CAPITOLO 4

LA CONGETTURA DI GOLDBACH
TRA STORIA E SPERIMENTAZIONE DIDATTICA

Coordinatore: Aldo Scimone

Componenti: Buscemi Carmela, Carini Lina, Lo Iacona Fabio, Marotta Salvatore, Milazzo Angela, Sorte Salvatrice, Termini Gabriella.

Presentazione

Aldo Scimone[*]

Tra i mesi di gennaio e febbraio dell'anno in corso è stata eseguita a Piazza Armerina (Enna) una sperimentazione didattica a largo respiro sul tema:

ARGOMENTARE, CONGETTURARE E DIMOSTRARE
NELLA SCUOLA DI TUTTI

Il progetto, coordinato dal Prof. Filippo Spagnolo, del Dipartimento di Scienze della Formazione primaria, ha coinvolto scuole elementari, medie inferiori e superiori, con grande partecipazione di diversi docenti.
Sono stati formati quattro gruppi che hanno analizzato diverse situazioni/problemi, sottolineando l'aspetto dei comportamenti attesi dagli allievi, mediante tre fasi:
- la prima, in cui è stata effettuata l'analisi a priori del problema;
- la seconda, in cui è stata effettuata l'analisi qualitativa dei dati della sperimentazione;
- la terza, di analisi quantitativa dei dati mediante due software particolari, che hanno una grande applicazioni in indagini statistiche simili, lo CHIC e l' SSPSS per l'analisi fattoriale.

Lo scrivente ha coordinato il secondo gruppo formato dai Docenti:

Buscemi Carmela, del Liceo Scientifico Statale "V. Romano";
Carini Lina, , del Liceo Scientifico Statale "V. Romano";
Lo Iacona Fabio, dell'ITI. "E. Majorana";
Marotta Salvatore, della S.E. "L.CAPUANA";
Milazzo Angela, della S.M.S. "L.CAPUANA";
Sorte Salvatrice, della S.E. "R. CHINNICI";
Termini Gabriella. della S.E. "L.CAPUANA";

che hanno eseguito la sperimentazione didattica proponendo agli alunni di alcune loro classi di dimostrare la celebre congettura di Goldbach (1742) sui numeri pari:

Ogni numero pari maggiore di 4 può essere scritto come somma di due primi dispari.

La congettura è stata scelta per due motivi principali: innanzitutto, per la semplicità dell'enunciato, che può essere compreso da alunni che appartengono a tutti i tipi di scuola, da quella elementare a quella superiore; in secondo luogo, perché si presta molto bene alla "sperimentazione", in quanto può essere affrontata agevolmente dagli alunni, secondo la loro diversa cultura matematica, mediante esemplificazioni numeriche.

---

[*] GRIM (Gruppo di Ricerca per l'Insegnamento delle Matematiche) – Dipartimento di Matematica dell'Università di Palermo- via Archirafi, 34- 90145-Palermo.

Ma c’è anche una ragione più precisa ad avere indotto lo scrivente a suggerire ai Docenti del proprio gruppo di basare la loro sperimentazione didattica sulla congettura di Goldbach. Essa consiste nel fatto di annoverare, dal ‘700 ad oggi, una lunga storia di tentativi di dimostrazione da parte di una miriade di matematici, e sono proprio tali tentativi a costituire il fondamento più valido e attendibile su cui basare l’analisi a priori degli esiti degli alunni.
A questo proposito, è utile ricordare, almeno a grandi linee la storia della congettura, in modo che apparirà più chiara la genesi delle analisi a priori effettuate secondo l’appartenenza degli alunni ai vari ordini scolastici.

Christian Goldbach (1690-1764, nato a Königsberg fu, come scrive Weil[1], uomo di grande versatilità per inclinazioni e doti naturali, certamente istruito e benestante, negli anni giovanili fu un instancabile viaggiatore, cercando ovunque la compagnia di scienziati e intellettuali. Nel 1721 incontrò a Venezia Nicolas Bernoulli (1687-1759 e poco dopo iniziò una regolare corrispondenza con lui e il più giovane fratello Daniel Bernoulli (1700-1782) Nel 1725 si adoperò per condurli con sé a Pietroburgo, dove li precedette di alcuni mesi. Sembra che entrambi i fratelli, come non molto tempo dopo anche Eulerolo considerassero amico influente e quasi un mecenate. Eulero in particolare, lo trattò per tutta la vita con una commovente mescolanza di rispetto, stima e affetto.
Sebbene sia probabile che Goldbach avesse iniziato il suo viaggio in Russia solo per pura curiosità, vi rimase poi fino alla morte, soggiornando alternativamente a Pietroburgo e a Mosca.
Pur essendo d'indole schiva e modesta, la sua cultura e i lavori prodotti (ebbe vasti interessi scientifici, ma fu particolarmente attratto dalla teoria dei numeri e dall'Analisi matematica) gli permisero di diventare segretario dell'Accademia delle Scienze di Pietroburgo, e nel 1742 fu anche incaricato dal Ministero degli Affari Esteri di decifrare dispacci. Fu in corrispondenza con Eulero dal 1729 fino all'anno della propria morte[2]. La corrispondenza con Eulero venne tenuta all'inizio in latino e così continuò, seppure ad un ritmo meno serrato, anche dopo il ritorno di Goldbach a Pietroburgo nel 1732, in un periodo in cui essi dovevano frequentarsi quasi quotidianamente. Poi, attorno al 1740, passarono ad un tedesco, spesso infarcito di parole francesi e con una deriva verso il latino, soprattutto nei brani di carattere matematico.
Fu appunto in una lettera a Eulerodel 7 giugno 1742, che leggeremo fra poco, che Goldbach propose la celebre congettura che resiste ancora oggi ad ogni tentativo di dimostrazione (né è stato possibile dare un controesempio).
Una apparente regolarità aveva attratto l'attenzione di Goldbachforse per caso, forse a causa dell'appassionante lettura delle note di teoria dei numeri di Fermat:

$6 = 3 + 3 \qquad 8 = 3 + 5 \qquad 10 = 5 + 5 \qquad 12 = 5 + 7 \qquad \ldots$

Sembrava che *ogni numero pari, non minore di 6, potesse esprimersi come somma di due primi dispari.*
Anche Eulero si diceva convinto della verità della congettura e si trattava quindi di mettere a punto la dimostrazione, o quanto meno una strategia per essa.

[1] Cfr. A. Weil, *Teoria dei numeri*, cit., p. 158.
[2] La corrispondenza è stata pubblicata in forma completa da A.P. Juskevich e E. Winter, *Leonhard Euler und Christian Goldbach*, Berlin, Akademie-Verlag, 1965.

Per esempio, appena poche verifiche sono sufficienti per rendersi conto che la scelta della coppia di primi in cui spezzare un assegnato numero pari non è in generale unica:

6 = 3 + 3	senza alcuna alternativa
8 = 3 + 5	“ “
10 = 3 + 7	ma anche: 10 = 5 + 5
12 = 5 + 7	senza alcuna alternativa
14 = 3 + 11	ma anche: 14 = 7 + 7
16 = 3 + 13	ma anche: 16 = 5 + 11
18 = 5 + 13	ma anche: 18 = 7 + 11
20 = 3 + 17	ma anche: 20 = 7 + 13.

E non basta. Anche considerando dei pari abbastanza piccoli, si può giungere a tre coppie di primi:

22 = 3 + 19	ma anche: 22 = 5 + 17	ed anche: 22 = 11 + 11
24 = 5 + 19	ma anche: 24 = 7 + 17	ed anche: 24 = 11 + 13
26 = 3 + 23	ma anche: 26 = 7 + 19	ed anche: 26 = 13 + 13.

Considerando poi dei pari appena un po' più grandi, le possibilità di scelta sembrano aumentare. Perché? Secondo quale legge? C'è una qualche regolarità in tutto ciò?
È ipotizzabile che Goldbachnei suoi innumerevoli tentativi di dimostrazione, lavorasse su tabelle del tipo seguente:

n	***3+...***	***5+...***	***7+...***	***11+...***	***13+...***	***17+...***	***19+...***	***23+...***
6	3+3							
8	3+5	5+3						
10	3+7	5+5	7+3					
12		5+7	7+5					
14	3+11		7+7	11+3				
16	3+13	5+11		11+5	13+3			
18		5+13	7+11	11+7	13+5			
20	3+17		7+13		13+7	17+3		
22	3+19	5+17		11+11		17+5	19+3	
24		5+19	7+17	11+13	13+11	17+7	19+5	
26	3+23		7+19		13+13		19+7	23+3
28		5+23		11+17		17+11		23+5
30			7+23	11+19	13+17	17+13	19+11	23+7
32	3+29				13+19		19+13	

....

Cosa può aver pensato Goldbach? Che nella tabella precedente ogni riga deve essere occupata da almeno una somma dei primi. E quindi il problema era ricondotto a capire come si presentano i numeri primi nella successione degli interi dispari. Cioè,

nel vincere la loro disposizione incredibile ed affascinante, così folle, così inspiegabilmente irregolare.
Certo, si sarà detto Goldbach, non sarebbe difficile dimostrare la congettura se almeno si conoscessero i ritmi delle interruzioni che spezzano la distesa dei numeri primi. Chissà se il grande amico Eulero avrebbe voluto dedicare un po' del suo tempo a questo semplice esercizio.
Fu allora che Goldbach (da Mosca) scrisse a Eulero (a Berlino) la lettera del 7 giugno 1742 che abbiamo citato all'inizio[3]:

Io non credo inutile prestare attenzione anche a quelle proposizioni che sembrano vere malgrado non se ne abbia una vera dimostrazione. Anche se dopo si dimostrassero false, avrebbero tuttavia dato luogo alla scoperta di una nuova verità.

L'idea di Fermat che ogni numero $2^{2^{n-1}}+1$ dà una successione di numeri primi non può essere corretta, come lei ha mostrato, ma sarebbe notevole se questa serie desse i soli numeri che possono scomporsi in due quadrati in un solo modo. Similmente, anch'io azzarderò una congettura: che ogni numero composto di due primi è un aggregato di quanti si vogliano numeri (compresa l'unità), finché si raggiunga la combinazione di tutte le [sue] unità[4].
[Goldbach aggiunse a margine]: Dopo aver riletto quanto scritto, trovo che la congettura può essere dimostrata con tutto rigore nel caso n+1, se è vera nel caso n e se n+1 può scomporsi in due primi. La dimostrazione è molto semplice. Sembra ad ogni modo che ogni numero maggiore di 2 sia un aggregato di tre numeri primi[5].
[Il testo della lettera di Goldbach continua]: Per esempio:

	1+1+1+1		2+3
4 =	1+1+2	5 =	1+1+3
	1+3		1+1+1+2
			1+1+1+1+1
	1+5		
	1+2+3		
6 =	1+1+1+3		etc.
	1+1+1+1+2		
	1+1+1+1+1+1		

Non meno interessante è la risposta di Eulero (da Berlino) a Goldbach del 30 giugno 1742:

---

3 Cfr. D.J. Struik, *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Cambridge (Mass.), Harvard Univ. Press, 1969, pp. 47-48.
4 Cioè: ogni numero n che sia somma di due primi è somma di quanti si vogliano primi fino ad n. Ricordiamo che per Eulero e Goldbach 1 è un primo, mentre oggi non lo si considera tale perché, come è noto, verrebbe meno il teorema della fattorizzazione unica.
5 È questa la prima formulazione della congettura di Goldbach. Quando si inizia la successione dei primi con 2, essa può essere formulata così: ogni numero pari è la somma di due numeri che sono o primi o 1. Abbiamo già dato all'inizio la formulazione generale che ora può completarsi così: ogni numero pari > 2 è la somma di due primi; ogni numero dispari > 5 è la somma di tre primi. Per la storia della congettura è ancora utile L.E. Dickson, *History of the theory of numbers*, cit., I, pp. 421-24, e R.C. Archibald, Goldbach's theorem, *Scripta Mathematica*, 3 (1935), pp. 44-50 e 153-161.

