Capitolo 2

Argomentare, congetturare e dimostrare

Teresa Marino

1.Introduzione

Nella ricerca didattica si sta assistendo, da qualche tempo, ad un rinnovato interesse per il dibattito sul valore della dimostrazione, fioriscono in Italia e all'estero diversi progetti di ricerca didattica che hanno come oggetto di studio l'attività dimostrativa.

Curiosamente tutto ciò accade proprio quando nella prassi didattica la dimostrazione assume sempre meno importanza, forse perché ritenuta eccessivamente difficile per gli studenti.

Nella prassi scolastica non emerge una particolare attenzione alla riflessione sulla dimostrazione come oggetto di studio nei suoi differenti aspetti, sia per quel che riguarda le funzioni: (scoprire, convincere, validare, sistemare, precisare la nozione di conseguenza logica fra la proposizione da dimostrare e gli assiomi della teoria…),

sia per quel che riguarda i vari aspetti (logici, epistemologici, cognitivi…), sia, infine, per quel che riguarda i contesti d'uso: (generalizzazione, spiegazione, comunicazione…)

In sintesi possiamo dire che la situazione attuale è caratterizzata da una crescente attenzione del mondo della ricerca didattica per la dimostrazione come oggetto di studio[1] e da crescente disaffezione e disinteresse per tale problematica da parte degli insegnanti. Nel progetto Matematica 2001 si possono individuare le linee guida per l'insegnamento della matematica, con le indicazioni delle competenze generale e trasversali che dovrebbero essere acquisite al termine dei due cicli di scuola, descrivendo i 4 Nuclei tematici [2] e i 3 Nuclei di Processo[3].

La ricerca sulla didattica della dimostrazione è particolarmente attenta alla riflessione storica ed epistemologica e alla creazione d'ambienti d'apprendimento e di supporto agli studenti che affrontano le discontinuità epistemologiche proprie del passaggio dall'argomentazione alla dimostrazione.

In Francia la dimostrazione occupa un posto importante nell'insegnamento della matematica: molti insegnanti ritengono che essa costituisca l'ingresso nel mondo della matematica[4].

Per molti studenti la dimostrazione è vissuta come esperienza legata ai primi loro insuccessi scolastici, le dimostrazioni non sono una cosa che basti definire esattamente, posto che sia possibile, perché siano imparate, ci siano o no predisposizioni innate in tal senso.

Per la Matematica o meglio per i matematici la dimostrazione viene usata sia come strumento di comunicazione (per se stessi e per la comunità) sia di validazione della loro produzione (teoremi).

Il funzionamento della dimostrazione rappresenta per i matematici, l'unico strumento che comporta l'accettazione sociale delle proprie teorie, ma nell'insegnamento spesso le teorie vengono trasmesse e accettate senza l'ausilio della dimostrazione.

Il lavoro atto a produrre il Sapere è (può essere) diverso dalla trasposizione didattica operata dagli Insegnanti.

Per gli Insegnanti spesso il lavoro è accentrato in un contesto di valutazione dell'apprendimento realizzato dagli alunni; la dimostrazione viene usata **dagli allievi** come strumento per dimostrare che hanno capito, che hanno imparato

[1] È stato messo a punto un programma integrato Elementari-Medie dall'U.M.I..
Il link per tale progetto (Matematica 2001) si trova in: http://dipmat.math.unipa.it/~grim/.

[2] IL numero, Lo spazio e le figure, Le relazioni, I dati e le previsioni evidenziando le competenze specifiche disciplinari e i relativi contenuti

[3] Argomentare e Congetturare, Misurare, Risolvere e Porsi problemi, descritti in termine di competenze specifiche

[4] Dieudonné per esempio, afferma che il risveglio della vocazione matematica può essere ritardato da un insegnamento che non preveda il concetto di dimostrazione

e non per dimostrare la verità dell'enunciato: questo **non viene**, infatti, messo in discussione (cambiamento di punto di vista che porta con sé comportamenti ed attese diverse).

Gli allievi cercano essenzialmente di **soddisfare** l'Insegnante o una richiesta dell'Insegnante, anche perché il "*si deve dimostrare* " resta confinato *nel contratto didattico,* ([31]),che si viene a creare tra l'Insegnante, l'Allievo e il Sapere.

Per l'allievo la dimostrazione è un modello da imitare **formalmente** è un modello fornito dall'insegnante o dal libro di testo per:

risolvere un problema
per sostenere una tesi (non sua)
per esporre una soluzione di un problema (che non nasce da una sua esigenza)
per dare significato ad un'attività proposta dall'Insegnante.

Le dimostrazioni assomigliano di più al gesto atletico, che dopo aver descritto ed eseguito in maniera corretta deve essere ripetuto e ripetuto finché non si attiva una disposizione automatica, un atteggiamento naturale ed eseguito in maniera perfetta. Nel caso di un gesto atletico quasi tutti arrivano senza difficoltà almeno a saper riconoscere la correttezza del gesto negli altri; l'esecuzione è un altro paio di maniche; nel caso della dimostrazione, anche questo primo livello passivo sembra problematico.

