era?
□ Identico.
★ E il disegno come era?
□ Diverso... uguale... diverso... diverso perché cambiando il punto di vista si deforma.
★ Chi è che dice uguale?... perché hai detto uguale?
□ Perché ha le stesse dimensioni, è lo stesso campo da calcio.
★ Sí. Però lo stesso in che senso? Che cosa è rimasto lo stesso?

□ Il campo... le proporzioni... le linee... la riga centrale.

★ La riga centrale è rimasta la stessa... Quindi si potrà comunque definirla uguale a quella seconda figura?

□ Ha subito delle trasformazioni. Non è uguale.

★ Ha subito delle trasformazioni. Cosa intendi dire?

□ È trasformato.

★ Cosa vuol dire trasformato?

□ Che una o piú caratteristiche mutano.

□ Ha subito delle variazioni.

★ Ha subito delle variazioni. E questo fa sí che sia quindi diverso?

□ Sí... sí...

□ Secondo me, se varia solo una caratteristica allora è uguale, non identico ma uguale. Se ne cambia piú di una allora è diverso.

★ Allora vediamo: se una caratteristica cambia... Se i tuoi triangoli identici cambiano colore allora sono uguali.

□ Uguali. Se invece cambia anche la dimensione di un lato non sono piú uguali. Sono triangoli diversi.

★ Però se togli la caratteristica del colore...

□ Sono uguali.

★ E se tu ora ne hai uno rosso e uno blu, uno grande e uno piccolo? Hai cambiato una sola caratteristica nel senso che erano già di colore diverso e ora cambi solo la dimensione: sono uguali?

□ Sono diversi... cioè no. Bisogna che varino delle caratteristiche che deformano la figura per farli diventare diversi.

□ Sono simili ma non uguali.

★ Cioè? Casa vorrà dire simili? Siete d'accordo per il simile?

□ Cambiano le dimensioni, ma hanno la stessa forma.

Matrice cognitiva e commento

Il suono della campana ha interrotto la conversazione, ma quanto espresso e discusso dai ragazzi, specialmente il discorso sul colore, è stato utile per arrivare, nella lezione successiva, a scegliere collegialmente un significato definitivo per *identico* (coincidente), *uguale* (congruente), *uguale a meno di* (trasformato). In seguito, quando l'argomento lo permetteva (per esempio nel distinguere equazioni con infinite soluzioni dalle identità e queste dalle identità condizionate), le schede, le risposte e la conversazione sono state citate come esempio e confronto con la teoria esposta in quel momento, risultando particolarmente efficaci.

5.4 Vettori

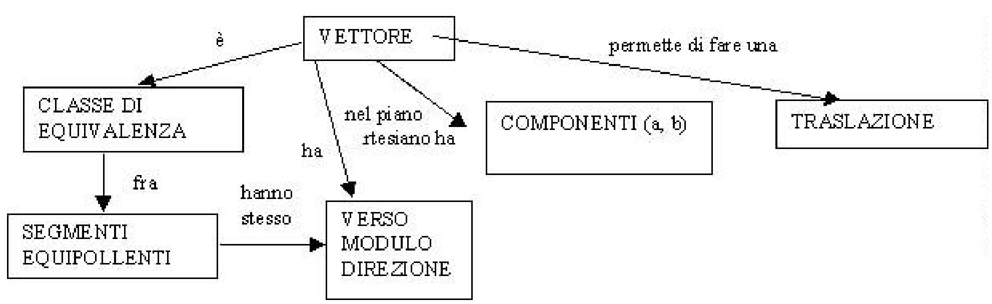
La mappa concettuale in una verifica dell'apprendimento (di Sylviane Beltrame - II Liceo Scientifico)

Come quinto esercizio di un compito di Matematica è stato chiesto di costruire una mappa sul concetto *"vettore"*. Gli studenti avevano già avuto alcuni esempi di mappe concettuali, avendo costruito insieme all'insegnante alcune mappe su argomenti come *"isometrie"* o *"radice di un numero reale"*, come supporto delle lezioni in classe; non erano stati avvertiti degli argomenti della verifica e neanche del fatto che avrebbero dovuto produrre una mappa concettuale. Era solo la seconda volta che veniva loro richiesto di costruirne una da soli e il tempo a disposizione era circa di 10 minuti (considerato che il compito comportava altri quattro punti). È stato scelto quindi un concetto che consentisse una mappa piuttosto limitata.

Sui vettori gli alunni conoscevano già la rappresentazione (segmento orientato determinato da verso, direzione, modulo) e la definizione rigorosa (classe di equivalenza per la relazione di equipollenza dei segmenti); nell'anno in corso avevano da poco visto la definizione di "traslazione", a partire dai vettori e, per il giorno stesso della verifica, avrebbero dovuto leggere due pagine del libro di testo, che introducevano i vettori come coppia di componenti nel piano cartesiano. Ci si aspettava quindi da loro un lavoro che rendesse conto delle possibili definizioni di "vettore", della loro rappresentazione e del loro collegamento con le traslazioni.

Alcune mappe tracciate dagli studenti:

[1]



Nella mappa [1] sono presenti i concetti chiave:

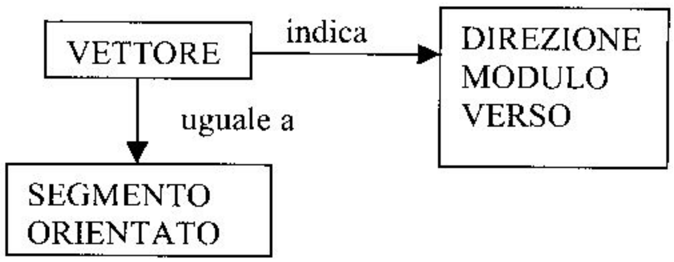
- classe di equivalenza,
- direzione - verso - modulo,

- traslazione,
- componenti - piano cartesiano

e i legami sono riportati con frasi appropriate.

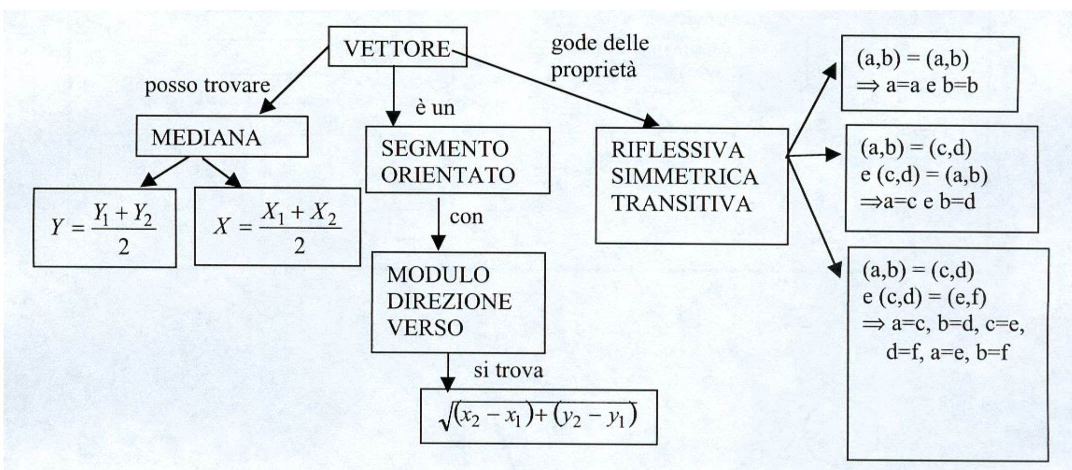
Le conoscenze risultano complete, precise, organizzate.

