CAPITOLO 6

IL QUADRATO MAGICO: DAL LINGUGAUGGIO ARITMETICO AL LINGUAGGIO ALGEBRICO

Coordinatori:
Elsa Malisani*, Teresa Marino**

Insegnanti-Ricercatori: Abate Antonella, Buscemi Concetta, Campagna Maria, Cumia Alessandro, Diana Rosa, Fuardo Gabriella, Mancuso Irene, Marotta Salvatore, Martino Rosaria, Parisi Gabriela, Rindone Mariella, Sutera Rita.

* GRIM (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche), Dipartimento di Matematica dell'Università di Palermo, Via Archirafi, 34 – 90145 Palermo.
** Dipartimento di Matematica dell'Università di Palermo - Via Archirafi, 34 – 90145 Palermo.

INTRODUZIONE

Elsa Malisani, Teresa Marino

La sperimentazione didattica realizzata a Piazza Armerina (Enna), durante i mesi di Gennaio e Febbraio del 2002, ha trattato il tema: "*Argomentare, congetturare e dimostrare nella scuola di tutti*". Precisamente, le attività di argomentare, congetturare e dimostrare sono basilari per lo sviluppo del pensiero matematico e possono anche essere utilizzate in altri contesti non matematici.

Si tratta di un progetto di sperimentazione sull'*insegnamento/apprendimento della matematica in continuità dalla scuola materna alla scuola superiore* ed è coordinato dal prof. Filippo Spagnolo.

Questo progetto ha coinvolto diverse istituzioni scolastiche di Piazza Armerina. Gli insegnanti sono stati divisi in quattro gruppi che hanno affrontato differenti situazioni - problemi. Ciascun gruppo era integrato da docenti appartenenti ai diversi livelli scolastici.

Il lavoro esperimentale è stato diviso in tre fasi: nella prima, sono state messe a punto delle situazioni a-didattiche e si è cercato di fare l'analisi a-priori del problema; nella seconda, i dati esperimentali sono stati analizzati qualitativamente; e nell'ultima fase, i dati sono stati analizzati quantitativamente, utilizzando l'analisi implicativa delle variabili di Regis Gras e l'analisi fattoriale delle corrispondenze.

I docenti appartenenti al primo gruppo hanno eseguito la sperimentazione didattica sulla risoluzione del quadrato magico: "completare il quadrato inserendo i numeri mancanti, in modo che la somma dei numeri di ciascuna riga, colonna o diagonale sia sempre la stessa".

La proposta del quadrato magico ha diverse motivazioni: si tratta di un problema che si adatta abbastanza bene alla sperimentazione nei diversi livelli scolastici, perché può essere presentato con modalità diverse e con differenti gradi di difficoltà in relazione al tipo di scuola. Ma fondamentalmente, il quadrato magico permette di studiare lo sviluppo del linguaggio aritmetico e del linguaggio algebrico nelle diverse fasce di età.

Precisamente, gli studi sugli ostacoli epistemologici e didattici relativi al passaggio dal pensiero aritmetico al pensiero algebrico occupano un posto importantissimo nella Ricerca in Didattica della Matematica. In particolare, il presente lavoro si pone come un modesto contributo in questo senso.

Quindi la sperimentazione didattica effettuata ha una doppia finalità. Innanzitutto, l'analisi qualitativa dei dati riporta i risultati più importanti sugli schemi di ragionamento messi in opera dagli alunni; in secondo luogo, l'analisi quantitativa pretende di dare delle indicazioni sullo sviluppo del linguaggio aritmetico e/o algebrico nei diversi livelli scolastici.

Seguono i rapporti sperimentali per livello scolastico.

6.1 SCUOLA MATERNA

6.1
SCUOLA: 2°CIRCOLO DIDATTICO G. FALCONE– SCUOLA DELL'INFANZIA "T. TASSO"
CLASSE: Sezione di tre anni
INSEGNANTE: Rosa Diana
NUMERO DI ALUNNI: 15

Gioco: Il quadrato magico

Per i bambini di tre anni, la consegna del quadrato magico va formulata in modo diverso a quello che si fa abitualmente, sostituendo i numeri con le forme geometriche: cerchio, quadrato e triangolo.
Consegna: posizionare le forme geometriche nel quadrato in maniera che in ogni riga ed in ogni colonna siano tutti e tre diverse fra loro.

Obiettivo del gioco: si pretende, innanzitutto, determinare quali sono gli schemi di ragionamento messi in atto dai bambini; in secondo luogo, formulare indicazione sulla presenza di un pensiero pre-aritmetico. Precisamente, mettere in fila o in colonna tre forme geometriche diverse significa riuscire a contare fino tre, anche in assenza del concetto di quantità.

6.1.2 SITUAZIONE A-DIDATTICA E LE SUE FASI

Prima di svolgere il gioco l'insegnante ha programmato diverse attività preliminari, affinché i bambini potessero acquisire i prerequisiti necessari per partecipare alla situazione/problema in maniera significativa.
I prerequisiti sono:
1. conoscenza delle forme geometriche: cerchio, quadrato e triangolo
2. conoscenza della posizione in riga e in colonna
3. conoscenza dei colori
4. capacità di attenzione e di ascolto

Fase 1:
L'insegnante mostra al bambino un quadrato con nove caselle e spiega che deve posizionare le forme geometriche: cerchio, quadrato e triangolo, in maniera tale che in ogni riga e in ogni colonna siano tutti e tre diverse fra loro. L'insegnante si accerta che l'alunno abbia capito la consegna e giocano insieme.
Fase 2:
I bambini giocano in coppie.

Fase 3:
La sezione viene suddivisa in due gruppi: gli alunni giocano insieme.

Fase 4:
Il bambino che riesce a completare il quadrato magico deve spiegare agli altri membri del gruppo il procedimento eseguito. In questa fase l'insegnante registra le argomentazioni.

6.1.3 FASE DI VALIDAZIONE

Non è presente.

6.1.4 L'ANALISI A-PRIORI

L'analisi a-priori del problema ha permesso di determinare tutte le possibili strategie che possono utilizzare gli alunni per la risoluzione del quadrato magico. Sono stati anche individuati i possibili errori che possono commettere i bambini, applicando queste strategie (Vedasi.
L'elenco delle strategie effettivamente adoperate dagli alunni che hanno partecipato alla sperimentazione e che sono state considerate nella tabulazione dei dati è il seguente:

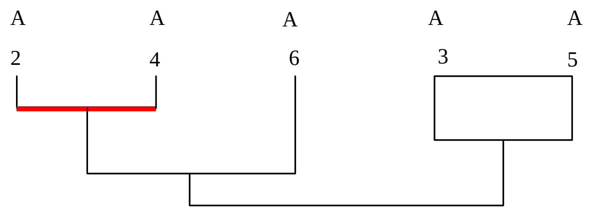
A2: procede per tentavi ed errori e non verbalizza
A3: ha strategie personali

A4: nel lavoro di gruppo non esegue la consegna e non verbalizza
A5: esegue correttamente anche se non verbalizza
A6: cerca aiuto dell'insegnante

In una tabella a doppia entrata "alunni/strategie", per ogni alunno si indica con il valore 1 le strategie che esso ha utilizzato e con il valore 0 le strategie che non ha adoperato. (La tabella dei dati si presenta nell'Allegato alla fine del Capitolo I)

ANALISI QUANTITATIVA DEI DATI

Albero delle similarita'

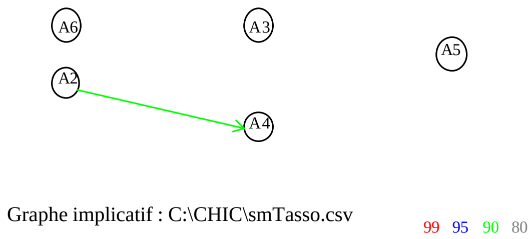


Arbre de similarité : C:\CHIC\smTasso.csv

La variabile A2 è simile alla variabile A4, cioè ogni bambino che procede per tentativi ed errori e non verbalizza (A2), anche nel gioco a gruppo non esegue e non verbalizza (A4), e fra questi si trovano anche quelli che cercano l'aiuto dell'insegnante (A6).

Altro gruppo è costituito dagli alunni che procedono con soluzioni proprie ed eseguono anche correttamente la consegna (A3 – A5), meno similari delle variabili precedenti.

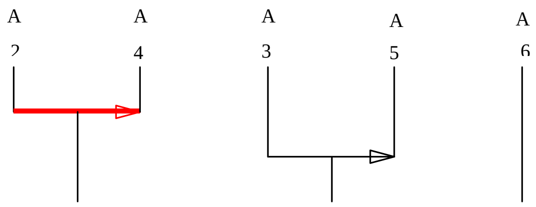
Grafico implicativo



Graphe implicatif : C:\CHIC\smTasso.csv

L'alunno che procede per tentavi ed errori (A2) si scoraggia e nel lavoro di gruppo non esegue la consegna (A4): quindi A2 implica A4.

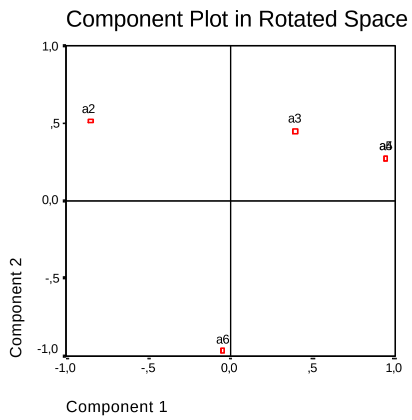
Albero gerarchico



Arbre hiérarchique : C:\CHIC\smTasso.csv

Chi non lavora da solo (A2) non riesce neanche a lavorare in gruppo (A4).
Chi ha strategie personali (A3) riesce a risolvere correttamente il gioco anche se non verbalizza (A5).

Analisi fattoriale



A2 e A3 si oppongono ad A6 rispetto al primo fattore, cioè l'asse orizzontale. Rispetto al secondo fattore è la variabile A6 a darne la maggiore caratterizzazione, mentre A2 si oppone ad A3 in quanto procedono per tentativi. A4 e A5 si oppongono ad A2.

6.1.5 ANALISI QUALITATIVA

Dall'osservazione dell'esperienza è emerso che quasi tutti i bambini sono stati attratti dalla novità del gioco, il quale è stato proposto in una situazione divertente e stimolante.
Solo cinque bambini sono stati in grado di posizionare le forme geometriche in maniera corretta, il resto invece ha eseguito il compito procedendo per tentativi ed errori senza verbalizzare e cercando il suggerimento dell'insegnante.
Alcuni di questi bambini, giocando con l'insegnante e in coppia con il compagno, ha quasi bene eseguito il gioco.
Nel gruppo sono prevalsi i bambini leader, che hanno svolto rapidamente il gioco, facendo scoraggiare gli altri che non hanno eseguito la consegna.
Hanno verbalizzato i bambini leader (Alice, Paolo, Giovanni, Leila e Giada) dando risposte di tipo tautologico: " perché e così" e " perché sì" tipiche della loro età.
Durante il gioco, nonostante il loro interesse, sono stati sempre richiamati e sollecitati da noi insegnanti.
Osservando i bambini nella situazione gioco, lo sperimentatore ha potuto verificare quali sono stati coloro che hanno dimostrato capacità di attenzione, memoria e percezione visiva.

6.1.6 CONCLUSIONI

Dalle precedenti descrizioni si può osservare che la sperimentazione è stata positiva ed il lavoro dell'insegnante serio ed efficace.
I risultati ottenuti sono significati sia per questo lavoro, sia per la sua riproducibilità in future sperimentazioni didattiche.
Per quanto riguarda gli schemi di ragionamento, soltanto cinque alunni hanno verbalizzato mediante argomentazioni di tipo tautologico, rispondendo "perché e così" e "perché sì". La verbalizzazione dei bambini di tre anni è abbastanza limitata, quindi l'analisi sulle capacità di argomentazione risulta contenuta.
Per effettuare uno studio più accurato sugli schemi di ragionamento messi in atto dagli alunni della scuola dell'infanzia, si dovrebbe ripetere la sperimentazione con bambini di quattro e cinque anni.
Rispetto allo sviluppo del pensiero pre-aritmetico, è possibile sottolineare che: certamente i bambini che sono riusciti a risolvere il quadrato riescono a contare fino a tre, anche se non possiedono ancora il concetto di quantità. Ma per gli altri alunni non si può affermare nulla.
Risolvere il quadrato magico è un compito abbastanza più complesso del "saper contare fino a tre", perché richiede anche la capacità di saper alternare le forme geometriche in tutte e tre righe e in tutte e tre colonne. Quindi, è fattibile che qualche bambino non sia riuscito a completare il quadrato, ma sia in grado di "contare fino a tre". Ma questa situazione non è stata considerata nell'analisi a-priori tra le possibili strategie. Di conseguenza, per poter realizzare uno studio più approfondito sullo sviluppo del pensiero pre-aritmetico, si dovrebbe effettuare

un’analisi a-priori più dettagliata, considerando tutte le possibili strategie di risoluzione, anche quelle non conducono alla soluzione corretta..
Le coordinatrici del gruppo hanno dato delle indicazioni precise per la realizzazione dell’analisi a-priori, ma probabilmente dovevano seguire con più attenzione la sua elaborazione particolareggiata per ogni tipo di scuola.

ALLEGATO 1

Tabella relativa all'Analisi quantitativa della Scuola dell'infanzia "T. Tasso"
Classe: Sezione di tre anni
Insegnante: Rosa Diana
Anno scolastico: 2001/02

Legenda:
1 ÷ 15: alunni
A2 ÷ A6: strategie

	A2	A3	A4	A5	A6
1	1	0	1	0	0
2	1	0	1	0	0
3	0	0	1	0	1
4	1	0	1	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	0	1	0	1
7	0	1	0	1	0
8	0	0	0	1	0
9	0	0	0	1	0
10	0	0	0	1	0
11	1	0	1	0	0
12	0	0	1	0	1
13	1	1	1	0	0
14	1	0	1	0	0
15	1	0	1	0	0

6.2 SCUOLA ELEMENTARE

6.2.1 La situazione/problema: il gioco del quadrato magico

L’attività consiste nel completare il quadrato magico inserendo i numeri mancanti in modo che la somma dei numeri di ciascuna riga, colonna o diagonale risulti sempre la stessa.

Somma 9

	3	
2		4

Obiettivo del gioco: si pretende, innanzitutto, determinare quali sono gli schemi di ragionamento messi in atto dai bambini; in secondo luogo, formulare indicazione sullo sviluppo del pensiero aritmetico.

6.2.2 SITUAZIONE A-DIDATTICA E SUE FASI

L’attività prevede la conoscenza dei numeri da 1 a 9 e il concetto di addizione e sottrazione, la conoscenza del rigo, della colonna e della diagonale.
Il gioco si svolge in tre fasi.
In ogni fase ci sarà una consegna diversa, per evitare che i bambini memorizzino la posizione dei numeri nel quadrato magico.