Bisogna creare le condizioni che permettono di ricostruire il senso originario della dimostrazione nell'apprendimento in situazione scolastica, ciò è quindi un problema **importante** della didattica della Matematica.

Pertanto la dimostrazione **si deve collocare** tra le pratiche che l'allievo deve svolgere **nell'ambito sociale**, dove essere messa in discussione **il valore di verità** di un'affermazione **per la classe**, **per l'allievo**.

Gli allievi devono
costruire
riconoscere un sistema di validazione
(un sistema di regole **accettate e condivise** personalmente)
e l'obiettivo finale sarà quello di
appropriarsi
ricostruire
il sistema di *validazione propria della Matematica.*

2. **Argomentare-Congetturare**
Fare (la) matematica
Capire (la) matematica

Nel comprendere (apprendere) la matematica intervengono diversi aspetti:

psicologici	si pensa, si intuisce
percettivi	si vede
linguistici	si parla, si scrive
pratici	si costruisce, si applica

si richiedono pertanto diverse capacità, più altre, che si ritengono scontate e vengono sintetizzate in "capacità di ragionare" e si ritiene che sia tipicamente umana, anche se poi viene difficile definire "ragionamento valido".

Certamente la popolazione studentesca si è divisa e si divide in due categorie esaustive e mutuamente esclusive: quelli che amano la matematica e quelli che non la amano ancora (poiché in verità non si può capire senza conoscenze), la matematica si capisce davvero se la si apprezza nella sua continua evoluzione; esempio:
Aiuta a fare con più interesse la:
Geometria Euclidea se si conoscono altre Geometrie,
L'Analisi reale se si conosce l'Analisi non-standard, così
La Logica bivalente se si conosce per es, la Logica fuzzy, se si rivedono i Reali dopo aver affrontato gli Spazi topologici , l'Algebra dopo essersi interessato alle Strutture.
La maggiore parte di coloro che studiano matematica devono però fermarsi a livelli intermedi, bisogna portare ad apprezzare e a valorizzare gli aspetti settoriali, l'importante è non concepire e presentare nessun argomento, strumento o impostazione come se fosse l'ultima parola.

Tutto ciò è possibile, perché le caratteristiche della matematica si riscontrano già a livello elementare.

Il percorso per il raggiungimento dei "concetti" matematici e della sua formalizzazione non è lineare ma passa necessariamente per momenti cruciali che costituiscono salti cognitivi in quanto affrontano concetti che possono costituire ostacoli per l'apprendimento o essere fonte di fraintendimenti e misconcetti.

L'acquisizione di un linguaggio rigoroso deve essere un obiettivo da raggiungere nel lungo periodo e una conquista cui gli allievi giungono a partire delle loro concrete produzioni verbali, messe a confronto e opportunamente discusse nella classe.

La progettazione dell'insegnante va condotta secondo una logica attenta agli allievi.

Argomentare e congetturare caratterizza le attività che favoriscono il passaggio dalle nozioni intuitive e dai livelli operativi a forme di pensiero deduttivo e a livelli astratti o virtuali.

Diamo una definizione di congettura:

Def. *Una congettura è una proprietà che, per alcune ragioni crediamo vere, ma di cui non siamo completamente sicuri.*

Le congetture sono il motore dell'attività matematica, quando si fa una congettura si prova prima ad argomentare la sua verosimiglianza, a sperimentarla su esempi, e quando *ci si è convinti della sua verità*, si prova a dimostrarla.
Se non ci si riesce, si prova a demolirla con l'aiuto di un controesempio.
La congettura è una competenza tipica della matematica ma anche di altri ambiti come quello sperimentale, linguistico… si esplica in ogni contesto della vita culturale dell'uomo.
Al fine di stimolare gli allievi a congetturare bisogna costruire attività didattiche significative, è necessario costruire della capacità di controllo sulla realtà, sviluppare capacità di produzione di ipotesi ;tutto ciò è detto brevemente pensiero matematico.

3. Come si sviluppa il pensiero matematico?

Come si educa alla dimostrazione?

Il pensiero matematico si sviluppa grazie al processo "argomentare e congetturare"

Si educa alla dimostrazione, elemento caratterizzante facendo evolvere le concezioni degli allievi (stimolati da una situazione didattica) da una fase pre-scientifica ed intuitiva ad una sistemazione in un linguaggio preciso, formulando le problematiche intuite dapprima in modo confuso in concetti rigorosi e definiti.

Per arrivare alla dimostrazione *consapevole*, è necessario sviluppare le competenze argomentative le quali hanno bisogno di un clima favorevole all'elaborazioni di ipotesi e alla successiva discussione.

Avere la possibilità di formulare diverse ipotesi, avere la possibilità di sbagliare.
Gli allievi devono poter prendere l'abitudine di esprimere le motivazioni di ciò che hanno affermato.
Al fine di esprimere, descrivere, rappresentare, prevedere, interpretare, dovranno riflettere ([29])(cioè operare con processi metacognitivi) pertanto sviluppare capacità argomentative.

3.1 **Sviluppare l'argomentare**

1) Osservare-Descrivere un oggetto, il funzionamento di un oggetto
Questo porta ad uno sviluppo degli aspetti linguistici
2) Costruire mediante un testo il funzionamento osservato
Questo porta all'astrazione
3) Generalizzare trasformare l'oggetto.