[2]



Nella mappa [2] mancano quasi tutti i concetti chiave, a parte quello piú intuitivo di segmento orientato (ripetuto nel concetto direzione - verso - modulo), denotando insufficienza delle conoscenze e difficoltà all'astrazione.

[3]



La mappa [3] denota:

- conoscenze errate o approssimative (modulo, proprietè di una relazione di equivalenza);
- improprietà di linguaggio ("mediana" invece di "punto medio", confusione con i segmenti);

- legami non opportuni o secondari con altri concetti introdotti nella mappa per il solo fatto di essere ... stati oggetto della lezione precedente (punto medio di un segmento, distanza tra due punti);
- difficoltà di sintesi (esposizione dettagliata delle proprietà di una relazione di equivalenza).

Questo esercizio è parso uno strumento veloce ed efficace per valutare la padronanza (limitatamente alla definizione) del concetto di vettore.

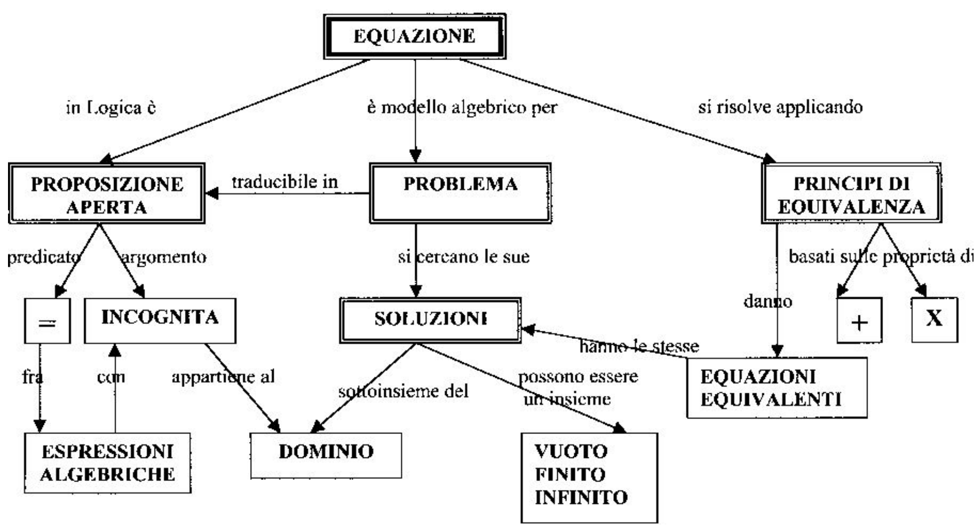
Anche se all'inizio questo tipo di verifica suscita perplessità perché inusuale, poi coinvolge gli alunni che, alla restituzione dei compiti, si sono premurati di confrontare le loro mappe, cercando di capirne i pregi e i difetti.

5.5 Equazioni e disequazioni

5.5.1 La mappa concettuale nel passaggio dalle equazioni alle disequazioni

(di Sylviane Beltrame - I Liceo Scientifico)

Giugno, è l'ultima settimana di lezione e non è il caso di iniziare un'unità didattica troppo lunga. La mappa sulle equazioni appena costruita dagli studenti, come momento di sintesi e organizzazione delle conoscenze, fornirà l'occasione per introdurre, in modo rapido ma completo, il concetto di "disequazione".



Dapprima una breve conversazione sulla parola *"disequazione"* mette in evidenza che le disequazioni hanno molti aspetti comuni con le equazioni e che la differenza essenziale sta nel fatto che si scrivono come disuguaglianze. A questo punto l'insegnante propone di usare la mappa già costruita per il concetto *"equazione"*, mantenendo tutti i concetti e i legami che accomunano equazioni e disequazioni e modificando quelli che non sono piú validi per le disequazioni. Naturalmente non è l'insegnante a proporre le modifiche, ma la classe, sollecitata da vari esempi o domande.

Vengono cosí effettuate alcune modifiche.

- *Uguaglianza* è sostituito con *disuguaglianza*.
- Il fatto che per le disequazioni l'insieme delle soluzioni risulti generalmente un intervallo (argomento già trattato nel 1^o quadrimestre come insieme di verità di proposizioni aperte), ha provocato l'osservazione di un'alunna, che allora quasi tutte le disequazioni si potrebbero qualificare come indeterminate ... da qui l'inutilità della terminologia "determinata", "indeterminata" per le disequazioni. Sotto "soluzioni" si preferisce allora evidenziare il concetto"intervallo".
- Alcuni esempi evidenziano che, mentre il 1^o principio di equivalenza delle equazioni rimane valido per le disequazioni, il 2^o viene drasticamente modificato e limitato (si può solo moltiplicare i due membri della disequazione per un numero o per un'espressione di cui si conosce il segno), stuzzicando subito la curiosità sulla risoluzione delle disequazioni fratte (che rimandiamo all'anno prossimo!). Data l'importanza di questa differenza nel procedimento risolutivo, si decide di introdurre nella mappa sulla "disequazione" una maggiore precisione riguardante i principi di equivalenza.

Ed ecco che in due ore, modificando un materiale precedentemente elaborato, gli studenti si sono appropriati del concetto di disequazione la cui conoscenza dovrebbe risultare rafforzata da questo lavoro di analogie e differenze fra due concetti affini. Questo metodo, oltre a produrre una grande partecipazione degli alunni, che si sentono protagonisti del proprio apprendimento, offre il vantaggio di un guadagno non indifferente di tempo (apporto della "Didattica per concetti" alla "Didattica breve").