Quando tutti i numeri inclusi nell'espressione $2^{2^{n-1}}+1$ possono scomporsi in due quadrati in un solo modo, questi numeri devono anche essere tutti primi, ciò che non è il caso, perché tutti questi numeri sono contenuti nella forma 4m+1 che, ogni qual volta è primo può certamente risolversi in due quadrati in un sol modo, ma quando 4m+1 non è primo, o non è risolvibile in due quadrati oppure lo è in più modi. Che $2^{32}+1$, che non è primo, può dividersi in due quadrati in almeno due modi lo posso mostrare nel seguente modo: I. Quando *a* e *b* sono risolvibili in due quadrati, allora anche il prodotto *ab* sarà risolvibile in due quadrati. II. Se il prodotto *ab* e uno dei fattori *a* fossero risolvibili in due quadrati, allora anche l'altro fattore *b* dovrebbe essere risolvibile in due quadrati. Questi teoremi si possono dimostrare rigorosamente. Ora $2^{32}+1$, che è divisibile in due quadrati, precisamente 2^{32} e 1, è divisibile per $641 = 25^2 + 4^2$. Quindi l'altro fattore, che per brevità chiamerò *b*, deve essere anch'esso somma di due quadrati. Posto $b = pp + qq$, sicché $2^{32}+1 = (25^2 + 4^2)(pp+qq)$, allora

$$2^{32}+1 = (25p + 4q)^2 + (25q - 4p)^2$$

e contemporaneamente

$$2^{32}+1 = (25p - 4q)^2 + (25q + 4p)^2$$

quindi $2^{32}+1$ è divisibile in almeno due modi nella somma di due quadrati. Dal momento che p = 2556 e q = 409, la duplice riduzione può trovarsi a priori:

$$2^{32}+1 = 65536^2 + 1^2 = 622664^2 + 20449^2.$$

Che ogni numero che sia risolvibile in due primi può risolversi in quanti si vogliano primi, può essere illustrato e confermato da un'osservazione che lei mi aveva comunicato qualche tempo fa, cioè che ogni numero pari è una somma di due primi. Infatti, il numero dato n sia pari; allora è somma di due primi e dal momento che n-2 è anch'esso somma di due primi, n deve essere somma di tre e anche di quattro primi e così via. Se, tuttavia, n è dispari, allora è certamente somma di tre primi, dal momento che n-1 è somma di due primi, e perciò può anch'esso risolversi in quanti si vogliano primi. Tuttavia, che ogni numero pari sia somma di due primi, lo considero un teorema del tutto vero, sebbene io non sappia dimostrarlo.

Sembra che Eulero non abbia mai cercato di dimostrare la congettura di Goldbach, ma in una lettera del dicembre 1752 a lui indirizzata stabilì l'ulteriore congettura (anch'essa probabilmente suggerita da Goldbach) che ogni numero pari della forma 4n+2 è uguale alla somma di due primi della forma 4m+1. Per esempio: 14 = 1 + 13; 22 = 5 + 17; 30 = 1 + 29 = 13 + 17.
Indipendentemente da Goldbach, anche il matematico inglese Edward Waring (1734-1798, nell'opera *Meditationes analyticae* (Cambridge, 1776), aveva espresso la stessa congettura nella forma seguente: «Ogni numero pari consiste di due primi e ogni numero dispari o è primo o consiste di tre numeri primi».

Piuttosto però che impegnarsi in dubbie questioni di priorità (per esempio Archibald dubita che già Descartes possa aver formulato una congettura simile), è preferibile dire qualcosa sull'evidenza empirica a favore della congettura, pur in presenza di qualche voce dissonante[6].

Sorvolando su alcuni contributi minori, ci pare significativo segnalare che George Cantor (1845-1918 abbia approntato una tabella molto interessante che verificava la congettura per i numeri pari fino a mille[7]. Se $n = 2N = x + y$, con x e y primi e $x \leq y$, e denotando con n(n) il numero delle possibili scomposizioni di n, alcuni valori della tabella di Cantor sono i seguenti:

***n*=2N**	***x***	**n(*n*)**
10	3,5	2
22	3,5,11	3
34	3,5,11,17	4
40	3,11,17	3
78	5,7,11,17,19,31,37	7
86	3,7,13,19,43	5
100	3,11,17,29,41,47	6
1000	3,17,23,29,47,53,59,71,89, 113,137, 173,179, 191,227,239,257,281,317, 347,353,359,383,401,431,443,479,491	28

La tabella cantoriana per n=990 fornisce il più grande numero di scomposizioni, cioè n(990) = 52 e ciò sembra indicare che la congettura di Goldbach non solo è probabilmente vera, ma che i valori di n(n) crescono al crescere di n, sebbene con le tipiche oscillazioni delle funzioni aritmetiche.

Successivamente Haussner estese la tabella cantoriana a tutti i numeri pari fino a 10.000, dividendoli in gruppi (fino a 3000, fino 5000, etc.), concludendo che la congettura era verificata[8].

Il concetto informativo di queste tabelle dirette sembra essere il seguente: considerato il numero n = 2N, sottraendo da esso tutti i primi $x \leq$ N, si vada a cercare nelle Tavole dei primi quali delle differenze 2N – x siano anche numeri primi. Quando 2N – x risulta primo, allora 2N sarà rappresentabile come somma di due primi

Douglas R. Hofstadter si è ispirato[9] alla congettura di Goldbach per imbastire un dialogo delizioso tra Achille e la Tartaruga che sono due protagonisti del suo classico libro *Gödel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*.

Il dialogo si trova nel Cap. XII (Parte II) del libro, e ha come protagonisti Achille e la Tartaruga. La forma del dialogo è basata sulle *Variazioni Goldberg* e il contenuto riguarda problemi di teoria dei numeri come la congettura di Goldbach e quella di

---

[6] Cfr. F.J.E. Lionnet, Note sur la question “Tout nombre pair est-il la somme de deux impairs premiers?, *Nouvelles Annales des Mathématiques*, t. 18 (2), 1879, pp. 356-360.

[7] Cfr. G. Cantor, Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach, Association française pour l'avancement des sciences, *Comptes Rendus de la XXIII session*, Caen (1894), pp. 117-134.

[8] Cfr. Archibald, op. cit., p. 49.

[9] Douglas R. Hofstadter, "Variazioni Goldbach", in *Gödel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*, Milano, Adelphi, 1990, pp. 424-438.

Collatz. In sintesi, Hofstadter vuole mostrare come sul tema della ricerca che si effettua in teoria dei numeri, proprio perché il suo campo di indagine è l'insieme infinito dei numeri naturali, possano esservi molte variazioni, alcune delle quali conducono a indagini finite, altre a indagini infinite e altre ancora a indagini che oscillano fra quelle finite e quelle infinite.
Così, la congettura di Goldbach conduce a una indagine finita, nel senso che se si vuole verificare se un numero pari $2n$ è somma di due primi dispari, la procedura per effettuare tale verifica avrà *certamente termine*, perché i primi si devono cercare nell'insieme finito dei numeri primi minori di $2n$.
Consideriamo, invece, quella che Hofstadter chiama, sempre per i numeri pari, la *proprietà della Tartaruga*, cioè il fatto che un numero pari si possa esprimere come differenza di due primi dispari:

$$2 = 5 - 3 = 7 - 5 = 13 - 11 = 19 - 17 = \ldots$$
$$4 = 7 - 3 = 11 - 7 = 17 - 13 = 23 - 19 = ..$$
$$6 = 11 - 5 = 13 - 7 = 17 - 11 = 19 - 13 = \ldots$$
$$8 = 11 - 3 = 13 - 5 = 19 - 11 = 31 - 23 = \ldots$$

Ebbene, se vogliamo verificare, dato un numero pari $2n$, se esso possieda o no tale proprietà, in linea di principio la procedura da adottare è *potenzialmente infinita*, in quanto bisogna estendere la ricerca a tutto l'insieme infinito dei numeri primi.
Se un numero pari non avesse la proprietà della tartaruga, avrebbe -dice Hofstadter- la *proprietà di Achille*, cioè quella di non essere esprimibile come differenza di due primi dispari.
C'è, poi, un terzo tipo di indagini che potrebbero essere finite o infinite, come quella relativa al problema $3x+1$ di Collatz. Infatti, dato un qualsiasi numero x, applicando ad esso la regola secondo cui se è dispari lo triplichiamo e vi aggiungiamo uno, mentre se è pari ne prendiamo la metà, è molto difficile sapere in anticipo quanto si dovrà "salire in alto" prima di giungere alla successione finale 4-2-1. Così, per esempio, se partiamo da $x=15$, e applichiamo la procedura, il massimo numero a cui si "salirà" sarà 160:

15-46-23-70-35-106-53-*160*-80-40-20-10-5-16-8-4-2-1

ma è del tutto plausibile pensare che con altri numeri si possa salire sempre più in alto e non scendere mai.
Per quanto riguarda le variazioni Goldberg, Hofstadter si riferisce alle 30 variazioni scritte da J.S. Bach (1685-1750) per il conte sassone Kaiserling, eseguite da un giovane clavicembalista di corte di nome Goldberg, al quale vennero attribuite, perché il conte voleva che gli venissero suonate ogni sera, dato che soffriva d'insonnia.
Dall'epoca della sua pubblicazione, tutti i matematici si sono trovati d'accordo nel ritenere la congettura di Goldbach uno dei problemi matematici più difficili. A questo proposito, vi è un aneddoto secondo il quale il matematico Harry Schultz Vandiver (1882-1973 andava dicendo che se dopo la morte fosse tornato in vita e fosse venuto a sapere che il problema di Goldbach era stato risolto, allora sarebbe morto nuovamente di colpo.

I due matematici inglesi Hardy e Littlewood fornirono una formula per determinare il numero di tali rappresentazioni, supposto che ne esista una. Nel 1966, Chen Jing-run dimostrò che ogni numero pari maggiore di 2 è della forma $p+a$, con p primo ed a primo o il prodotto di due primi. Recentemente, nel 1997, Jean-Marc Deshouillers, Yannik Saouter e Hermann J.J. te Riele hanno dimostrato che la congettura è vera per tutti gli interi positivi minori di 10^{14}.

L'obiettivo della sperimentazione è stato quello di esaminare quali processi dinamici mentali vengano messi in moto dagli alunni quando essi hanno il compito di produrre una dimostrazione di una congettura.
I risultati ottenuti sono stati significativi e sintetizzati nelle *Conclusioni*. Si ringraziano tutti i Docenti del Gruppo che hanno aderito con entusiasmo al progetto.