Le competenze argomentative vengono ovviamente verificate facendo risolvere determinate situazioni problematiche e facendo rispondere a mirate consegne
Si arriva a congetturare delle proprietà matematiche, delle leggi, a volte facendo considerare le simmetrie , le regolarità, i ritmi, le diverse forme che si scoprono in oggetti o eventi.
L'uomo è circondato da questi "patterners" che popolano lo spazio, il tempo, l'universo dei numeri.
Con la congettura si porta a concentrare il pensiero su un fenomeno particolare, a circoscriverlo, ad estrarlo dal contesto, ad esprimerlo, cercando di formularlo senza ambiguità.
Segue poi la fase *dell'esplorazione-pensiero libero* cioè l'argomentare
infine la dimostrazione cioè *la spiegazione dentro un contesto definito*;
questi tre registri sono del pensiero matematico
(non è un fenomeno lineare).
Per esempio cercare la soluzione di un problema con i metodi di cui già si dispone conduce ad esplorare la natura stessa della soluzione
(Qui è argomentare e poi congetturare) e a comprendere ed apprezzare ulteriormente una formula generale che risolva il problema.
"Risolvere un problema significa trovare una strada per uscire da una difficoltà"([30]).
L'esplorazione (o argomentare) per tentativi comporta ingenuità ed errori, ma anche queste contribuiscono a mostrare quali strade conducono alla soluzione, evitando trappole.

Portare quindi a *codificare* intuizioni matematiche riguardo ad un'ampia gamma di fenomeni, fare riflettere sulle proprietà e sulle strutture di oggetti e sistemi per fare scaturire regolarità, costruire modelli, verificare se le cose devono essere così, *in definitiva* una dimostrazione matematica rappresenta la codifica formale di modelli di ragionamento e giustificazione.

Le abilità di tipo logico-deduttivo, i processi di generalizzazione e il controllo della validità di tali processi attraverso la dimostrazione sono considerate fondamentali nei curricula di matematica di molti paesi, compreso quelli italiani.
Un itinerario fondato sul concetto di dimostrazione è culturalmente stimolante.
G.Lolli scrive:
"La dimostrazione è presente ovunque in matematica; ne è la caratteristica essenziale, nel bene e nel male. Non c'è matematica senza dimostrazione. E vero che la matematica non si esaurisce in dimostrazioni e neanche può ridursi a esse la comprensione della matematica. C'è l'euristica per la risoluzione dei problemi, c'è la tecnica di calcolo in senso lato, e c'è l'aspetto della modellizzazione. Ma la dimostrazione segna in genere il passaggio alla matematica vera e propria da una fase propedeutica di acquisizione di abilità e nozioni che si dicono matematiche ma che sono solo il prolungamento della padronanza fisica dell'ambiente esterno e che servono a un controllo più efficiente dello stesso"
Ma non solo E: Barbin([5]) scrive:
"La dimostrazione è un atto sociale che si realizza in un microcosmo di interlocutori che condividono una stessa razionalità"; pertanto coinvolge importanti aspetti della vita di classe, quali la necessità di imparare ad argomentare rispettando le regole del gioco.

3.2 Importante il passaggio *dalla dimostrazione per convincere alla dimostrazione per spiegare all'interno di una teoria.*

Attraverso un esempio famoso come il Dialogo di Platone, il Menone, scritto nel IV secolo a.C., si può apprendere la sostanziale differenza fra la funzione della dimostrazione come ragionamento atto a convincere e la funzione della dimostrazione come mezzo di spiegazione all'interno di una teoria.
Il Menone può essere confuso quasi con un'argomentazione atta a far scoprire allo schiavo una verità geometrica, infatti Socrate mostra come lo schiavo illetterato, Menone possa se opportunamente guidato, giungere a ricostruire una dimostrazione di un risultato matematico cioè, dato un quadrato ABCD, il quadrato costruito sulla diagonale AC è il doppio di ABCD. Le domande e i suggerimenti di Socrate hanno lo scopo di arrivare ad enunciati che lo schiavo condivide, perché è in grado, grazie all'azione maieutica di Socrate, di ricordare.
La dimostrazione di Socrate si basa su nozioni comune che, però, *non vengono esplicitate* all'inizio del dialogo, sono esplicitate solo nel momento in cui sono necessarie a proseguire nell'argomentazione.
Da Euclide in poi , una dimostrazione è invece eseguita all'interno di una teoria nella quale gli enunciati condivisi sono eplicitati all'inizio dell'attività dimostrativa.

In Cina e in India, (oggi siamo più attenti alla cultura orientale) utilizzavano un diverso modo di convincere, di spiegare le cosiddette "dimostrazioni visive" che oggi sono introdotte con la "computer graphic".
Il disegno era considerato sufficiente a spiegare , a giustificare.
Etimologicamente il termine teorema vuol dire "spettacolo", "rappresentazione"

Un'analisi storico-epistemologico dell'idea di dimostrazione matematica mette in evidenza due funzioni fondamentali intimamente legate tra loro, *convincere e spiegare*.
La dimostrazione ha l'obiettivo di *convincere* sia colui che lo elabora, sia i suoi interlocutori della *verità* di un dato enunciato (verità negoziata) ma anche l'obiettivo di *spiegare* cioè di chiarire i motivi per cui una certa affermazione sia vera.

