Capitolo 3

L'analisi quantitativa e qualitativa dei dati sperimentali

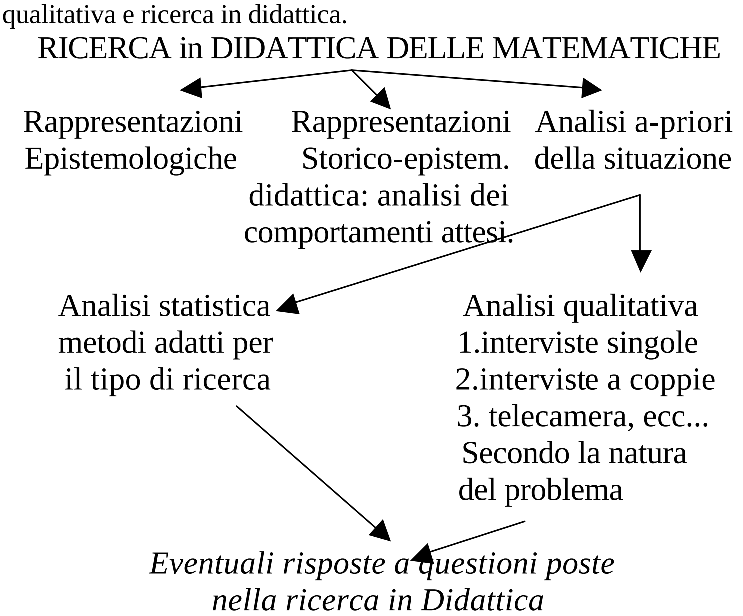
Filippo Spagnolo

3.1 L'analisi quantitativa e la ricerca in didattica

La modellizzazione attraverso argomentazioni statistiche fornisce alla ricerca in didattica delle matematiche una maggiore possibilità di trasferibilità dell'esperienza.

Risulta evidente, come è stato ampiamente dibattuto nel capitolo 1, che senza una riflessione teorica dal punto di vista della didattica e quindi della epistemologia dei contenuti matematici, l'argomentazione statistica non avrebbe alcun peso. Soltanto uno studio in parallelo di tutti i possibili percorsi argomentativi della ricerca può portare a risultati considerati attendibili.

Il seguente schema mette in evidenza le relazioni tra analisi quantitativa, analisi qualitativa e ricerca in didattica.



3.1.1 I dati.

Ogni ricerca didattica ci porta inevitabilmente a raccogliere dei dati che possiamo considerare formati da una collezione di informazioni elementari. Ogni informazione elementare riporta in generale un comportamento di un allievo in una situazione. Una statistica sarà quindi un insieme composto da: allievo, situazione, comportamento.

L'allievo appartiene ad un campione E osservato, supposto estratto da una popolazione più vasta, o a caso, o seguendo un sistema di situazioni di controllo (ad esempio: livello scolare, sesso, conoscenza personale anteriore...).

La situazione è scelta in un insieme S (di questioni, esercizi...) generata e strutturata da condizioni e parametri di varia natura (sapere in gioco, condizioni materiali, condizioni didattiche...).

I comportamenti (tipici delle conoscenze o di saperi mirati) sono presi in un insieme C di risposte possibili dell'allievo nelle condizioni nelle quali è posto.

Una classe può essere definita come un insieme di allievi E, un corso di Matematica come un insieme di esercizi S, i risultati degli allievi come una certa applicazione di E nell'insieme SxC dove C è l'insieme dei comportamenti di riuscita o di errore, una nota come una applicazione di SxC in R.

La conoscenza di un certo comportamento potrà essere rappresentato da una certa applicazione di un insieme di questioni in un insieme di comportamenti.

3.1.2 Utilizzazione della statistica da parte degli insegnanti e da parte dei ricercatori.

L'insegnante deve prendere rapidamente numerose decisioni e può correggerle molto velocemente se si dovessero rilevare inadatte. Non può aspettare il risultato del trattamento statistico di tutte le sue questioni. L'insegnante deve cercare di utilizzare quei trattamenti statistici che gli consentono rapidamente di trarre certe conclusioni.

Il ricercatore deve seguire un processo opposto:

- Quali ipotesi corrispondono alle questioni che ci interessano?
- Quali dati raccogliere?
- Quali trattamenti utilizzare?
- Quali conclusioni?

Più che la rapidità e l'utilità immediata, è la consistenza, la stabilità, la pertinenza e la sicurezza delle risposte che interessano il ricercatore.

La ricerca con opportuni metodi statistici consentirà:

- di comunicare tra insegnanti le informazioni di cui hanno bisogno e che raccolgono sui risultati degli allievi, il valore dei metodi impiegati...;
- di utilizzare anche con discernimento i risultati delle ricerche in didattica;
- di conoscere le possibilità e i limiti dei metodi statistici e quindi la legittimità delle conoscenze che essi utilizzano nella loro professione;
- di discutere questa legittimità;
- di formulare delle congetture suscettibili di essere sottomesse alla prova della contingenza sperimentale;
- di immaginare la plausibilità di queste congetture;
- di sapere come convertire la loro esperienza in conoscenza;
- di partecipare a delle ricerche.

3.1.3 Le osservazioni.

Una osservazione consiste in una attribuzione di un valore a una variabile a proposito di un individuo: l'oggetto osservato.

La statistica permette principalmente di trattare il caso dove:

- parecchie osservazioni sono raccolte.
- e dove queste osservazioni nel loro insieme:

i) riguardino individui differenti per una stessa proprietà;

ii) riferiscano proprietà differenti per uno stesso individuo;

iii) riguardino sia la i) che la ii).

Se "24" (valore osservato) è attribuito all'allievo X (oggetto d'osservazione), come "risultato dell'esame di matematica" (variabile osservata), l'insieme dei valori o dei casi possibili nel nostro caso è un intero compreso tra 0 e 30.

Le variabili possono essere numeriche, d'intervallo, ordinali, nominali.

- *Variabile Numerica*: quando i valori sono espressi in numeri (appartenenti agli insiemi N, Z, Q, R) e le operazioni che si possono fare con essi hanno un senso per la variabile.
- *Variabile d'Intervallo*: quando solo le differenze tra valori hanno senso mentre la somma non ne ha. Per esempio il punteggio ottenuto in una disciplina sportiva può costituire una variabile d'intervallo.
- *Variabile Ordinale*: quando i valori esprimono soltanto un ordine tra le osservazioni. In una variabile ordinale la somma di due valori non è un valore.
- *Variabile Nominale*: quando i valori sono dei caratteri o attributi. Questa variabile può essere a due valori: un suo attributo e la sua negazione. Anche se essa è espressa da numeri come 0 e 1, una variabile nominale non è numerica: la somma tra due caratteri non è definita, né il loro ordine in generale. Le sole operazioni sono quelle logiche (insiemistiche).

Una variabile numerica è sempre possibile trasformarla in variabile d'intervallo, ordinale o nominale (perdendo delle informazioni); una Variabile d'intervallo può essere trasformata in variabile ordinale o nominale; una variabile ordinale può essere trasformata in variabile nominale. L'inversa non è vera.

3.2 L'analisi implicativa delle variabili di R. Gras ed il software "Chic"

3.2.1 Analisi implicativa tra variabili

Il problema che ha cercato di affrontare R.Gras[1] è stato quello di poter rispondere alla seguente questione: "Date delle variabili binarie **a** e **b**, in quale misura posso assicurare che in una popolazione, da ogni osservazione di **a** segue necessariamente quella di **b**?". O anche in maniera più lapidaria :"E' vero che se a allora b?".