SCUOLA ELEMENTARE

La consegna consiste nel proporre agli alunni di verificare la congettura attraverso due fasi diversificate, operando in maniera concreta:

1ª Fase: La consegna viene data individualmente proponendo il "Gioco dei pari" (tempo: 1 ora):

Come puoi formare i primi 30 numeri pari mettendo insieme i numeri primi della tavola che hai costruito?

2ª Fase: La consegna viene data in assetto di piccolo gruppo (tempo 1 ora) circostanziando la scelta degli alunni:

I numeri pari che avete ottenuto potete ricavarli sommando sempre e solo due primi? Se è vero, potete affermare che ciò si verifica sempre per ogni numero pari?

Analisi a priori della 1ª Fase

A) Somma a caso più numeri primi ottenendo pari.
B) Somma a due a due i numeri primi della tabella e ottiene numeri pari.
C) Disattende la consegna perché somma sia primi che composti.
D) Disattende la consegna perché non applica solo l'addizione ma anche la moltiplicazione.

Comportamenti attesi nella seconda fase

1. Gli alunni di ogni gruppo si confrontano tra di loro socializzando le scoperte effettuate nella fase individuale.

2. Gli alunni di ogni gruppo cominciano a verificare la congettura utilizzando la tavola dei primi e socializzano.

3. I vari gruppi si confrontano e socializzano i risultati ottenuti.

4. Ogni gruppo socializza agli altri la propria strategia cercando di farla emergere.

Analisi qualitativa dei risultati della sperimentazione

Sarà effettuata mediante la catalogazione dei comportamenti osservati confrontati con quelli attesi.

Analisi quantitativa dei dati sperimentali ottenuti nella 1ª Fase

Sarà effettuata mediante l’impiego del foglio elettronico Excel con l’ausilio dello CHIC e dell’analisi fattoriale effettuata con il software SSPSS.

Bibliografia essenziale

1. AA.VV., Mat Mat, Carlo Signorelli Editore.

2. AA.VV., Percorsi di Mate, Il Capitello.

3. AA.VV., Progetto Matematica, Raffaello Editore.

4. AA.VV., La Nuova guida Atlas, Atlas.

Scuola Media Inferiore e Superiore

Testo della sperimentazione:

La seguente affermazione è sempre vera ?

Un numero pari si può sempre scomporre nella somma di due numeri primi ?
Argomentate le vostre Affermazioni.

Tempo per la consegna: 2 ore
Organizzazione del lavoro:

1ª Fase: Riflessione individuale sul quesito proposto (tempo: 1 ora);

2ª Fase: Argomentazione in assetto di piccolo gruppo e registrazione delle strategie individuate (tempo: 1 ora).

Analisi a priori della prima fase

1. Verifica la congettura sommando numeri primi progressivi e verificando se la somma è pari oppure no.[A]

2. Sceglie un numero pari e considera i numeri primi inferiori ad esso; quindi verifica la congettura scegliendo uno di questi numeri primi e constatando se il complementare (differenza tra il pari e il primo considerato) è anch'esso primo. (uso delle tavole). [B]

3. Scompone il numero pari come somma di unità; quindi applica la proprietà associativa fino ad ottenere due numeri primi tali che la somma sia il numero considerato.[C]

4. Scompone il numero pari in fattori primi e somma i fattori cercando di ottenere due primi.

5. Verifica la congettura considerando numeri primi presi a caso.[E]

6. Si basa sulle cifre finali di un numero primo per accertare la verità dell'affermazione. [F]

7. Verifica se il numero pari è scomponibile nel prodotto di due primi più un altro primo.[G]

8. 'Verifica' la congettura affermando la somma di un numero pari e di un primo da un primo. H*

9. 'Verifica' la congettura affermando che preso un primo a cui si aggiunga lo zero e dividendo per dieci si ottiene un numero primo. I*

10. ‘Verifica’ la congettura affermando che la somma di un primo con numero dispari da un numero pari. L*

Comportamenti attesi della 2^a fase

1. Gli alunni di ogni gruppo cominciano a verificare la congettura utilizzando la tavola dei primi e socializzano.

2. Viene introdotta l’idea di cercare un contro esempio per confutare la congettura.

3. Uno o più gruppi si chiudono nella comunicazione perché pensano di avere imboccato la strategia giusta.

4. Ogni gruppo socializza agli altri la propria strategia cercando di farla emergere.

Analisi qualitativa dei risultati della sperimentazione

Sarà effettuata mediante la catalogazione dei comportamenti osservati confrontati con quelli attesi.

Analisi quantitativa dei dati sperimentali ottenuti nella 1^a Fase

Sarà effettuata mediante l’impiego del foglio elettronico Excel con l’ausilio dello CHIC e dell’analisi fattoriale.

Deduzione di possibili profili comportamentali degli alunni.

Dalle analisi effettuate si tracceranno possibili profili comportamentali di alunni che verranno immessi come variabili tra i comportamenti attesi dell’analisi a priori. Si effettuerà quindi una inversione della matrice dell’analisi quantitativa e mediante l’analisi fattoriale si constaterà la percentuale degli allievi che si conformeranno ai profili tracciati. I dati ottenuti potranno dare informazioni al docente sul modo in cui gli alunni della classe si predispongono di fronte alle tematiche della disciplina.

Comportamenti della seconda fase

Gli alunni seguono i primi tre casi di comportamento attesi, alcuni mostrano di non avere compreso la consegna, il giorno dopo chiedo ad alcuni alunni dei vari gruppi di esporre la metodologia trovata.

Strategie e commenti non enunciati precedentemente:

- dividere un pari per due e vedere se trova un numero primo.
- Considerare un pari e sottrarre un primo a caso il resto sarà sicuramente un primo.

- La congettura non è vera perchè se sommiamo il due (numero primo) con un altro primo si ottiene un numero dispari.
- Un numero pari si può ottenere come sottrazione di due numeri primi (Congettura di Chen).

Rappresentazioni storico-epistemologiche

Scuola media inferiore e superiore

1. P. Nastasi, A. Scimone, “Da Euclide a Goldbach – Storie di uomini e numeri, Sigma Edizioni 2000.

2. E. L. Dickson, Number theory and its history, Dover Publications.

3. H. Davenport, Higher arithmetic, Dover Publications

Scuola elementare

ANALISI QUALITATIVA

Lavoro sperimentale effettuato nella classe 3^b
Scuola Elementare "L.CAPUANA"

Ins: Termini Gabriella ,Marotta Salvatore.

La sperimentazione è stata eseguita in una classe terza elementare costituita da 20 alunni ed è stata preceduta da un lavoro per l'acquisizione dei pre-requisiti fondamentali per poter affrontare la sperimentazione.
La consegna non è stata anticipata né spiegata giorni prima dell'effettuazione. E' stata svolta dagli alunni giorno 19 Febbraio e sono stati rispettati i tempi della sua esecuzione, che prevedevano 2 fasi di un'ora ciascuna.
I comportamenti degli alunni sistematicamente segnalati con appunti e ausilio di videocamera sono stati differenziati in ciascuna fase.
I^ FASE.
La prima fase del lavoro, costituita dal "Gioco dei pari ", consiste in un lavoro individuale in cui gli alunni devono formare i primi 30 numeri pari utilizzando variamente la tabella dei "primi" da loro precedentemente costruita.
Ognuno si e' impegnato nel formare tale somma e solo pochi hanno avuto un momento di disorientamento, subito superato essendo il concetto di numero pari un contenuto ormai ben acquisito.
Solo alcuni hanno fatto, nella tabella precostituita dagli insegnanti, il tentativo di sommare 3 "primi", ma visto che il risultato ottenuto era un numero dispari, per non disattendere la consegna, hanno sommato successivamente solo due tra i numeri dati a loro disposizione. Solo l'alunna A6 disattende completamente la consegna sbagliando quasi tutte le somme:
-utilizza come secondo addendo della somma un pari non presente nella tabella ed ottiene pertanto un dispari;
-utilizza come secondo addendo della somma un pari ma sbaglia completamente la somma;
-utilizza due primi, ma facendo la somma in riga sbaglia nel posizionare le cifre.
Particolare ed unico è stato il comportamento osservato nell'alunna A15. Al termine della 1^ fase ha effettuato metà della consegna, sebbene essa sia stata disattesa, in quanto le somme dei "primi sono state svolte correttamente.
Il clima d'eccitazione dei compagni, la novità del gioco o forse anche la videocamera l'hanno bloccata inibendo le sue buone capacità.
II^ FASE
La seconda fase si svolge in gruppo.
Si formano solo due gruppi e dopo che l'insegnante legge la consegna, inizia la socializzazione all'interno del gruppo.
Subito emergono i leader che dirigono il dialogo e aiutano ad esprimere i concetti anche coloro che presentano difficoltà.
I due gruppi parlano sottovoce per non fare sentire, l'uno all'altro, le conclusioni alle quali sono giunte.
Dopo varie considerazioni, emergono le seguenti ipotesi, che poi ciascuno ha cercato di scrivere sul foglio della consegna:

a) sottraendo da un numero primo ,un numero primo minore si ottiene un numero pari.

Es.: 11-5=6

b) Sommando quattro volte lo stesso numero primo si ottiene un numero pari.

Es.: 7+7+7+7=28

c) sommando quattro numeri primi diversi si ottiene un numero pari

Es.: 5+3+7+9=24

d) moltiplicando per quattro un numero primo si ottiene un numero pari

Es.: 7x 4=28

e) sottraendo l'unità da un numero primo ottengo un numero pari

Es.: 11-1=10

f) moltiplicando un numero primo per un qualsiasi numero pari ottengo un numero pari

Es.: 7x6=42.

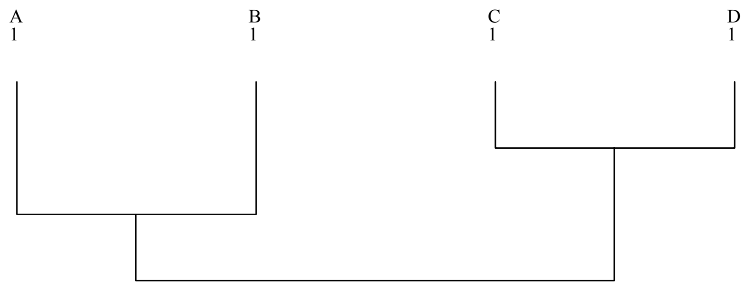
Tabella dei dati della sperimentazione

	A1	B1	C1	D1
a1	1	0	0	0
a2	0	1	0	0
a3	0	1	0	0
a4	0	1	0	0
a5	0	0	1	0
a6	0	0	1	1
a7	0	1	0	0
a8	0	0	1	0
a9	0	1	0	0
a10	0	1	0	0
a11	0	1	0	0
a12	0	1	0	0
a13	0	1	0	0
a14	0	1	0	0
a15	0	1	0	0
a16	0	1	0	0
a17	0	1	0	0
a18	0	1	0	0
a19	0	1	0	0
a20	0	1	0	0

Analisi quantitativa dei dati

Insegnanti: Gabriella Termini-Salvatore Marotta

1) Albero di similarità



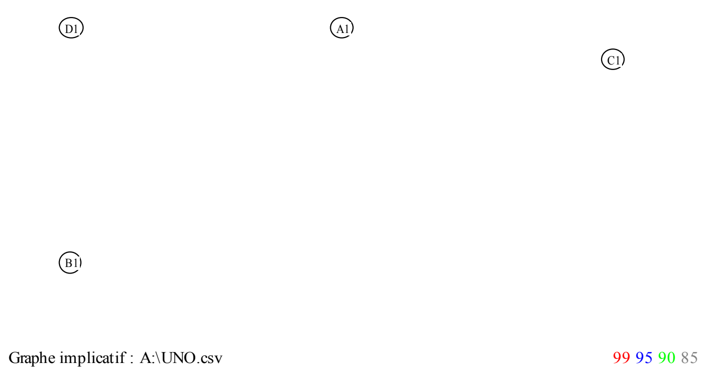
Arbre de similarité : A:\UNO.csv

Dall'analisi del grafo emerge che c'è una similarità del 1° ordine tra le strategie A1 e B1, e tra le strategie C1e D1. L'alunno che sceglie la strategia A1 segue una linea di pensiero sequenziale così come nel caso B1.