3.3 La dimostrazione “insegna a ragionare”, ma l’esperienza didattica quotidiana ci dice quanto sia difficile per l’alunno apprenderla([23].

Si istaurano delle ambiguità, in quanto pur essendo convinti della validità di una dimostrazione (in base alla sua rispondenza alle regole stabilite dalla comunità scientifica/insegnante) non comprendono il senso o il significato di ciò che si dimostra.

Argomentare e dimostrare sono due processi compresenti nel fare matematica e si distinguono per struttura logica del discorso e processi cognitivi messi in azione, messi in atto dai differenti obiettivi che li generano e producono differenze significative([16]) perché mettono il soggetto su due piani molto vicini ma sostanzialmente diversi.

L’argomentazione matematica è diversa dell’argomentazione retorica, comunemente
usata nel linguaggio naturale, il suo obiettivo consiste nello stabilire la verità di un enunciato attraverso l’esibizione di argomenti convincenti (tenendo però conto della struttura teorica).
La dimostrazione, invece ha l’obiettivo di stabilire non solo, la verità di un enunciato, ma anche la sua deducibilità dai principi della teoria (cioè i motivi per cui è vero).

Entrambi i processi si sviluppano attraverso una concatenazione di deduzioni, ma nel ragionamento argomentativo la deduzione viene fatta ricorrendo a principi assunti secondo criteri di pertinenza e di plausibilità mentre in una dimostrazione c’è il riferimento costante (esplicito o sottointeso) ai principi base della teoria.
Le argomentazioni seguono a livello delle regole di deduzione quelle della logica naturale arrivando talvolta a conclusioni che aggiungono informazioni[5] all’enunciato di partenza nell’intento di descrivere meglio il contenuto semantico, correlando a volte delle deduzioni solo semanticamente ma non logiche.(pensiero analogico).

Infatti, alcuni studi, per esempio, suggeriscono che gli esseri umani ragionano secondo delle regole che non corrispondono alle regole di deduzione formale individuate dalla logica formale, l’attenzione degli studenti si fissa più per le argomentazioni empiriche che rispetto a quelle di tipo ipotetico-deduttivo.

Il ragionamento di senso comune non è monotono, le conclusioni che traiamo in genere sono solo di carattere probabilistico e nuove informazioni possono modificarle sostanzialmente.

---

[5] Esempio:
Dal fatto che Cip è un uccello noi concludiamo che vola o meglio può volare, ma possiamo ritrattare questa conclusione se nuove informazioni ci dicono che Cip ha un'ala rotta oppure che è uno struzzo

In genere ragioniamo su esempi tipici e da essi traiamo conseguenze che siamo pronti a ritrattare se scopriamo di trovarci in situazioni atipiche, questo atteggiamento é dettato **dal fare inferenze in tempi brevi**, nella logica dimostrativa non è così.
L'inferenza logica è monotona, nuove premesse non possono diminuire il numero di conclusioni che si è in grado di fare con un insieme di date premesse.
La verità delle conclusioni risulta invariata per ogni possibile interpretazione.
Essenziale è fare riconoscere che il ragionamento e la dimostrazione sono attività essenziali e fortemente efficaci per la matematica;
pertanto spingere a formulare congettura, a indagare su congetture matematiche, cercando di sviluppare e di valutare ragionamenti matematici e dimostrazioni matematiche facendo scegliere vari tipi di ragionamento e metodi di dimostrazione appropriate.

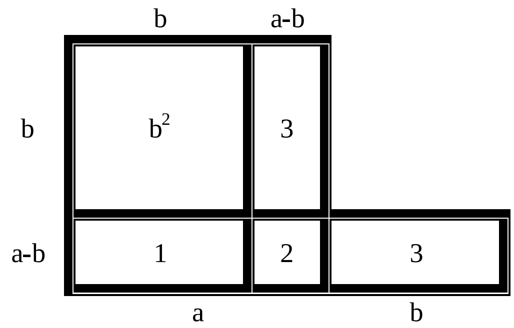
Fin da piccoli avvicinarli a giochi matematici svelando sempre i "trucchi magici" può essere il primo passo per riconoscere il ragionamento e la dimostrazione come parte della bellezza e cioè che quando le cose funzionano esse funzionano *per un buon motivo*.
Rispondere alla domanda: Perché ha funzionato?
È fare matematica
Perché pensi che sia vero?
Porta a stabilire che le affermazioni devono essere sostenute o rifiutate con prove.