5.5.2 La mappa concettuale nella verifica dell'apprendimento delle equazioni lineari in due incognite

(di Sylviane Beltrame - II Liceo Scientifico)

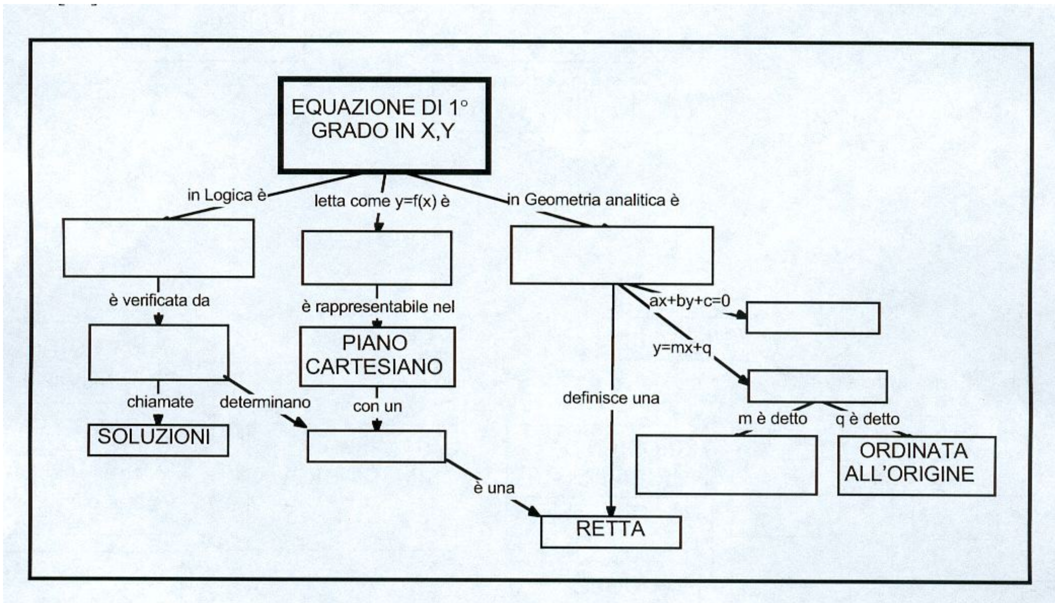
Il concetto di equazione lineare in x, y ed il suo significato devono essere molto chiari per una consapevole interpretazione dei sistemi lineari, sia dal punto di vista algebrico, sia da quello geometrico.

All'inizio dell'anno, dopo avere scritto sulla lavagna "$2x - 3y = 1$", è iniziata una conversazione sul significato di quest'uguaglianza, che ha fatto riemergere i concetti di *proposizione aperta, equazione, funzione*, già acquisiti in 1^a. Un lavoro di gruppo, con esercizi di passaggio da funzioni lineari a grafici di rette, ha permesso un primo approccio alle rette nel piano cartesiano.

Pochi giorni dopo queste attività preliminari e dopo alcuni esercizi elementari sulla retta, è stata proposta la seguente verifica, articolata in 3 esercizi, con un tempo complessivo di 20 minuti.

Compito in classe

1. Completare la mappa con i concetti mancanti:



2. Tradurre la frase "(2, 1) è soluzione dell'equazione $2x - y = 3$"

   a) col linguaggio della Logica:

   ....

   b) col linguaggio delle funzioni (Algebra):

   ....

   c) col linguaggio della Geometria analitica:

   ....

3. Scrivere l'insieme delle soluzioni delle seguenti equazioni in x e y:

   $3x - 7y = 2 \quad S =$
   $0x + 0y = 15 \quad S =$
   $0x + 5y = 20 \quad S =$

Commento

L'esercizio 1 si presenta come una mappa bucata da completare; permette di verificare sia la comprensione del concetto tramite le sue varie interpretazioni in Logica, Algebra e Geometria analitica, sia il possesso di un linguaggio.

Le risposte attese sono:

1 ramo: proposizione aperta, coppie di numeri;

2 ramo: funzione, grafico;

3 ramo: equazione di una retta, implicita, esplicita, coefficiente angolare.

L'esercizio 2 consente di accertare la reale comprensione, da parte dello studente, dei legami espressi nella mappa, richiedendo di esprimere con tre linguaggi specifici (Logica, Algebra, Geometria analitica) lo stesso concetto di "soluzione di un'equazione lineare".

Le risposte attese sono:

a) la coppia (2,1) rende vera la proposizione aperta $2x - y = 3$;

b) 2 ha per immagine 1 tramite la funzione $y = 2x - 3$;

c) il punto di coordinate (2,1) appartiene alla retta di equazione $2x - y - 3 = 0$.

L'esercizio 3 chiede la risoluzioni di equazioni semplici delle quali però gli studenti hanno generalmente difficoltà a scrivere l'insieme delle soluzioni; in questo modo si verifica la capacità di applicare le conoscenze espresse nella mappa.

Le risposte attese sono:

1^a **equazione:** $S = \left\{(x, \frac{3x-2}{7} : x \in \mathbb{R}\right\}$

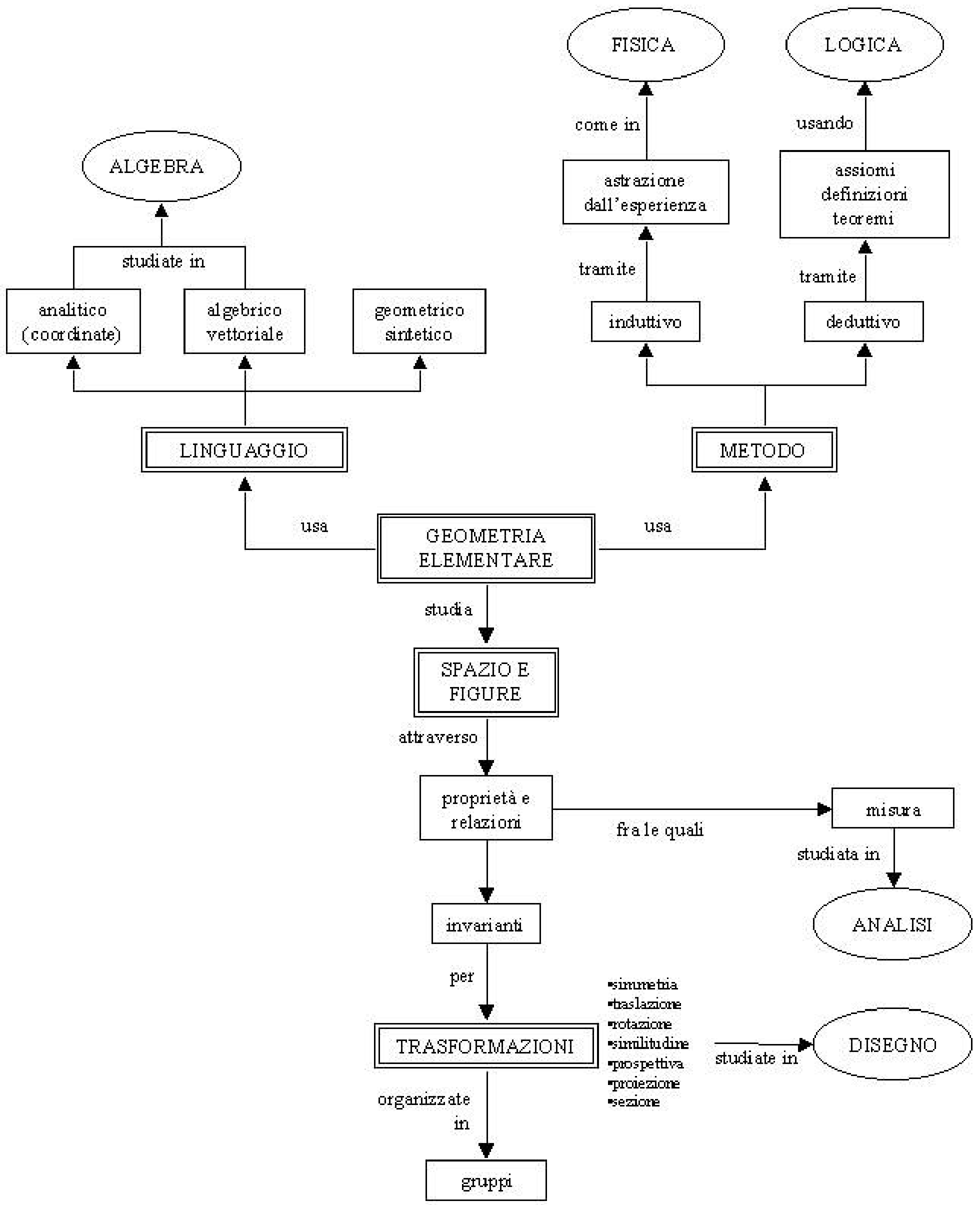
2^a **equazione:** $S = \emptyset$.