---

[1] Régis Gras, *Le Fondements de l'analyse statistique implicative,* Quaderni di Ricerca in Didattica, n.9, Palermo. La rivista si trova on-line al seguente indirizzo: http://math.unipa.it/ grim/menuquad.htm.

In generale la risposta non è possibile ed il ricercatore si deve accontentare di una implicazione “quasi” vera. Con l’analisi implicativa di R. Gras si cerca di misurare il grado di validità di una proposizione implicativa tra variabili binarie e non. Questo strumento statistico viene messo a punto su ricerche riguardanti la Didattica delle Matematiche.

Viene presentata la modellizzazione del caso binario.

Siano date una popolazione E e un insieme di variabili V, si vuole dare significato statistico alla implicazione larga **a Þ b**.

Siano A e B gli insiemi delle sotto popolazioni rispettive dove la variabile a e b prendono il valore 1 (vero). L’intensità della implicazione viene espressa formalmente:

$$j\,(a,\bar{b}) = 1 - \mathrm{Pr}\,ob\left[card\left(X \cap \bar{Y}\right) \leq card\left(A \cap \bar{B}\right)\right]$$

X e Y sono due sotto insiemi di E, parti aleatorie di E e che hanno la stessa cardinalità rispettivamente di A e B. $\bar{Y}$ è il complementare di Y rispetto ad E. $\bar{B}$ è il complementare di B rispetto ad E. $\bar{b}$ rappresenta il fatto di non possedere il carattere b.

E si dirà:

$$\left[a \Rightarrow b \text{ accettabile alla soglia } j\,(a,\bar{b}) = 1 - a\right] \Leftrightarrow \mathrm{Pr}\,ob\left[\left[card(X \cap \bar{Y}\right] \leq card(A \cap \bar{B})\right] \leq a$$

Dove:

$$n_a = cardA, n_b = cardB, n_{a \wedge \bar{b}} = card\,(A \cap B).$$

$$q(a,\bar{b}) = \frac{n_{a \wedge \bar{b}} - \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}}}$$

$q(a,\bar{b})$ rappresenta l’indice d’implicazione: indicatore della non implicazione di a su b.

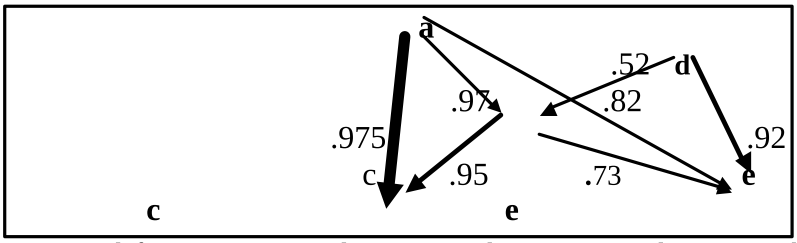
L’intensità d’implicazione viene data dalla seguente formula:

$$j\,(a,\bar{b}) = 1 - \mathrm{Pr}\,ob\left[Q(a,\bar{b}) \leq q(a,\bar{b})\right] = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{q(a,\bar{b})}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$Q(a,\bar{b})$ è la variabile centrata e ridotta dedotta dalla variabile aleatoria $card(X,\bar{Y})$ che segue la legge di Poisson di parametro $np = np(a)\,p(\bar{b}) = \frac{n_a n_{\bar{b}}}{n}$.

Se l'intensità d'implicazione[2] è abbastanza piccola le due variabili non saranno legate. Se $\varphi(a,b)=0{,}75$ è un livello di confidenza del 75% per l'implicazione in quanto la probabilità che card($X\cap Y$) sia più piccola di 1 è 0,25 (In generale se il livello di confidenza è inferiore al 95% non lo si ritiene accettabile). Il livello di confidenza va calcolato con la formula[3]. Ma naturalmente se i dati a disposizione sono numerosi sarà necessario l'uso del computer.

La rappresentazione di un grafo di relazione d'ordine parziale indotto dall'intensità di implicazione da la possibilità di visualizzare una situazione didattica dove intervengono più variabili. Lo spessore del braccio indica l'intensità che generalmente è indicata numericamente accanto come nella seguente figura:



Viene definita coesione implicativa quando per esempio date tre variabili **a**, **b**, **c** si osserva che $j\,(\mathrm{a},\overline{\mathrm{b}}) = 0.97$, $j\,(\mathrm{b},\overline{\mathrm{c}}) = 0.95$, $j\,(\mathrm{a},\overline{\mathrm{c}}) = 0.97$, allora la classe orientata da **a** verso **c** ammette una buona coesione. Non sarebbe stato lo stesso se avessimo avuto rispettivamente i valori 0.82, 0.38, 0.48.

Nella ipotesi che i valori di $a\Rightarrow b$ e $b\Rightarrow a$ risultano uguali le frecce del grafo non avranno la direzione. La nozione di implicazione statistica è stata estesa anche a variabili modali e variabili numeriche.

E' stato messo a punto dal gruppo I.R.MA.R.[4] un programma su PC che consente di fare l'analisi implicativa abbastanza celermente. Il programma si chiama *CHIC* (Classification Hiérachique Implicative et Cohésive) che permette differenti statistiche:

- statistiche elementari tipo media, varianza, correlazioni tra variabili;
- l'analisi delle similarità di Lerman[5];

---

[2] Per il calcolo dell'intesità di implicazione si può utilizzare la "*tavola della distribuzione normale*" acclusa a questo capitolo.

[3] Il valore di q deve risultare negativo affinché l'intensità di implicazione φ sia accettabile.
In particolare $q(a,\overline{b}) \le -1.64 \leftrightarrow j(a,\overline{b}) \ge 0.95$.

[4] Istituto di ricerca Matematica di Rennes, Università di Rennes I, prof. Regis Gras. Il programma CHIC è disponibile al seguente indirizzo: Prof.R.Gras IRMAR Institut Mathématique Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, Francia.

[5] Questa operazione segue l'indice di similarità di Lermann e classifica le variabili secondo livelli gerarchici. L'indice di similarità di Lerman segue la legge di Poisson e viene così definito:

$$s(a,b) = \frac{n_{a\wedge b} - \frac{n_a n_b}{n}}{\sqrt{\frac{n_a n_b}{n}}}$$

ed é legato all' indice di implicazione dalla relazione :

$$\frac{q(a,\overline{b})}{s(a,b)} = -\sqrt{\frac{nb}{n\overline{b}}}$$

- L’analisi implicativa secondo R. Gras, con le seguenti informazioni:
- Grafo Implicativo;
- Gerarchia implicativa e i Nodi Significativi dove si formano le classi della gerarchia[6];
- Contribuzione degli individui nei cammini significativi del grafo e alle classi significative della gerarchia;
- Comparazione tra il grafo implicativo ed il grafo inclusivo[7].

3.2.2 Consigli partici per l'utilizzo del software

Edizione dei dati: mette in evidenza il file selezionato e permette di modificarlo (ma è consigliabile utilizzare EXCEL: Salvati in formato .csv, MSDOS).