Per esempio: chiedere perché possono sommare
3+5 come 1,2,…..7,8 oppure
3+5 come 4,5,…..7,8 oppure
3+5 come 6,7,8
può sollevare il problema di ciò che lo studente sta facendo e perché (a+b=b+a); la discussione che segue può consolidare il ragionamento degli studenti, può anche dimostrare che quando le cose funzionano è *perché c'è una ragione*

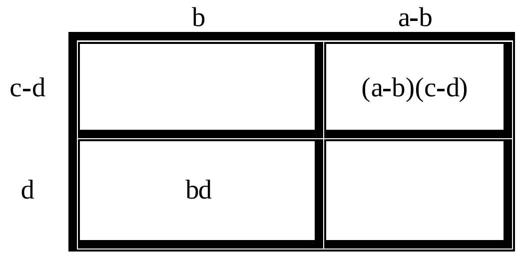
così:

	a	b	c
a	a^2	ab	ac
b	ba	b^2	bc
c	ca	cb	c^2

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ba+2ac+2cb,$$
manipolazione aritmetiche e simboliche sono ben giustificate



$(a+b)(a-b)$ o $(1+2+3)=a^2-b^2$



$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$ e se $a=0$ e $c=0$ si ha $(-b)(-d)=+bd$.

3.4 Se accettiamo che fare matematica implica scoprire (regolarità, formule….), la congettura, cioè supposizione ben costruita, **è la strada principale per scoprire**;a tutti i livelli la matematica fornisce opportunità per ragionamenti e congetture, già esistono una varietà di corsi di analisi realizzati al computer in cui gli studenti esplorano un'ampia gamma di fenomeni, come limiti e convergenza, prima che i risultati siano introdotti in modo formale.
Una componente essenziale dell'imparare a ragionare matematicamente è la valutazione dell'argomentazione matematica.
Importante è che gli studenti imparino a mettere in discussione le ipotesi ed ad assicurarsi che le catene di ragionamento siano giustificate
Ragionare matematicamente è un'abitudine della mente e come tutte le abitudini può essere sviluppata attraverso l'uso coerente.

La comunicazione è una parte essenziale dell'istruzione matematica, è il mezzo attraverso cui le idee sono condivise ed è un veicolo per chiarire la comprensione, pertanto gli studenti ([24]:

comunicano per imparare la matematica
imparano a comunicare matematicamente

Organizzare e chiarire il proprio pensiero, attraverso la comunicazione diventa un momento di riflessione che aiuta a costruire il significato e la stabilità delle idee;
solo se le idee sono espresse apertamente possono essere **esaminate, revisionate o ampliate.**
La comunicazione finalizzata alla riflessione può diventare una parte naturale dell'apprendimento della matematica, ma ciò richiede esplicita attenzione e pianificazione da parte degli insegnanti`([29]).

3.5 Gli strumenti per educare alla comunicazione

La scrittura è anche un utile catalizzatore per la riflessione.

Si può stimolare tale attività usando per esempio sempre gli ultimi minuti della lezione per scrivere quello che hanno appreso quel giorno e le domande che hanno da porre sui concetti della lezione, in tal modo sono portati a riflettere sul lavoro fatto, inoltre non è da sottovalutate un ulteriore beneficio , in tal modo gli allievi si responsabilizzano dell'apprendimento che ha luogo durante la lezione.
Ribadiamo che le idee matematiche acquistano validità quando sono accettate all'interno di una comunità.

L'interazione con gli altri è il veicolo principale attraverso cui le idee ricevono un esame accurato e sono affinate e migliorate, e si raggiunge anche un senso di possesso.
Nella discussione in classe, idee implicite possono diventare esplicite e poi possono essere analizzate più approfonditamente, tutti possono fare domande ed imparare da queste discussioni.
Si possono individuare i concetti sbagliati (misconcetti) e possono essere corretti e un nuovo apprendimento può prendere forma.
Compito degli insegnanti (non facile) è quello di costruire il senso di comunità nel quale gli studenti si sentano liberi di esprimere le loro idee, devono gli insegnanti creare un clima di aspettative appropriate, cioè modelli e domande poste in modo accurato, possono aiutare a chiarire le aspettative, adeguate all'età degli studenti sul loro lavoro[6].
Nella discussione dei vari approcci alla risoluzione di un problema gli studenti hanno l'opportunità di vedere le prospettive e i metodi degli altri, di valutarne la correttezza e l'utilità di appropriarsene per utilizzarli nei problemi futuri.
Il processo di considerare, valutare e costruire sul pensiero degli altri è abbastanza complesso.

Bisogna imparare ad **ascoltare**
a fare domande
a indagare il reciproco pensiero
per chiarire le idee non ancora sviluppate.

Devono imparare ad esaminare metodi ed idee degli altri al fine di determinare le proprie forze e i propri limiti, ascoltare attentamente e riflettere sulle affermazioni fatte dagli altri, gli studenti imparano a diventare pensatori critici, interiorizzando tali comportamenti si può diventare un buon comunicatore ed arrivare a possedere la capacità di rivedere le proprie opinioni criticamente
Compito degli allievi pertanto è impegnarsi seriamente ad imparare e ad assumere una certa responsabilità della loro comprensione.
Catalizzatore di conversazioni ricche sono esercizi non di routine, anche la tecnologia è un buon catalizzatore.
Il linguaggio matematico si costruisce sulla struttura esistente e sulla logica del linguaggio comune ed unisce esperienze e linguaggi degli studenti al linguaggio matematico.