3^a **equazione:** $S = \{(x, 4) : x \in \mathbb{R}\}$.

Questa verifica, somministrata all'inizio dell'anno scolastico, ha dato risultati un po' al di sotto dell'abituale profilo della classe, in quanto ha smascherato chi si accontentava di applicare le regole, senza vera consapevolezza e senza soffermarsi sulla comprensione dei concetti: si è chiarito cosí in modo efficace che in una seconda liceo scientifico si richiedono competenze basate su uno studio attento della teoria e non solo sulle esercitazioni applicative.

5.6 La geometria elementare

5.6.1 Mappa Concettuale



5.6.2 Conversazione clinica su "geometria"

(di Giuliana Catanese - IV Ginnasio)

L'intervista è stata svolta nel mese di ottobre, quando non si era ancora mai parlato di Geometria. Era stato preannunciato, nella lezione precedente, che si sarebbe fatta una chiacchierata insieme su di un argomento e la cosa sarebbe stata registrata, per abituare psicologicamente gli allievi all'idea.

Era stato anche ben chiarito lo scopo della conversazione e l'assenza di valutazione sugli eventuali interventi. La classe è vivace nei rapporti interpersonali, è dotata di elementi con spiccate capacità intellettuali ed è motivata allo studio.

Interventi

★ Che cosa vi ricordate della geometria fatta alle medie e alle elementari? ... A che cosa serve? che cosa studia? ... (*Silenzio*) Qualcosa vi sarà rimasto in testa dopo cinque anni! ...

□ Abbiamo fatto i solidi.

★ Allora la geometria studia i solidi?

□ No, studia anche le figure piane.

★ Che cosa studia delle figure piane? Superficie, volume, perimetro ... È l'unico scopo della geometria?

...

★ Allora serve solo per studiare volume, area delle figure?

...

★ Con che metodo indaga?

...

□ Mentre le altre parti della matematica sono astratte, la geometria permette di ragionare su cose concrete, noi infatti disegniamo la figura, la guardiamo e possiamo ragionarci sopra.

★ È concreta perché noi possiamo disegnare la figura?

□ Anche se non hai il disegno, tu però sai com'è fatta.

□ Ma anche perché se un contadino deve comperare un campo gli serve trovare l'area.

★ Dunque un fine pratico?

□ Serve anche a far ragionare.

(*Voci confuse*)

★ E come metodo d'indagine?

□ Si usano le formule ...

. . .

★ E chi te le ha date?
□ L'uomo nel corso dei secoli ha maturato certe conoscenze.
□ Ce le ha date l'insegnante ...
★ E voi perché le avete accettate?

(*Risate fragorose*)

□ Perché non sapevamo farne di altre!
★ E se voi aveste saputo farne di altre avreste fatto geometria lo stesso?
□ Potremmo andare oltre ...
★ Potreste inventarvi voi una geometria? Ma queste formule vi sono state dettate e basta?
□ No, l'insegnante le dimostrava.
□ No, a me le dava e poi diceva: adesso fate questi esercizi per applicarle.
□ Cercavano di spiegarcele.
★ E come ve le spiegavano, ricorrendo al disegno, ad esperienze pratiche?
□ Facevano un po' vedere ....
★ Ma è collegata al resto della matematica?
□ È collegata all'algebra nell'Analitica.
★ Come?
□ Con le tacche.

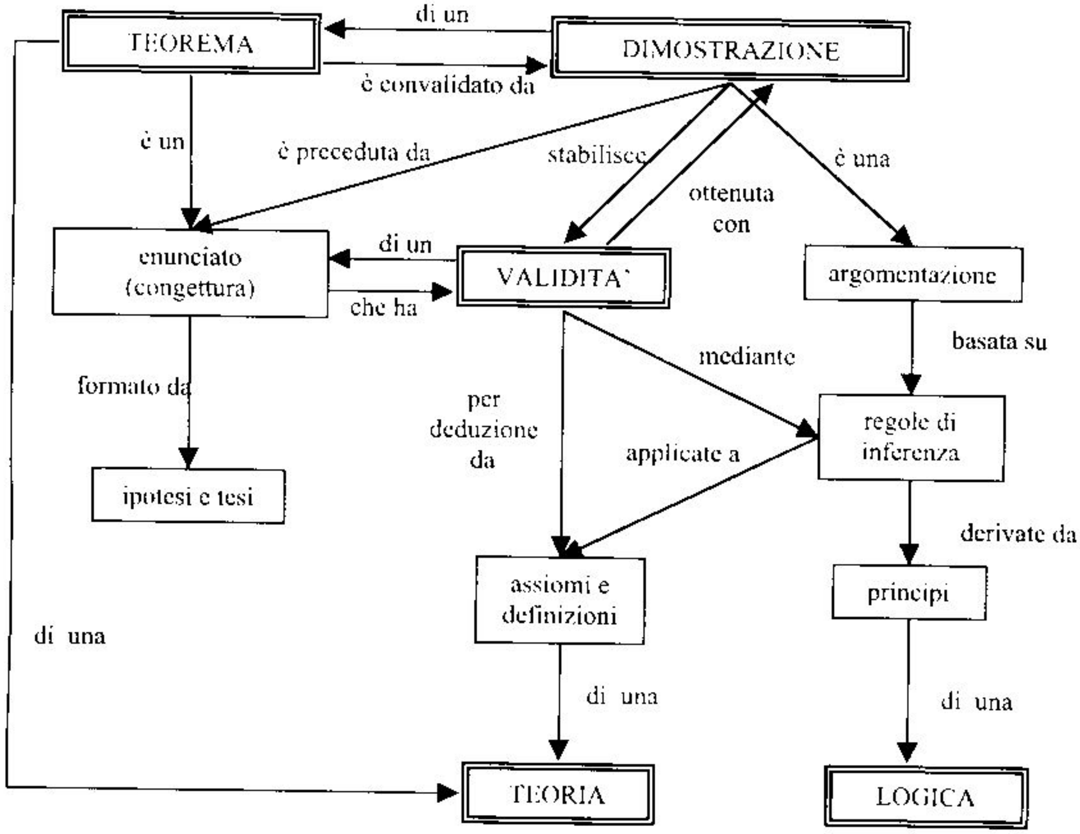
Matrice cognitiva e commento

La conduzione dell'intervista è stata molto pesante. L'impressione è che non fossero emozionati dal registratore, ma che non sapessero proprio cosa dire.