3.3 L'analisi fattoriale ed il software SPSS

3.3.1 Alcune osservazioni sull’analisi Fattoriale.

Consideriamo il prodotto cartesiano E (in generale allievi, n, n∈N) e V (in generale variabile m∈N). Questa è una tipica situazione di rilevazione di dati in didattica. Si pone il problema di poter rappresentare geometricamente in uno spazio ad nxm dimensioni la distribuzione dei due insiemi. L’analisi fattoriale interpreta le rappresentazioni geometriche. Sorta nell’ambito delle Scienze Umane ha avuto

---

L’indice di similarità di Lermann e l’implicazione di Gras pur fornendoci informazioni sulle variabili nella stessa direzione a volte differiscono nel senso che si può avere similarità senza implicazione e viceversa.

[6]La gerarchia implicativa delle classi ci fornisce delle informazioni sulla implicazione tra classi di variabili. Per poter costruire un grafo per la gerarchia implicativa delle calssi è necessario introdurre il concetto di coesione implicativa:

$$j\,(a,\bar{b}) = \mathrm{Prob}(Q(a,\bar{b}) > q(a,\bar{b})$$

L'entropia dell'evento $(Q(a,\bar{b}) > q(a,\bar{b})$ sara E:

$$\mathrm{E} = -\mathrm{pLog}_2(p) - (1-p)\,Log_2(1-p)$$

$$p = j\,(a,\bar{b})$$

E é massima quando p = 0.5

E é minima quando p = 1 o p = 0 $(0\mathrm{Log}_2(0) = 0)$

Coesione tra a e b, $\mathrm{c(a,b)} = \sqrt{1 - \mathrm{E}^2}$ se $\mathrm{p} \geq 0.5$

in caso contrario c(a,b) = 0.

L’implicazione si fa per aggregazioni successive di classi d’implicazione. Il principio è quello di riunire ad ogni passo di aggregazione la coppia di variabili o la coppia di classi di variabili che presentano la massima coesione nella tappa considerata.

L’informazione che se ne ricava fornisce un utile strumento per stabilire quali classi di variabili implicano altre classi di varibili ed a quale livello.

[7] I dati sono registrati in files con estensione **.csv**. Il programma CHIC leggerà sia i dati registrati con estensione .csv che quelli registrati dal foglio lettronico EXCEL. Qualunque estensione excel va sempre riconvertita in files **.csv**.

parecchie applicazioni nel campo della Psicologia, ma consentendo una analisi su piccoli campioni nel campo della Statistica non parametrica contribuisce ad interpretare significativamente i fenomeni didattici. In questi ultimi dieci anni sono state condotte una serie di ricerche per cercare di affinare lo strumento nel campo delle ricerche didattiche, ma soprattutto di creare dei modelli ad hoc.

In questo paragrafo introdurremo il metodo senza entrare molto nel particolare in quanto richiederebbe una trattazione a parte.

Il punto di partenza è una tabella a doppia entrata I x J del tipo:

I \ **J**	**j**	Colonna di margine
i	**k(i,j)**	**k(i)** [totale della linea i]
Linea di margine	**k(j)** [totale della colonna j]	**k** [totale]

- **f_i = k(i)/k massa della linea i;**

? **f_j =k(j)/k massa della colonna j.**

La massa di un elemento i o j misura l'importanza relativa di questo elemento.

3.3.2 Appunti per l'interpretazione dei dati dell'ACP (analisi delle componenti principali) e dell'AFC (analisi fattoriale delle corrispondenze).

Analisi delle Componenti Principali (ACP).

Consiste nel ricercare i piani principali determinati dagli assi d'inerzia ed il centro del centro di gravità della nuvola per rappresentare le migliori proiezioni.

Permette anche di precisare in quale misura le variabili sono correlate o legate tra loro.

Nell'interpretazione statistica gli assi principali saranno chiamati "fattori principali".

Nella ACP le correlazioni tra i soggetti sono più delicati da interpretare. Le variabili ed i soggetti vengono rappresentati in spazi differenti.

Analisi Fattoriale delle corrispondenze (AFC).

Segue lo stesso principio della ACP ma la distanza utilizzata è quella di X^2 (leggermente diversa da quella utilizzata nella ACP) e che permette di meglio trattare il caso di una matrice d'incidenza (variabili booleane).

Il "significato" da attribuire ai fattori è tutto a carico del ricercatore, il quale deve interpretare le informazioni che sono più nascoste e che discendono da questo significato. Ci si interesserà ai contributi di certi punti a questi fattori

e alle posizioni relative dei sotto-gruppi di popolazione studiata. Risulta molto interessante l’introdurre delle variabili supplementari e/o dei soggetti supplementari.

ACP

? dalle variabili ai fattori: matrice di correlazione fra le variabili osservate e i “fattori” sottostanti

? rappresentazione geometrica in uno spazio euclideo (tanti assi quanti sono i fattori): coefficiente di correlazione tra due fattori equivale al coseno dell’angolo fra i due assi corrispondenti ai fattori. (assi ortogonali cos 90°=0). Il valore del coseno è importante da controllare

? L’ACP serve per trovare tante componenti (fattori) quante sono le variabili, per cui tutta la varianza delle variabili è spiegata dalle componenti principali.

• Trasforma un insieme di variabili in altrettante non correlate.

? Non è un modello ma una trasformazione lineare di dati.

? 1ª componente quella che spiega più varianza, ecc...

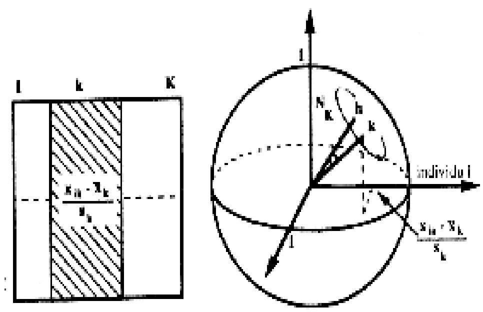
? I fattori sono in numero minori delle variabili.

? 1° fattore spiega il massimo di varianza possibile, il 2° fattore spiega il massimo di varianza residua, ecc...

? I fattori sono tra loro ortogonali.

Questioni a cui risponde l’ACP:

- Quali sono gli individui che si rassomigliano?
- Quali sono quelli che differiscono?
- Esistono dei gruppi omogenei di individui?
- Possiamo mettere in evidenza una tipologia di individui?
- Quali sono le variabili legate positivamente tra loro?
- Quali quelle che si oppongono (legate negativamente)?
- Possiamo mettere in evidenza una tipologia di variabili?
- Si possono riassumere un certo numero di insiemi di variabili chiamate componenti principali che rappresentano questo gruppo di variabili legate tra loro.



Una “nuvola” è costituita dall’insieme delle distanze inter-personali.
La forma della nuvola è n-dimensionale l’ACP fornisce delle immagini che si avvicinano il più possibile alla situazione reale. Gli assi fattoriali definiscono dei piani fattoriali sui quali si proietta la Nuvola N_j..

L'acp ci fornisce delle variabili sintetiche costituendo un riassunto dell'insieme delle variabili iniziali che sono la base di una rappresentazione piana delle variabili e dei loro angoli.
? Interpretazione grafica: Se due variabili sono correlate positivamente, sono situate dalla stessa parte su di un asse. Sull'asse corrispondente della nuvola degli individui questi hanno dei forti valori per queste due variabili e si situano dalla stessa parte delle variabili. Dalla parte opposta nel caso contrario. Gli indivi dui che inducono delle correlazioni forti con le variabili sono individuati facilmente.Le variabili sono dei vettori e non dei punti. Non è la prossimità tra individuo e un insieme di punti rappresentante delle variabili che è importante ma l'allontanamento dell'individuo nella direzione di questo insieme di variabili.