Esempio:
Ogni numero primo è dispari

Gli studenti spesso dicono che la proposizione è vera tranne per n=2, anche davanti un controesempio non considerano falsa la proposizione ma restringono il dominio della stessa.
Questo atteggiamento è giustificato nell'ambito del comportamento quotidiano (cioè del ragionamento comune).
Perché considerarla falsa, rifiutando le informazioni che la stessa proposizione fornisce?
L'attività di giustificazione delle affermazioni risente della struttura solitamente impiegate in altri contesti della vita di tutti i giorni, l'atteggiamento argomentativo, che porta a dedurre delle proprietà in base alla loro evidenza semantica o alla loro plausibilità, tende a prevalere su quello dimostrativo vero e proprio, in quanto non è naturale esercitare un controllo attivo e consapevole sui propri processi mentali, pensando in termini di " necessità logica ".
Da una parte risulta importante il convincimento personale e degli interlocutori su un piano semantico generale, dall'altro la cornice matematica del problema richiede un convincimento sul piano teorico.
Le due cose possono essere scollegate come per esempio in Cantor quanto davanti alla dimostrazione di corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta e quelli di un segmento arrivò a scrivere a Dedekind:"lo vedo, ma non ci credo".
Sperimentazioni didattiche forniscono un'evidenza di continuità tra le due fasi di congetturare e di dimostrare, almeno all'interno di soluzioni di problema.
Il processo dinamico attivato per elaborare la congettura viene ripreso in fase di dimostrazione e gli argomenti usati nella prima fase sono tradotti in termini teorici in quella successiva.
È possibile individuare una strategia che permetta un passaggio dalle argomentazioni alle dimostrazioni.

Particolare attenzione bisogna porre alla formulazione e alla comprensione dei testi([3]).
La capacità di un decodifica di un testo scritto è trasversale ad ogni disciplina, ed è una capacità pregiudiziale su ogni forma di acquisizione dei saperi, anche se la comprensione del testo non è solo un atto di ordine cognitivo ma è intrecciato a processi emozionali([13].
Leggere un testo significa creare un "immagine mentale" corretta della situazione problematica che si sta affrontando per individuare le strategie risolutive.

Pertanto obiettivi che gli insegnanti si dovrebbero porre sono:
Accertare se e in quale misura termini di uso comune (che si danno per scontato) possono creare difficoltà di decodifica, inficiando cosi la comprensione del problema stesso

[6] Per sviluppare la comunicazione scritta può essere utile far descrivere il loro pensiero attraverso scalette, preliminare per la costruzione future delle mappe concettuali.

Verificare se il linguaggio naturale faciliti o meno l'individuazione del problema, per eliminare la convinzione che a scuola si è addestrati al riconoscimento dei dati e delle richieste in un modello dato dall'insegnante.
Da diverse ricerche ([1]):) si evince che la difficoltà di comprensione di un termine si estende a tutto il testo.

Un possibile cammino`([1]):
1) Curare con questionari di vario tipo il momento dell'interpretazione del testo
2) Far svolgere esercitazioni in cui non si deve far risolvere il problema ma solamente individuare i dati e le relazioni fra i dati, le richieste del problema
3) Proporre problemi anche di tipo non standard e richiederne l'interpretazione con parole proprie
4) Richiedere l'elaborazione di un testo di tipo narrativo in un testo più sintetico
5) Dare problemi che hanno più soluzioni
6) Dare problemi con dati superflui e con dati non forniti necessariamente in forma numerica.

Qui di seguito riportiamo e analizziamo i processi di pensiero, che portano dall'esplorazione di un problema alla formulazione di congetture e alla loro validazione([3]):

1. *controllo ascendente*: si tratta della modalità secondo la quale il risolutore guarda la figura (il testo) e cerca, fra le sue conoscenze, quella che può essere utilizzata nel caso in questione. In questa fase di controllo il risolutore procede in "salita", dal disegno come campo di scoperta alla teoria o, meglio, allo spazio delle sue conoscenze.

2. *Selezione*: si tratta della produzione di una congettura, che segue al processo di esplorazione compiuto durante la fase di controllo ascendente.

3. *Abduzione*: si tratta di un tipo di ragionamento nel quale, osservando un certo fatto x, si procede a una scelta tra le conoscenze possedute per ottenere da una di esse, diciamo a, e dal fatto x una conclusione c.

Facciamo un esempio per capire cosa è un'abduzione e in che cosa si distingue sia dalla deduzione che dall'induzione. Supponiamo che osservando **dei fagioli si veda che sono bianchi (x)** e che si sappia che i **fagioli di un certo sacco sono bianchi(*a*)**. *Un'abduzione,* basata sulle informazioni a e x, porta ad *affermare che i fagioli osservati provengono da quel sacco (c).*

Un'induzione sarebbe del tipo da x e c ottengo a;

Una deduzione sarebbe invece del tipo a e c quindi x.

In altri termini, in un'abduzione, il risolutore "**vede di quale regole questo è il caso".**
L'attività di abduzione prepara la formulazione delle congetture nella forma logica condizionale ("se…..allora") ed è quindi quanto mai importante per l'attività dimostrativa.