Fase I:
Consegna : Metti il numero mancante affinché l’addizione risulti 7.
Si dà il gioco con alcune colonne, righe e diagonali.

5	**1**	

2
3

3		

4		
		1

In questa fase giocheranno l'insegnante e l'allievo, per accertarsi che il bambino abbia capito la consegna.

Fase II
La consegna è uguale alla prima fase cambia soltanto la somma da 7 a 8.
In questa fase l'insegnante si allontana e gli allievi giocano in coppia: allievo A contro allievo B.

Fase III
<u>Consegna:</u> Inserisci i numeri nelle caselle vuote, in modo tale che in ogni riga, in ogni colonna e in ogni diagonale la somma dei tre numeri risulti essere il numero 9

	3	
2		4

In questa fase giocheranno due squadre: squadra A contro squadra B.
Durante il gioco bisogna fare in modo che la squadra A non deve copiare la squadra B e viceversa, quindi si potranno prendere due lavagne e posizionarle frontalmente.
In tutte le tre fasi l'insegnante avrà cura di annotare tutte le strategie messe in atto dai singoli alunni per poi fare l'analisi quantitativa.
Il lavoro sperimentale è stato effettuato in due scuole elementari che hanno lavorato in maniera indipendente, quindi l'analisi quantitativa e qualitativa dei dati saranno presentate separatamente.

6.2.3 SCUOLA: ISTITUTO COMPRENSIVO " L. CAPUANA" -

PLESSI "TRINITÀ – CANALI"
CLASSI: IA – IE Alunni H: IIIA del plesso "Trinità"
INSEGNANTI: Alessandro Cumia, Mariella Rindone e Salvatore Marotta
NUMERO DI ALUNNI: 12 (IA) + 8(IE) + 2 (H) = 22

6.2.4 L'ANALISI A-PRIORI

L'analisi a-priori del problema ha permesso di determinare tutte le possibili strategie che possono utilizzare gli alunni per la risoluzione del quadrato magico. Sono stati anche individuati i possibili errori che possono commettere i bambini, applicando queste strategie.
L'elenco delle strategie effettivamente adoperate dagli alunni che hanno partecipato alla sperimentazione e che sono state considerate nella tabulazione dei dati è il seguente:

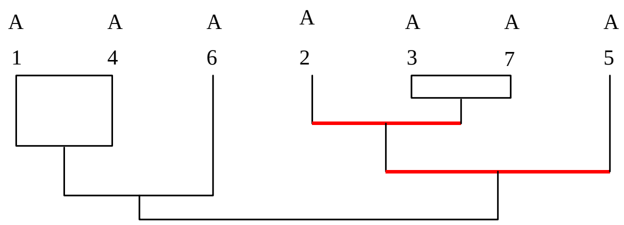
A1: procede per tentativi
A2: addiziona per completamento
A3: fa i conticini con i regoli

A4: addiziona con le dita
A5: procede per differenza
A6: abbandono della consegna
A7: usa la linea dei numeri

In una tabella a doppia entrata "alunni/strategie", per ogni alunno si indica con il valore 1 le strategie che esso ha utilizzato e con il valore 0 le strategie che non ha adoperato. (La tabella dei dati si presenta nell'Allegato 1 alla fine del Capitolo II)

6.2.5 ANALISI QUANTITATIVA DEI DATI

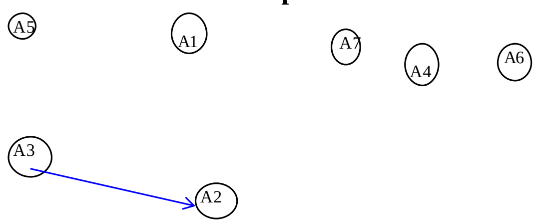
Albero delle similarita'



Arbre de similarité : C:\CHIC\trincanali2.csv

Dal grafico emergono due gruppi.
Dal primo gruppo fanno parte coloro che non sono riusciti a portare a termine il compito perché procedono per tentativi e addizionano con le dita (variabili che trovano similarità A1-A4) fino ad arrivare all'abbandono della consegna (variabile A6).
Al secondo gruppo appartengono i bambini che usano la manipolazione e la linea dei numeri (variabili A3-A7) attraverso queste strategie addizionano per completamento (variabile A2 che trova una forte similarità con A3-A7) e possono addizionare anche per differenza (variabile A5 che trova forte similarità con il sottogruppo A2-A3-A7). Questo gruppo è quello che ha portato a termine il compito conseguendo risultati soddisfacenti.

Grafico implicativo

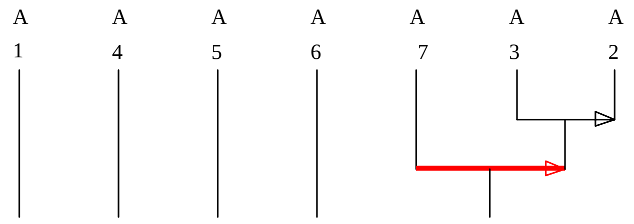


Graphe implicatif :
C:\WINDOWS\Desktop\lavoricorso\trincanali2.csv

99 95 90 85

Dal grafico implicativi risulta che la variabile A3 (fa i conticini con i regoli) implica fortemente la variabile A2 (procede per completamento), cioè coloro che sono in possesso delle capacità di operare con i regoli procedono per completamento.

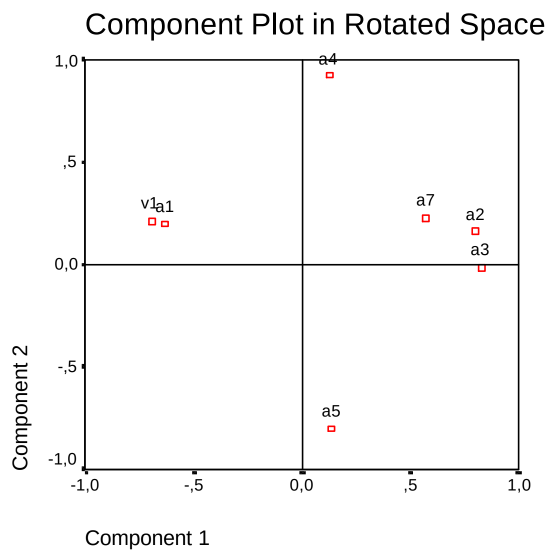
Albero gerarchico



Arbre hiérarchique : C:\CHIC\trincanali2.csv

Dall'albero gerarchico si rileva che la maggior parte degli alunni ha utilizzato le strategie A3 – A2 quindi addiziona con i regoli e procede per completamento; inoltre si ha che la variabile A7 implica le variabili A3 – A2
Le strategie A1-A4-A5-A6 hanno avuto una valenza poco significativa.

Analisi fattoriale



Dall'analisi fattoriale si ricava che rispetto al primo fattore, la variabile A3 assume un ruolo determinante e lo caratterizza fortemente. Le strategie A4 e A5 si contrappongono rispetto alle strategie A3 e A2.
Invece, rispetto al secondo fattore, la variabile A4 e A5 lo caratterizzano pienamente, mentre le variabili A7, A2 e A3, si contrappongono alla variabile A1.
Le strategie A7, A2, A3 sono le più frequenti.

6.2.5 ANALISI QUALITATIVA

Nel periodo che precede la prova gli insegnanti non hanno effettuato nessun intervento sui bambini che fosse mirato alla soluzione della stessa.
In fase di preparazione infatti, si sono limitati a presentare, con terminologia appropriata, il tutto come un gioco, con delle regole da seguire e rispettare.
Gli sperimentatori hanno fatto in modo che i bambini, tutti, fossero in possesso dei requisiti di base per potere partecipare alle diverse fasi in condizioni di parità.
Accertato che tutti gli alunni, tramite lezioni specifiche, hanno raggiunto quegli obiettivi minimi che permettevano loro di svolgere la prova, si è convenuti che le classi fossero pronti a iniziare la sperimentazione.
A lavori conclusi si rivelano le seguenti osservazioni.

I fase

È la fase dove si espresse al meglio le capacità scolastiche ed intellettive del bambino, poiché lo stesso non ha avvertito nessuna situazione conflittuale o agonistica verso l'insegnante. Di conseguenza con calma ha trovato la soluzione e serenamente ha seguito le regole del gioco. Si è notato infatti che il bambino davanti al quadrato "esploso" rifletteva senza ansia, cercava di risolvere il gioco e nella maggior parte dei casi ci riusciva.
L'errore più frequente è stato quello di sommare le cifre esistenti piuttosto che trovare quella mancante. Per ogni situazione lo sperimentatore ha chiesto la strategia attuata dal bambino.
I bambini portatori di handicap sono riusciti, in parte, nella consegna poiché supportati dalla presenza e del sostegno dell'insegnante.

II fase

La prima impressione è stata che l'alunno si avvicinava al gioco più sicuro di sé, poiché aveva già effettuato una fase, quelli che nella prima fase avevano indovinato la soluzione hanno espresso una maggiore sicurezza di coloro che avevano ottenuto un risultato negativo.
Durante questa fase ha cominciato ad accendersi la competizione e i risultati ne sono venuti influenzati.
In molti casi i bambini perdevano più tempo per evitare errori, ma in altri casi la voglia di velocizzare e la volontà di battere il compagno, li portava a cercare la soluzioni per tentativi.
Comunque gli sperimentatori si ritengono anche s oddisfatti dei risultati ottenuti nella II fase.

III fase

Gli sperimentatori hanno osservato che la formazione delle due squadre ha stimolato negli alunni dei sentimenti contrapposti.
Da parte dei bambini sono stati riconosciuti subito i leaders che spontaneamente sono stati i più impegnati nel tentativo di soluzione.
Alcuni si sono stretti intorno ai leaders contribuendo con incitamenti e proposte al risultato finale; altri rendendosi conto di non poter essere di aiuto, si sono autoesclusi dalla gara. Questi ultimi sono riusciti meglio nella prima fase, giocando con l'insegnante.

Nelle fasi II e III ha giocato un ruolo determinante lo stato emozionale degli alunni H, in quanto si sono inibiti, perché, trovandosi a competere con bambini più piccoli, per timore di perdere, si sono affrettati a dare il risultato disattendendo così la consegna. Rassicurati dall'insegnante, i bambini, hanno partecipato al gioco più fiduciosi nelle proprie possibilità.

Alunni H

Nella sperimentazione sono stati inseriti due alunni in situazioni di handicap, frequentanti la classe terza elementare, con un livello di apprendimento tale che permetteva loro di poter partecipare alle attività con gli alunni della classe prima elementare.

Dato che la consegna poteva risultare di difficile comprensione per gli alunni portatori di handicap poiché il quadrato magico contiene anche conoscenze implicite, si è ritenuto opportuno esemplificare il gioco con l'introduzione di due fasi preliminari nelle quali i bambini hanno interiorizzato il concetto di colonna, riga e diagonale.

In tutte le tre fasi lo sperimentatore ha avuto cura di non correggere immediatamente il bambino per non rivelare la giusta soluzione; ha facilitato la autocorrezione attraverso la retro-azione, lo ha aiutato se si è trovato in difficoltà, in modo che l'alunno potesse pervenire alla formulazione per risolvere il quesito.

Alla fine lo sperimentatore ha chiesto agli alunni di dimostrare come erano arrivati alla giusta soluzione, passando così alla fase dell'istituzionalizzazione convincendo sé stesso e gli altri.

L'esperimento è servito a consolidare e interiorizzare il concetto di addizione e sottrazione. Gli sperimentatori ritengono anche che il gioco è servito a condurre gli alunni a riflettere per trovare le strategie opportune, secondo le proprie capacità e il modo di sperimentare soluzioni.

6.2.7 CONCLUSIONI RISTRETTE SUI RISULTATI PIU' IMPORTANTI RIGUARDANTI GLI SCHEMI DI RAGIONAMENTO

Dall'osservazione dell'esperienza è emerso che sei bambini hanno eseguito la risoluzione del quadrato magico, verificando le varie ipotesi prima di dare la soluzione. Di questi, quattro presentano indicatori linguistici di condizionalità giustificando le varie fasi; altri due, invece, giustificano le strategie adottate.

Un alunno definisce il risultato con giustificazioni generali. Altro progetta il tutto e argomenta con ragionamenti di tipo locale (che riguardano in altre parole il solo caso presentato). Altro ancora classifica e fa riferimenti teorici sulla strategia adottata.

Due bambini generalizzano la soluzione e non riescono ad uscire da un'argomentazione di tipo locale.

Un bambino gerarchizza i vari interventi matematici giustificando ogni passaggio con la soluzione precedente e infatti torna spesso su ciò che si è fatto, durante la presentazione delle strategie.

Alcuni alunni hanno usato un falso ragionamento.

6.2.8 SCUOLA: SCUOLA ELEMENTARE "ROCCO CHINNICI"

CLASSI: I C - I D

INSEGNANTI: Gabriella Fuardo - Rosaria Martino – Rita Sutera

NUMERO DI ALUNNI: 14 (I C) + 14(I D) = 28

6.2.9 L'ANALISI A-PRIORI

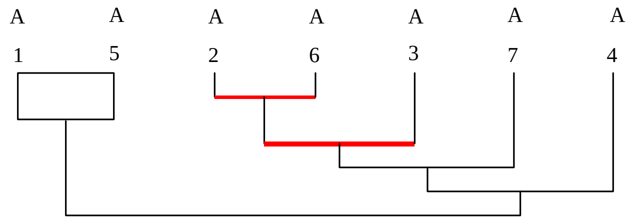
L’elenco delle strategie effettivamente usate dagli alunni che hanno partecipato alla sperimentazione e che sono state considerate nella tabulazione dei dati è il seguente:

A1: procede a caso
A2: addiziona per completamento
A3: addiziona con le dita
A4: usa la linea dei numeri
A5: non esegue la consegna
A6: utilizza il concetto di distribuzione della quantità
A7: addiziona per differenza

In una tabella a doppia entrata “alunni/strategie”, per ogni alunno si indica con il valore 1 le strategie che esso ha utilizzato e con il valore 0 le strategie che non ha adoperato. (La tabella dei dati si presenta nell’Allegato 2 alla fine del Capitolo II)

6.2.10 ANALISI QUANTITATIVA DEI DATI

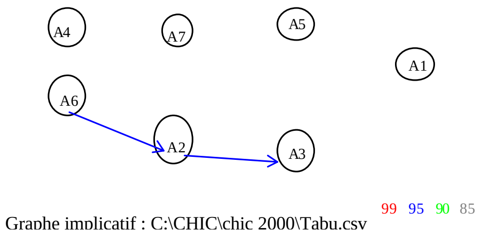
Albero delle similarita’



Arbre de similarité : C:\CHIC\chic 2000\Tabu.csv

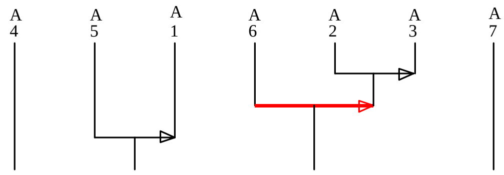
Dal grafico emergono due gruppi.
Al grande gruppo appartengono gli alunni che addizionano per completamento e possiedono il concetto di distribuzione della quantità, perciò sanno utilizzare le dita, possono addizionare per differenza e usare la linea dei numeri.
Il piccolo gruppo, contrariamente, procede a caso e quindi non esegue la consegna, probabilmente perché non ha capito bene il comando oppure perché non ha ancora interiorizzato il concetto di distribuzione.
Dall’analisi del grafo emerge anche una forte similarità tra le strategie A2 e A6 (addiziona per completamento e possiede il concetto di distribuzione della quantità) e tra queste due con la variabile A3 (addiziona con le dita).