Il s.i. di elementi che contribuisce all'inerzia di un asse è la sua somma di contribuzioni degli elementi che lo compongono. Questo rapporto è prezioso per mettere in evidenza il s.i. di elementi che hanno contribuito principalmente alla costruzione dell'asse e sul quale si appoggerà in primo luogo l'interpretazione.? La distanza tra due punti sarà interpretata come una somiglianza.? Le coordinate di una variabile si interpretano come coefficienti di correlazione con i fattori sugli individui.? I coefficienti di correlazione delle variabili attive con un fattore (generalmente il 1°) sono tutti positivi.Le fasi cronologiche: Bilancio sulle inerzie associate ai differenti fattori, che non si preoccupa del significato dei fattori, ma si fonda su indici numerici.L'interpretazione dei fattori, difficilmente formalizzabile, che da un posto importante alle conoscenze sul problema studiato esterno alla tabella dei dati.
AFC? Si analizzano variabili ed individui, studiandone il legame e non privilegiandone nessuna.? La rassomiglianza tra due linee e due colonne è definita da una distanza tra i loro profili. Questa distanza è il c^2.? Come nell'acp si chiama fattore l'insieme delle coordinate delle proiezioni dei punti di una nuvola su uno dei suoi assi fattoriali; i fattori sulle linee sono le proiezioni di N_i e i fattori sulle colonne le proiezioini di N_j..? Gli elementi pesanti attirano il baricentro, una colonna j attira una linea i se il valore f_{ij} è elevato.? Sui grafici di rappresentazione simultanea di linee e colonne, la posizione relativa di due punti di uno stesso insieme (linee o colonne) si interpreta come distanza quando la posizione di un punto di un insieme e di tutti i punti dell'altro insieme si interpreta come baricentro. Ogni associazione tra una linea e una colonna suggerita da una prossimità sul grafico deve essere controllata sulla tabella dei dati.

Se i dati sono concentrati in un punto (il loro baricentro), l'inerzia totale è nulla e l'afc non da nessun fattore. Per ottenere fattori è necessaria una distribuzione non omogena.? Gli indici per interpretare l'afc sono analoghi all'acp.? Variabili supplementari e individui supplementari non intervengono nel calcolo degli assi.? La distanza tra due punti si interpreta come rassomiglianza tra i profili ddi questi punti. L'origine degli assi è confusa con il profilo medio.***ACM (Analisi delle Corrispondenze Multiple)***? Si individuano classi di variabili e/o di individui.? L'acm è una analisi fattoriale su una tabella disgiunta completa (vero/falso).? Un piccolo numero di individui può essere significativo per un fattore. (sopprimere individui per vedere se cè invarianza).

Considerazioni generali: L'analisi fattoriale dà "senso" ai dati.L'interpretazione ha un ruolo fondamentale.? La % d'inerzia estratta dai fattori va interpretata in funzione del numero di variabili: 10% è poca per 10 variabili ma è sufficientemente forte per 100 variabili.? Se un fattore ha un contributo di individui <50% non è significativo.? Se un fattore è individuato da pochi individui, è possibile rifare i calcoli eliminando questi individui (o osservazioni) e vedere l'effetto che fa...? Variabili più numerose inducono un significato più forte.

Le altre rappresentazioni si appoggiano su questo primo schema, sviluppando unicamente i punti sui quali il tentativo di interpretazione differisce, tra il metodo esaminato e l'apc.

Variabili supplementari

	A1	*A2*	*A3*	*A4*	*V*	*M/F*
1					*1*	*F*
2					*1*	*F*
3					*0*	*M*
4					*0*	*M*
5					*1*	*F*
6					*1*	*F*

Possono essere esempi di variabili supplementari M/F (come nella tabella), 1° anno, 2° anno, condizione sociale, etc…

Individui supplementari

	A1	*A2*	*A3*	*A4*	*A5*
1					
2					
3					
4					
5					
S1	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
S2	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*

- I profili di individui supplementari che corrispondono a determinate ipotesi della mia ricerca.
- Questi profili possono anche rappresentare "casi" rigurdanti l'analisi a priori. Rappresenterebbe la tabella di contingenza ***a*** priori con cui confrontarsi.

Indicazioni per l'utilizzo del programma SPSS

I dati devono essere inseriti in EXCEL e conservati in EXCEL. Quando si richiede di salvare con nome si salverà con quella estensione.Una volta lanciato il programma **SPSS** si leggeranno i dati e si andrà a "ANALIZZA"(Analyze) e poi "RIDUZIONE DATI" (Data Reduction)e quindi"FATTORIALE…" (factorial).***MATRICE***

TRASPOSTA CON EXCEL Si immettono i dati in EXCEL utilizzando la prima riga per le variabili e la prima colonna per gli individui (o le osservazioni).
Si evidenzia la matrice da trasporre. Si **COPIA**. Nel menu **MODIFICA** si sceglie **INCOLLA SPECIALE** e quindi si individuerà **TRASPOSTA**.
Bisogna aver prima aperto un foglio nuovo EXCEL o aver puntato in un preciso punto del foglio per avere la matrice trasposta.
La matrice trasposta è molto utile per poter introdurre delle variabili supplementari di individui che caratterizzano una certa concezione.
COME COPIARE LO SCHERMO CON PC STAMP + CTRL C E quindi CTRL V

3.4 Un primo approccio all'analisi qualitativa: Appunti per la messa a punto di griglie interpretative delle situazioni sperimentali.

3.4.1 La discussione matematica in classe (Dal documento Matematica 2001[8])

"Una discussione matematica è una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.), che costituisce un motivo dell'attività di insegnamento-apprendimento" (Bartolini Bussi, 1995).
La metafora usata per descrivere la discussione matematica ha lo scopo di sottolineare alcuni aspetti importanti di questa attività:

- Esiste un tema che ne definisce l'obiettivo
- Esiste l'interazione tra voci (polifonia)
- Esiste un riferimento esplicito all'attività di insegnamento/apprendimento (processo di lungo termine)
- Si richiede la presenza di voci diverse tra cui, essenziale, quella dell'insegnante
- Si valorizza la presenza di voci imitanti (diversi tipi di imitazione nel contrappunto)
- Si prescinde dall'esistenza fisica di una comunità di parlanti (discussione con un interlocutore non fisicamente presente, ma rappresentato da un testo scritto).

La discussione matematica dell'intera classe orchestrata dall'insegnante garantisce, con la presenza di quest'ultima, la possibilità dell'articolazione di voci diverse da quelle degli allievi. L'insegnante ha un ruolo di guida nel senso che:

- Inserisce una particolare discussione nel flusso dell'attività della classe
- Influenza la discussione in modo determinante, inserendosi con interventi mirati nel suo sviluppo.

Si possono individuare per la scuola elementare e media tre grandi tipologie di discussione (con sottotipi):
A. Discussione di un problema, vista come parte dell'attività complessiva di problem solving, nei due aspetti di:
A1. Discussione di soluzione, intesa come quel processo di tutta la classe che risolve un problema dato a parole con l'eventuale supporto di immagini o oggetti.