La similarità tra C1 e D1dipende dal fatto che l'errore commesso dagli alunni è, sia di tipo semantico, perché l'alunno somma sia primi che composti, sia di tipo operativo.

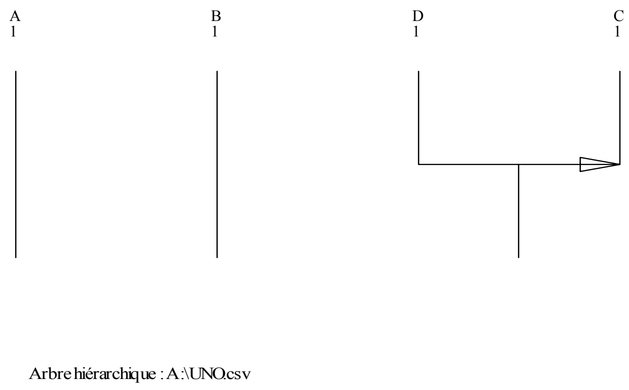
Vi è similarità del 2° ordine tra i gruppi A1-B1 e C1-D1 perché alla base dei due insiemi di strategie c'è il pensiero sequenziale.

2) Il grafico delle implicazioni



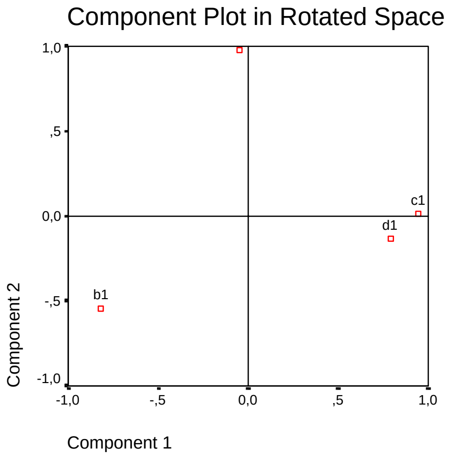
Dall’analisi del grafo implicativo emerge che tra le variabili non ci sono implicazioni; ciò significa che le variabili scelte per prevedere gli esiti sono indipendenti, cioè abbastanza autonome da permettere all’alunno di lavorare indipendentemente da altri caratteri distintivi.

3) L’albero gerarchico



Dall’analisi dell’albero gerarchico emerge che non c’è gerarchia tra le variabili A1 e B1 e nel loro tipo di risposta. C’è invece gerarchia tra le variabili D1 e C1, cioè, l’alunno che sceglie la strategia D1 potrebbe anche scegliere la strategia C1.

4) Analisi fattoriale dei dati



Rispetto al primo fattore, cioè l'asse orizzontale, la variabile C1 lo caratterizza fortemente, assieme alla variabile D1, anche se quest'ultima lo influenza in maniera. Rispetto a tale fattore le variabili D1 e A1 appaiono isolate, e ciò significa che non hanno alcuna influenza sulla caratterizzazione del primo fattore.
Rispetto al secondo fattore è la variabile A1 a darne la maggiore caratterizzazione, mentre le variabili D1 e C1 appaiono nella loro struttura di gruppo isolato. Tutto ciò ha una chiara corrispondenza con il grafico della similarità.

Scuola elementare

Lavoro sperimentale effettuato nella classe 3^b
Scuola Elementare “R. Chinnici”

Insegnante: Sorte Salvatrice.

ANALISI QUALITATIVA

1°FASE: tempo 1 ora, lavoro individuale.
Consegna:
-Come puoi formare i primi 30 numeri pari mettendo insieme i numeri primi della tavola che hai costruito?
Partecipano all’attività proposta numero18 alunni.
I bambini, inizialmente sono euforici e incuriositi dalla presenza della telecamera. Dopo aver ricevuto il foglio con la consegna leggono con curiosità testo e sono sorpresi nel vedere la scatola dei numeri primi costruita precedentemente da loro stessi. Sono silenziosi, qualcuno cerca spiegazioni con lo sguardo rivolto all’insegnante. Alcuni, sicuri di avere imboccato la strada giusta per risolvere il quesito, incominciano a scrivere. Poi si fermano, sono i più bravi. L’insegnante si avvicina con la telecamera per vedere cosa succede, perché si sono fermati. I bambini stanno rileggendo il testo perché sono sorti alcuni dubbi: bisbigliano tra di loro che sommando a caso due numeri di quella scatola si ottengono numeri grossi, e aggiungono che non bisogna ottenere numeri più grandi del sessanta. L’insegnante per incoraggiarli rilegge la consegna a voce alta soffermandosi sulle frasi significative del testo. Dopo circa mezz’ora la maggior parte dei bambini procede sommando i numeri primi a due a due e ottiene i pari. Una bambina esegue la moltiplicazione, l’addizione di pari e dispari per ottenere sempre il numero 20 poi cancella le prime operazioni. Un altro bambino somma inizialmente i primi a quattro a quattro, procede poi sommandoli a due a due ottenendo i pari. Coloro che presentano difficoltà nei calcoli sbagliano alcune somme.

2° FASE: tempo 1 ora, lavoro di gruppo.

Consegna:
“I numeri pari che avete ottenuto potete ricavarli sommando sempre e solo due primi? Se è vero, potete affermare che ciò si verifica sempre per ogni numero pari?”
I bambini vengono divisi in quattro gruppi. Ogni gruppo dopo aver letto la consegna incomincia a chiacchierare vivacemente, ma appena si avvicina l’insegnante per riprendere con la telecamera le loro argomentazioni, molti si sentono a disagio e non parlano. Sollecitati gli alunni più pronti incominciano a discutere tra di loro, si confrontano ma cercano di far emergere le loro affermazioni e di farle convalidare dal gruppo. I più insicuri cancellano, riscrivono, chiedono ai compagni la strategia giusta. Scaduto il tempo a loro disposizione l’insegnante ritira il foglio della consegna, ma i bambini continuano a discutere sul lavoro svolto.
Dalla visione degli elaborati e della videocassetta l’insegnante rileva che i bambini sono arrivati alla conclusione che un pari non si può ottenere sempre e solo

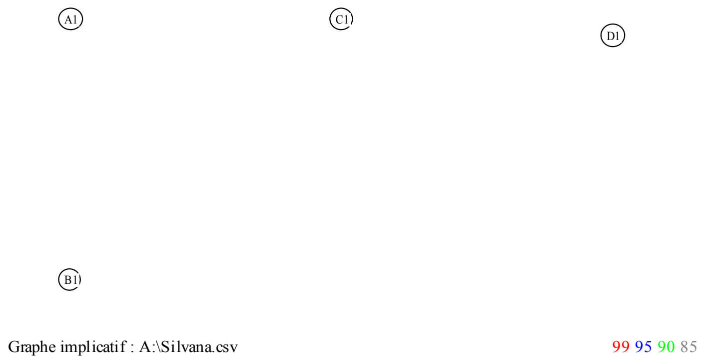
sommando due primi, dimostrano tale affermazione eseguendo le tre operazioni (addizione, moltiplicazione, sottrazione).
Un gruppo ristretto non sa argomentare né dimostrare .

Tabella dei Dati

	A1	B1	C1	D1
a1	0	1	0	0
a2	0	0	1	1
a3	0	1	0	0
a4	0	1	0	0
a5	0	1	0	0
a6	0	1	0	0
a7	0	1	0	0
a8	0	1	0	0
a9	0	1	0	0
a10	0	1	0	0
a11	0	1	0	0
a12	0	1	0	0
a13	0	1	0	0
a14	0	1	0	0
a15	0	1	0	0
a16	0	1	0	0
a17	1	0	0	1
a18	0	1	0	0

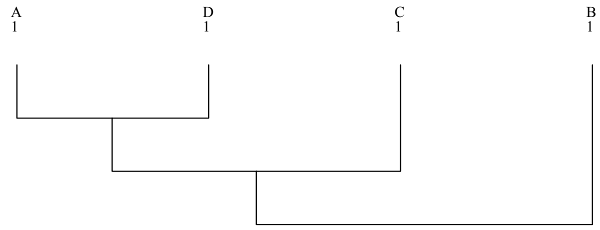
Analisi quantitativa dei dati

1) Il grafico delle implicazioni



Dall’analisi del grafo implicativo emerge che tra le variabili non ci sono implicazioni; ciò significa che le variabili scelte per prevedere gli esiti sono indipendenti, cioè abbastanza autonome da permettere all’alunno di lavorare indipendentemente da altri caratteri distintivi.

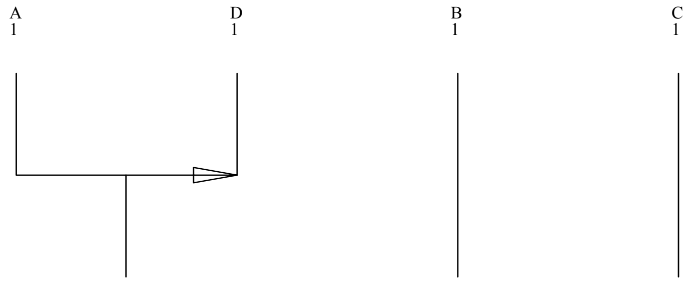
2) L'albero delle similarità



Arbre de similarité : A:\Silvana.csv

Dall'analisi del grafo di similarità emerge che c'è similarità del primo ordine tra le strategie A1 e D1, perché entrambe si basano sulla scelta casuale o dei primi o delle operazioni da effettuare. Una similarità del secondo ordine esiste tra il gruppo (A1-D1) e C1 in quanto anche in C1 c'è la scelta casuale di sommare sia primi che composti. C'è anche una similarità del terzo ordine tra il gruppo ((A1-D1), C1) e B1 perché la scelta dei numeri primi da sommare è casuale.

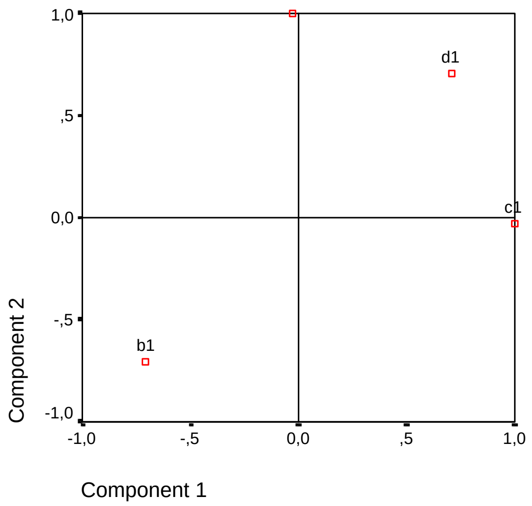
3) L'albero gerarchico



Arbre hiérarchique : A:\Silvana.csv

Dall'analisi dell'albero gerarchico emerge che non c'è gerarchia tra le variabili B1 e C1 e nel loro tipo di risposta. C'è gerarchia tra A1 e D1, perché l'alunno che sceglie la strategia A1 potrebbe scegliere anche l'altra.