Grafico implicativo



Dall’analisi del grafico implicativo emerge che le strategie A6 A2 e A3 hanno una implicazione del 95%, ciò significa che se un bambino possiede il concetto di distribuzione della quantità, addiziona per completamento usando le dita.

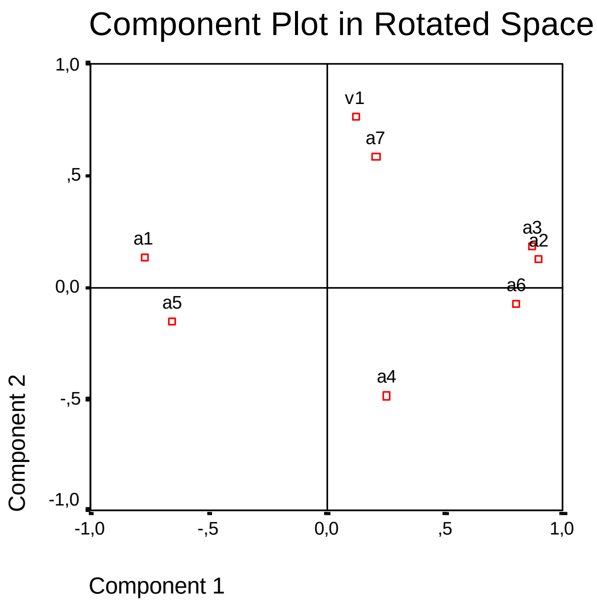
Albero gerarchico



Arbre hiérarchique : C:\CHIC\chic

L’albero gerarchico mostra chiaramente che la maggior parte degli alunni ha utilizzato le strategie A2 e A3, dimostrando di avere interiorizzato il concetto di distribuzione dell’addizione (A6).
La restante parte invece ha proceduto a caso e non è stata in grado di eseguire la consegna.
Le strategie A4 e A7 non hanno avuto valenza significativa.

Analisi fattoriale



Dall'analisi fattoriale si ricava che rispetto al primo fattore, cioè l'asse orizzontale, la variabile A6 assume un ruolo determinante e lo caratterizza fortemente. Vicino ad essa si trovano le strategie A2 e A3 che formano una nuvola. Le tre variabili suddette hanno evidentemente avuto maggiore incidenza delle altre e questo conferma quanto descritto nelle analisi precedenti.
In posizione opposta rispetto al secondo fattore (asse verticale), si trova la nuvola A1-A5 che ha avuto un minore significato perché corrisponde agli alunni che procedono per caso e quindi non eseguono la consegna.
Le variabili A7 e A4 invece sono isolate e collocate in punti opposti, infatti hanno avuto un'incidenza di minima rilevanza.

6.2.11 ANALISI QUALITATIVA

Nella prima fase i bambini sono stati chiamati alla lavagna per eseguire il gioco. Alcuni alunni hanno cercato di completare la somma 7 procedendo a caso, senza evidenziare alcun tentativo di realizzare una scelta ragionata, soprattutto quando dovevano inserire due numeri. Tutti gli altri hanno utilizzato le dita per eseguire la somma.
Nella seconda fase gli alunni hanno giocato a coppie. Ad ogni bambino è stata fornita una scheda con 9 quesiti e la seguente consegna: "Inserisci i numeri nelle caselle vuote in modo che in ogni colonna, riga e diagonale si formi il numero 8".
Gli sperimentatori hanno osservato che 19 bambini su 28 hanno eseguito in maniera corretta più del 50% dei quesiti, usando le dita.
Quindi nelle prove individuali la maggior parte dei bambini è stata in grado di autogestirsi e concentrarsi per poter eseguire correttamente le consegne.

Nella terza fase, per ogni classe, hanno giocato due squadre: A e B, che sono state sistemate in due punti diversi dell'aula. Dopo un'ampia spiegazione della consegna si ha dato il via al gioco.
Una delle squadre ha completato correttamente il quadrato in pochi minuti, mentre le altre tre procedevano con molta difficoltà. Queste squadre, infatti, andavano avanti per tentativi in quanto completavano le righe, le colonne e le diagonali senza tenere conto della loro interdipendenza.
Un'alunna (Ilaria) della squadra che è riuscita nel compito ha trovato la strategia vincente: ha intuito che doveva partire dalla riga e dalla diagonale dove erano inseriti due numeri. Secondo gli sperimentatori, intuizione e un pizzico di fortuna hanno giocato a favore di questa squadra.
Alle altre squadre invece la confusione, la competizione, il sovrapporsi delle opinioni individuali hanno impedito di intuire l'esatta modalità di esecuzione della consegna per cui hanno proceduto per tentativi.
Giulia ha detto: "*Io non sono riuscita a fare niente perché uno diceva 3, uno diceva 4, c'era troppo baccano e così non abbiamo fatto niente. Riccardo voleva vincere*".
Riccardo: "*Io ho dato la matita ad Alessia perché avevo la sensazione di sbagliare*".
Giorgia: "*Io non ne ho fatto neanche uno perché non riuscivo a riflettere, nella squadra A c'era troppo baccano, nella squadra B anche e non si capiva niente* ".
Federico: "*E' stato troppo difficile, c'era caos e rumore, non riuscivo a riflettere*".
Sefora: "*E' stato difficile perché non ho capito bene come procedere*".

6.2.12 CONCLUSIONI RIGUARDANTI GLI SCHEMI DI RAGIONAMENTO

Gli sperimentatori hanno osservato che durante la prima fase gli alunni facevano riferimenti di tipo pragmatico locale–teorico. Nella seconda hanno realizzato riferimenti di tipo pragmatico che dipendevano dal contratto didattico precedente.
Dopo la prova individuale gli insegnanti hanno chiesto ai bambini se la stessa fosse stata facile o difficile e quali strategie avevano utilizzato per arrivare alla somma data.
<u>Ilaria ha detto:</u> "*Siccome non si poteva usare lo zero ho diviso 4 e ho messo 2 e 2, ma potevo mettere anche 1 e 3*". **(Dimostra di sapere ipotizzare e di avere una sua metodologia)**.
<u>Riccardo ha risposto</u>: "*Io ho fatto il conto con la mente*" **(Progetta).**
<u>Federico ha detto</u>: "*E' stato un esercizio difficile. Sono stati difficili quelli dove c'era un solo numero, ma ce l'ho fatta e mi ricordo di averne sbagliato solo uno; ho usato le mani e la linea dei numeri*". **(Torna su ciò che ha fatto, fa riferimenti pragmatici).**
<u>Andrea ha dichiarato</u>: "*Si potevano aggiungere i numeri mancanti oppure si poteva fare la differenza*". **(Giustifica la strategia adottata).**
<u>Alice ha risposto</u>: "*Era troppo difficile il calcolo e perciò mi sono confusa*". **(Indicatori linguistici di condizionalità).**
<u>Sefora</u>: "*E' stato facilissimo, ho usato le mani*". **(Riferimento pragmatico).**
<u>Alessandro</u>: "*E' stato difficile perché ho usato le mani, ma non ci riuscivo*". **(Riferimento pragmatico).**

6.2.13 CONCLUSIONI FINALI PER LA SCUOLA ELEMENTARE

Dalle analisi effettuate si osserva che la sperimentazione nella scuola elementare è stata positiva ed il lavoro degli insegnanti serio ed efficace.

I risultati ottenuti sono significati sia per questo lavoro, sia per la sua riproducibilità in future sperimentazioni didattiche.

Rispetto allo sviluppo del pensiero aritmetico, è possibile sottolineare che dall'analisi quantitativo dei dati delle due scuole emerge che:

- Gli alunni che non riescono a portare a termine il compito, procedono a caso, per tentativi fino ad arrivare all'abbandono del gioco. Essi non eseguono la consegna, probabilmente perché non hanno capito bene il gioco oppure perché non hanno ancora interiorizzato il concetto di distribuzione della quantità.
- I bambini, invece, che risolvono il compito in maniera corretta, fanno i conticini con i regoli o con le dita e usano la linea dei numeri. Utilizzando queste strategie la maggior parte degli alunni addizionano per completamento, altri invece lo fanno per differenza.

E' interessante notare che il secondo gruppo è il più numeroso in entrambe le scuole. Quindi è possibile affermare che la maggior parte dei bambini che ha partecipato della sperimentazione ha una buona conoscenza dei numeri dal 1 al 9 e dei concetti di addizione e sottrazione.

Rispetto alla risoluzione del quadrato magico è possibile sottolineare che soltanto 6 o 7 alunni per ogni scuola hanno eseguito il compito correttamente. Le ragioni potrebbero essere due: innanzitutto, completare il quadrato magico è un compito più complesso del "saper contare fino a nove" e del "saper fare addizioni e sottrazioni", perché richiede la capacità di capire la dipendenza reciproca che esiste tra le diverse righe, colonne e diagonali del quadrato e quindi, l'alunno deve individuare le caselle dalle quali può iniziare e, successivamente, continuare a giocare. In secondo luogo, per effettuare questo compito i bambini si sono riuniti in squadre e nella maggior parte dei casi hanno trovato delle difficoltà per lavorare in gruppo; probabilmente, perché essendo troppo piccoli, prevalgono la competizione, il sovrapporsi delle opinioni individuali, il timore di perdere, ecc. In generale, gli alunni delle due scuole hanno ottenuto i risultati migliori giocando con l'insegnante o in coppie.

Per quanto riguarda gli schemi di ragionamento, si osserva che alcuni alunni fanno riferimenti di tipo pragmatico, altri realizzano argomentazioni di tipo locale. Pochi sono quelli che verificano le varie ipotesi prima di dare la soluzione e/o giustificano le strategie adottate.

E' possibile rilevare, anche, che alcuni alunni utilizzano indicatori linguistici di condizionalità ed altri hanno usato un falso ragionamento.

ALLEGATO 1

Tabella relativa all'Analisi quantitativa dell'Istituto Comprensivo " L. Capuana" - Plessi "Trinità – Canali"

Classi: IA – IE. Alunni H: IIIA del plesso "Trinità"
Insegnanti: Alessandro Cumia, Mariella Rindone e Salvatore Marotta
Anno scolastico: 2001/02

Legenda: 1 ÷ 22: alunni, A1 ÷ A7: strategie

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
1	0	1	1	1	0	0	0
2	0	1	1	1	0	0	1
3	0	1	1	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0	1	0
5	0	1	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	1	0
8	0	1	1	1	0	0	0
9	0	1	1	1	0	0	0
10	0	1	1	1	0	0	1
11	0	1	1	0	1	0	0
12	0	1	1	1	0	0	0
13	0	1	1	1	0	0	0
14	0	1	0	1	0	0	0
15	0	1	0	1	0	0	0
16	1	0	0	1	0	0	0
17	0	0	0	1	0	1	0
18	0	1	0	1	0	0	0
19	0	1	1	1	0	0	0
20	0	1	0	1	0	0	0
21	0	0	0	1	0	0	0
22	1	0	0	1	0	0	0

ALLEGATO 2

Tabella relativa all'Analisi quantitativa della Scuola Elementare "Rocco Chinnici"

Classi: I C - I D

Insegnanti: Gabriella Fuardo - Rosaria Martino – Rita Sutera

Anno scolastico: 2001/02

Legenda: 1 ÷ 28: alunni, A1 ÷ A7: strategie

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	0	1	0
4	0	1	1	0	0	0	0
5	0	1	1	0	0	1	0
6	1	1	1	0	0	0	0
7	0	1	1	0	0	1	0
8	0	1	1	0	1	0	0
9	0	1	1	0	0	1	0
10	1	0	0	0	0	0	0
11	1	0	0	0	1	0	0
12	0	0	0	0	1	0	0
13	0	1	1	1	0	1	0
14	0	1	1	0	0	1	0
15	0	1	1	0	0	1	0
16	0	1	1	0	0	1	0
17	1	0	1	0	0	0	0
18	1	0	0	0	1	0	0
19	0	1	1	0	0	1	0
20	0	1	1	0	0	1	1
21	0	1	1	0	0	0	0
22	0	1	1	0	0	1	1
23	0	1	1	0	0	1	0
24	0	1	1	0	0	0	0
25	1	1	1	0	0	0	0
26	0	1	1	0	0	1	0
27	0	1	1	0	0	1	0
28	1	1	1	0	0	0	0

6.3 SCUOLA MEDIA

6.3.1 SCUOLA MEDIA " L. CAPUANA" – SCUOLA MEDIA "A. CASCINO"

CLASSI: 1° C della Scuola Media "L. Capuana" e 1° C della Scuola Media "A. Cascino"

INSEGNANTI: Antonella Abate e Gabriela Parisi
NUMERO DI ALUNNI: 27 (13 Capuana + 14 Cascino)

Gioco: Il quadrato magico

6.3.2 SITUAZIONE A-DIDATTICA E LE SUE FASI

Fase 1: Consegna
Si comunica agli alunni il tipo di gioco da fare.
Si invita un alunno a giocare con l'insegnante alla lavagna con uno dei quadrati magici 3 x 3. Ci si accerta, con domande, che la consegna sia stata recepita in modo corretto da tutti.

Fase 2: Azione
Si consegna ad ogni singolo alunno un quadrato magico 3x3 da completare e si invitano tutti gli alunni a scrivere su un foglio il tipo di procedimento che man mano vanno utilizzando per arrivare alla soluzione del problema. Il vincitore sarà colui che per primo riesce a consegnare la soluzione con la descrizione completa del procedimento.
(I quadrati magici utilizzati nell'esperienza si presentano nell'Allegato 1 alla fine del Capitolo III)

Fase 3: Formulazione
La classe viene divisa in tre gruppi eterogenei per abilità logico-matematiche. Ad ogni gruppo viene consegnato il seguente quadrato 4x4:
"Completa il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire sia uguale a 92".

Somma 26 + a

14		1	
	9	12	
11		a	10
	16	13	

Ogni gruppo dovrà trovare ora una soluzione comune. Il procedimento risolutivo dovrà essere consegnato anche questa volta per iscritto dal gruppo. Vince il gruppo che per primo completa il quadrato e la descrizione del procedimento.

Fase 4: Validazione
Si scrivono alla lavagna le affermazioni risolutive che tutti ritengono valide e si arriva a formulare un teorema.

Tempi: 50 minuti (una unita' oraria) per l'azione e altri 50 minuti consecutivi per la formulazione. La validazione potrà essere invece trattata in tempi successivi.