[8] Tutto il documento elaborato dalla C.I.I.M. (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica) organo dell'U.M.I (Unione Matematica Italiana, si trova, come link, alla seguente pagina web:

A2. Discussione di bilancio, intesa come il processo di informazione, analisi e valutazione delle soluzioni individuali proposte ad un problema dato a parole, con l'eventuale supporto di oggetti o immagini, o nel corso di una discussione orchestrata dall'insegnante.
B. Discussione di concettualizzazione, intesa come il processo di costruzione attraverso il linguaggio e collegamenti tra esperienze già vissute e termini particolari della matematica. Essa può essere introdotta da domande dirette (che cosa è un numero, che cos'è un grafico) o indirette (perché molti di voi hanno descritto questo problema come un problema di disegno geometrico?).
C. Meta-discussione, intesa come momento della definizione dei valori e degli atteggiamenti nei confronti del sapere matematico. Essa può essere introdotta da domande del tipo: "come nascono le figure?", "perché è importante generalizzare in matematica?".

In una prima approssimazione, possiamo riconoscere la discussione matematica nella parte verbale dell'attività di insegnamento/apprendimento nelle lezioni di matematica, così come questa può essere riprodotta da un registratore. E' ovvio che questa parte verbale non esaurisce l'attività in quanto non tiene conto degli aspetti gestuali, grafici, ecc., tuttavia ci offre una prospettiva rilevante sui processi che si svolgono nella classe, per la tradizionale importanza che il linguaggio riveste nell'ambiente scolastico. Dopo aver svolto in classe la discussione, con il registratore e l'annotazione diretta di particolari significativi non ricostruibili dalla sola voce, si affronta il lavoro della sbobinatura. Solo sul protocollo trascritto sarà possibile compiere gli andirivieni che consentono l'analisi accurata della discussione. L'insegnante ricostruisce il legame tra la particolare discussione e i motivi dell'attività; ricostruisce la costellazione di intenzioni che ritiene aver guidato i suoi interventi; suddivide la discussione in episodi; analizza la rete di connessioni tra gli episodi; analizza la corrispondenza tra le intenzioni, le strategie messe in opera e il processo di interazione con riferimento al ruolo dell'insegnante; analizza poi il percorso di ogni singolo allievo nella discussione, cercando gli indicatori dell'appropriazione dei motivi individuati. La lettura critica con interpretazione, di voci esterne alla classe, come ad esempio le fonti storiche, non deve avere caratteristiche monologiche, che potrebbero generare al più adesioni passive, ma è necessario che il testo sia interpretabile e interpretato, con riferimento all'esperienza già svolta dagli allievi.
Volutamente, in questo scritto, non sono citate particolari e possibili tipi di discussione, ad esempio non si parla di dimostrazioni. I motivi possono essere vari: la nostra scelta si è orientata sulla scuola elementare e media; la trattazione della dimostrazione in discussione è molto delicata, per le differenze tra argomentare e dimostrare, tra efficacia e rigore. Per tali motivi, il problema rimane quindi aperto.

3.4.2 NUCLEO: Argomentare, congetturare (Dal documento Matematica 2001)

3.4.2.1 Introduzione

Il nucleo di processo "argomentare e congetturare" *caratterizza le attività che preparano alla*

dimostrazione, ossia a una delle attività che contraddistinguono il pensiero matematico maturo,
*quale sarà acquisito negli anni successivi della scuola secondaria superior*e.
Si considerano perciò quei processi eminentemente discorsivi che concernono il pensiero matematico; essi risultano da un intreccio dialettico tra rappresentazioni simboliche (i segni dell'aritmetica, le figure della geometria) e le attività discorsive su questi con cui il soggetto dà significato agli enunciati matematici, che sono sempre di tipo misto (segni specifici del linguaggio simbolico proprio della matematica e parole del linguaggio naturale; esempio: "un numero di tre cifre è certamente maggiore di un numero con due cifre").

Il significato dei segni matematici è analizzabile a due livelli:

- Quello diretto dei segni, per cui ad es. il segno 12 denota un numero ben preciso all'interno di un codice specifico (quello della rappresentazione posizionale decimale); il significato di tale numero è costruito dal bambino attraverso molteplici esperienze in cui le attività (ad es. di conteggio) interagiscono profondamente coi segni che tale numero rappresentano (dodici si ottiene da dieci oggetti aggiungendone due; 12 è una decina più due unità; 12 = 10+2; dodici è il doppio di sei; 12 è nella tabellina del 2, 3, 4, 6; ecc.). Analogamente per i segni delle operazioni.
- Quello del discorso in cui tali segni entrano. Un primo esempio si ha quando dico che la frase "12 è un numero pari" è vera, mentre "12 è un numero dispari" è falsa; il significato di tale frase esprime una relazione tra il significato di 12 è quello di "essere pari". Un secondo esempio è dato dalla frase "se il 7 febbraio è un mercoledì e l'anno non è bisestile anche il 7 marzo è un mercoledì", la cui verità dipende da una relazione tra il numero dei giorni di febbraio negli anni non bisestili (28) e il numero dei giorni della settimana (7): siccome 28 è un multiplo di 7 (cioè la divisione 28:7 dà resto 0) il primo giorno di febbraio e di marzo sono lo stesso, e così via per i successivi. Il primo significato riguarda principalmente le definizioni dei concetti, il secondo quello delle relazioni tra queste. La matematica è costituita da enunciati in cui sono coinvolti continuamente i due aspetti. Comprendere la matematica significa possedere queste due funzioni del discorso. Le attività didattiche sono quindi finalizzate allo sviluppo di queste due funzioni, che affondano le loro radici nelle attività discorsive che il soggetto possiede in modo 'naturale' e che coinvolgono attività cognitive usuali. A livello maturo tali funzioni evolvono verso la dimostrazione matematica, che ha specificità proprie. E' obiettivo della scuola elementare e media coltivare tali funzioni e preparare gli allievi alla delicata evoluzione che li porterà appunto dall'argomentare al dimostrare. Per questo in tutte le attività sarà essenziale la mediazione del linguaggio naturale, sia parlato che scritto: l'esperienza e la verbalizzazione col linguaggio naturale dovranno precedere la formalizzazione e la riflessione sui sistemi di notazione simbolica propri della matematica. Per esempio prima di imparare a formalizzare una strategia risolutiva per mezzo dei segni dell'aritmetica gli allievi dovranno esplorare e operare in campi di esperienza in cui attuare attività di quantificazione utilizzando strumenti e sistemi di rappresentazione che sono caratteristici del campo stesso (il calendario lineare per il tempo; monete per risolvere problemi di

compravendita di beni….). Analogamente per le conoscenze legate allo spazio e alle figure sarà essenziale la loro esplorazione dinamica in contesti vari. L'acquisizione del linguaggio rigoroso della matematica deve essere quindi un obiettivo da raggiungere nel lungo periodo e una conquista cui gli allievi giungono, col supporto dell'insegnante, a partire dalle loro concrete produzione verbali, quasi sempre imprecise ma ricche di significato per l'allievo: queste vanno messe a confronto e opportunamente discusse nella classe per giungere così a riconoscere, nell'uso di simboli e scritture formali, forme sintetiche di espressione del linguaggio naturale.

Le due funzioni sopra descritte si sviluppano con attività opportune in campi di esperienza, in cui l'osservazione delle cose e il cogliere relazioni tra queste costituisce il punto saliente dell'attività stessa. L'alunno metterà in moto tutte le facoltà che possiede naturalmente per tali attività e sarà cura dell'insegnante guidarlo per acquisire opportune forme di rappresentazione per esprimere i significati (delle cose e delle relazioni tra queste) così costruiti.

Molta attenzione dovrà essere dedicata alla verbalizzazione delle attività discorsive che gli alunni esplicano in tali occasioni: mai come in questo caso le funzioni del linguaggio sono essenziali per la costruzione dei significati matematici (nei due sensi detti sopra). In tal modo l'attività discorsiva diventa argomentazione matematica e successivamente dimostrazione.