4. *Controllo discendente*: si ha quando il risolutore ha già prodotto una congettura nella forma **"se…..allora"** e usa le sue conoscenze per validare la congettura prodotta.

Si tratta di una "discesa" dalla teoria, ovvero dallo spazio delle sue conoscenze, al disegno, che diventa di nuovo un campo di esplorazione, questa volta non più per scoprire, bensì per validare.

5. *Distanziamento locale*: si ha quando il risolutore guarda il prodotto del suo lavoro distaccandosi da esso e produce concatenazioni logiche locali.

6. *Distanziamento globale*: si ha quando il risolutore organizza le concatenazioni logiche locali in un'unica struttura, ottenendo concatenazioni logiche globali, ossia dimostrazioni vere e proprie.

4.

Un mediatore per il passaggio dalle argomentazioni alle dimostrazioni

La ricerca in didattica oggi è concorde nell'affermare che se si impegna lo studente in un'attività che richiede e favorisce la produzione di congetture essi hanno un discreto successo nell'attività dimostrativa. Diversi software esistono che rispondono a questa esigenza
Per esempio ([3]) nell'insegnamento della geometria l'uso del software *Cabrì geometre*, rispetto all'ambiente "carta e matita", offre la possibilità di muovere dinamicamente le figure geometriche Naturalmente o gni tecnologia, per quanto buona essa sia, non produce di per se stessa modificazioni nell'attività didattica, e tantomeno, miglioramenti.
In tal senso gioca un ruolo fondamentale l'insegnante, che regola il lavoro in classe facendo nascere in loro la necessità, dopo discussioni ,di capire perché una certa proprietà (delle cui verità sono assolutamente convinti)sia vera.
Una sorgente di perplessità nell'uso di un software come Cabrì è che possa addirittura **demotivare alla ricerca di una dimostrazione** per le proprietà congetturate.
Che bisogno ci sarebbe di dimostrare una proposizione che appare, grazie a Cabrì, di un'evidenza fortissima? Se si ritiene che la funzione del dimostrare sia essenzialmente quella del convincere se stessi o altri della verità di una proposizione, allora dobbiamo dire che l'evidenza fornita da Cabrì ha senza dubbio l'effetto di rendere inutile la dimostrazione. **Ma c'è un'altra funzione della dimostrazione: la motivazione a dimostrare nasce dall'esigenza di precisare il nesso di conseguenza logica fra la proposizione da dimostrare e le altre di cui già si dispone nella teoria.** In altri termini: prima ci si convince della verità (e Cabrì aiuta in questa fase) e poi si è pronti e motivati a dimostrare. Indubbiamente questo atteggiamento richiede un'evoluzione dei sensi personali verso la dimostrazione non solo degli studenti, ma, probabilmente anche di molti insegnanti.
L'utilizzazione di un software come Cabrì è solo il primo passo per un approccio alla dimostrazione come oggetto di didattica.
Le finalità fondamentali dell'utilizzo del Cabrì, sono pertanto di tipo strumentale([3]), nel senso che sulle figure create da Cabri si può agire, lavorare, diventando così per gli studenti veri e propri oggetti, che per la loro dinamicità, sono assai più vicini alle figure geometriche, rispetto a quelle del disegno e tutte le modifiche sulle figure si fanno interagendo con il programma e quindi con la teoria che ad esso è soggiacente.
C'è infine da precisare un'altra funzione del software, le figure del Cabri permettono allo studente di osservare **prodotto e process**so e , quindi , non solo il lavoro fatto, ma anche quello che si sta facendo e quello ancora da fare.
Pertanto il Cabrì è di supporto per la *transizione dalla fase di congettura a quella di dimostrazione* grazie alle possibilità offerte dalle sue diverse modalità di trascinamento; realizzando una sostanziale continuità cognitiva nel passaggio dalla fase congetturale a quella dimostrativa.
Il Cabrì costituisca un mediatore utile agli studenti in tutte le tre fasi che caratterizzano l'attività di risoluzione di problemi: *ricerca, congettura e dimostrazione.*

Infatti **([3]):**
Nella fase di ricerca Cabrì permette di:
- fare disegni molto precisi;
- effettuare esplorazioni e utilizzare il dragging per scoprire relazioni particolari tra gli elementi della figura e di altre modalità (che qui non ci fermiamo a esporre) che contribuiscono in ciò.

Nella fase di congettura:
- facilita il passaggio tra disegno e teoria, favorendo processi di <u>abduzione;</u>
- è un mezzo di validazione di proprietà attraverso le costruzioni;
- aiuta a trovare controesempi;
- favorisce l'enunciazione di enunciati in forma condizionale "se…..allora".

Nella fase dimostrativa:
aiuta a costruire i passi della dimostrazione.

Bibliografia

[1]AA.VV. *Il problema dei problemi:analisi di alcune difficoltà di comprensione del testo.* L'insegnamento della mat. e delle scienze integrate 2000,23B,4,366-386.

[2]ArtigueM., GrasR., LabordeC, Tavignon *Vingts ans de didactique des mathématiques en France*. Hommage à G.Brousseau et G. Vergnaud,1994, La Pensée Sauvage

[3]ArzarelloF.&alii *Dalle congetture alle dimostrazioni. Una possibile continuità cognitiva* L'insegnamento della mat. e delle scienze integrate 1999,22B,3,209-233.