6.3.3 L'ANALISI A-PRIORI

Si ipotizza che gli alunni possano ricorrere ad una o più delle seguenti strategie risolutive individuate nell'analisi a-priori:

A1: Inserire numeri a caso
A2: Complementare + inserire numeri in caselle a caso
A3: Differenza + inserire numeri in caselle a caso
A4: Complementare
A5: Complementare e per differenza
A6: Per differenza
A7: Complementare + equazione di primo grado
A8: Differenza + equazione di primo grado
A9: Equazione di primo grado
A10: Non tenta nessuna strategia risolutiva
A11: Ha una strategia risolutiva, ma non riesce a comunicare per iscritto il procedimento.

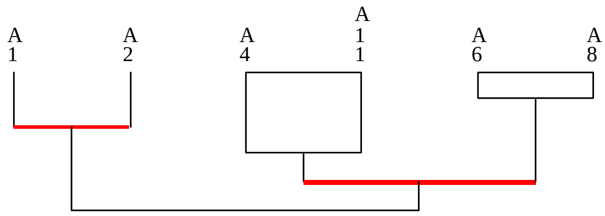
In una tabella a doppia entrata "alunni/strategie", per ogni alunno si indica con il valore 1 le strategie che esso ha utilizzato e con il valore 0 le strategie che non ha adoperato.
L'elenco delle strategie effettivamente utilizzate dagli alunni, che hanno partecipato alla sperimentazione, per risoluzione del quadrato magico e che sono state considerate nella tabulazione dei dati è il seguente:

A1: inserire i numeri a caso
A2: complementare attuata inserendo i numeri in una casella a caso
A4: complementare
A6: per differenza
A8: per differenza con equazione di primo grado
A11: complementare senza la consegna di una descrizione scritta corretta

La tabella dei dati si presenta nell'Allegato N° 2 alla fine del Capitolo 6.

6.3.4 ANALISI QUANTITATIVA DEI DATI

Albero delle similarita'



Arbre de similarité : C:\CHIC\chic 2000\CartelEXC CSV (MS-DOS).csv

Dal grafico si evidenzia una maggiore similarità fra le seguenti coppie di strategie:

- A1 e A2: "inserire i numeri a caso" e "complementare inserendo numeri in una casella a caso"
- A4 e A11: "complementare" e "complementare senza la consegna di una descrizione scritta corretta"
- A6 – A8: "per differenza " e "per differenza con equazione di primo grado".

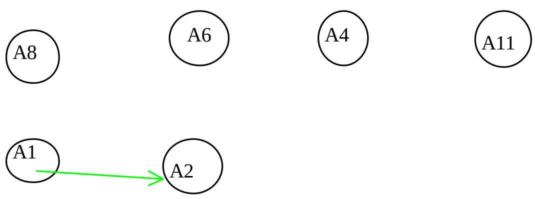
casualità

Dal grafico emergono due gruppi.

Al grande gruppo appartengono gli alunni che hanno completato il quadrato inserendo i numeri a caso o hanno applicando la strategie del complementare inserendo numeri in una casella a caso.

Al piccolo gruppo, invece, appartengono coloro che hanno scelto una strategia vincente, calcolando i numeri da inserire per differenza, per differenza con equazione di primo grado o hanno applicato la strategia del complementare anche senza la consegna di una descrizione scritta corretta.

Grafico implicativo

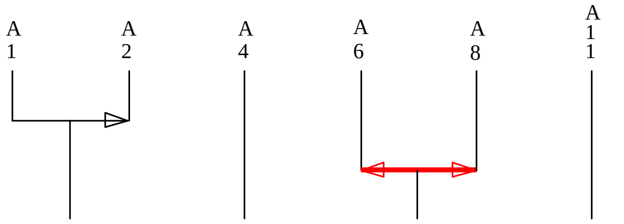


Graphe implicatif : C:\CHIC\chic 2000\CartelEXC CSV (MS-DOS).csv

99 95 92 85

Dal grafo implicativo si osserva che esiste un’unica implicazione fra la strategia dell’inserire i numeri a caso e la strategia complementare attuata inserendo i numeri in una casella a caso.

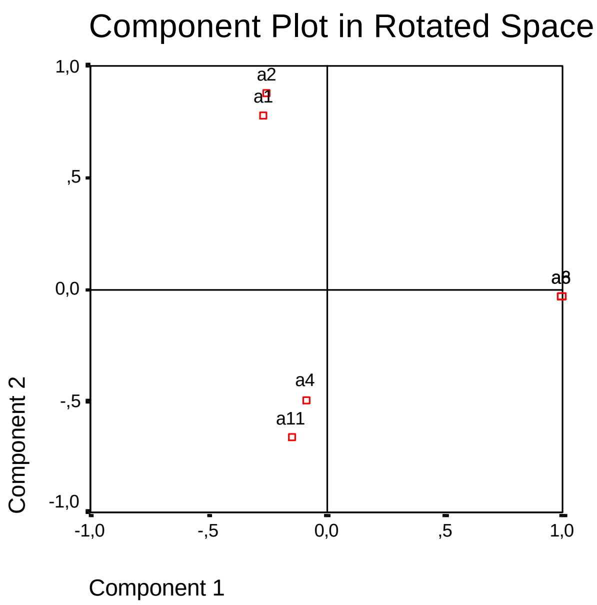
Albero gerarchico



Arbre hiérarchique : C:\CHIC\chic 2000\CartelEXC CSV (MS-DOS).csv

Dall’albero gerarchico si evidenzia una gerarchia marcata tra la strategia A1 e A2, in quanto l’alunno che sceglie di inserire un numero a caso, sicuramente potrà anche scegliere la strategia del complementare e dell’inserire i numeri in una casella a caso.
Si evidenzia inoltre che ce’ una ridondanza fra al strategia A6 “per differenza” e la strategia A8 “per differenza con equazione di primo grado”.
Non c’è gerarchia tra le variabili A4 “complementare” e A11 “complementare senza la consegna di un procedimento scritto in modo corretto”.

Analisi fattoriale



Dall'analisi fattoriale si evidenzia che le strategie A1 – A2 "inserire i numeri a caso e complementare inserendo numeri in una casella a caso", e le strategie A4 – A11 "complementare e complementare senza la consegna di una descrizione scritta corretta", sono contrapposte e la loro contrapposizione dipende dalla strategia risolutiva A8 "per differenza con equazione di primo grado". Quest'ultima quindi discrimina le due coppie.

6.3.5 ANALISI QUALITATIVA

S. M. "L. CAPUANA"

Nella fase di "formulazione" gli alunni sono stati divisi in tre gruppi e ogni gruppo aveva un portavoce. Sono state effettuate le registrazioni foniche delle discussioni. L'analisi qualitativa viene effettuata sui protocolli ottenuti dal lavoro della sbobinatura.

Gruppo 1

Il gruppo disattende la consegna che specifica che il numero più grande da inserire deve essere uguale a 92 e non consegna una strategia scritta.

Da subito si intuisce che uno degli elementi del gruppo funge da traino, mentre gli altri si lasciano guidare. All'inizio, pertanto, risulta assente lo stimolo all'argomentazione che deriverebbe da un contesto di confronto. Il gruppo, sin dall'inizio, procede tacitamente su progetto "somma 26". L'elemento trainante inizialmente comincia da una casella a caso, successivamente, dopo essersi imbattuto quasi casualmente in alcuni "dati di fatto" (una colonna completa, una riga con una sola casella vuota) inizia un lavoro di gerarchizzazione e generalizzazione con alcuni riferimenti di tipo pragmatico. In tale lavoro la "a" che, in terza colonna compare già con numeri che complessivamente danno per somma 26, viene posta uguale al valore zero. Solo dopo che l'elemento trainante ha completato, con insuccesso, il quadrato, la restante parte del gruppo sembra incoraggiata ad intervenire. Il gruppo quindi, torna su ciò che si e` fatto e c'è un tentativo di controesempio: *"facciamo le diagonali", "proviamo in tutti i modi…"* e di ipotesi pragmatiche di ulteriore strategia: *"forse dobbiamo fare cosi`…"; "forse dobbiamo cambiare questo…"*. Nel tentativo di "fare quadrare i conti" il gruppo in due o più occasioni inserisce in qualche casella numeri "da sottrarre". Si susseguono i vari tentativi, ma il gruppo non riesce a sistemare il quadrato neanche sulla somma 26+a.

Gruppo 2

Il gruppo non consegna una strategia scritta. All'inizio del lavoro uno dei componenti del gruppo afferma che la "a" è un numero che deve essere sommato a tutte le colonne, a tutte le righe e alle due diagonali, c'è quindi in maniera non consapevole l'intuizione del concetto di variabile.

Da subito il gruppo lavora in modo che la somma all'interno delle caselle delle varie righe, colonne e diagonali dia come somma 92. I ragazzi procedono quindi, con una definizione non completamente corretta ma chiara, della consegna. La strategia organizzativa manca però della fase progettuale in quanto i ragazzi procedono a caso, riempiendo ordinatamente le caselle delle varie righe.

Completate le righe i ragazzi pensano di essere arrivati alla soluzione. Quando si chiede loro di verificare se la somma risulta anche sulle diagonali, il gruppo pensa che forse il numero 66 e’ stato inserito in caselle sbagliate. I ragazzi tentano altre strategie ma non arrivano alla soluzione.

Nell’attività di questo gruppo, risulta essere assente la fase dell’argomentazione in quanto la strategia scelta viene accettata da tutti i componenti. Emerge complessivamente un “germe” di pensiero algebrico.

Gruppo 3
Il gruppo disattende la consegna che specifica che il numero più grande da inserire deve essere uguale a 92. Consegna una descrizione scritta della strategia. L’analisi qualitativa viene fatta sulla base di questa descrizione e sulla registrazione fonica eseguita durante il lavoro.
La “a” presente all’interno del quadrato viene considerata un simbolo sostituibile con un numero e i componenti del gruppo concordano nel ritenere che la somma del quadrato 4x4 deve dare 26. Anche in questo gruppo manca una fase progettuale, poiché i ragazzi procedono a caso, riempiendo ordinatamente le caselle delle varie righe. Nell’ultima riga, dove la somma dei numeri già inseriti dà un valore maggiore di 26, il gruppo su suggerimento pragmatico *“…io li ho fatti con il meno…”* di uno dei componenti, inserisce l’uso del numero negativo (inteso come qualcosa da sottrarre).
L’attività successiva evidenzia l’uso di un falso ragionamento giustificato, in cui il gruppo lavora anche fuori dal quadrato con l’obiettivo di raggiungere somma 26, cioè addizionando o sottraendo alla somma data dai numeri presenti in tutte le caselle di una riga o di una colonna altri numeri (che pero’ non possono essere collocati in nessuna casella). Con questa ultima strategia il gruppo sistema le altre caselle delle successive colonne. Il problema resta aperto quando il gruppo deve affrontare la soluzione della diagonale secondaria.
Non si evidenziano particolari indicatori linguistici.

6.3.6 SCUOLA MEDIA “A. CASCINO”

Gruppo 1
Gli alunni consegnano una strategia scritta esatta. L’argomentazione è corretta, ma non si evidenziano indicatori linguistici particolari, essa è basata su principi estensivi: *“visto che…”, “per arrivare a…”*.

Gruppo 2
Gli alunni consegnano due strategie scritte, ambedue errate. Argomentano la prima e capiscono che è sbagliata. Fanno una congettura e tracciano un’altra strategia, tornando su ciò che si è fatto. C’è un tentativo di controesempio: *“ho messo così… perché fa…”*.
Nel tentativo di fare risultare il quadrato magico, gli alunni si fermano all’esatta soluzione e non controllano tutte le righe e le colonne. Utilizzano indicatori tautologici: *“è così perché fa…”*.

Gruppo 3
La strategia risolutiva degli alunni manca della fase progettuale, perché essi riempiono le caselle a caso. Si evidenzia l’uso di un falso ragionamento giustificato,

perché il gruppo lavora anche fuori dal quadrato magico con l'obiettivo di raggiungere la "somma 45 ", cioè addizionando o sottraendo alla somma data dai numeri presenti in tutte le caselle di una riga o di una colonna altri numeri (che però non possono essere collocati in nessuna casella).

6.3.7 CONCLUSIONI

Gli sperimentatori ritengono che la ricerca di strategie risolutive relative al quadrato magico 3 x 3 è risultata, in genere, abbastanza semplice ai ragazzi. Più difficile, invece, si è rivelato l'approccio alle strategie risolutive del quadrato magico 4 x 4.

Nel proporre la risoluzione di quest'ultimo quadrato, l'intento era quello di verificare se fra gli alunni di prima media fosse già strutturato un pensiero "pre-algebrico".

La consegna relativa al quadrato magico 4 x 4 (esplicitata forse volutamente con un linguaggio in parte ambiguo) è risultata sostanzialmente poco chiara alla maggior parte degli alunni.

Nel riproporre questa sperimentazione, gli sperimentatori consigliano quindi di effettuare la fase dell'azione direttamente sul quadrato 4 x 4 e di sostituire il testo di questo quesito con una frase che renda più chiara la consegna, ad esempio: "completa il quadrato magico in modo che la sua somma sia uguale 26+a. Sostituisci "a" in modo che il numero più grande da inserire in una delle caselle sia 92".

Dall'analisi quantitativo e qualitativo dei dati emerge che negli alunni è già strutturato il pensiero aritmetico Anche se un gruppo numeroso proceduto ancora per tentativi, perché nel quadrato 3 x 3 hanno inserito i numeri a caso o hanno scelto le caselle a caso, questo è dovuto sicuramente alla complessità stessa del compito. Per completare il quadrato magico è necessario capire la dipendenza reciproca che esiste tra le diverse righe, colonne e diagonali e quindi, l'alunno deve individuare le caselle dalle quali può iniziare e, successivamente, continuare a giocare. E' interessante rilevare che, nel caso che la somma parziale di alcune caselle era superiore alla somma totale del quadrato, i ragazzi hanno utilizzato i numeri negativi come numeri da sottrarre.

Rispetto allo sviluppo del pensiero algebrico, è possibile sottolineare che alcuni alunni hanno considerato la "a" una costante uguale a 0; per altri, invece, è stato un simbolo che poteva essere sostituito da un numero. Per altri ancora ha rappresentato una variabile, cioè un simbolo che doveva essere sommato a tutte le colonne, a tutte le righe e alle due diagonali. Anche se questi alunni non avevano ancora iniziato lo studio dell'algebra, hanno considerato il simbolo "a" sotto differenti aspetti: costante, valore numerico, "0", "cosa che varia". Quindi, si osserva chiaramente la presenza del pensiero algebrico, anche se non ancora strutturato perché i ragazzi non sono riusciti ad operare con il valore simbolico.