E' opportuno osservare che molteplici sono le funzioni cognitive coinvolte in tali attività discorsive in cui gli alunni costruiscono (scoprono) significati nelle situazioni didattiche in cui operano, ovvero producono ipotesi sul mondo.

Si noti che la costruzione di un significato nuovo può essere più o meno cosciente; si può avere ad es. una classificazione fatta concretamente dagli alunni, senza che questo comporti necessariamente la produzione di un'ipotesi **(una classificazione prodotta dall'allievo è comunque un'ipotesi fattuale su come è organizzabile il mondo, magari inconscia o sulla base di stereotipi)** o **la genesi di una condizionalità (rilevabile dall'uso di specifici marcatori linguistici del tipo: quando, mentre, se…allora, perché).** Si parla comunque di ipotesi quando il processo di produzione di un significato nuovo è cosciente per l'allievo.

Le attività argomentative in cui **si producono ipotesi** o **si generano condizionalità** sono riconducibili a due modalità principali, che opportunamente coltivate appaiono fondamentali per permettere la transizione nel lungo periodo al pensiero teorico proprio della matematica. Esse sono caratterizzate dal diverso modo con cui il soggetto si rapporta al mondo esterno rispetto al suo mondo interno.

La prima modalità è caratterizzata dalla produzione di ***congetture interpretative*** di ciò che si vede (percepisce), ad es. al fine di organizzarlo.

La seconda è caratterizzata dalla produzione di ***congetture previsionali*** **(ad es. ipotesi su una situazione futura).**

Si può intendere in generale l'attività argomentativa come un discorso:

- che permette al soggetto di tornare su ciò che si è fatto, visto (ecc.), producendo interpretazioni, spiegazioni, risposte a domande del tipo "perché è così?"
- che permette al soggetto di anticipare fatti, situazioni, ecc., producendo previsioni, discorsi ipotetici su mondi possibili, risposte a domande "come sarà?", "come potrebbe essere?"

Dietro alle due modalità del prevedere e interpretare ci sono anche le due modalità: dall'interno all'esterno e viceversa.

3.4.2.2 Le varie tipologie di argomentazione sono in vario modo riconducibili alle modalità:

- Classificare (le attività classificatorie possono essere interpretate come *congetture interpretative in atto* di cui il soggetto si serve per operare).
- Generalizzare
- Gerarchizzare
- Progettare
- Correlare, trovare connessioni, analogie, utilizzare metafore.
- Confutare: sulla base del principio di autorità …. su un base empirica (controesempio ostensivo) su una base argomentativi.
- Definire
- Utilizzare principi, convinzioni, assiomi non dimostrabili….. (es. il sole a mezzogiorno è forte e quindi produce ombre lunghe)
- Falsificare ipotesi: può trattarsi di una verifica sperimentale o argomentativa. Esempio: quando si verificano le previsioni sul risultato dell'esperimento "va a fondo - sta a galla" (cfr. Nucleo Relazioni) oppure quando si verificano previsioni sul calendario, quando l'allievo comincia a fare esperimenti mentali (cfr. Nucleo Numero).
- **Occorre distinguere tra le modalità argomentative e le operazioni mentali che costituiscono il tessuto argomentativo.**

Esempi:

- Confutare è una modalità argomentativa, generalizzare è una operazione mentale; nel confutare ci possono essere una modalità oppositiva oppure cooperativa.
- **Il passaggio tra uso di un esempio e generalizzazione fanno tipicamente parte della tessitura dell'argomentazione**: l'esempio è molto utilizzato dagli allievi nelle loro spiegazioni e può favorire generalizzazioni (quando da esempio specifico diventa esempio generico).
- Corrispondentemente, si propone una griglia per registrare le competenze di questo nucleo che l'insegnante può osservare nell'allievo.

3.4.3.3 GRIGLIA PER LE VERIFICHE

La presente griglia contiene **alcuni indicatori** rilevanti per valutare le competenze relative al nucleo argomentare e congetturare. La lista non è ovviamente esaustiva. Il significato dei termini usati sarà compreso compiutamente leggendo gli esempi di verifiche sotto presentati, in cui gli indicatori generali della griglia sono specificati nel concreto delle verifiche descritte.

L'insegnante nelle attività matematiche che coinvolgono competenze del nucleo sarà particolarmente attento a registrare la natura dell'argomentazione (A) e a osservare la presenza /assenza degli indicatori (B).

Raccogliendo le osservazioni sui suoi allievi, nel corso del tempo, potrà individuare il loro stile cognitivo, relativo a tali competenze, e rilevarne le eventuali evoluzioni.
In classe deve crearsi un clima favorevole all'argomentazione.

3.4.3.4 L'argomentazione:

A1. Definisce
A2. Classifica
A3. Generalizza
A4. Gerarchizza
A5. Progetta
A6. Fornisce controesempi : sulla base del principio di autorità …. su un base empirica (controesempio ostensivo)
A7. Verifica ipotesi: sperimentale

3.4.3.5 Argomentativi

B1. è di tipo → **locale** / **generale**

B2. → **torna su ciò che si è fatto** / **anticipa fatti, situazioni**

B3. fa riferimenti di tipo → **pragmatico** / **teorico (sapere matematico, modi di capire, teorie ingenue)**

B4. è un falso ragionamento
B5. è tautologica (produce argomentazioni del tipo "è così perché è così")
B6. giustifica / non giustifica la strategia adottata
B7. presenta / non presenta
indicatori linguistici (sempre) → **di generalità** / **di condizionalità (se allora, quando, mentre)**

3.5 Competenze matematiche nei vari nuclei (Dal documento Matematica 2001):

3.5.1 Il numero

In situazioni varie, significative e problematiche, relative alla vita di tutti i giorni, alla
matematica e agli altri ambiti disciplinari:

- comprendere il significato dei numeri, i modi per rappresentarli e il significato della notazione posizionale
- comprendere il significato delle operazioni
- operare tra numeri in modo consapevole sia mentalmente, sia per iscritto, sia con strumenti
- usare il ragionamento aritmetico e la modellizzazione numerica per risolvere problemi tratti dal mondo reale o interni alla matematica

3.5.2 Lo spazio e le figure (Dal documento Matematica 2001

In contesti diversi di indagine e di osservazione:

- esplorare, descrivere e rappresentare lo spazio
- riconoscere e descrivere le principali figure piane e solide
- utilizzare le trasformazioni geometriche per operare su figure
- determinare misure di grandezze geometriche
- usare la visualizzazione, il ragionamento spaziale e la modellizzazione geometrica per risolvere problemi del mondo reale o interni alla matematica

3.5.3 Le relazioni (Dal documento Matematica 2001

In vari contesti matematici e sperimentali:

- individuare relazioni tra elementi e rappresentarle
- classificare e ordinare in base a determinate proprietà
- utilizzare lettere e formule per generalizzare o per astrarre
- riconoscere, utilizzare semplici funzioni e rappresentarle
- utilizzare variabili, funzioni, equazioni per risolvere problemi

3.5.4 I dati e le previsioni (Dal documento Matematica 2001

In situazioni varie, relative alla vita di tutti i giorni e agli altri ambiti disciplinari:

- organizzare una ricerca
- interpretare dati usando i metodi statistici
- effettuare valutazioni di probabilità di eventi
- risolvere semplici situazioni problematiche che riguardano eventi
- sviluppare e valutare inferenze, previsioni ed argomentazioni basate su dati