Per la maggioranza degli allievi la geometria si riduce alla misura. Si intravede come interessante lo sviluppo della discussione e del confronto critico ai diversi modi di giustificare la validità di un'affermazione (dimostrazione, spiegazione, verifica a occhio).

5.7 Il metodo ipotetico-deduttivo

5.7.1 Mappa concettuale



5.7.2 Indagine scritta su "ipotesi", "tesi", "dimostrazione", "ragionamento logico", "verità"

(di Silvana Sclippa - I Liceo Scientifico (due Sezioni))

Si riportano di seguito solo alcune delle risposte piú significative.

★ Che cos'è per te un'ipotesi?

☐ In senso matematico, è una immaginaria situazione (della quale vengono forniti dati e informazioni) utile a spiegare concetti o a applicare conoscenze.

☐ È un pensiero che si formula in relazione a determinati interrogativi: è un ragionamento teorico.

☐ È qualcosa che ognuno di noi pensa a modo proprio, seguendo la propria mente. Non è una cosa precisa, ma è libera perché ognuno può pensare cose diverse riguardo un argomento, per es. la teoria dell'evoluzione delle specie.
☐ È un pensiero basato su deduzioni e non su prove reali.
☐ È l'insieme dei dati che mi servono per risolvere un problema o un quesito.
☐ È una possibilità.
☐ Per me è un tentativo di spiegare qualcosa, in matematica invece sono i dati di un problema.
☐ Una proposta personale che serve per proporre o capire i fatti di molti campi differenti, la vita, la scuola, il lavoro e molti altri ... Vuol dire affermare qualcosa e saperla spiegare tramite esempi e prove concrete che servono per accertare se è vera.
☐ Un'affermazione di cui non si sa con certezza l'esattezza, è basata tuttavia su approfondimenti e studi sull'argomento trattato.
☐ Cercare di capire che cosa ha determinato un certo fenomeno. Per es: in una indagine poliziesca l'ipotesi di chi potrebbe essere stato l'assassino, l'ipotesi del movente, ecc.
...

★ Cos'è una tesi?
☐ Una tesi in senso matematico è un insieme di domande e richieste sulla base di un'ipotesi.
☐ È la divulgazione su un argomento specifico; come idea è piú chiara e definita dell'ipotesi.
☐ Una teoria che viene elaborata da un individuo e viene spiegata o anche cambiata a modo proprio.
☐ È un pensiero supportato da prove reali.
☐ Una regola o una affermazione che conferma l'ipotesi.
☐ Una teoria, una legge, una formula scientificamente provata e, in campo matematico, universalmente valida.
☐ È l'insieme degli elementi ancora da trovare di un problema.
☐ Si portano agli esami di maturità; dovrebbe essere riassunti di una determinata materia, nel corso dell'anno.
☐ Una specie di relazione con i propri punti di vista.
☐ Lo svolgimento di una ricerca su un argomento.
☐ L'insieme delle cose che dovranno esserci alla fine. es. calcola l'area del triangolo $ABC = TH : A(ABC)$. Oppure tesi di laurea che significa esporre la propria opinione su un argomento prescelto.
☐ Una trattazione molto sviluppata e articolata, che espone in modo chiaro l'argomento proposto, verificando tutte le affermazioni proposte.
...

★ Cosa vuol dire “dimostrare”?

☐ Spiegare secondo un ragionamento una data cosa.

☐ Verificare, con metodi scientifici, un’ipotesi.

☐ A parole o a fatti far capire agli altri o provare la verità di un argomento, di qualcosa di diverso.

☐ Rendere noto o spiegare attraverso le proprie capacità e le proprie conoscenze una tesi.

☐ Fare un esempio, spiegare un ragionamento.

☐ Provare qualche cosa con fatti o cose che tutti possono constatare e capire.

☐ Verificare se un risultato o una soluzione è stata eseguita in modo corretto.

☐ Dare una serie di informazioni che giustifichino una risposta.

☐ Esemplificare un’ipotesi, cioè portare molti esempi per rendere piú logica la risposta.

☐ Far vedere a una persona cosa sa fare (nel calcio, far vedere le proprie qualità; nella matematica, secondo me significa fare una controprova per vedere se quella risposta data è giusta).

☐ Mettersi alla prova, riuscire a realizzare un’idea sostenuta.

...

★ Cosa intendi per “ragionamento logico”?

☐ Un insieme di passaggi di senso compiuto, cioè che hanno un senso.

☐ Che si basa su delle teorie, cioè delle regole fisse.

☐ Un insieme di passaggi e di collegamenti fatti per raggiungere una determinata ipotesi.

☐ Un modo di ragionare basato su fatti reali e veritieri.

☐ Un percorso mentale che porta alla soluzione di un problema seguendo dei criteri logici ben precisi.

☐ Una dimostrazione di qualsiasi cosa suddivisa in corte sequenze che porta ad una conclusione che si può ritenere giusta, sensata.

☐ Segue un filo logico e quindi ha un senso compiuto.

☐ Un tipo di ragionamento che segue un nesso e che ha una certa continuità.

☐ È un ragionamento, un pensiero che parte da un punto ben preciso per arrivare ad un punto conclusivo tramite pensieri, azioni con un filo immaginario che li lega.

☐ È un’idea sensata che si basa sulle proprie conoscenze.

☐ Un ragionamento fatto matematicamente, passo per passo.

☐ In ogni tipo di problema (non solo quelli che si fanno a scuola) c’è sempre un ragionamento e lo “svolgimento”, e non si potrebbe farlo o pensarlo in altro modo e che poi viene tutto da solo perché è cosí ovvia la risoluzione del tuo problema. Per logico ... ovvio, certo.

☐ Quello che ci permette di arrivare ad una soluzione, seguendo, in matematica, le regole senza andare a tentativi.

☐ Un modo di pensare e di riflettere su determinati argomenti in modo logico, riflettendo bene sulle cause e sulle conseguenze che questo può comportare, osservando esempi, grafici, opinioni, ipotesi, affermazioni.
☐ Quello che segue un procedimento piú semplice per raggiungere una risposta. Es: nell'analisi logica ... si segue un percorso logico, si individua il verbo, si scopre il soggetto, si analizzano i vari complementi seguendo il filo del discorso.
☐ Ragionare su una determinata cosa seguendo determinati schemi; es. la moltiplicazione. Per trovare il prodotto devo moltiplicare i due fattori seguendo un ragionamento logico.
☐ Pensare senza sapere alcune informazioni, ma arrivandoci appunto pensando.
☐ È quell'insieme di idee e ragionamenti che ti portano con semplicità a trovare la soluzione di un dato problema.
☐ Un pensiero che si basa solamente sulle tue capacità logiche che non è mai sbagliato. Perché la logica è una grande scoperta dell'uomo: Es. vinco il superenalotto e divento ricco; piove e quindi prendo l'ombrello.
☐ Il saper ragionare basandosi non su numeri ma sulle parole.
...