Component Plot in Rotated Space



Analisi fattoriale

Dall'analisi fattoriale si evince che rispetto al primo fattore la variabile C1 assume un ruolo determinate e che si correla alla variabile B1, anche se quest'ultima non influenza affatto il fattore; molto distanti appaiono le altre due variabili.
Invece, rispetto al secondo fattore, la variabile A1 lo caratterizza pienamente, mentre le variabili D1 e C1 si coalizzano in gruppo, e la variabile B1 rimane anche in questo secondo caso isolata, per cui essa è ininfluente a caratterizzare sia il primo che il secondo fattore.

Scuola Media Inferiore
Insegnante: Milazzo Angela

Classe I D

N°alunni: 16

Testo della sperimentazione:

La seguente affermazione è sempre vera?

Un numero pari si può sempre scomporre nella somma di due numeri primi?
Argomentate le vostre Affermazioni.

Tempo per la consegna: 100 minuti.

Organizzazione del lavoro:

Fasi dell'attività:

- **I fase: discussione in gruppi di due alunni sulla consegna ricevuta (tempo: 10 min.);**
- **II fase: ricerca individuale scritta delle strategie risolutive del problema (tempo: 30 min.);**
- **III fase: divisione della classe in due squadre e argomentazione di gruppo (tempo: 30 min.);**
- **IV fase: dimostrazione delle strategie risolutive individuate fra le squadre concorrenti (tempo: 30 min.).**

Analisi qualitativa dei risultati della sperimentazione

I Fase - Gli alunni, ricevuta la consegna, si confrontano a due al fine di rendersi conto se hanno chiaro il quesito; argomentano sui numeri pari, sui numeri primi e sulla scomposizione dei numeri. In questa fase cominciano a fare proprio il problema.
II Fase - Inizia la fase dell'individuazione personale delle strategie per la risoluzione del quesito. Alcuni alunni passano subito all'individuazione di strategie, altri hanno bisogno di riflettere, tutti si sentono responsabilizzati e cercano soluzioni, utilizzando anche la tavola dei numeri primi.
III Fase - Divisa la classe in due squadre, gli alunni eleggono due capisquadra e si dispongono in assetto di piccolo gruppo (due gruppi di quattro alunni per squadra). Gli alunni socializzano, comunicano tra loro le strategie individuate e cercano di convincere gli altri sulla validità della propria strategia. Qualche alunno ha un ruolo passivo, altri si evidenziano come capi gruppo e cercano di coinvolgere tutti perché hanno compreso che il successo è della squadra e non personale.

Gli alunni selezionano le strategie più valide e le scrivono ricercando un linguaggio quanto più appropriato e scientifico. Le due squadre si chiudono nella comunicazione per non fare trapelare all'altra squadra le strategie elaborate.
IV Fase - Inizia la competizione tra le due squadre: i capisquadra e i capigruppo illustrano alternativamente alla lavagna le strategie, mentre la squadra avversaria cerca dei contro esempi per confutarle. Tutti gli alunni sono interessati, perché sanno che vincerà la squadra che quantizzerà più punti.
Viene assegnato 1 punto per ogni strategia valida, mentre sono assegnati 3 punti per ogni strategia, dimostrata come non valida, dalla squadra avversaria.
Le due squadre concludono in parità, quantizzando 6 punti ciascuna.

Gruppo A	Gruppo B
6	6

Si cancellano progressivamente le strategie non valide dalla lavagna, sulla quale rimangono quelle che dimostrano la congettura.
Le strategie individuate dagli alunni rientrano in quelle individuate nell'analisi a priori, di seguito allegata:

Analisi a priori

1. Verifica la congettura sommando numeri primi progressivi e verificando se la somma è pari oppure no. [A]

2. Sceglie un numero pari e considera i numeri primi inferiori ad esso; quindi verifica la congettura scegliendo uno di questi numeri primi e costatando se il complementare (differenza tra il pari e il primo considerato) è anch'esso primo. (uso delle tavole). [B]

3. Scompone il numero pari come somma di unità; quindi applica la proprietà associativa fino ad ottenere due numeri primi tali che la somma sia il numero considerato.[C]

4. Scompone il numero pari in fattori primi e somma i fattori cercando di ottenere due primi.[D]

5. Verifica la congettura considerando numeri primi presi a caso.[E]

6. Si basa sulle cifre finali di un numero primo per accertare la verità dell'affermazione. [F]

7. Verifica se il numero pari è scomponibile nel prodotto di due primi più un altro primo.[G]

Analisi qualitativa mediante indicatori.

Dall'analisi delle produzioni e delle registrazioni in assetto di gruppo e di squadra, si evince che la maggior parte del gruppo classe argomenta sulla

congettura, produce definizioni, generalizza. Tutti ricercano strategie, solo alcuni giustificano le stesse, la maggior parte utilizza indicatori linguistici di condizionalità, di generalità.
In modo particolare, attraverso i frammenti di filmato, si evidenziano le seguenti tipologie di argomentazione:

1. definisce e produce argomentazioni di tipo locale ("sommando due numeri primi a caso si ottiene un numero pari"), utilizzando indicatori linguistici di tipo ostensivo e di generalità;
2. definisce e classifica, facendo riferimento di tipo teorico;
3. generalizza ed utilizza indicatori linguistici di generalità ("scomponendo multipli di 10 verifico che si ottengono sempre due numeri primi");
4. progetta e verifica ipotesi facendo riferimento ad un sapere matematico;
5. verifica ipotesi e procede alla validazione mediante esempi, che presenta con indicatori linguistici di condizionalità e ritorna su una strategia, dimostrandola;
6. verifica la congettura e procede alla validazione in modo sperimentale;
7. produce congetture e le verifica con esemplificazioni facendo riferimento teorico;
8. enuncia, gerarchizza, individua regolarità e comprende il ruolo della definizione in matematica;
9. verifica la congettura scomponendo numeri pari progressivi, utilizzando indicatori linguistici di condizionalità.

Sono forniti due controesempi:

- controesempio ostensivo per confutare la congettura, che porta all'attenzione il numero 2;
- controesempio su base argomentativa per confutare un'ipotesi.

Solo pochi non producono argomentazioni o argomentano in modo tautologico.
L'esperienza nel complesso è stata utile per il raggiungimento dei seguenti obiettivi:

- potenziamento delle capacità logiche;
- sviluppo delle capacità di argomentare su un problema;
- socializzazione.

Il ruolo dell'insegnante è stato di guida.

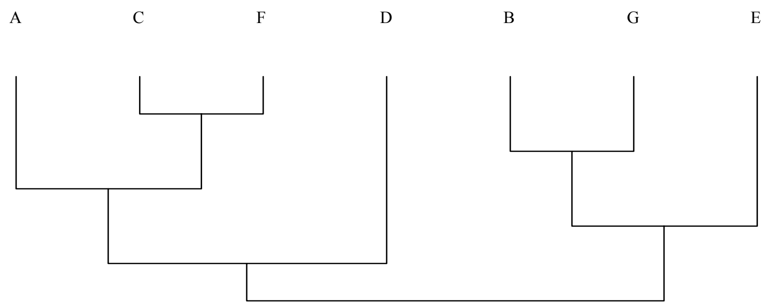
Tabella relativa all'Analisi quantitativa
Scuola Media inferiore

Legenda:
A1 ÷ A16: alunni
A ÷ G: strategie

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
A1	1	1	0	0	0	0	0
A2	0	1	0	0	1	0	0
A3	0	1	0	0	1	0	0
A4	1	1	0	1	1	0	0
A5	0	1	0	0	1	0	0
A6	1	0	1	0	1	0	0
A7	1	1	0	0	1	0	0
A8	1	1	0	0	1	0	1
A9	0	1	0	0	1	0	0
A10	1	1	1	0	1	0	0
A11	1	1	0	0	1	0	1
A12	1	1	0	0	1	0	1
A13	1	1	0	0	0	0	0
A14	1	0	0	0	1	0	0
A15	1	0	0	0	1	0	0
A16	1	1	1	0	1	1	0

Analisi quantitativa dei dati

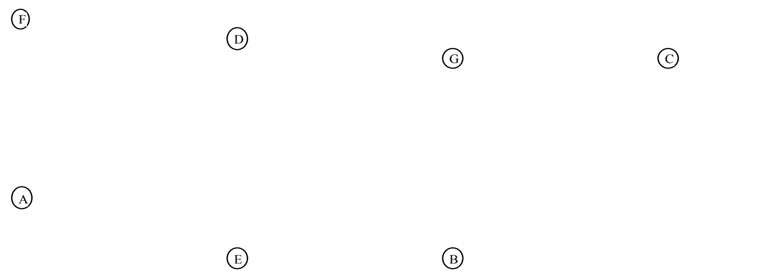
1) Albero di similarità



Arbre de similarité : C:\WINDOWS\Desktop\Grp2scuolamedia.csv

1. Dall'osservazione del grafico della similarità si evidenzia una maggiore affinità tra le strategie C ed F e le strategie B e G. Infatti, analizzando le strategie C ed F si nota che chi ha adottato la strategia C, di scomporre un numero pari come somma di unità, e la strategia F, di considerare le cifre finali di un numero primo, ha una predisposizione al ragionamento di tipo sequenziale
   Affinità sembra che ci sia anche tra chi sceglie la strategia B e chi sceglie la strategia G (vedi analisi a priori), in quanto chi ha adottato le due strategie si è basato in realtà sempre sull'operazione del sottrarre e della scelta casuale dei numeri primi.
2. Esistono poi delle similarità di secondo ordine, precisamente tra la srategia A e il gruppo di similarità C-F, in quanto anche A predispone al ragionamento sequenziale; dello stesso ordine è la similarità tra il gruppo B-G e il gruppo E, in quanto si basano sempre su numeri presi a caso.
3. Una similarità del terzo ordine esiste tra il raggruppamento (A-(C-F)) e la tipologia D, perché quest'ultima di tipo sequenziale e tra il raggruppamento ((B-G)-E), perché quest'ultima di tipo random.
4. Si rileva, infine, una similarità del 4° ordine tra i gruppi ((A-(C-F))-D) e ((B-G)-E), in quanto in quest'ultimo gruppo accanto al carattere più evidente della casualità, si evidenziano anche tratti di sequenzialità.