L'analisi qualitativa delle registrazioni, relative alla fase della "formulazione", ha mostrato che le congetture e le argomentazioni apportate ed utilizzate dagli alunni, nella soluzione del quadrato 4 x 4, sono risultate sostanzialmente ridotte o pressoché assenti. E' possibile che ciò sia stato determinato dal fatto che gli alunni hanno effettuato la fase dell'"azione" sul quadrato 3 x 3. In questo modo, infatti, nella fase successiva della "formulazione", effettuata sul quadrato 4 x 4, gli alunni non hanno potuto portare nel gruppo la formulazione di strategie già ipotizzate da argomentare, discutere e confrontare, ma si sono trovati sostanzialmente a ripetere, in gruppo, la ricerca di nuove soluzioni.

In ogni caso, è interessante sottolineare che in un gruppo si è osservato un lavoro di gerarchizzazione e generalizzazione con alcuni riferimenti di tipo pragmatico. Altri gruppi sono tornati su ciò che avevano fatto in precedenza e hanno evidenziato un tentativo di controesempio o di ipotesi pragmatiche di ulteriore strategia. Alcuni alunni hanno fatto uso di un falso ragionamento giustificato o di suggerimenti pragmatici. In generale, non hanno utilizzato indicatori linguistici particolari, soltanto qualche indicatore tautologico del tipo: *"è così perché fa…"*, l'argomentazione si è basata, in certi casi, su principi estensivi su principi estensivi. Dalle analisi effettuate si evince che la sperimentazione nella scuola media è stata proficua ed il lavoro degli insegnanti serio ed positivo. I risultati ottenuti sono significati per questo lavoro, ma soprattutto per la sua riproducibilità in future sperimentazioni didattiche.

ALLEGATO 1

Quadrati magici utilizzati nella Fase II

Completa, inserendo i numeri mancanti nel quadrato magico, (la somma dei numeri di ciascuna riga, colonna o diagonale è sempre la stessa).

Somma 27

12		10
	9	

Somma 18

9		
	6	
5		

Somma 45

	15	
24		12

Somma 60

		8
	20	
		24

ALLEGATO 2

Tabella relativa all'Analisi quantitativa della Scuola Media " L. Capuana" e della Scuola Media "A. Cascino"

Classe: I C e I C

Insegnante Antonella Abate e Gabriela Parisi
Anno scolastico: 2001/02

Legenda:
CAS 1C1 ÷ CAP 1C13: alunni
A1 ÷ A11: strategie

	A1	A2	A4	A6	A8	A11
CAS 1C1	1	1	0	0	0	0
CAS 1C2	1	1	0	0	0	0
CAS 1C3	1	1	0	0	0	0
CAS 1C4	1	1	0	0	0	0
CAS 1C5	1	1	0	0	0	0
CAS 1C6	1	1	0	0	0	0
CAS 1C7	1	1	0	0	0	0
CAS 1C8	1	1	0	0	0	0
CAS 1C9	1	1	0	0	0	0
CAS 1C10	1	1	0	0	0	0
CAS 1C11	1	1	0	0	0	0
CAS 1C12	1	1	0	0	0	0
CAS 1C13	1	1	0	0	0	0
CAS 1C14	1	1	0	0	0	1
CAP 1C1	0	0	0	0	0	1
CAP 1C2	0	1	0	0	0	0
CAP 1C3	0	0	0	0	0	1
CAP 1C4	1	1	0	0	0	0
CAP 1C5	0	0	0	1	1	0
CAP 1C6	0	0	0	0	0	1
CAP 1C7	0	0	1	0	0	0
CAP 1C8	0	1	0	0	0	0
CAP 1C9	0	0	1	0	0	0
CAP 1C10	1	0	1	0	0	0
CAP 1C11	0	0	0	0	0	1
CAP 1C12	0	1	0	0	0	0
CAP 1C13	1	0	0	0	0	0

6.4 SCUOLA SUPERIORE

6.4.1 LICEO SOCIO-PSICO-PEDAGOGICO

CLASSI: 1° A e 1° B
INSEGNANTE: Concetta Buscami e Maria Campagna
NUMERO DI ALUNNI: 17 (1°A) + 22 (1°B) = 39

Gioco: Il quadrato magico

6.4.2 SITUAZIONE A-DIDATTICA E LE SUE FASI

Fase 1 : <u>Consegna</u> (durata 30')
L'insegnante simula il gioco con l'alunno, spiegando in modo chiaro e comprensibile la procedura per la compilazione del quadrato 3x3. Durante il gioco, commenta e illustra le fasi. Proseguono poi il gioco due alunni, scelti a caso, alla lavagna sempre con un altro quadrato magico 3x3.
Successivamente, gli altri ragazzi completano altri quadrati magici 3x3,giocando a gruppi di due, decidono di comune accordo i numeri da inserire, scegliendo dunque una strategia adeguata.
Le regole scaturiscono dalla situazione, non sono date dall'insegnante, di conseguenza **l'azione riduce l'ambiguità del messaggio e introduce la retroazione.**
(I quadrati magici utilizzati nell'esperienza sono presentati nell'Allegato 1 alla fine del presente Capitolo).

Fase 2 : <u>Lavoro individuale con motivazione , fase d'azione</u> (durata50')
L'insegnante si allontana e l'allievo si prende carico del problema. I ragazzi devono compilare un quadrato 4x4 individualmente, riportando sul foglio le varie fasi della strategia adottata. Devono decidere fra le eventuali strategie individuate, quella più conveniente e motivarla.
In questa fase ogni alunno viene responsabilizzato, **costruisce da solo il proprio sapere**.
Alla fine di questa fase, i ragazzi consegnano i propri lavori che verranno in seguito valutati quantitativamente mediante un'apposita griglia.

Fase 3 : <u>Gioco di squadra, gruppo contro gruppo</u>. (durata 20')
Tutti gli alunni sono divisi in due gruppi, diventa un gioco di squadra. Ogni gruppo ha un portavoce. All'interno del gruppo si discute, ciascun allievo cerca di convincere gli altri della propria strategia, e per fare questo deve comunicare: in questa fase entrano in gioco **argomentare, congetturare**. Avviene dunque **la formulazione di una conoscenza**.
Questa fase e quella successiva, sono registrate dall'insegnante e poi verranno valutate qualitativamente.

Fase 4 : <u>Situazione di validazione</u> (il gioco della scoperta, prova e dimostrazione) durata 20'.
In questa fase l'alunno deve fare retroazioni, deve ragionare, discutere una situazione, condividere o rivedere opinioni.
Si prende coscienza della strategia decisa di comune accordo e poi si scrive su un foglio la **dimostrazione.** Gli alunni sono motivati a discutere una situazione, è così favorita la loro validazione. Il "perché" è appreso dall'allievo, diventa un sapere sociale e non individuale.
Vince la squadra che riesce a completare prima il quadrato, a convincere tutto il gruppo della strategia usata, e a formulare una dimostrazione valida.

6.4.3 DESCRIZIONE DELLA FASE DI VALIDAZIONE

Il gruppo vincente della 1° A ha utilizzato il **metodo aritmetico**: ha considerato che almeno una casella deve contenere il numero 92 e che la somma deve essere uguale a 26+a . Prendendo in esame la colonna in cui sono inseriti i numeri 1, 12 e 13 , la loro somma è 26 per cui hanno sostituito ad "a" il massimo numero che è 92.

Alcuni alunni del secondo gruppo della 1° A, invece, hanno iniziato con un **procedimento aritmetico-algebrico** inserendo alcuni valori: 5, -4+a, 9+3a, ecc., ma non hanno completato il quadrato perché non capivano a quale casella attribuire il valore 92. Questa strategia è stata abbandonata per adoperare il **metodo aritmetico**. Entrambi i gruppi della 1° B hanno utilizzato il **metodo aritmetico-algebrico:** hanno considerato che una casella di ogni riga e di ogni colonna deve contenere il simbolo "a" e hanno completato il quadrato. Nelle caselle hanno notato la presenza di: a, a – 2, a – 4, a – 6 e hanno considerato che il valore 92, dovendo essere il più grande doveva sostituire "a".
(Una descrizione più esauriente sui metodi risolutivi si presenta nell'Allegato 2 alla fine del presente Capitolo).

6.4.4 L'ANALISI A-PRIORI

L'analisi a-priori del problema ha permesso di determinare tutte le possibili strategie che possono utilizzare gli alunni per la risoluzione del quadrato magico.

- A1: Inserisce i numeri a caso.
- A2: Come A1 e abbandona.
- A3: Calcolo aritmetico considerando "a" costante qualunque, considera la consegna 92.
- A4: Come A3 e abbandona.
- A5: Calcolo aritmetico considerando "a" costante qualunque, non considera la consegna 92.
- A6: Come A5 senza giustificare i valori ottenuti.
- A7: Come A5 e abbandona.
- A8: Calcolo algebrico considerando "a" costante qualunque, inserisce alcuni valori sbagliati senza giustificarli, non considera la consegna 92.
- A9: Calcolo algebrico considerando "a" costante qualunque, inserisce alcuni valori sbagliati giustificandoli, non considera la consegna 92.
- A10: Calcolo aritmetico considerando "a" costante, considera la somma uguale a 92.
- A11: Come A10 e abbandona.
- A12: Calcolo algebrico, "a" costante ma non considera la consegna 92.
- A13: Come A12 senza giustificare i valori ottenuti.
- A14: Calcolo algebrico, "a" costante, considera la consegna 92.
- A15: Come A14 e abbandona.
- A16: Calcolo algebrico, "a" costante, imposta un sistema di 7 equazioni in 7 incognite.
- A17: Come A16, considera la consegna 92.
- A18: Come A16 e abbandona.
- A19: Come A17 e abbandona.
- A20: Calcolo algebrico, "a" variabile, imposta un sistema di 8 equazioni in 8 incognite ma non considera la consegna 92.
- A21: Come A20, considera la consegna 92.
- A22: Come A20 e abbandona.
- A23: Come A21 e abbandona.
- A24: Calcolo algebrico, "a" costante, imposta un sistema di 3 equazioni in 3 incognite ma non considera la consegna 92.
- A25: Come A24, considera la consegna 92.
- A26: Come A24 e abbandona.
- A27: Come A25 e abbandona.

- A28: Calcolo algebrico, “a” variabile, imposta un sistema di 3 equazioni in 3 incognite ma non considera la consegna 92.
- A29: Come A28, considera la consegna 92.
- A30: Come A28 e abbandona.
- A31: Come A29 e abbandona.

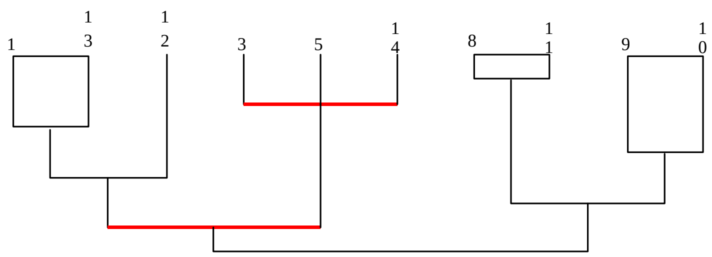
In una tabella a doppia entrata “alunni/strategie”, per ogni alunno si indica con il valore 1 le strategie che esso ha utilizzato e con il valore 0 le strategie che non ha adoperato.
L’elenco delle strategie effettivamente utilizzate dagli alunni, che hanno partecipato alla sperimentazione, per risoluzione del quadrato magico e che sono state considerate nella tabulazione dei dati è il seguente:

- A1: Inserisce i numeri a caso.
- A3: Calcolo aritmetico considerando “a” costante qualunque, considera la consegna 92.
- A5: Calcolo aritmetico considerando “a” costante qualunque, non considera la consegna 92.
- A8: Calcolo algebrico considerando “a” costante qualunque, inserisce alcuni valori sbagliati senza giustificarli, non considera la consegna 92.
- A9: Calcolo algebrico considerando “a” costante qualunque, inserisce alcuni valori sbagliati giustificandoli, non considera la consegna 92.
- A10: Calcolo aritmetico considerando “a” costante e la somma uguale a 92.
- A11: Come A10 e abbandona.
- A12: Calcolo algebrico, "a" costante ma non considera la consegna 92.
- A13: Come A12 senza giustificare i valori ottenuti.
- A14: Calcolo algebrico, "a" costante, considera la consegna 92.

La tabella dei dati si presenta nell’Allegato N° 3 alla fine del Capitolo.

6.4.5 ANALISI QUANTITATIVA DEI DATI

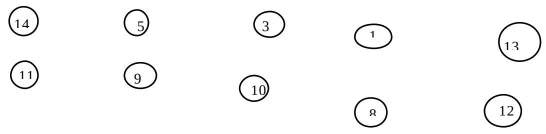
Albero delle similarita’



Arbre de similarité : C:\CHIC\chic 2000\GRIGRUPPO1.csv

Dal grafico emergono due raggruppamenti similari tra di loro: R1 = (A1, A13, A12, A3, A5, A14) e R2 = (A8, A11, A9, A10).
Al gruppo R1 appartengono soprattutto gli alunni che hanno utilizzato il calcolo algebrico assegnando ad “a” un valore costante. Le strategie A1, A3 e A5 di questo gruppo riguardano il calcolo aritmetico, ma sono state adoperate soltanto da quattro allievi.
Dal secondo gruppo fanno parte coloro che hanno utilizzato le strategie che si riferiscono, invece, al calcolo aritmetico o a calcoli algebrici errati senza considerare la consegna 92.
Comunque è interessante sottolineare che la maggior parte degli alunni ha effettuato calcoli algebrici.

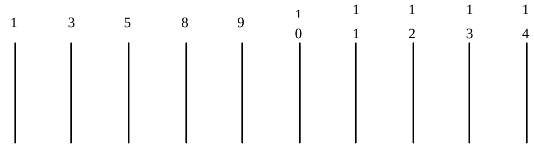
Grafico implicativo



Graphe implicatif : C:\CHIC\chic 2000\GRIGRUPPO1.csv 99 95 90 85

Da questo grafico si deduce che non ci sono implicazioni rilevanti fra le variabili.

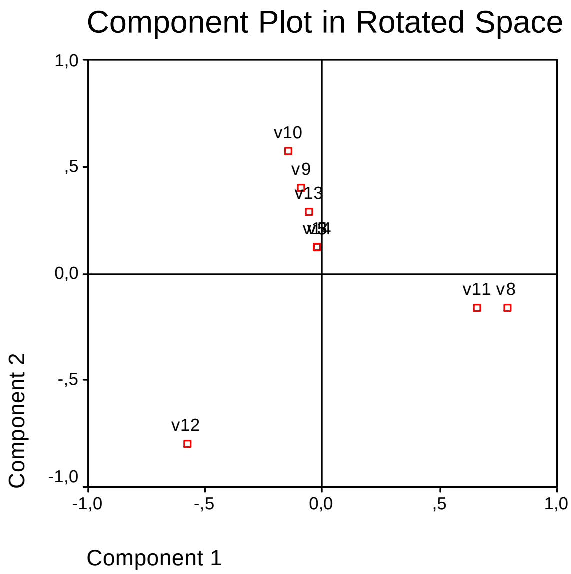
Albero gerarchico



Arbre hiérarchique : C:\CHIC\chic 2000\GRIGRUPPO1.csv

Il grafico non presenta dati significativi per la rilevazione statistica.