★ Cosa vuol dire che una certa affermazione è vera?
☐ Quando è stata accertata secondo un ragionamento logico.
☐ Quando può essere spiegata scientificamente.
☐ Che può accadere, che è giusta, che non ha errori e che può essere provata, dimostrata.
☐ Che è reale e che si può dimostrare praticamente.
☐ Che è stata verificata attraverso un percorso logico che ne ha provato la fondatezza.
☐ Quando può essere dimostrata in ogni caso.
☐ Se studio bene una lezione, e il libro fa una domanda, e secondo quello che ho studiato, è giusta, allora ripete, in stesse parole o modificate, la stessa cosa che ha scritto il libro nelle pagine teoriche (*sic*).
☐ Quando non ci sono dei controesempi.
☐ Nel momento in cui, dopo aver scartato tutte le altre ipotesi, si può dimostrare che questa può avere effettivamente riscontro nella realtà.
☐ Quando il caso proposto si verifica in tutte le situazioni possibili, quando ciò che è proposto è sempre vero.

Matrice cognitiva

L'indagine è stata svolta in due classi, per un numero complessivo di 53 allievi. Sono di seguito elencati i tipi di risposta e, fra parentesi, il numero di allievi che l'hanno data.

Per il concetto di *ipotesi*

Un'opinione personale o la risposta ad un quesito non ancora verificata (49).

Un pensiero basato su deduzioni e non prove reali (2).

In Matematica: una situazione immaginaria della quale vengono forniti i dati (3).

Per il concetto di *tesi*

Verifica delle ipotesi, affermazione basata su prove (19).

Relazione approfondita su un argomento con punti di vista personali (23).

In matematica: un insieme di domande sulla base di un'ipotesi (9).

Per il concetto di *dimostrare*

Spiegare (15):

a) con un ragionamento, a parole;
b) con esperimenti o esempi, a fatti;
c) attraverso le proprie capacità e conoscenze.

Verificare, provare (35):

a) la verità;
b) la correttezza;
c) con informazioni;
d) con metodi scientifici;
e) con esperimenti.

Mostrare agli altri qualcosa che si sa fare, mettersi alla prova (4).

In Matematica: fare controprove (1).

Per il concetto di *ragionamento logico.*

Un insieme di passaggi, un percorso mentale (41):

a) di senso compiuto;
b) con filo logico;
c) per raggiungere un'ipotesi;
d) per trovare conseguenze;
e) basato su teorie e regole fisse;
f) basato su supposizioni e prove;
g) basato su fatti reali e veri;
h) basato su idee chiare e precise.

Pensare, senza saperle, alcune informazioni, ma arrivandoci pensando; ragionare basandosi non sui numeri, ma sulle parole (2).

Ovvio, certo (5).

Fatto matematicamente passo per passo (algoritmo!) (5).

Per il concetto di *affermazione vera.*

Dimostrabile, si pu provare (38):

a) con esempi, con fatti;
b) con ragionamento logico;
c) scientificamente;
d) in relazione ai concetti espressi prima.

Senza contro esempi, si può provare che non è falsa (7).

Corretta, giusta (4).

Se studio bene una lezione e il libro fa una domanda e secondo quello che ho studiato è giusta, allora ripete, in stesse parole o modificate, la stessa cosa che ha scritto il libro nelle pagine teoriche (*sic*) (1).

5.7.3 Indagine scritta su "dimostrazione" e "verifica"

(di Agostino Margari - I Liceo Scientifico)

Gli studenti del primo anno della scuola secondaria hanno già incontrato le parole "dimostrazione" e "verifica" in piú ambiti disciplinari (matematica, fisica, scienze ecc.) e nel linguaggio quotidiano, spesso utilizzandole come sinonimi; pertanto è necessaria un'analisi attenta del loro significato.

Entrambi i termini riguardano il valore di verità di un processo, ma relativo ad un differente livello:

- la dimostrazione è il ragionamento con il quale si prova, attraverso una serie di proposizioni intermedie, che una determinata affermazione, o tesi, è necessaria conseguenza di premesse prestabilite, o ipotesi;

- la verifica è l'operazione che permette l'accertamento dell'esattezza di un calcolo.

Fin dal primo anno della scuola elementare è richiesta la verifica dell'esattezza di un calcolo, si utilizza poi lo stesso termine per giustificare l'esigenza dell'attività sperimentale, prima di accettare una relazione fra grandezze fisiche, e anche nel linguaggio quotidiano si parla di verifica per attribuire il valore di verità ad un'affermazione.

Nel corso della scuola elementare e media la conoscenza è limitata al ricordo e alla corretta applicazione: conoscere il teorema di Pitagora significa ricordarne l'enunciato ed essere in grado di applicarlo.

Nel corso del primo anno di scuola media superiore, è richiesto allo studente di attribuire il valore di verità ad un'affermazione o ad un algoritmo solo in seguito ad una dimostrazione, ma spesso non è sentita l'esigenza del dimostrare, né potrebbe esserlo in quanto lo studente ritiene di essere già in possesso di uno strumento, la verifica, in grado di confermare o meno la validità di un processo.

Questa potrebbe essere una delle cause per le quali gli studenti incontrano difficoltà nell'accettazione e nello sviluppo delle dimostrazioni.

Non è possibile riuscire a modificare in breve tempo, solo mediante esempi o mediante una trattazione teorica del problema, un punto di vista consolidato nel corso della carriera scolastica da molteplici esperienze: nasce quindi l'esigenza di far emergere, attraverso una conversazione clinica, il significato che ogni studente attribuisce ai due termini per individuare il punto di partenza e il percorso adeguato ad uno sviluppo della conoscenza, in modo da favorire una rielaborazione critica delle informazioni possedute e non una semplice sovrapposizione di nuove nozioni a quanto già assimilato.

Per consentire ad ogni studente di esprimere il proprio parere, senza essere influenzato dalle opinioni altrui, si è ritenuto opportuno dare l'avvio alla conversazione clinica con la richiesta di illustrare per iscritto (eventualmente mediante qualche esempio) la relazione esistente tra verifica e dimostrazione.