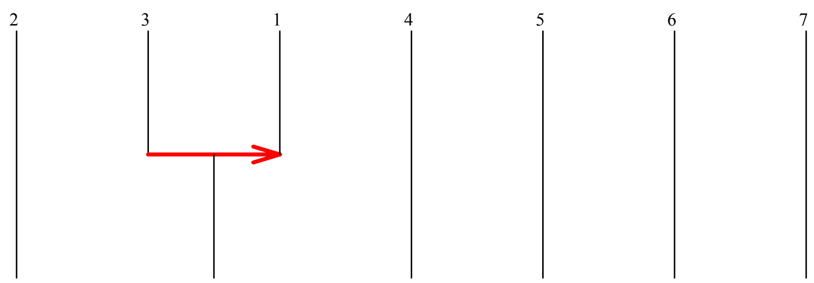
2) Grafo implicativo



Graphe implicatif : C:\WINDOWS\Desktop\Grp2scuolamedia.csv 99 95 90 85

Il grafo implicativo, in questo caso, ci informa sul fatto che la scelta delle strategie di approccio da parte degli allievi alla congettura è stata effettuata in modo che ogni strategia è abbastanza autonoma, per cui ognuna di esse presenta dei caratteri di univocità, che permettono agli allievi di potere condurre fino in fondo la via intrapresa indipendentemente da altre considerazioni.

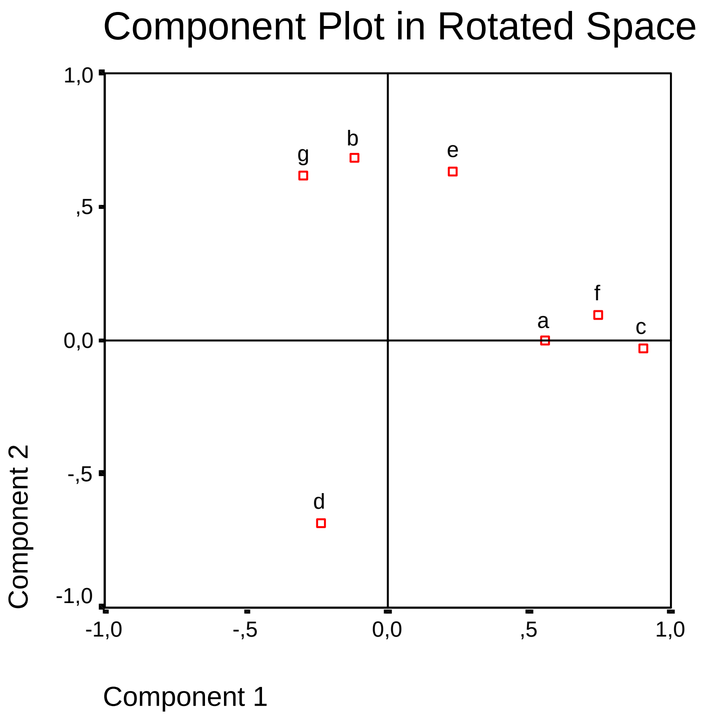
3) Albero gerarchico



Arbre hiérarchique : A:\Angelxcel1.csv

Dal grafo si evidenzia una gerarchia marcata tra la strategia C e la A, in quanto l'alunno che sceglie di scomporre il numero pari come somma di unità, per ottenere due primi associando le unità, sicuramente sceglierà di verificare lacongettura sommando numeri primi progressivi.

Analisi fattoriale



Il grafo relativo all'analisi fattoriale dei dati evidenzia una netta caratterizzazione del fattore orizzontale da parte delle strategie A, C e F; rispetto a questo asse appaiono nettamente isolate il gruppo G-B-E e la strategia D, in perfetto accordo con l'albero della similarità.

Rispetto all'asse verticale che rappresenta il secondo fattore dell'analisi, in accordo sempre con l'albero della similarità, si evidenziano il gruppo delle strategie G-B-E e il gruppo A-C-F che sono molto distanti dalla strategia D.

SCUOLA MEDIA SUPERIORE

Liceo Scientifico "V. ROMANO"
Classe I-A Prof. Lina Carini
Classe III-B Prof. Carmela Buscemi

22-23-24 FEBBRAIO 2002

La congettura di Goldbach

La seguente affermazione è sempre vera?

"Un numero pari si può sempre scomporre nella somma di due primi?

Argomentare le vostre affermazioni.
Tempo per la consegna: 2 ore.

Organizzazione del lavoro:

1. Fase 1: riflessione individuale sul quesito proposto (tempo 1 ora)
2. Fase 2: argomentare in assetto di piccolo gruppo e registrazione delle strategie individuali (tempo un ora)

Analisi a priori della prima fase

A1: Verifica la congettura sommando numeri primi progressivi e verificando se la somma è pari oppure no.
A2: Sceglie un numero pari e considera i numeri primi inferiori ad esso; quindi verifica la congettura scegliendo uno di questi numeri primi e constatando se il complementare (differenza tra il pari e il primo considerato) è anch'esso primo.(uso delle tavole).
A3: Scompone il numero pari come somma di unità; quindi applica la proprietà associativa fino ad ottenere due primi tali che la somma sia il numero considerato.
A4: Scompone il numero pari in fattori primi e somma i fattori cercando di ottenere due primi.
A5: Verifica la congettura considerando numeri primi presi a caso.
A6: Si basa sulle cifre finali di un numero primo per accertare la verità dell'affermazione.
A7: Verifica se il numero pari è scomponibile nel prodotto di due primi più un altro primo.
A8: Verifica la congettura prendendo numeri naturali pari a caso oppure consecutivi.
A9: Verifica la congettura basandosi sulla conoscenza che la somma di due numeri dispari è sempre un numero pari e osservata la particolarità del numero due, conclude che la congettura è vera per numeri pari maggiori di due.

ANALISI QUALITATIVA

Gli alunni della Secondaria Superiore hanno affrontato la consegna con piena consapevolezza del contenuto, in quanto già conoscono i numeri primi, i numeri pari, i numeri dispari e i criteri di divisibilità.

1^ FASE:
(tempo: 1 ora)

Nella prima ora gli alunni affrontano la consegna in modo individuale .
Ognuno di loro con più o meno difficoltà cerca di dimostrare la congettura utilizzando la tavola dei numeri primi e in qualche caso la calcolatrice.

2^ FASE:
(tempo: 1 ora)
Gli allievi si dividono in sei gruppi e in ogni gruppo ciascuno di loro socializza ai compagni la propria strategia.
Ogni gruppo socializza agli altri la propria strategia cercando di farla emergere.

In tutti i protocolli è presente l'aspetto pragmatico,nell'approccio alla consegna. Dall'analisi emerge che la maggior parte degli alunni ha cercato di provare la congettura di Goldbach seguendo un procedimento dimostrativo di tipo induttivo (classe 1^),
Gli allievi verificano la congettura analizzando numeri pari piccoli in successione e numeri pari grandi presi a caso: alla luce dei risultati si rileva che il procedimento dimostrativo è prettamente induttivo, come già detto.
In questa fase la maggior parte degli alunni ha considerato anche il numero uno come numero primo, perché, in caso contrario, essi hanno sostenuto che la congettura potrebbe rivelarsi non attendibile.
Superata l'incertezza tutti gli allievi hanno individuato la condizione che per verificare la congettura di Goldbach si debba partire da numeri pari maggiori del numero 2.

Inoltre, dato che il numero due è l'unico numero primo pari, si è notato che la scomposizione del numero pari quattro è anche un caso particolare, perché è l'unico scomponibile nella somma di due numeri primi pari: 4 = 2 + 2.
Alcuni hanno tentato di verificare la congettura con un metodo sperimentale:
Alcuni allievi hanno cercato di procedere in modo ipotetico-deduttivo:
Per esempio, un allievo formula le seguenti ipotesi:
"1^ Ipotesi: *si* può scomporre un numero pari nella somma di due numeri primi considerando le due metà del numero dato:

2 = 1+1; 4 = 2+2; 6 = 3+3; 8 = 4+4;

e fa altre prove…, ma trovato un controesempio considera una
2 ^ Ipotesi: cerca un altro modo per scomporre i numeri pari , che nelle precedenti prove non era riuscito a scomporre nella somma di due primi e trova che è possibile scomporre tali numeri pari nella somma di un numero primo ,immediatamente precedente, con il 3 oppure con 5 oppure con 7"; concludendo:
"*Secondo me un numero pari è sempre scomponibile nella somma di due numeri primi, perché la differenza tra un pari e un primo , dà come risultato un numero primo."*

Come si può notare c'è un indicatore di generalità denominato "sempre" e l'indicatore linguistico denominato "perché".

L' ipotesi di scomporre un numero pari nella somma di due numeri primi uguali alla sua metà si riscontra anche in parecchi alunni.
E' da rilevare la considerazione che alcuni allievi avendo trovato il contro esempio del 2 uguale 1+1 (contro esempio di tipo ostensivo), ritengono che ciò è sufficiente per smentire l'affermazione, deducono quindi che la congettura non è sempre vera; mentre altri concludono che la congettura di Goldbach è vera per numeri pari maggiori di 2, cioè introducono una condizione.
E' da notare che non ci sono state argomentazioni di tipo tautologico, in quanto in ogni protocollo è sempre presente la verifica per più numeri, con opportuna giustificazione.
Per molti allievi l'argomentazione è stata bloccata dal misconcetto che la somma di numeri dispari da sempre un numero pari (Sapere matematico , teorie ingenue),ed essendo tutti i numeri primi dispari , ad eccezione del 2, hanno concluso che la congettura è sempre verificata per tutti i numeri pari > di 2, ed hanno notato anche la particolare scomposizione del 4 = 2 + 2, cioè il 4 è l'unico numero pari che risulta scomponibile nella somma di due numeri primi pari, essendo il 2 l'unico numero primo pari.

VALIDAZIONE

In alcuni allievi c'è il tentativo di trovare un metodo generale per la scomposizione di un qualsiasi numero pari nella somma di due primi.
Per esempio, nel protocollo di un allievo si legge:

" Si sa che la somma di due numeri dispari è sempre pari . Considerando che , ad eccezione del 2 , tutti i numeri primi sono dispar , allora la congettura di Goldbach per essere sempre vera i due numeri primi devono essere o entrambi diversi da 2 o entrambi uguali a 2.
In formula : p_1+p_2= n pari

(con p_1= n primo, p_2 = n primo e n numero pari)

se p1 e p2 = 2 , o p1 e p2 diversi da 2 ,

Es. 598 = 587 + 11 ; 4 = 2 + 2."

Qui si riscontra anche un indicatore di condizionalità.

Da un altro protocollo si legge:

"Un numero pari , si può sempre scomporre nella somma di due numeri primi : 10 =7 + 3; 12 = 7 + 5;14 = 7 + 7;16 = 11 + 5;18 =11 + 7;20 = 13 + 7;…e fa altre prove.

Si può notare che usando un numero primo come costante e sommando con numeri primi sequenziali , ma non superiori a 7 si otterranno sempre numeri pari sequenziali."

E' evidente in questo caso che l'allievo si trova nell'impossibilità di estendere la sua sperimentazione all'intero insieme N; c'è, quindi, una chiara limitazione del suo processo induttivo.
Ancora da un altro protocollo:

"Quindi alla luce delle prove fatte risulta che la congettura di Goldbach è vera per numeri piccoli , non sembra tuttavia possibile trovare una regola ,che permetta di scomporre un numero pari maggiore di 2 nella somma di due numeri primi. Dato che i numeri sono infiniti e non si possono fare infinite prove, non si può dimostrare , almeno in questo modo."