3.5.5 Argomentare e congetturare in contesti diversi, sperimentali, linguistici e matematici (Dal documento Matematica 2001:

- osservare, individuare e descrivere regolarità
- produrre congetture, testarle, validare le congetture prodotte
- riconoscere proprietà che caratterizzano oggetti matematici e l'importanza delle definizioni che le descrivono
- giustificare affermazioni con semplici concatenazioni di proposizioni
- riconoscere argomentazioni conflittuali
- utilizzare controesempi per confutare ipotesi o argomentazioni

3.5.6 Misurare (Dal documento Matematica 2001

In contesti interni ed esterni alla matematica, con particolare riferimento alle scienze sperimentali:

- misurare grandezze e rappresentare le loro misure
- stimare misure
- risolvere problemi e modellizzare fatti e fenomeni partendo da dati di misura

3.5.7 Risolvere e porsi problemi (Dal documento Matematica 2001

In diversi contesti sperimentali, linguistici e matematici, in situazioni varie, relative a campi di esperienza scolastici e non:

- riconoscere e rappresentare situazioni problematiche
- impostare, discutere e comunicare strategie di risoluzione
- risolvere problemi posti da altri
- porsi e risolvere problemi

3.6 SCUOLA ELEMENTARE: Competenze specifiche, Contenuti (Dal documento Matematica 2001)

Argomentare e congetturare

1° - 2° anno

Competenze specifiche

- Individuare e descrivere regolarità in semplici contesti concreti
- Produrre semplici congetture
- Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari

3° - 4° - 5° anno

Competenze specifiche

- Individuare e descrivere regolarità in contesti matematici e non, tratti dalla propria esperienza o proposti per l'osservazione
- Produrre semplici congetture
- Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari
- Validare le congetture prodotte, sia empiricamente, sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo a eventuali controesempi
- Descrivere oggetti matematici anche in modo carente o sovrabbondante, con riferimento alle caratteristiche ed alle proprietà osservate
- Giustificare le proprie idee durante una discussione matematica con semplici argomentazioni

3.7 Scuola Media (Dal documento Matematica 2001)

Argomentare e congetturare, Competenze specifiche

- Descrivere proprietà di figure con termini appropriati

- Individuare regolarità in fenomeni osservati
- Produrre congetture
- Verificare le congetture prodotte testandole su casi particolari
- Validare le congetture prodotte, sia empiricamente, sia mediante argomentazioni, sia ricorrendo a eventuali controesempi
- Comprendere il ruolo della definizione in matematica
- Dare definizioni di semplici oggetti matematici (esempio rettangolo, numero pari,…)
- Giustificare affermazioni durante una discussione matematica anche con semplici ragionamenti concatenati

3.8 Competenze trasversali per la scuola dell'obbligo.

Collocare nel tempo e nello spazio
Avere consapevolezza della dimensione storica e della collocazione spaziale di eventi considerati.
Comunicare
Individuare forme e strumenti di espressione orale, scritta, grafica o iconica per trasmettere un messaggio. Cogliere i significati di un messaggio ricevuto. Confrontare messaggi differenti per coglierne analogie e differenze. Discutere in modo collaborativo. Prendere decisooni per risolvere situazioni conflittuali.
Costruire ragionamenti
Organizzare il proprio pensiero in modo logico e consequenziale. Esplicitare il proprio pensiero attraverso esemplificazioni, argomentazioni e dimostrazioni
Formulare ipotesi e congetture
Intuire gli sviluppi di processi analizzati e di azioni intraprese. Generalizzare. Individuare regolarità e proprietà in contesti diversi. Astrarre caratteristiche generali e trasferirle in contesti nuovi
Inventare
Costruire 'oggetti' anche simbolici rispondenti a determinate proprietà.
Porre in relazione
Stabilire legami tra fatti, dati, termini.
Porre problemi e progettare possibili soluzioni
Riconoscere situazioni problematiche. Stabilire le strategie e le risorse necessarie per la loro soluzione.
Rappresentare
Scegliere forme di presentazione simbolica per rendere evidenti relazioni esistenti tra fatti, dati, termini. Utilizzare forme diverse di rappresentazione, acquisendo capacità di passaggio dall'una all'altra.

3.9 Argomentare: Dalla Congettura alla Dimostrazione.

Le Congetture possono essere:

1. *Congetture interpretative: Il soggetto si rapporta al mondo esterno rispetto al suo mondo interno al fine di organizzarlo.*
2. *Congetture previsionali: Il soggetto si rapporta al mondo esterno rispetto al suo mondo interno al fine di poter fare previsioni future.*

<u>*Marcatori linguistici:*</u>
quando, mentre, se…allora, perché?

Cosa significa introdurre un marcatore piuttosto che un altro?

Argomentare (Dizionario Enciclopedico Treccani):

Dedurre, ricavare per mezzo di argomenti o di indizi esteriori: a. una verità da un'altra; le sue intenzioni si possono a dal modo con cui agisce; la natura del liquido si argomenta facilmente dal suo aspetto.
Dimostrare con argomenti, con ragioni; abdurre[9] argomenti; ragionare, esponendo o discutendo.
Nella "disputa" (gli apici n.d.r.) scolastica, si dice argomentante lo scolaro che ha il compito di impugnare argomentando la tesi proposta e sostenuta dal difendente.

L'argomentazione quindi è lo strumento più generale per poter costruire catene deduttive nel Linguaggio Naturale.
Gli strumenti operativi, in questa accezione generale, possono essere identificati nelle seguenti operazioni:

- Classificare (come congetture argomentative)
- Generalizzare
- Gerarchizzare
- Progettare (La progettazione utilizza la classificazione la gerarchizzazione ed anche la generalizzazione, è considerato un obiettivo cognitivo della fine dei primi 5 anni della scuola dell'obbligo).
- Correlare, trovare connessioni, analogie, utilizzare metafore

3. Confutare:
    1. sulla base del principio di autorità…
    2. Su una base empirica (controesempio ostensivo)
    3. Su una base argomentativa (controesempio in situazione ipotetico-deduttiva)

- Definire
- Utilizzare principi, convinzioni, assiomi non dimostrabili…(es; il sole a mezzogiorno è forte e quindi produce ombre lunghe)
- Falsificare ipotesi: può trattarsi di una verifica sperimentale, esperimenti mentali, esperimenti virtuali. Esempi: quando si verificano le previsioni sul risultato dell'esperimento "va a fondo - sta a galla" (di tipo sperimentale) oppure nei ragionamenti del tipo "Se si pone… allora dovrebbe essere…" (per esperimenti mentali e/o virtuali).

Il punto di arrivo delle attività dell'argomentare è quello del "dimostrare" con l'accezione che questa parola ha assunto nell'ambito matematico.

I seguenti schemi possono dare l'idea di un'evoluzione storica della "dimostrazione":
Sistemazione nel periodo greco:

- Esclusivo utilizzo dei termini definiti;

---

[9] Procedimento consistente nell'avanzare un'ipotesi esplicativa per un certo insieme di fatti osservati.