Si riportano alcune delle risposte piú significative:

- □ A mio parere la verifica è un qualcosa che ti impone una persona o piú persone per verificare le tue capacità o conoscenze. Mentre la dimostrazione può nascere dalla stessa persona che dimostra, non c'è quindi una pressione esterna.
- □ Dimostrare è far vedere agli altri questo che si sa o che si ha. Verificare è scoprire, capire, se veramente si sa qualcosa.
- □ Per verifica si intende genericamente il controllo di un esperimento, di un lavoro. La dimostrazione, invece, è la spiegazione di tale esperimento, fenomeno, evento.
- □ Una verifica può essere intesa come compito in classe oppure come uno strumento utilizzato per conoscere le potenzialità di qualcuno o di qualcosa. Una dimostrazione può essere il risultato di una verifica (ad esempio con una verifica si può dimostrare che ...).
- □ La verifica è la prova che si fa dopo che, ad esempio, una legge è già stata formulata e provata; in pratica è una "controprova" della validità, per esempio, di una legge. La dimostrazione, invece, si fa subito dopo la formulazione di un'ipotesi, prima che questa sia già diventata legge e serve per provare la validità. In pratica c'è una relazione tra dimostrazione e verifica: prima viene la dimostrazione, poi si fa la verifica.
- □ Dimostrare significa, secondo me, saper svolgere, eseguire, anche far vedere un ragionamento, agli altri e a se stessi. Per me la verifica è una

"ridimostrazione" per rendersi conto delle sue effettive conoscenze o per vedere se il suo ragionamento è corretto.

- □ Per me verifica è verificare le conoscenze che ha qualcuno attraverso un'indagine da parte dei docenti, invece dimostrazioni sono gli studenti che dimostrano le proprie conoscenze attraverso una verifica o un'esposizione volontaria delle proprie conoscenze.
- □ La verifica è una cosa fatta per verificare le capacità di ognuno a cui è sottoposta la verifica. Dimostrazione invece è usata per dimostrare un'affermazione precedentemente detta, come per esempio un esperimento scientifico: l'acqua evapora a 100^oC. Per dimostrare questa affermazione bisogna creare le condizioni per cui la frase dovrebbe essere esatta. Mettere l'acqua in condizione di raggiungere i 100^oC e se l'acqua evapora l'ipotesi è dimostrata. La verifica si sottopone ad esempio a molti alunni per verificare se le loro capacità sono all'altezza delle aspettative.
- □ La verifica è un modo di rappresentare qualcosa. La dimostrazione invece è qualcosa per dimostrare qualcosa di certo. La verifica invece deve provare qualcosa che non ha fondamenta solide. Come ad esempio quando (in fisica) ci sono degli eventi da dimostrare (nel metodo sperimentale) si cerca un riscontro (con la verifica) per poi (se ci sono riscontri) arrivare a una legge o addirittura a una dimostrazione. Invece una dimostrazione (come ad esempio in una interrogazione) dimostra qualcosa di certo.
- □ Verificare significa controllare qualcosa, per esempio un procedimento. Dimostrare invece significa fare capire che un determinato procedimento o ragionamento è corretto: molto spesso bisogna dimostrare qualcosa a delle persone; anche in passato, quando venivano fatte delle scoperte scientifiche o di altro tipo, era molto difficile dimostrarle alla gente, perché si trattava di cambiare la mentalità delle persone.
- □ Secondo me una verifica è un test che si fa durante l'elaborazione di un determinato argomento, per comprendere se si ha acquisito o meno l'argomento in questione. La dimostrazione invece è un compito in classe che serve per dare un voto alla fine di uno studio di alcuni argomenti ed è piú ampio. Durante la dimostrazione, secondo me, si deve far comprendere che tutto quello che si è fatto, è stato studiato e acquisito mediante esempi o semplici dimostrazioni. Inoltre secondo me non c'è una forte relazione fra i due, solo in alcuni casi si appoggiano.
- □ La verifica è un esempio che rende vero un determinato concetto. È valida solo per quell'esempio, mentre la dimostrazione è un esempio generale che è valido con qualsiasi valore possibile.

□ La verifica secondo me è la riesaminazione di un argomento di solito già trattato. La dimostrazione secondo me è il provare apertamente un'idea, un concetto o una relazione. La verifica secondo me quindi viene svolta individualmente mentre la dimostrazione apertamente.

□ Secondo me esiste una relazione tra verifica e dimostrazione in quanto verifica vuol dire accertarsi su qualcosa che si è fatto per sapere se si è appresa una determinata cosa, mentre dimostrare significa far vedere a qualcuno che si è capita una cosa e quindi si dimostra agli altri un discorso e lo si espone magari attraverso degli esempi.

□ Si possono verificare conoscenze o fatti conosciuti e di cui si sa già prima il perché. Si dimostrano fatti o conoscenze di cui non si conosce il motivo o questo non è chiaro e non è facilmente comprensibile. In una dimostrazione è possibile contraddire delle affermazioni, mentre la verifica è piú chiara ed è minore la possibilità di sbagliare (ad esempio in un'interrogazione, verifica scritta).

□ Secondo me la verifica è un sistema per dimostrare la correttezza, mentre la dimostrazione è la spiegazione che può essere anche la verifica scrivendola in parole. Esempio di verifica: $x + 2x = 6$; $3x = 6$; $x = 2$ perché $2 + 2 \times 2 = 6$. Esempio di dimostrazione: se x addizionato a $2x$ fa sei e quindi x è uguale a 2, questo è giusto perché si può dimostrare che $2 + 2 \times 2$ fa 6.

Matrice cognitiva e commento

Da alcune delle risposte date è risultato agevole far emergere cosa si intende in ambito matematico con i termini *"verifica"* e *"dimostrazione"*, ma è stato altrettanto interessante far osservare come anche le affermazioni, che ad un'analisi superficiale possono sembrare errate, in effetti sono utili per una comprensione piú approfondita dei termini in esame e della relazione che intercorre fra essi. Ad esempio l'analisi del differente livello del valore di verità che la verifica e la dimostrazione permettono di attribuire è stata effettuata utilizzando le risposte di chi ha inteso la verifica come strumento di indagine sulle conoscenze acquisite. Infatti, mediante un questionario, è possibile verificare se alcuni argomenti sono stati assimilati dalla classe, ma ciò non consente di indagare sulla validità del metodo di studio adottato, che potrebbe aver consentito di rispondere correttamente ad alcune domande pur non essendo valido per un'adeguata comprensione della disciplina, proprio come è possibile ottenere il risultato corretto in un'operazione aritmetica attraverso un algoritmo errato, senza che questo possa essere rilevato dalla "verifica".

6 Conclusioni

Le mappe concettuali e le conversazioni cliniche (o, piú modestamente, le interviste) si sono dimostrate, in queste esperienze, due strumenti che si bilanciano a vicenda: l'intervista sollecita da parte degli allievi un atteggiamento di discussione e di ricerca, che però viene guidato dall'insegnante sulla base della mappa concettuale, da questi prima tracciata per sé, e poi ricostruita con gli allievi.

Il metodo attivo, utilizzato nell'intervista, introduce nell'attività didattica una certa dispersione dei tempi e delle conoscenze, dispersione a cui si rimedia con l'abitudine ad esplicitare e ad organizzare i concetti, parallelamente al loro apprendimento.