Qualche allievo segue il procedimento del metodo di Cantor, cioè preso un numero pari, sceglie il numero primo più vicino al pari considerato "*purchè sia minore*" , e calcola la differenza, se tale differenza è un numero primo, allora il numero pari è scomponibile nella somma del numero primo che lo precede e il numero primo ottenuto dalla differenza; se invece, tale differenza non è un numero primo ripete il procedimento con il numero primo inferiore, e così via fino a determinare una differenza che risulti un numero primo, così facendo si potrà sempre scomporre un numero pari nella somma di due numeri primi.

Alcuni hanno frainteso il tentativo di dimostrazione con la verifica del caso inverso della congettura di Goldbach; come si evince dalla seguente annotazione di un allievo:

"La congettura di Goldbach è esatta, perché la somma di due numeri primi, purchè dispari(quindi escluso il 2) dà come risultato sempre un numero pari.
Es: 10 = 5 + 5; 28 = 23 + 5; 64 = 41 + 23.

Ma nel calcolo di numeri grandi, per facilitare l'operazione, abbiamo adottato un metodo, che consiste :

a) Cercare il numero primo più vicino al numero pari da scomporre, ricordando che il
numero primo debba essere sempre minore del numero dato.

b) Trovare la differenza fra il numero pari e il numero primo scelto.

c) Verificare che la somma fra il numero primo scelto e il numero primo trovato dalla differenza del numero pari per il numero dispari primo, dia come risultato il numero pari scelto.

Es: 1112 = 1109 + 3 ; 178 = 161 +17 ; 582 = 563 + 19. "

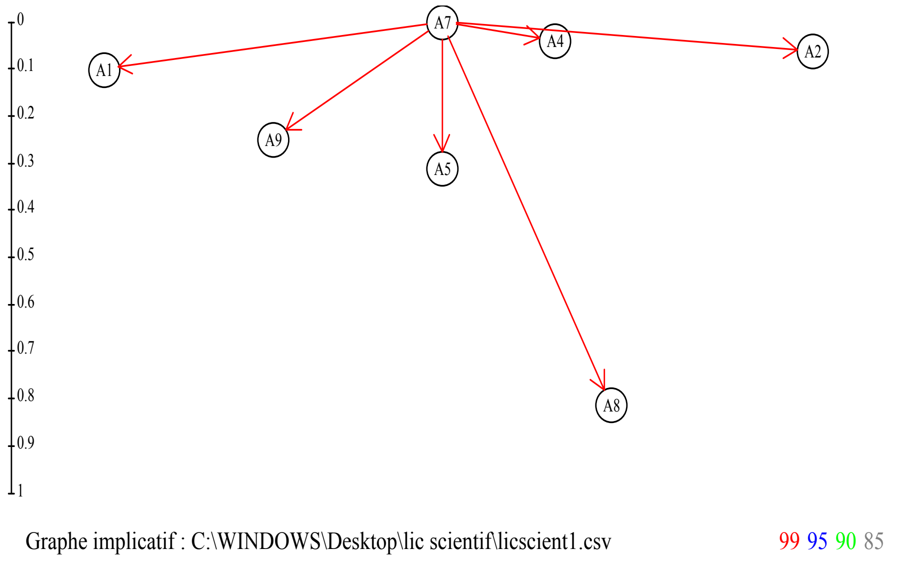
Dall'analisi effettuata si evince che gli indicatori linguistici più comunemente usati sono :

- Sommando … vediamo che si formano numeri pari …, quindi la congettura di Goldbach è sempre vera .
- Abbiamo notato che …
- Inoltre abbiamo verificato che…
- Abbiamo altresì notato…
- Abbiamo perciò constatato …
- Dato che i numeri sono infiniti …
- Pertanto…
- Quindi " Alla luce delle prove fatte <u>risulta che</u> …. Non sembra tuttavia possibile…
- Quindi…
- Si perché…
- In quanto..
- perché…
- sempre…
-Essendo…
-Perché essendo….dà sempre
-Considerando le due tabelle(di tipo locale)dove…mentre…noteremo che contiene sempre…
-Può essere sempre vera <u>soltanto se</u>…,però può anche essere vera <u>se</u> (indicatore di condizionalità)…e ciò è possibile solo…
-Discutendo …abbiamo dedotto che…
-perché dovrebbe…
-Quindi essendo…
-Noi sappiamo che…quindi abbiamo dedotto che…dà sempre …
-Da questo ne deduciamo che(indicatore di generalità)
Quindi (indicatore di conseguenzialità) affermiamo che … <u>si può sempre</u> …
-Sapendo che…
Si trova anche l'indicatore linguistico di generalità "sempre".

C'è da sottolineare, infine, che durante la prima fase il docente ha sollecitato gli allievi a rileggere il testo della consegna, per cercare di provare la congettura.
Ogni allievo nella prima fase ha elaborato un protocollo individuale.
Invece, nella seconda fase gli allievi sono stati sollecitati a cercare di formulare un metodo generale per scomporre un qualsiasi numero pari.
Alla fine della seconda fase, per ogni gruppo, un allievo ha socializzato agli altri gruppi la strategia di gruppo, che è stata consegnata in un protocollo, come relazione di gruppo.

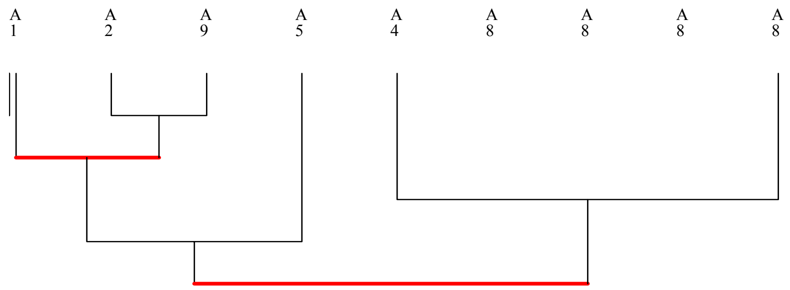
Analisi quantitativa cumulativa dei dati

1) Albero implicativo



Dal trattamento statistico dei dati emerge che le concezioni A7 e A4 sono prerequisiti per le altre strategie utilizzate dagli allievi. Secondo la strategia A7 se l'alunno è in grado di verificare se un numero pari è scomponibile nel prodotto di due primi più un altro primo allora è in grado di implementare le altre strategie, in particolare anche la strategia A4 secondo la quale l'alunno scompone il numero pari in fattori primi e somma i fattori cercando di ottenere due primi .
Osserviamo che la strategia A7 implica tutte le altre in quanto è il teorema di Chen Jing-Run (1966) secondo il quale un numero pari si può esprimere come somma di un primo e il prodotto di due primi. Questa è la strategia vincente per la soluzione della congettura di Goldbach. Naturalmente questo teorema non risolve la congettura ma è strategia che più si avvicina alla probabile soluzione, e sulla quale i matematici stanno lavorando. A4 è una strategia simile alla strategia A7 in quanto entrambe si basano sulla scomposizione di un numero pari in fattori primi

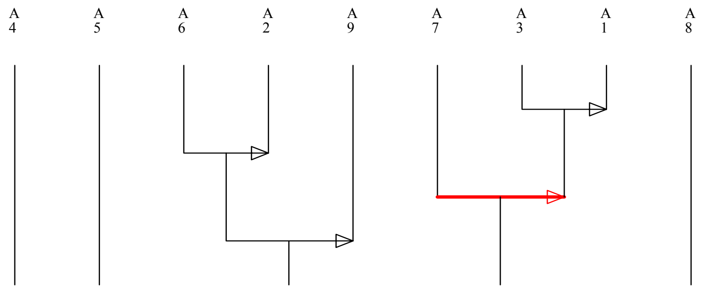
2) Albero della similarità:



Arbre de similarité : C:\WINDOWS\Desktop\lic scientif\licscient1.csv

Nella similarità si evince un legame tra la strategia A2 secondo la quale l'alunno sceglie un numero pari e considera i numeri primi inferiori ad esso; quindi verifica la congettura scegliendo uno di questi numeri primi e costatando se il complementare (differenza tra il pari ed il primo considerato) è anch'esso primo e la strategia A9 secondo la quale la somma di due numeri è sempre un numero pari, ma osservata la particolarità del numero 2, conclude che la congettura è vera per numeri pari maggiori di due. Tale legame è giustificabile dal misconcetto posseduto dagli alunni riguardante la somiglianza tra i numeri dispari e i numeri primi. Nei protocolli si leggono affermazioni del tipo: "*Si sa che la somma di due numeri dispari è sempre pari. Quindi considerando che ad eccezione del due tutti i numeri primi sono dispari, allora la congettura di Goldbach è sempre vera se i due numeri primi sono entrambi diversi o uguali a due.*"
La strategia A1, secondo la quale l'alunno verifica la congettura sommando numeri primi progressivi e verificando cosi se la somma è pari o no, è legata alle strategie A2 e A9.
La strategia A1 è collegabile alla strategia A8 infatti sono strategie inverse. Anche le strategie A2 e A8 sono simili in quanto mentre in A2 l'alunno scompone il numero pari in un numero primo e il suo complementare primo nella strategia A8 lo scompone a caso senza stabilire un criterio.
Anche la strategie A9 ed A5 sono simili alla strategia A8.
Osserviamo inoltre che le strategie A1, A2, A5, A8, A9 sono tra loro indipendenti. Dal trattamento statistico dei dati non è emerso nessun legame implicativi tra loro.

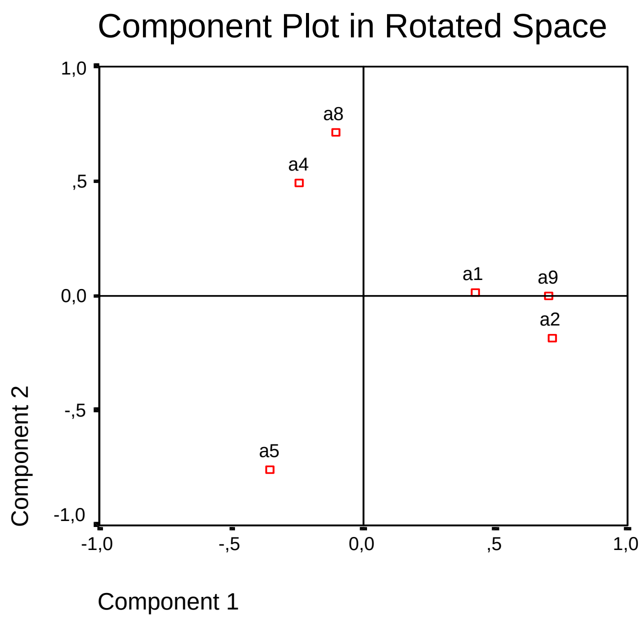
3) Albero gerarchico:



Arbre hiérarchique : C:\WINDOWS\Desktop\lic scientif\licscient1.csv

Dal grafo si evidenzia una gerarchia marcata tra le strategie A3-A1 e A6-A2, ed inoltre la strategia A7 implica (come già osservato nell'analisi del grafico implicativo) le strategie A3 ed A1. Le strategie A6-A2 implicano la strategia A9. Le strategie A4, A5, A9 risultano staccate tra loro e rispetto alle altre strategie.

ANALISI FATTORIALE



Le strategie A1, A9 e A2 identificano i fattori lungo l'asse orizzontale. Le strategie A4, A8 sono strategie opposte alla strategia A5 rispetto alle suddette strategie. Osserviamo che ciò è in perfetto accordo con l'albero della similarità.