Analisi fattoriale



Dalla proiezione bidimensionale si osserva che le strategie A8 e A11 (calcoli algebrici sbagliati e calcolo aritmetico con abbandono della risoluzione) si contrappongono alla strategia A12 (calcolo algebrico), rispetto al secondo fattore (asse verticale). Tutte le altre variabili A5, A9, A10, A13, A14 formano una nuvola sull'asse verticale e corrispondono principalmente a quelle strategie che non considerano la consegna 92 o lo fanno in maniera sbagliata, cioè tenendo conto del 92 come la somma del quadrato magico.

6.4.6 ANALISI QUALITATIVA

Durante tutte le fasi del gioco, gli alunni hanno mostrato notevole interesse e una partecipazione attiva. Il compito è risultato stimolante e piacevole.

Nella 1° fase sia quando è stato spiegato alla lavagna il quadrato 3x3 sia quando hanno giocato in coppia, gli alunni hanno risolto con facilità ed entusiasmo il lavoro assegnato.
Nella 2° fase, quando è stato consegnato il quadrato magico 4x4, i ragazzi hanno lavorato individualmente mostrando qualche difficoltà. Infatti molti si aspettavano un quadrato magico 4x4 che non contenesse alcuna variabile, ma superato il primo impatto, la maggior parte è riuscita a completare il quadrato magico. Nessuno, però, è riuscito a comprendere la parte della consegna che diceva testualmente: "Completare il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire sia uguale a 92". Su questa seconda parte gli alunni hanno discusso ampiamente nella 3° fase, cioè durante il lavoro di gruppo proponendo vari tipi di strategie.
(I protocolli dell'esperienza si presentano nell'Allegato 4 alla fine del presente Capitolo).

6.4.7 CONCLUSIONI RIGUARDANTI GLI SCHEMI DI RAGIONAMENTO

Dal protocollo argomentativo delle classi risulta che:

Alcuni alunni hanno provato per tentativi.

- "*Forse sommare* tutti i numeri scritti e sottrarli con tutti quelli che abbiamo scritto noi".
- "*Oppure fare* la somma di tutte le colonne".
- "Ma si può inserire un'altra colonna?"

Altri alunni producono **congetture interpretative** su ciò che si è fatto, del tipo:
- "Secondo me ci sono numeri negativi, oltre a quelli positivi."
- "Giusy, praticamente la a devi far finta che è 92"
- "…se a = 92 la somma deve venire 118".
- "…se a vale 92 il risultato non viene più 118+a…"

In alcuni casi si osserva la formulazione di **congetture previsionali**, nelle quali si anticipano fatti e situazioni:
- "26+92 quanto fa? Fa 118. Se tu fai la somma 92+12+1+13 fa 118, e gli altri devono risultare pure 118."
- "Allora si fa così: sulla terza colonna c'è 1, 12, a, 13, se al posto di a mettiamo il valore 92 si fa 92+1=93+12+13 risulta 118 e secondo me bisogna"…se a = 92 la somma deve venire 118".

Alcuni alunni preferiscono utilizzare un **percorso di tipo pragmatico**, cioè relativo alla loro esperienza diretta, con tipologie linguistiche del tipo: *se noi facciamo…, se mettiamo…, abbiamo…, quindi…, e poi…, se tu fai…., allora….* Questi indicatori segnalano una **condizionalità**, una **generalizzazione** e anche un **procedimento per tentativi**. Troviamo congetture come le seguenti:
- "Ma *se noi facciamo* 66+26=92, *non possiamo fare* 92 come somma totale".
- "*Se mettiamo* 92 al posto di a, *abbiamo* altri due numeri nella colonna…".
- "*Se tu fai* la somma 92+12+1+13 fa 118, e gli altri devono risultare pure 118".
- "*Se mettiamo* 92 al posto di a, *abbiamo* altri due numeri nella colonna: l'11 e il 10 *quindi* 92+10=102; 102+11=113 *e poi* bisogna fare la somma".
- "*Se noi mettiamo* 92 e lo attribuiamo alla "a", *allora* la "a" si deve considerare come una specie di variabile e dobbiamo sottrarla per questi: -6,-2,-4;

In alcuni casi la **condizionalità** viene messa in risalto dall'uso del tempo condizionale, per esempio:
- "*Se noi facciamo* come dice Igea, non *risulterebbe* 26+a, *risulterebbe* 118+a".

In alcuni casi gli alunni utilizzano l'**indicatore linguistico di generalità** *sempre*, in espressioni del tipo:
- "*Sempre* 92 resta".

"…il risultato era *sempre* quello".

E’ frequente l’uso degli **indicatori linguistici tautologici** del tipo: *non è… ma…*, *non …*, *invece no…*, *basta…*, in **argomentazioni di tipo confutativo**, fornendo controesempi o giustificando il cambio di strategia, per esempio:

- “… abbiamo sbagliato perché noi abbiamo messo come somma 92, *invece non è* la somma, *ma* il numero da inserire”.
- “*Non* resta 92, perché la soluzione è 26+a”.
- “*Non* può essere un quadrato magico, perché il risultato deve venire uguale per tutti infatti dovrebbe risultare 26+a.
- “ La somma vale 118 e *basta*, se a vale 92 il risultato *non* viene più 118+a *ma* solo 118”.
- “ *Invece* secondo me *no*, a deve avere un valore, perché a è una costante, *non è* variabile”.
- “ Il 92 *non* si deve ripetere tante volte! … Perché nel quadrato magico *non* si possono ripetere gli stessi numeri …”.
- “ Ma a vale 92, *non c’è* un altro valore che è 92. Il 92 è qua oppure qua, *non* deve ripetersi due volte lo stesso valore.
- “E’ così punto e *basta*. Abbiamo sostituito alla a il numero 92”.

In alcuni casi, invece, il cambio di strategia non viene giustificato:

- “ … invece ad a *non* si deve attribuire niente”.

“ … ad a *non* si deve dare alcun valore”.

Si sono anche evidenziati **falsi ragionamenti**:

- “Si può mettere 90+2 che non è 92”.
- “Se facciamo la somma 26x4 (numero delle colonne) il risultato verrebbe 104 meno la somma dei numeri negativi (12) e dà come risultato 92.”
- “Io ho fatto 92-26 = 66 e poi ho trovato i numeri adatti per completare il quadrato magico.”
- “Se abbiamo detto che a è una costante, come può essere negativa?”.

Alcuni alunni giustificano i procedimenti effettuati o le affermazioni realizzate, mediante semplici ragionamenti concatenati che denotano un’**organizzazione del pensiero in modo logico e consequenziale**. Si osserva l’utilizzo di tipologie linguistiche come: *così…, dopo…,prima…, poi…*

- “Ho risolto questo quadrato magico, trovando il numero che mancava per arrivare alla somma 26+a della terza linea orizzontale dove i numeri che avevo erano 11, a, 10 e per arrivare a 26+a ho aggiunto 5. *Così* risulta 26+a. Considerando a una lettera, ho completato la seconda linea verticale. Avendo il 16, il 9 e il 5, ho messo -4+a e *così* sono giunta al risultato. *Dopo* ho risolto la prima linea orizzontale dove avevo 14, -4+a , +1 e sono giunta al risultato 9+3a. In alcune caselle ho messo alcuni numeri relativi come ad esempio -2a, +3a. *Dopo* ho risolto anche le altre linee però non riflettendoci, ho sbagliato un calcolo, ma ho trovato una strategia per risolverlo”.
- “*Prima* di tutto ho cercato il valore di a, in modo che 26+a=92 nella colonna dove si trova a. Ho trovato il valore mancante per ottenere 92, *poi* ho fatto 92-26=66 che è il valore di a, ed ho continuato a compilare le altre colonne avendo come riferimento il valore di a e la somma 92”.

Nella fase di validazione si osserva la creazione di un discorso che nel suo limite assume carattere formale e produce una spiegazione:

- “Abbiamo visto che ci sono molti procedimenti, tra i quali uno che ha trovato la mia compagna Francesca che aveva attribuito ad a il valore 66. Però leggendo bene il testo abbiamo capito che potevamo attribuire ad a il valore numerico 92, visto che il testo ci diceva che il valore da inserire era 92. La somma data è 26+a, quindi 26+92=118. Nella tabella abbiamo sostituito a con 92 e risolvendo la terza colonna verticale, il risultato era 118, quindi la somma del quadrato magico è 118. Facendo lo stesso procedimento per le altre colonne, il risultato era sempre quello. Possiamo concludere che il valore a che è 92 è costante”.

- "Sono la rappresentante del gruppo A Rita Di Martino. Allora, abbiamo inserito nel quadrato magico il numero 5 perché nella terza riga avevamo già due numeri e la lettera a. Poi abbiamo inserito la somma dei numeri che si trovavano nella seconda colonna poiché già avevamo tre numeri ed abbiamo inserito a-4 perché andava inserita la a e perché eseguendo la somma dei tre numeri si otteneva un numero che era maggiore di 26 e più precisamente di 4 numeri e quindi abbiamo sottratto il numero 4 agli altri numeri, quindi a-4. Poi, successivamente, abbiamo eseguito tutti gli altri calcoli".

  "Per quanto riguarda il 92, il test diceva di completare il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire fosse 92; poiché avevamo già inserito tutti i numeri e il quadrato magico lo avevamo già risolto, potevamo attribuire il 92 solamente alla a considerandola, quindi, una variabile. Tutti i numeri che abbiamo inserito sono minori di 92 e, in oltre, eseguendo la sottrazione tra il 92 e i numeri che accostano la variabile a si ottiene anche in questo caso un numero minore di 92; ad esempio a-4,a-6,a-2 quindi necessariamente a deve essere 92".

6.4.8 CONCLUSIONI

Dall'analisi qualitativo dei protocolli si osserva la presenza di un numero considerevole congetture e le argomentazioni apportate ed utilizzate dagli alunni. E' interessante rilevare la produzione di congetture interpretative e previsionali, l'utilizzo di percorsi di tipo pragmatico, la presenza di indicatori linguistici di condizionalità e di generalità, l'uso di falsi ragionamenti, l'utilizzo di indicatori linguistici tautologici in argomentazioni di tipo confutativo e la giustificazione dei procedimenti effettuati o delle affermazioni realizzate mediante semplici ragionamenti. Nella fase di validazione è presente la dimostrazione, cioè la produzione di una serie di proposizioni concatenate in modo logico e consequenziale.
Dall'analisi qualitativo dei protocolli emerge anche che il simbolo "a" assume per gli alunni diversi aspetti, per esempio:

- "Quindi se *a = 92*, dobbiamo dare un *valore ad a*".
- "…ad *a non si deve dare alcun valore*".
- "…ad *a non si deve attribuire niente*".
- "… *a* deve avere un *valore*, perché *a* è una *costante*, non è variabile".
- "Se abbiamo detto che *a* è una *costante*, come può essere negativa?".
- "*a* è un *incognita* quindi deve essere sostituito con un numero che non supera il 92…"
- "Se noi mettiamo 92 e lo attribuiamo alla *a*, allora la a si deve considerare come una specie di *variabile* e dobbiamo sottrarla per questi: -6,-2,-4; il problema è…".

Quindi il simbolo "a" viene considerato come una costante, un valore numerico, una variabile, un'incognita, un simbolo senza alcun valore. E' eloquente l'espressione di Felicia quando si riferisce al valore che assume la somma del quadrato: "…dipende dal *significato* che diamo ad *a*". Precisamente, una caratteristica difficile dei valori simbolici è che la loro natura precisa cambia, possono assumere aspetti diversi che hanno soltanto una particolarità in comune: il fatto di essere astratti.
Sia dall'analisi qualitativa che da quella quantitativa si evince che, la maggior parte degli alunni ha effettuato calcoli algebrici, cioè ha operato con il valore simbolico "a"; anche se in alcuni casi si sono registrati degli errori, per esempio: considerare *26+a* come *26a*.
Mentre in una classe è prevalso il pensiero aritmetico su quello algebrico, perché gli alunni hanno trasformato il quadrato magico in un problema aritmetico attribuendo ad "a" il valore 92; nell'altra classe invece, i ragazzi hanno completato le diverse caselle con numeri ed espressioni contenenti la "a" poi, stimolati dall'insegnante a compiere una retroazione (feed-back), hanno dedotto che il valore 92 doveva essere attribuito ad "a". E' opportuno sottolineare che alcune delle strategie previste nell'analisi a-priori: impostazioni di equazioni di 1° grado o di sistemi di equazioni,

non sono state adottate dagli alunni. Probabilmente ciò sia stato determinato dal fatto che questi argomenti non sono stati trattati nel corso dell'anno scolastico.
In ogni caso è importante mettere in evidenza la presenza del pensiero algebrico in fasi diverse di organizzazione, che dipendono dai singoli alunni.
Dalle analisi effettuate si evince che la sperimentazione nella scuola superiore è stata proficua ed il lavoro degli insegnanti serio ed apprezzabile. I risultati ottenuti sono significati sia per questo lavoro sia per la sua riproducibilità in future sperimentazioni didattiche.

ALLEGATO 1

Gioco: Il quadrato magico
Completa, inserendo i numeri mancanti nel quadrato magico, (la somma dei numeri di ciascuna riga, colonna o diagonale è sempre la stessa).

Somma 15

	5	
4		8

Altri quadrati magici utilizzati nella FASE 1

Somma 18

	6	
5		3

Somma 21

	7	
12		6

Somma 24

	8	
11		7

Somma 27

	9	
8		6

Somma 30

	10	
11		13

Somma 45

	15	
24		12

Somma 33

	11	
14		10

Somma 48

	16	
19		7

Somma 60

	20	
32		24

Somma 63

	21	
33		25

Quadrato magico utilizzato nelle FASI 2 e 3

Consegna: Completare il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire sia uguale a 92

Somma 26 + a

14		1	
	9	12	
11		a	10
	16	13	

ALLEGATO 2

Analisi a-priori del quadrato 4 x 4

Metodo aritmetico

Sappiamo che ci deve essere almeno un numero uguale a 92 e che la somma deve essere 26+a .

Prendendo in esame la colonna in cui sono inseriti i numeri 1- 12 – 13 , la loro somma è 26 per cui sostituiamo ad “a” il massimo numero che è 92.

Metodo aritmetico-algebrico

Nella consegna non viene preso, all’inizio, in considerazione che il numero più grande da inserire è 92.

Si prende invece in considerazione che una casella di ogni riga e di ogni colonna deve contenere il simbolo “a”.