Le due tecniche sperimentate hanno modificato piú profondamente del previsto il tradizionale contratto didattico nell'insegnamento della matematica, ed hanno richiesto all'insegnante e agli allievi un nuovo atteggiamento di fronte a questa materia scolastica. Tale impegno acquista un significato ancora maggiore quando l'applicazione di queste tecniche si prolunga lungo tutto il percorso didattico: l'attività del Nucleo di ricerca continua infatti con la sperimentazione della didattica per concetti nei vari momenti di questo percorso, in modo da presentare agli insegnanti un metodo efficace e sostenibile per raggiungere il loro obiettivo.

Riferimenti bibliografici

[1] ATTI DEL CONVEGNO DI VERONA: *La costruzione della conoscenza matematica nella scuola media*, Verona 1993, SEI, Torino.

[2] AUSUBEL D.P.: *Educazione e processi cognitivi*, Angeli, 1990.

[3] AZZALI E., VISINTIN I.: *Primi concetti di geometria nello spazio: un'esperienza nel secondo ciclo della scuola elementare*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 21A n. 2, 111-155, 1998.

[4] BARNABA A. et al.: *Problemi didattici del concetto di uguaglianza*, L'Educazione Matematica, anno 13°, serie III, vol. 3, n. 1, 5-16, 1992.

[5] BARTOLINI BUSSI M., BONI M.: *Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un'approccio vygotskiano*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 18A n. 3, 221-256, 1995.

[6] BOZZOLO C.: *Seminari del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica*, Università Cattolica di Brescia, 1987 - 1996.

[7] BOZZOLO C.: *Un percorso pieno di angoli*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 21B n. 6, 611-618, 1998.

[8] DALLA TORRE P., MARCHI M., MONCECCHI G., PERELLI M.P.: *Geometrizzazione dello spazio ambiente: una proposta didattica*, Quad. n. 4, 1990, Progetto strategico del C.N.R.

[9] DAMIANO E.: *Scienza e insegnamento. Modelli didattici a confronto*, I.S.U. Università Cattolica, 1991.

[10] DAMIANO E. (a cura di): *Guida alla Didattica per concetti*, Iuvenilia, 1995.

[11] DAMIANO E.: *La nuova ricerca didattica tra saperi pedagogici e saperi disciplinari*, L'Educazione Matematica, anno 20°, serie VI, volume 1, n. 3, 137-146, 1999.

[12] D'AMORE B.: *Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della Matematica* L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 22A n. 3,1999.

[13] FISCHBEIN E.: *The theory of Figural Concepts*, Educational Studies in Mathematics, 24, 139 - 162, 1993.

[14] FREUDENTHAL H.: *Ripensando l'educazione matematica*, Editrice la Scuola, 1994.

[15] FURINGHETTI F. (a cura di): *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del secondo internucleo scuola secondaria superiore, Quad. n. 13, C.N.R. T.I.D.-F.A.I.M., 1992.

[16] GALLO E. et alii (a cura di): *La ricerca in didattica della matematica: finalità, contenuti, esempi* Quad. n. 15, C.N.R. T.I.D., 1995.

[17] GRAZZINI HOFFMANN C.: *Il pensiero scientifico nella scuola elementare*, Conoscenza scientifica e insegnamento, a cura di C.Pontecorvo e L.Tornatore, Loescher, Torino, 1992.

[18] HAWKINS D.: *Imparare a vedere*, Loescher, Torino, 1979.

[19] HOWARD R. W.: *Concetti e modelli*, Rete R & S, 1991.

[20] LOLLI G.: *Capire la matematica*, Il Mulino, 1996.

[21] MANARA C.F.: *De Geometria*, Dispensa del Seminario del NRD Dip. Mat. Univ. Catt. Brescia, 1995.

[22] MARCHI M.: *Una scelta di cultura nell'insegnamento della geometria: il problema della verità*, Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina MATHESIS, anno 1998-99, Torino, 1999

[23] MARCHINI C.: *La didattica della logica*, L'Educazione Matematica, anno 20^o, serie VI, volume 1, n. 3, 156-166, 1999.

[24] MARIOTTI M.A., FISCHBEIN E.: *Defining in Classroom Activities*, Educational Studies in Mathematics, 34, 219-248, 1997.

[25] MENGHINI M.: *Klein, Enriques, Libois: variazioni sul concetto di invariante*, L'Educazione Matematica, anno 19^o, serie V, vol. 3, n. 2, 100-109, n 3, 159-181, 1998.

[26] MOATES D.R., SCHUMACHER G.M.: *Psicologia dei processi cognitivi*, Il Mulino, 1983.

[27] NELSON K.: *Lo sviluppo cognitivo e l'acquisizione dei concetti*, Progetto FOCSIV ESCI, 1982.

[28] NOVAK J. D., GOWIN D.B.: *Imparando a imparare*, SEI, 1989.

[29] PELLEREY M.: *Alcuni processi e strategie di apprendimento in matematica*, L'Educazione Matematica, anno 20^o, serie VI, volume 1, n. 3, 146-155, 1999.

[30] PONTECORVO C.: *Concettualizzazione e insegnamento*, in Concetti e conoscenza, a cura di C. Pontecorvo, Loescher, Torino, 1983.

[31] RESNICK L.B., FORD W.W.: *Psicologia della matematica e apprendimento scolastico*, SEI, Collana Scuola & Educazione diretta da M. Pellerey, 1991.

[32] SPERANZA F.: *Alcuni nodi concettuali a proposito dello spazio*, Seminario nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, 1993.

[33] SPERANZA F.: *Tendenze empiristiche della matematica*, Epistemologia della matematica, Seminari 1989 - 1991, Quad. n. 10, C.N.R. T.I.D.-F.A.I.M., 1992.

[34] SPERANZA F.: *Confronto fra concezioni epistemologiche a proposito della geometria*, in Conoscenza e matematica, a cura di L. Magnani, Marcos e Marcos, 1991.

[35] SPERANZA F.: *La "rivoluzione" di Felix Klein*, Epistemologia della matematica, Seminari 1989 - 1991, Quad. n. 10, C.N.R. T.I.D.- F.A.I.M., 1992.

[36] VON GLASERSFELD E.: *Apprendimento e insegnamento dal punto di vista del costruttivismo*, L'Educazione Matematica, anno 13°, serie III, vol. 3, n. 1, 27-40, 1992.

[37] VYGOTSKIJ LEV S.: *Pensiero e Linguaggio*, Laterza, 1992.

[38] WERTHEIMER M.: *Il pensiero produttivo*, Giunti Barbera, 1965.

[39] ZAN R.: *Superare l'approccio locale alle difficoltà d'apprendimento*, L'Educazione Matematica, anno 20*o*, serie VI, vol. 1, n 3, 127-136, 1999.

[40] ZAN R.: *Recuperare ed orientare in Matematica: Un intervento di recupero a livello universitario*, Quad. della Sez. di Didattica e Storia della Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa, Aprile 1999

[41] ZAN R.: *Recuperare ed orientare in Matematica: Un intervento di recupero nella scuola superiore*, Quad. della Sez. di Didattica e Storia della Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa, Aprile 1999

Indice