[4]Balacheff N *Imparare la prova*,2001, La mat: e la sua didattica 2,116-149

[5]Barbin E. *La dimostrazione in Matematica;significati epistemologici e questioni didattiche* L'insegnamento della mat. e delle scienze integrate 1994,17B,3,200-246

[6]Bessot A. *Panorama del quadro teorico della didattica della Matematica in Francia* 1994 L'educazione matematica 1,37-73.

[7]Brousseau G *.Les obstacles epistemologiques et les problemes en Maths*, Recherces en didactique desMathématiques (RDM), 1983, Grenoble ed. la Pensée Sauvage, Vol.4.2

[8]Brousseau G. *Fondements et méthodes de la didactique de mathématiques,* Recherces en didactique desMathématiques (RDM), 1986, Grenoble ed. la Pensée Sauvage, Vol.7.2

[9]Brousseau G. *Le contrat didactique; Le milieu,* Recherces en didactique desMathématiques (RDM), 1988, Grenoble ed. la Pensée Sauvage, Vol.9.2[7]

[10]Brousseau G. *Note sulla ricerca in didattica delle matematiche*, 2001, Atti del convegno La scuola, l'autonomia, la ricerca a cura di Riotta F., IRRSAE Sicilia, 27-52.

[11]Chevallard Y *.La trasposition didactique du savoir savant au savoir enseigné* 1991,Grenoble ed. la Pensée Sauvage.

[12]Daconto E. Sul come intendere la dimostrazione 1996,La mat: e la sua didattica 2,153-165

13]D'Amore B. 1999, *Elementi di Didattica della Matematica* ed.Pitagora.Bologna

[14]D'Amore B. *Il "Triangolo" Allievo-Insegnante-Sapere in didattica della Matematica*, 2001, L'educazione matematica 2,104-113.

[15]Di Leonardo M.V. *Considerazioni epistemologiche sulla dimostrazione: schemi di ragionamento*, Quaderni di Ricerca in Didattica-Grim,2000,9,85-104

[16]Duval R. *Argomentare, dimostrare,spiegare: continuità o rottura cognitiva?*1996,La mat: e la sua didattica 2,130-152

[17]Duval R. *Qual è cognitivo per la didattica della matematica* 1996,La mat: e la sua didattica 3,250-269

[18]Duval R. *Struttura del ragionamento deduttivo e l'apprendimento della dimostrazione* 1996,La mat: e la sua didattica 4,370-393

[19]Fischbein E *Conoscenza intuitiva e conoscenza logica nell'attività Matematica*,1998,La Mat. e la sua didattica4,365-401.

[20]Freudehantal H. *Ripensando l'educazione matematica* (a cura di F.Manara),1994,Brescia ed. La Scuola

[21]Furinghetti F. *Che cosa resta e che cosa dovrebbe restare della Mat. Quando si è dimenticato la Mat*. 1993,La mat. e la sua didattica, 3,302-328.

[22]Gallo E, Ferrari M, Speranza F. *La ricerca in didattica della matematica: finalità, contenuti, esempi*.1995, Quaderni CNR,n.15,Pavia

[23]Hanna G. *Il valore permanente della dimostrazione* 1997,La mat. e la sua didattica, 3,236-252.

[24]IRRSAE E.R: *Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft* 1998

[25]LabordeC *Occorre apprendere a leggere e scrivere in Matematica?*La mat. e la sua didattica 1995,9.2,121-135

---

[7] I lavori di G: Brousseau rivisti e completati si possono trovare in un'opera che raccoglie i testi fondamentali sulla teoria delle situazioni didattiche dal titolo *Thèorie des situations didactiques (didactique des mathèmatiques 1970-1990),*1998, Grenoble ed. la Pensée Sauvage

[26]Lolli G. *Capire una dimostrazione* 1988,Bologna, il Mulino.

[27]Marino T. *Una panoramica storica sugli ostacoli epistemologici*, Quaderni di Ricerca in Didattica-Grim, 1998, 8,47-60

[28]Mogetta G. *Il passaggio dall'argomentazione mat. Alla dimostrazione in situazione di problem solving: elementi di rottura e di continuità cognitiva*. L'insegnamento della mat. e delle scienze integrate 1998,21B,5,429-460.

[29]Neubrand M. *L'apprendere e il riflettere perché e come associarli nella didattica* 1990,La mat. e la sua didattica, 2,5-16.

[30]PolyaG. *La scoperta matematica* Vol.1 e2 1970, Feltrinelli Milano

[31]Progetto UMI Matematica 2001

[32Sarray B. *Il contratto didattico* 1998,La mat. e la sua didattica, 2,132-175

[33]SpagnoloF *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*,1998, Milano, ed. La Nuova Italia

[34]SpagnoloF *La Ricerca in Didattica;alcuni riferimenti*,1999,Atti del Seminario di Studi ,Isola delle Femmine,15/191997 a cura di Ceraulo L.ed alii IRRSAE Sicilia,17-28.