Le strategie A4 e A8 sono entrambe strategie sequenziali, e si oppongono alla strategia A5 in quanto essa non è del tipo sequenziale ma di tipo random.

SCUOLA MEDIA SUPERIORE

ITI 'E. MAJORANA'
Prof. FABIO LO IACONA

22-23-24 FEBBRAIO 2002

La congettura di Goldbach

La seguente affermazione è sempre vera?

"Un numero pari si può sempre scomporre nella somma di due primi?

Argomentare le vostre affermazioni.
Tempo per la consegna: 2 ore.

Organizzazione del lavoro:

3. Fase 1: riflessione individuale sul quesito proposto (tempo 1 ora)
4. Fase 2: argomentare in assetto di piccolo gruppo e registrazione delle strategie individuali (tempo un ora)

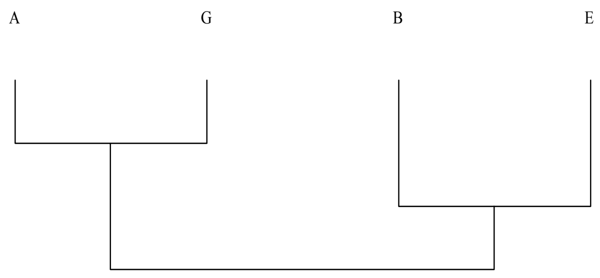
Analisi qualitativa

Ho esaminato gli elaborati prodotti dai ragazzi e li ho confrontati con la tabella del documento Matematica 2001 (erano presenti 12 ragazzi su 20) ne ho scartati due perché fuori tema.

Ho notato che tutti, 10 su 10, mostrano una tendenza alla generalizzazione anche se sulla base di un numero molto esiguo di tentativi, 4 su 10 hanno cercato controesempi, come cercare di ottenere un numero pari come differenza tra due primi, 2 su 10 hanno cercato alternative rispetti i metodi precedentemente utilizzati (verificare se oltre la somma sia pari anche il prodotto tra due primi), infine uno su dieci, nell'utilizzare il suo metodo ha prima sommato numeri primi tra loro uguali, e solo in un secondo momento ha utilizzato numeri primi diversi tra loro, mostrando una tendenza a gerarchizzare la procedura scelta.
In conclusione:
A3 → 10
A4 → 1
A5 → 2
A6 → 4

Analisi quantitativa dei dati

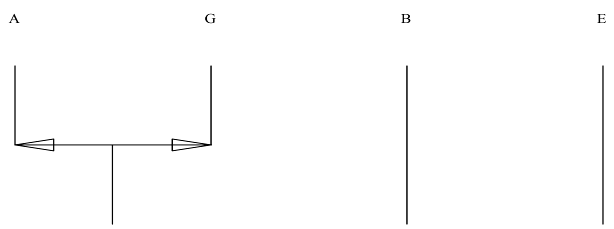
1) Albero delle similarità



Arbre de similarité : C:\WINDOWS\Desktop\ALDO\Fabio\Goldbach.csv

Dall'osservazione del grafico della similarità si evidenzia una maggiore affinità tra le strategie A ed G e tra le strategie B e E. Infatti, analizzando le strategie A ed G si nota che chi ha adottato la strategia A, di sommare numeri primi prograssivi, sembra trovare facile utilizzare anche la strategia G, moltiplicarli e poi sommarli, mentre chi ha adottato la strategia B, di scegliere un numero primo e verificare se il complementare rispetto il numero pari è anch'esso primo, trova conveniente adottare la strategia E, sommare due primi presi a caso, cioè prima sottrae e poi somma.
Si rileva, infine, una similarità del 2° ordine nel gruppo (A-G), in quanto in questo gruppo è evidente il carattere sequenziale.

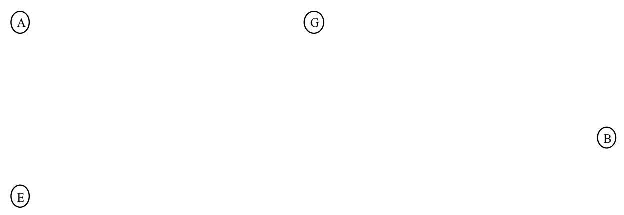
2) Albero gerarchico



Arbre hiérarchique : C:\WINDOWS\Desktop\ALDO\Fabio\Goldbach.csv

Dal grafo si evidenzia una gerarchia marcata tra la strategia G e la A, in quanto l'alunno che sceglie di scomporre il numero pari come somma di primi successivi probabilmente utilizza gli stessi fattori questa volta moltiplicandoli e poi sommando. Nulla si evidenziata le strategie B ed E.

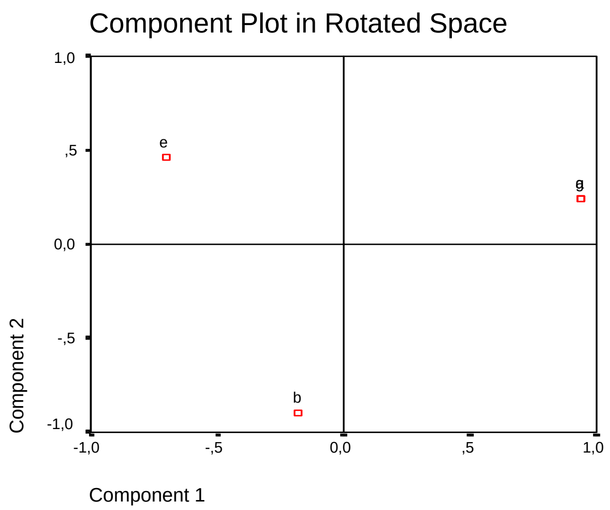
3) Grafo implicativo



Graphe implicatif : C:\WINDOWS\Desktop\ALDO\Fabio\Goldbach.csv 80 70 60 50

Il grafo implicativo, in questo caso, ci informa sul fatto che la scelta delle strategie di approccio da parte degli allievi alla congettura è stata effettuata in modo che ogni strategia è abbastanza autonoma, per cui ognuna di esse presenta dei caratteri di univocità, cioè ogni allievo può condurre fino in fondo la via intrapresa indipendentemente dalle altre strategie.

Analisi fattoriale



Il grafo relativo all'analisi fattoriale dei dati non evidenzia una netta caratterizzazione né del fattore orizzontale né del fattore verticale da parte delle strategie A, E, B, G,; le strategie A e G appaiono sovrapposte poiché gli alunni che le hanno seguite sono esattamente gli stessi.

Appendice

Tabella unificata Liceo-Scientifico

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
P1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
P2	1	0	0	0	0	0	0	1	0
P3	1	0	0	0	0	0	0	1	0
P4	0	1	0	0	0	1	0	1	1
P5	0	0	1	1	0	0	0	1	0
P6	0	1	0	0	0	1	0	1	1
P7	0	0	0	0	1	0	0	0	0
P8	1	0	0	0	0	0	0	1	0
P9	0	0	1	0	0	1	0	1	1
P10	1	0	1	1	0	0	0	1	0
P11	0	1	0	0	0	0	0	1	0
P12	0	0	1	0	0	0	0	1	0
P13	1	1	1	0	1	1	0	1	1
P14	0	0	0	1	0	0	0	0	0
P15	0	0	0	0	0	1	0	0	1
P16	1	0	0	0	0	1	0	1	1
P17	0	1	0	0	0	0	0	1	0
P18	0	1	0	0	0	0	1	1	0
P19	0	1	0	0	0	0	0	1	0
P20	0	0	1	0	0	1	0	1	1
P21	1	0	0	0	0	0	0	1	0
P22	1	0	0	1	1	1	1	1	1
P23	0	0	0	0	1	0	0	0	0
P24	1	0	0	0	0	0	0	1	0
T1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
T2	0	0	0	0	0	0	0	1	0
T3	0	0	0	0	0	0	0	1	0
T4	0	0	0	0	1	0	0	1	0
T5	0	0	0	0	1	0	0	1	0
T6	0	0	0	0	0	0	0	1	1
T7	0	0	0	0	1	0	0	0	0
T8	0	0	0	0	0	0	0	1	0
T9	0	0	0	0	1	0	0	1	0
T10	0	0	0	0	1	0	0	1	0

T11	0	0	0	0	1	0	0	1	0
T12	0	0	0	1	0	0	0	1	0
T13	0	0	0	0	1	0	0	1	0
T14	0	0	0	0	1	0	0	0	0
T15	0	0	0	0	1	0	0	1	0
T16	1	0	0	0	0	0	0	1	0
T17	0	0	0	0	0	0	0	1	0
T18	0	0	0	1	0	0	0	1	0
T19	0	0	0	0	1	0	0	1	0
T20	0	0	0	0	1	0	0	0	0
T21	0	0	0	0	0	0	0	0	1
T22	0	0	0	0	0	0	0	1	1
T23	0	0	0	0	0	0	0	1	0
T24	0	1	0	0	0	0	0	0	1

Conclusioni Finali

La sperimentazione che ha interessato alunni della scuola elementare, media e superiore, ha evidenziato un comportamento caratteristico nell'affrontare la congettura di Goldbach. Innanzitutto, è risultato chiaro come gli alunni della scuola elementare, non avendo ancora maturato il concetto di dimostrazione, non abbiano potuto fare altro che adottare un metodo sequemziale nella verifica della congettura, essendo ancora in una fase argomentativa *naive*.

La maggior parte degli alunni della scuola media inferiore e superiore hanno invece affrontato la congettura essenzialmente con due tattiche risolutive, la prima, basata sulla scelta casuale dei primi; la seconda, sul pensiero sequenziale, che è stato quindi il *leitmotiv* della strategia principale adottata lungo tutto i curricula scolastici, dalla scuola elementare a quella superiore.

Vi è stata, comunque, una differenza essenziale nella metodologia adottata dagli studenti della scuola media e di quella superiore. Infatti, gli alunni della scuola media hanno affrontato la congettura principalmente ricercando l'evidenza empirica della stessa e argomentando in un certo modo le loro scelte; ma la loro verifica è potuta arrivare solo ad un certo punto e non oltre proprio per la finitezza dell'ambito in cui essi hanno svolto i loro calcoli.

Al contrario, gli allievi della scuola superiore hanno realmente tentato di argomentare e dimostrare, con diversi tentativi. Alcuni hanno tentato di dedurre una dimostrazione dalle loro argomentazioni e qualcuno è addirittura giunto alla strategia risolutiva di Chen-run, destando non poca meraviglia, contro ogni aspettativa.

Alcuni di essi, infine, hanno disatteso del tutto la consegna poiché hanno verificato l'inverso della congettura, che è banale.

I risultati della sperimentazione sollevano alcune questioni che dovrebbero essere approfondite:

1. in che modo gli alunni prendono consapevolezza di un processo dimostrativo?
2. in che modo gli alunni si rendono conto della necessità della dimostrazione?
3. in che modo gli alunni passano dalla fase argomentativa a quella dimostrativa?
4. gli alunni sono pienamente consapevoli della differenza tra una verifica e una dimostrazione?

Queste e simili questioni possono dare luogo a una sperimentazione significativa allo scopo di comprendere ancora meglio i processi metacognitivi che sono alla base dell'apprendimento degli alunni e della loro crescita culturale.