- Esclusione dell'intuizione sensibile;
- Uso di procedimento di analisi (dal generale al particolare ovvero deduzione logica);
- Uso del procedimento di sintesi (dal particolare al generale ovvero deduzione logica nell'ordine naturale);

I passi da seguire nella dimostrazione sono:

- Enunciazione (protasis): cosa è detto e cosa è cercato;
- Dispiegamento (ecthesis): riprende il dato in particolare e lo predispone alla ricerca;
- Costruzione o macchinario (catascheué): aggiunge ciò che manca al dato per arrivare alla cosa cercata;
- Definizione o specificazione (diorismos): riprende la cosa cercata chiarendo quando si verifica;
- Prova (apodeixis): deduce dalle premesse l'inferenza proposta;
- Conclusione (simperasma): ritorna all'enunciato confermando ciò che si è dimostrato.

Il rapporto Razionalità-Conoscenza viene ad essere analizzato attraverso le congetture. La "prova" rappresenta il motore. Il controesempio è un tipo di prova.

Secondo impostazioni filosofiche differenti abbiamo ruoli diversi della dimostrazione:

- Presso i greci la dimostrazione porta alla scoperta;
- Nella Platonismo insiemistico è uno strumento che conferma i fatti;
- Nei processi di algebrizzazione è una tecnica formale che garantisce certezza e precisione.

3.9.1 Una classificazione dei procedimenti che dall'argomentare portano al dimostrare in situazioni didattiche secondo il lavoro di Balacheff[10]:

- Spegazione: tentativo del soggetto che cerca di chiarire principalmente a sé stesso la validità di una proposizione utilizzando le proprie conoscenze e seguendo le proprie regole di decisione.
- Prova: discorso che assicura la validità di una proposizione condiviso da una comunità. Esso può evolversi nel tempo in concomitanza con l'evolversi degli studi.

[10] Nicolas Balkacheff, Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de collège, Tesi di dottorato, Università di Grenoble, 1988. Ricerche più recenti riguardanti l'argomento si possono trovare on-line ai seguenti indirizzi: http://math.unipa.it/~grim/SITI.htm, http://www-didactique.imag.fr/preuve.

- Dimostrazione: prova tipica della matematica basata su una precisa regola deduttiva e caratterizzata da una forma codificata.
- Ragionamento e processo di validazione: si tratta di due azioni intellettive. Ragionamento è quel particolare momento in cui il soggetto concentrandosi giunge all'intuizione. Processo di validazione è il passo successivo, caratterizzato dalla distensione del pensiero sotto forma verbale o simbolica, caratterizzato, più chiaramente, dalla creazione di un discorso che nel suo limite assume carattere formale e produce una spiegazione.

Classificazione delle prove fornite dagli allievi:

1. Empirismo naif: congetture tratte dall'esame di pochi casi, legate quindi a fattori empirici. In esse è assente il processo di validazione.
2. Esperienza cruciale: congettura tratta dall'esame di qualche caso ma "messa alla prova" su problemi simili. Rimaniamo fondamentalmente nell'empirismo tuttavia si delinea il problema della generalizzazione.
3. Esempio generico: prova di validità di una asserzione riferita ad una classe di problemi (generalizzazione). Le ragioni della validità vengono esplicitate riferendosi ad un rappresentante particolare.
4. Esperienza mentale: tali esperienze segnano il passaggio da prove pragmatiche a prove intellettuali. Esse sono caratterizzate da azioni interiorizzate giacché l'allievo fa riferimento più che alla figura alle sue proprietà.
5. Calcolo degli enunciati: costruzioni intellettuali fondate su teorie più o meno formalizzate.

Dialettica del controesempio.

- Abbandono della congettura intesa come abbandono del problema o in alternativa, ripresa della ricerca di una soluzione del problema in direzione diversa.
- Modifica della congettura. La confutazione porta ad una nuova analisi della situazione nella quale si tiene conto sia della congettura confutata sia del controesempio. Il risultato può comunque essere di tipo diverso in quanto si perviene ad una "modifica ad hoc" oppure ad una "modifica con introduzione di una condizione". Ciò che diversifica le due cose è il dominio di validità che nel primo caso resta invariato mentre nel secondo viene alterato. Infatti la modifica ad hoc il confronto diretto tra risultato calcolato mediante la congettura e risultato calcolato nel controesempio porta alla modifica della teoria iniziale che comunque si riferisce alla totalità degli oggetti studiati. Nel secondo caso, invece, il controesempio consente di individuare la classe di oggetti da scartare per cui la congettura viene mutata con l'introduzione di una condizione che escludendo una classe di oggetti modifica il dominio iniziale di validità.
- Notifica di eccezione. La confutazione suggerisce di incorporare il controesempio nella congettura stessa. Ci consente di non alterare il dominio di validità in quanto alcun oggetto resta escluso.
- Ripresa di definizioni. La confutazione induce ad esplicitare le proprie eccezioni.
- Rigetto del controesempio. Può accadere che il soggetto neghi alla confutazione il ruolo di controesempio.

3.9.3 Regole di inferenza, dimostrazioni come caratterizzazione sintattica delle deduzioni in una ben determinata teoria.

1. Figure di ragionamento e tautologie (logica del 1° ordine, calcolo degli enunciati);
2. Dimostrazione analitica (utilizzo dell'algebra);
3. Dimostrazione diretta;
4. Dimostrazione indiretta (reductio ad absurdum, non accettata dagli intuizionisti);
5. Dimostrazione sintetica (esempio classico nella Geometria Euclidea);
6. Dimostrazione per induzione (catena infinita di deduzioni, non accettata dagli intuizionisti);
7. Dimostrazione per esaurimento di casi (Combinatoria, teorema dei 4 colori)

3.9.4 I modelli sono lo strumento per poter caratterizzare le deduzioni in una ben determinata teoria.

Un possibile schema:

1. Abduzione
2. Congettura (supposizione azzardata)
3. Che viene posta al vaglio di una comunità scientifica in un determinato periodo storico;
4. Congettura matematica.

Dimostrazione Matematica (Dizionario Enciclopedico Treccani):

La dimostrazione è una catena di deduzioni che riconducono la validità di una proposizione A' a quella di una proposizione A, già riconosciuta per vera. In questo modo, si perviene necessariamente, ad un certo momento, ad un sistema di proposizioni primitive (termini o definizioni, e assiomi), non ulteriormente riducibili a proposizioni più semplici. Esse possono essere considerate, da un punto di vista elementare, intuitivo, come proposizioni di per sé evidenti, relative a concetti primitivi pur essi di significato evidente (le "nozioni comuni" di Euclide); ma da un punto di vista logicamente più rigoroso le proposizioni primitive (postulati, assiomi) devono invece essere considerate come relazioni formali, indipendenti da modelli concreti, che definiscono in modo implicito gli enti primitivi. Punto di partenza di una teoria è allora un qualsiasi sistema di postulati, purché non contraddittori (sistema coerente). Quest'ultima veduta, che è la veduta moderna, ha dimostrato, attraverso esempi ormai classici (geom. Non Euclidee, etc…), la insostenibilità della tesi che afferma essere la matematica scienza dimostrativa a priori (Aristotele, Kant), basata su principi immutabili, inerenti alle forme stesse della intuizione. Interessa poi osservare che la dimostrazione in matematica non può essere in generale ridotta a una pura e semplice catena di sillogismi (vedi dimostrazione per induzione). La d. matematica di esistenza può essere diretta (costruttiva), o indiretta (non costruttiva). Nel primo caso si dimostra l'esistenza di un ente matematico di un certo tipo assegnando un metodo per costruirlo effettivamente; nel secondo, si vede *che, se nessun oggetto di quel tipo esistesse, si arriverebbe a risultati che contraddicono teoremi precedentemente.*