Dopo questa premessa ci si accorge che nella 4° riga la somma dei 2 numeri già inseriti è maggiore di 26. Si deduce allora che bisogna operare nell’insieme Z. La diagonale principale contiene già il simbolo “a”, si completa allora con il numero mancante che fa raggiungere il totale di 26. A questo punto si torna nella quarta riga e nella casella vuota si mette il simbolo “a”, più il numero relativo negativo, che fa arrivare a 26.Con lo stesso criterio si procede spostandosi in quelle righe o in quelle colonne che presentano una sola casella vuota da riempire. Guardando il quadrato completo, si evidenziano adesso i seguenti valori: a; a-2; a-4; a-6. Si considera a questo punto che il valore 92, dovendo essere il più grande dovrà sostituire “a”.

Metodo algebrico

1. Si considera “a” costante. Si parte dalla terza riga o dalla diagonale principale perché contengono entrambe tre elementi, attribuendo al valore mancante una incognita si imposta una equazione di 1° grado.
   11+x+a+10=26+a
   oppure
   14+9+a+x=26+a.
   Il percorso per completare il quadrato, non è obbligato perché si procede considerando le righe o colonne in cui sono presenti tre elementi.
   Alla fine del procedimento ci si accorge che tre degli elementi inseriti sono termini letterali in cui compare “a”.

14	a - 4	1	15
7	9	12	a - 2
11	5	a	10
a - 6	16	13	3

Da qui ci sono due possibilità:

- non si considera la consegna che il numero più grande sia 92
- ci si accorge della consegna e si attribuisce ad “a” il valore 92 perché gli altri tre valori sono inferiori ad “a”.

2. Considerando “a” costante si può impostare un sistema lineare di 7equazioni in 7 incognite.
   Questa strategia viene subito abbandonata perché lunga e difficoltosa.

3. Si considera “a” variabile e si imposta un sistema lineare di 8 equazioni in 8 incognite.
   Questa strategia vi ene subito abbandonata perché lunga e difficoltosa.

4. Si considera “a” variabile e si imposta un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite, di cui una è una identità, quindi per completare il quadrato si introducono altre variabili. Durante la risoluzione ci si accorge che alcune variabili dipendono da “a” . Da qui la necessità di dare ad “a” un valore costante che dovrà essere necessariamente 92 perché le altre variabili introdotte risultano inferiori a 92.

   11+x+a+10=26+a
   1+12+a+13=26+a
   z+9+x+16=26+a

14	z	1	p
m	g	12	l
11	x	a	10
g	16	13	t

z=a-4
g=a-6 a=92
l=a-2

ALLEGATO 3

Tabella relativa all'Analisi quantitativa della Liceo Socio-Psico-Pedagogico
<u>Classe</u>: 1° A e 1° B

<u>Insegnanti:</u> Concetta Buscami e Maria Campagna
<u>Anno scolastico</u>: 2001/02
Legenda: b1 ÷ a17: alunni, A1 ÷ A14: strategie

	A1	A3	A5	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14
b1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
b2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
b5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
b6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
b9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b10	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
b11	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b12	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b13	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b14	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b15	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
b16	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
b18	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
b19	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
b20	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b21	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b22	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
a1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
a2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
a4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
a5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
a6	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
a7	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
a8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

a11	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a12	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
a13	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
a14	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a15	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a16	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a17	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

ALLEGATO 4

Protocolli dei gruppi

Nella terza fase gli alunni sono stati divisi in due gruppi e ogni gruppo aveva un portavoce. Sono state registrate le discussioni. Dal lavoro di sbobinatura si sono ottenuti i seguenti protocolli:

CLASSE: 1° A

Protocollo del Gruppo A (portavoce Giusy Quaceci)

- **Giusy:** "Prima di tutto ho cercato il valore di a, in modo che 26+a=92 nella colonna dove si trova a. Ho trovato il valore mancante per ottenere 92, poi ho fatto 92-26=66 che è il valore di a, ed ho continuato a compilare le altre colonne avendo come riferimento il valore di a e la somma 92".
- **Ilenia:** "Leggendo l'intestazione ho visto che il numero più grande da inserire era 92, allora ho fatto 26+92 ma non risultava, allora ho aggiunto 91. Poi ho fatto 26+91=117, ho sommato i numeri ed il risultato del quadrato magico era 117, tranne una colonna che non mi risultava".
- **Valentina:** "Io ho provato ma non ci sono riuscita".
- **Marisa:** "Anche io ho tentato, ma non ci sono riuscita".
- **Erika:** "Ho fatto lo stesso procedimento di Giusy, ho fatto valere a=66 e ho sommato per ogni numero".
- **Francesca:** "Io ho fatto 92-26=66 e poi ho trovato i numeri adatti per completare il quadrato magico".
- **Giusy:** "Dai ragazzi iniziamo a svolgerli, via!".
- **Ilenia:** "Il testo qua dice che nel quadrato magico il numero più grande sia 92, però dobbiamo inserire almeno un numero che arrivi 92, in modo che si completi il quadrato".
- **Giusy:** "Secondo me, abbiamo sbagliato perché noi abbiamo messo come somma 92, invece non è la somma, ma il numero da inserire. Quindi se a=92, dobbiamo dare un valore ad a".
- **Ilenia:** "Bisogna fare 26+92?".
- **Marisa:** "No ma che c'entra".
- **Giusy:** "Ma in sostanza cosa si deve fare?".
- **Valentina:** "Allora si deve fare 92-66? Anzi 92-26=66?".
- **Ilenia:** "Ma se noi facciamo 66+26=92, non possiamo fare 92 come somma totale".
- **Giusy:** "92 lo abbiamo considerato come somma totale, invece 92 è il numero da inserire".
- **Marisa:** "Allora non si fa 92-26?".
- **Giusy:** "No, 92 bisogna metterlo al posto di a. Proviamoci. Se mettiamo 92 al posto di a, abbiamo altri due numeri nella colonna: l'11 e il 10 quindi 92+10=102;102+11=113 e poi bisogna fare la somma".
- **Ilenia:** "Allora si fa così: nella terza colonna c'è 1, 12, a, 13, se al posto di a mettiamo il valore 92 si fa 92+1=93+12+13 risulta 118 e secondo me bisognava sommare gli altri numeri in modo che la somma dava 118".
- **Giusy:** "Attribuito ad a il valore di 92, il testo ci dice che la somma è 26+a, quindi dobbiamo fare la somma 26+92=118. Nella colonna abbiamo 11, il

valore di a che è 92, 10, 13 e quindi la somma = 118. (Nelle altre colonne) dobbiamo trovare il valore mancante che sommato agli altri numeri ci dia 118. Stiamo riuscendo, dai 92+9=101; 101+14=115+3=118".

- **Giusy e Ilenia:** "3+13+16=32. Ora dobbiamo trovare un numero che sommato a 32 mi dia 118, è 86. Ora si fa 86+5=91+12=103, 103 per arrivare 118 troviamo 15. Ora facciamo 15+1=16, 16+14=30, per arrivare a 118 si fa 118-30=88. Poi 88+9=97+5=102, 102+16=118.Ora bisogna fare 15+10=25+3=28, 118-28=90. Proseguiamo: 90+9=99+12=101, 101+17=118. Ora facciamo 11+7=18, 18+14=32, 32+86=118. Evviva! Abbiamo vinto!".

Validazione

Giusy: "Abbiamo visto che ci sono molti procedimenti, tra i quali uno che ha trovato la mia compagna Francesca che aveva attribuito ad a il valore 66. Però leggendo bene il testo abbiamo capito che potevamo attribuire ad a il valore numerico 92, visto che il testo ci diceva che il valore da inserire era 92. La somma data è 26+a, quindi 26+92=118. Nella tabella abbiamo sostituito a con 92 e risolvendo la terza colonna verticale, il risultato era 118, quindi la somma del quadrato magico è 118. Facendo lo stesso procedimento per le altre colonne, il risultato era sempre quello. Possiamo concludere che il valore a che è 92 è costante".

Protocollo del Gruppo B: (portavoce Giusy Martello)

- **Giusy:** "Ho risolto questo quadrato magico, trovando il numero che mancava per arrivare alla somma 26+a della terza linea orizzontale dove i numeri che avevo erano 11, a, 10 e per arrivare a 26+a ho aggiunto 5. Così risulta 26+a. Considerando a una lettera, ho completato la seconda linea verticale. Avendo il 16, il 9 e il 5, ho messo -4+a e così sono giunta al risultato. Dopo ho risolto la prima linea orizzontale dove avevo 14, -4+a , +1 e sono giunta al risultato 9+3a.In alcune caselle ho messo alcuni numeri relativi come ad esempio -2a, +3a. Dopo ho risolto anche le altre linee però non riflettendoci, ho sbagliato un calcolo, ma ho trovato una strategia per risolverlo".
- **Lorena:** "Il numero più grande da inserire era 92".
- **Giusy:** "Infatti il dubbio che abbiamo tutti, e che mi sono posta pure io quando l'ho fatto, è che questo numero si dovrebbe inserire, però non ho trovato in quale posto".
- **Igea:** "Secondo me l'ho dobbiamo inserire nella a".
- **Giusy:** "Però questo 92 si deve sottrarre, si deve togliere per arrivare alla a".
- **Igea:** "Sempre 92 resta".
- **Giusy:** "Non resta 92, perché la soluzione è 26+a".
- **Igea:** "26+92 quanto fa? Fa 118. Se tu fai la somma 92+12+1+13 fa 118, e gli altri devono risultare pure 118".
- **Lorena:** "Secondo me ha ragione Igea perché qua c'è un legame, perché è 26+a, tu devi attribuire il valore ad a, quindi se a = 92 la somma deve venire 118".
- **Giusy:** "Non può essere un quadrato magico, perché il risultato deve venire uguale per tutti infatti dovrebbe risultare 26+a. Se noi facciamo come dice Igea, non risulterebbe 26+a, risulterebbe 118+a".

- **Felicia:** “Però dipende dal significato che diamo ad a”.
- **Lorena:** “La somma vale 118 e basta, se a vale 92 il risultato non viene più 118+a ma solo 118”.
- **Felicia:** “Giusy, praticamente la a devi far finta che è 92”.
- **Igea:** “Attribuiamo ad a il valore 92, poi fai la somma 26+92 che fa 118”.
- **Giusy:** “Quindi abbiamo trovato la soluzione: dobbiamo attribuire ad a il valore di 92 e trovando questo valore dobbiamo riuscire a risolvere tutto il quadrato magico”.
- **Lorena:** “Sin dall’inizio avevamo detto di attribuire un valore ad a che non cambiava, una volta si diceva 3, una volta 5 e così via. Allora abbiamo risolto il dubbio, grazie ad Igea!”.
- **Eugenia:** “Perché avete messo il 92 proprio nella a ?”.
- **Giusy:** “Perché a è senza valore e il testo ci dice che il numero più grande da inserire è uguale a 92”.
- **Eugenia:** “Secondo me è sbagliato, invece ad a non si deve attribuire niente”.
- **Igea:** “Secondo me abbiamo messo 92 al posto di a perché altrimenti il valore 92 dove lo metti? Così se tu fai la somma 26+92 uguale 118”.
- **Lorena:** “Secondo me ha ragione Eugenia perché ad a non si deve dare alcun valore”.
- **Eugenia:** “Secondo me si deve trovare il valere 26 e poi aggiungere a, non dare il valore ad a”.
- **Felicia:** “Invece secondo me no, a deve avere un valore, perché a è una costante, non è variabile”.
- **Giusy:** “Nella terza linea orizzontale il 5 è giusto. Il risultato deve essere 118, ora proviamo a risolvere anche le altre. Sappiamo che a=92, quindi procediamo. Facciamo 12+5=17, dobbiamo arrivare a 118, possiamo fare 90 …..”.
- **Vanessa:** “Secondo me ha ragione Igea e non Eugenia perché qui il testo dice che si deve inserire un numero uguale a 92 . Quindi in qualche modo a 92 lo dovete fare entrare da qualche parte e l’unico elemento che non ha valore è proprio a. Quindi a=92 secondo me, secondo Eugenia invece no”.
- **Giusy:** “Anche secondo me hanno ragione Igea e Lorena”.
- **Felicia:** “E allora tu che stai svolgendo la linea trasversale, dove la metti la a, dove lo metti il 92?”.
- **Giusy:** “Il 92 non si deve ripetere tante volte!”.
- **Felicia:** “Perché non si deve ripetere?”.
- **Giusy:** “Perché nel quadrato magico non si possono ripetere gli stessi numeri anche se hai fatto errori di calcolo per risolverlo. Dobbiamo fare 92+17 dove 17=5+12 poi 92+17=109…”.
- **Eugenia:** “Secondo me ci sono numeri negativi, oltre a quelli positivi”.
- **Lorena:** “Secondo me non è come dici tu”.
- **Felicia:** “Se abbiamo detto che a è una costante, come può essere negativa?”.
- **Giusy:** “Sto risolvendo la prima linea orizzontale. Quindi 14+1+92=107 per arrivare a 118 abbiamo 11. Perché non riesce? 9+5+12+il valore di a che è 92 da 118, fino a qua è giusto. Risolviamo la prima linea verticale dove manca un solo numero”.
- **Lorena:** “Secondo me hai sbagliato ad inserire il 92, perché lo hai messo qui sopra”.

- **Felicia:** "Perché questa linea trasversale risulta 118; 26+92 uguale 118".
- **Igea:** "Secondo me potrebbe essere così ma non ne sono sicura".
- **Lorena:** "Ma a vale 92, non c'è un altro valore che è 92. Il 92 è qua oppure qua, non deve ripetersi due volte lo stesso valore. C'è qualcosa che non quadra. L'altro gruppo ha già finito, ma non prediamoci d'animo ".
- **Giusy:** "Siamo riusciti a risolverlo, trovando numeri tutti diversi".
- **Lorena:** "Hai ripetuto due volte 92".
- **Felicia:** "Non è cosi. Lorena dov'è il numero che si ripete".
- **Igea:** "Secondo me non si può mettere cosi".
- **Giusy:** "Si può mettere 90+2 che non è 92".

Validazione

Parla Giusy portavoce del gruppo:
"Quando abbiamo discusso, oltre la mia strategia, ne abbiamo trovata un'altra che consiste nell'attribuire ad a il valore di 92, e alla fine abbiamo deciso di utilizzare questa. Quindi abbiamo attribuito ad a il valore di 92 e sommandolo al 26 doveva dare il risultato di 118 e così abbiamo messo i numeri e completato la tabella che così è risultata. Ci siamo accorti che la strategia è giusta ma ci sono degli errori di calcolo".

CLASSE: 1° B

Protocollo del Gruppo A (portavoce Rita Di Martino)
- **Prof: "**Avanti, forza riempite il quadrato".
- **Rita Di Martino:** "Allora lo abbiamo risolto tutti no!! Allora iniziamo da qua perché abbiamo due numeri e una lettera, quindi viene praticamente 21+a per arrivare a 26+a gliene mancano 5. Ora facciamo questo perché abbiamo tre numeri e ci va la a, per forza, e facendo la somma viene 30 quindi dobbiamo sottrarne quanto? 4, quindi viene a-4. Adesso facciamo questo abbiamo altri tre numeri, nella prima riga in alto, dobbiamo aggiungere 5. Ora facciamo la diagonale che inizia con 14 abbiamo due numeri e una lettera, la lettera a, quindi dobbiamo aggiungere un numero, dobbiamo aggiungere 3. Giusto, siete convinti?!".
- **Componenti del gruppo:** "Si!!".
- **Rita: "**Allora, praticamente ……"
- **Componenti del gruppo: "**Qua ci va la a!".
- **Prof:** "Vi ricordo che il numero più grande da inserire è uguale a 92".
- **Rita:** "Allora facciamo l'altra diagonale viene…".
- **Anna Matranga: "**Viene 10, 15, 18….quindi 15".
- **Rita:** "Si certo 15!! Qui viene 20, 32 quindi ne dobbiamo sottrarne 6 ; viene 24-6, quindi ne dobbiamo mettere 7".
- **Luana Romano: "**19 e 9, 36 No!?".
- **Silvia:** "Quella da i numeri!!".
- **Rita:** "Quindi qua viene 11, no aspetta…".
- **Anna:** "19".

- **Rita:** “28, quindi –2 ; l’ho detto già io, qua viene 28-2, giusto?! Ora dobbiamo ragionare sul 92. Qui dice: completa il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire sia uguale a 92”.
- **Prof: “**Anna tu devi pensare!”
- **Anna:** “Si io sto pensando”.
- **Luana:** “Nella terza colonna orizzontale”.
- **Rita:** “Nella terza riga!!”.
- **Prof:** “No! nella terza riga”.
- **Rita:** “Abbiamo messo…”.
- **Prof:** “Prima cosa hai messo?!”.
- **Rita:** “Nella terza riga il numero 5”.
- **Prof:** “Perché…”.
- **Rita:** “Perché già avevamo due numeri e la lettera a…”.
- **Silvia:** “Quella che parla è Rita Di Martino”.
- **Rita:** “Poi abbiamo inserito nella seconda colonna da sinistra…”.
- **Silvia:** “E la scrittrice è Anna Matranga”.
- **Rita:** “…da sinistra verso destra a-4 perché avevamo già tre numeri esatti e poiché…”.
- **Prof: “**Dovete convincere anche i vostri compagni. Tu Ciofalo lo stai capendo?”.
- **Rita: “**…e poiché la somma veniva maggiore di 26 abbiamo sottratto il numero 4. Poi, quindi, dove siamo arrivati? Si poi abbiamo inserito il numero 15 nella prima riga poiché avevamo già due numeri e la lettera a”.
- **Rita: “**Poi abbiamo inserito nell’ultima riga il numero 3 poiché, nella diagonale che inizia con il numero 14 avevamo già due numeri esatti e la lettera. Poi abbiamo inserito nell’ultima riga a-6 perché nella diagonale che inizia con il numero 15 avevamo già tre numeri corretti. Poi, alla fine, abbiamo inserito nella prima colonna il numero 7 perché già avevamo due numeri e la lettera a e alla fine, nell’ultima colonna , a-2”.
- **Silvia:** “Adesso viene il bello il 92!! Chissà dove lo dovremo mettere!!”.
- **I componenti:** “Sommiamo tutto quanto!!”.
- **Rita:** “Tutto quanto? Io non penso che sia tutto quanto perché altrimenti avrebbero messo la somma, invece, qui dice: completa il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire sia uguale a 92”.
- **Valeria Passarello:** “Io ho provato a fare 92:4, per 4*4 no!? E mi è venuto 23”.
- **Rita:** “Ma potrebbe essere, perché…..se noi non, magari non addizioniamo questi –6 –2 in ogni colonna, in ogni riga…”.
- **Valeria:** “Io ho fatto l’addizione di tutti i numeri normali più la sottrazione e mi veniva 104”.
- **Rita:** “Aspetta 4*4 fa 16; se noi facciamo 92-16 ,92:16… Per vedere questo 92 in ogni quadratino a quale numero corrisponde”.
- **Anna:** “Fa 23”.
- **Rita:** “Fa 23; no devi fare diviso16, per vedere… se noi facciamo 4*4=16 e poi diviso 92 otteniamo il numero che in ogni buco ci deve stare”
- **Anna:** “Scusa, non può essere che…”.
- **Rita:** “No, ma perché…”.

- **Anna:** “No, qui infatti dice, un attimo solo…”.
- **Rita:** “No, ma io ho fatto così perché qui si sta parlando del numero più grande da inserire”.
- **Anna:** “E appunto, quindi, lo dobbiamo inserire nella tabella”.
- **Valeria:** “Ma ci sarà un nesso logico per mettere questo 92, quindi io per questo ho pensato di fare…”.
- **Rita:** “Ma una calcolatrice non ce l’abbiamo? Per fare subito i calcoli”.
- **Anna:** “Ma questo 92 lo dobbiamo inserire nella tabella”.
- **Rita:** “Fai 92:16; si vediamo, perché io non penso che comunque vada inserito il 92 in questo modo, a meno che…”.
- **Valeria:** “2,75”.
- **Rita:** “Dunque…”.
- **Anna:** “Qui dice il numero più grande da inserire, quindi dobbiamo inserirlo”.
- **Silvia:** “Un momento di suspance!”.
- **Rita:** “Il numero più grande da inserire è uguale a 92; a meno che, forse con questo metodo che noi abbiamo fatto…., se utilizziamo un altro metodo con i numeri più grandi…”.
- **Valeria:** “Facciamo la somma e poi dividiamo?”.
- **Rita:** “Fare tutta la somma ! Sottraendo pure questi numeri che noi abbiamo sottratto?”.
- **Valeria:** “Prima…ehh…”.
- **Rita:** “Proviamo”.
- **Valeria:** “Io credo che viene 104”:
- **Rita:** “Scusa facciamolo con la calcolatrice, dato che…”.
- **Anna:** “Scusa ma volete sommarli?”.
- **Rita:** “Ma io non riesco a capire, perché, secondo me, questa somma non centra”.
- **Luana:** “I numeri 26?! 26,26,26,26”.
- **Rita:** “No! vuole sommare…”.
- **Anna:** “Rita ma se dobbiamo inserirlo questo 92 lo metti dentro la tabella”.
- **Rita:** “Si, ma secondo me, sto inserire è una cosa, cioè inserire in un modo particolare, perché altrimenti sarebbe troppo semplice inserire il 92 nella tabella, secondo me ce sotto qualcosa, un ragionamento”.
- **Valeria:** “104 no, giusto viene!”.
- **Rita:** “104”.
- **Jessica Oliva:** “Ma perché 16?”.
- **Anna:** “4*4=16”.
- **Rita:** “Fai :16”.
- **Jessica:** “Ma perché 16?”.
- **Anna: “**Perché 4*4; ma se si fa 92 meno tutti questi numeri?! Avete provato a farlo”.
- **Jessica:** “Ma già dava 104 , 92-104 non si può fare”.
- **Anna:** “…dico la somma di tutti i numeri che abbiamo fatto da…”.
- **Rita:** “Dici quelli che abbiamo inserito?”.
- **Anna:** “Si, tutti i numeri che abbiamo inserito”.
- **Prof:** “Anna…”.

- **Anna:** "Dobbiamo provare a sommare tutti i numeri che abbiamo inserito e poi a dividerli per 92 o…".
- **Prof:** "No! Perché, leggi bene".
- **Anna:** "Ma qui dice il numero da inserire!".
- **Prof:** "Dobbiamo inserire un numero, e questo numero, il più grande deve essere 92".
- **Anna:** "Quindi dobbiamo inserirlo".
- **Valeria:** "Ma quindi dobbiamo rifare il quadrato?".
- **Prof:** "No, è già fatto il quadrato".
- **Anna:** "Perché qua dice: completa il quadrato magico, quindi dobbiamo farlo, ed è fatto, in modo che il numero più grande sia uguale a 92; è un enigma!".
- **Prof:** "Il numero più grande da inserire è 92. Già questi ce li hai 15, 3, li puoi cambiare? No!!".
- **Anna:** "No!".
- **Prof:** "La somma è sempre 26+a".
- **Anna:** "No, ormai è fatto".
- **Prof:** "Allora dove lo devi mettere questo 92? La somma sempre 26+a deve dare".
- **Giusy Gangemi:** "Una lettera può essere".
- **Prof:** "Quale lettera?".
- **Componenti del gruppo:** "La a!!".
- **Prof:** "Provate!".
- **Luana:** "Quindi 92-6".
- **Prof:** "Cosa hai detto Giusy? Dillo di nuovo".
- **Luana:** "Sostituire le lettere a con 92".
- **Prof:** "Messe al posto di?".
- **Giusy: "**Di a mettere 92".
- **Anna:** "Aspetta un attimo, dobbiamo sottrarre per tutto: quindi fai –6…".
- **Valeria:** "Cosa?!".
- **Anna:** "86".
- **Valeria:** "86 meno cosa?".
- **Anna:** "Meno 5, 12-15".
- **Rita:** "Se noi mettiamo 92 e lo attribuiamo alla a, allora la a si deve considerare come una specie di variabile e dobbiamo sottrarla per questi: -6,-2,-4; il problema è…".
- **Valeria:** "Dobbiamo sottrarre tutti i numeri fino ad arrivare a 26+a".
- **Prof:** "+a, ma " a ", a cosa è uguale avete detto?".
- **Componenti del gruppo:** "A 92".
- **Giusy:** "La a diventa 92".
- **Prof:** "La a diventa….?".
- **Giusy:** "92".
- **Prof:** "Quindi?".
- **Giusy:** "Fa 26+92, viene".
- **Prof:** "Brava Giusy!!".
- **Silvia:** "Giusy ha trovato la soluzione!".
- **Rita:** "La a=92; 92+26=118".

- **Enza Alessandro:** “Fa 118? Ah, finisce così?”
- **Anna:** “E’ così punto e basta. Abbiamo sostituito alla a il numero 92”.
- **Rita:** “Sottolinea questo passaggio e lo ripeti dopo; sottolinea e riporta sotto a parole….; quindi, abbiamo sostituito alla a il numero 92 e lo abbiamo addizionato al numero 26 ed abbiamo ottenuto il numero 118”.
- **Componenti del gruppo:** “Prof abbiamo finito!!”.
- **Silvia:** “La prof ci deve fare una domanda?”.
- **Prof:** “Avete spiegato tutto?”.
- **Anna:** “Si, abbiamo sostituito alla a il numero 92 e sommato il 26 fa 118, perché a è una variabile”.
- **Prof:** “Si, ma perché proprio 92 ad a?”.
- **Rita:** “Perché già avevamo dei numeri, non si possono sostituire dei numeri”.
- **Prof:** “Questo mi sta bene, però c’è un'altra risposta; perché il numero più grande, qua dice, è 92?”.
- **Giusy:** “Perché tutti i numeri sono minori di 92”.
- **Prof:** “Tutti e anche..? Giusy, e anche….?”.
- **Giusy:** “E anche il 26”.
- **Prof:** “Questi si vedono che sono più piccoli di 92, e anche…”.
- **Anna:** “E anche la somma”.
- **Prof:** “No, la somma non è una variabile? Anche chi ?”.
- **Giusy:** “I numeri che abbiamo inserito!”.
- **Prof:** “Questo si vede che sono più piccoli”.
- **Giusy:** “I numeri che già c’erano”.
- **Prof:** “a-4 ; avreste potuto scrivere a=92 pensateci; che dici?”
- **Stefania Mattia:** “Perché facendo la sottrazione da 92 meno il numero che abbiamo inserito ci da un numero minore di 92”.
- **Prof:** “Brava! Perché qua, a-4 viene più piccolo di 92; a-6 ci da un numero più piccolo. Scrivete questo”.
- **Rita:** “Abbiamo sostituito alla lettera a il numero 92 e lo abbiamo addizionato al numero 26 e abbiamo ottenuto il numero 118. Abbiamo fatto questo perché sottraendo il numero 92 a quei numeri che accompagnavano la lettera a abbiamo ottenuto un numero minore di 92”.

Validazione

“Sono la rappresentante del gruppo A Rita Di Martino. Allora, abbiamo inserito nel quadrato magico il numero 5 perché nella terza riga avevamo già due numeri e la lettera a. Poi abbiamo inserito la somma dei numeri che si trovavano nella seconda colonna poiché già avevamo tre numeri ed abbiamo inserito a-4 perché andava inserita la a e perché eseguendo la somma dei tre numeri si otteneva un numero che era maggiore di 26 e più precisamente di 4 numeri e quindi abbiamo sottratto il numero 4 agli altri numeri, quindi a-4. Poi, successivamente, abbiamo eseguito tutti gli altri calcoli”.
“Per quanto riguarda il 92, il test diceva di completare il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire fosse 92; poiché avevamo già inserito tutti i numeri e il quadrato magico lo avevamo già risolto, potevamo attribuire il 92 solamente alla a considerandola, quindi, una variabile. Tutti i numeri che abbiamo

inserito sono minori di 92 e, in oltre, eseguendo la sottrazione tra il 92 e i numeri che accostano la variabile a si ottiene anche in questo caso un numero minore di 92; ad esempio a-4,a-6,a-2 quindi necessariamente a deve essere 92".

Componenti del gruppo:
Mattia Stefania, Anna Matranga, Rita Di Martino, Ciofalo Davide; Romano Luana, Silvia Rausa, Jessica Oliva , Alessandro Rosa, Giusy Gangemi, Valeria Passatello, Alessandro Enza.

Protocollo del Gruppo B (portavoce Ester Sanalitro)

- "Mi chiamo Ester Sanalitro abbiamo iniziato dalla terza colonna orizzontale perché mancava un solo termine per completare la somma, e quindi abbiamo raggiunto la somma 26 +a facendo (11+a+10) che verrebbe 21a, poi abbiamo fatto (26+a-21a) e il risultato è cinque e quindi il termine mancante è 5. Poi abbiamo fatto la prima colonna obliqua facendo (14+9+a) e verrebbe 23a, quindi abbiamo sottratto da 26 +a il 23+ a e verrebbe 3.
  Poi abbiamo continuato con la seconda colonna verticale e abbiamo sommato 16+5+9 che fa 30 e così abbiamo messo a-4 che viene 26a; ora continuiamo con l'ultima colonna orizzontale facendo 16+13 che viene 29 che sommato al 3 fa 32 e quindi mettiamo a-6.
  Stiamo continuando con un'altra colonna obliqua e abbiamo i numeri a-6; 5 e 12 quindi facciamo 12+5 che fa 17, poi sottraiamo a-16 e viene 11 e quindi il termine mancante è 15.
  Continuiamo con l'ultima colonna verticale facendo 15+10 che viene 25, che sommato al 3 fa 28, quindi il termine mancante è a-2 ora rimane l'ultima colonna, che è la seconda orizzontale, con i numeri (9-12-a-2) facciamo la somma sottraiamo 26 a e troviamo 7.
  Ora possiamo verificare se l'operazione eseguita è stata corretta facendo la somma e vedendo se in tutte le colonne otteniamo 26+a".
  Ora dobbiamo risolvere il problema del 92 perché dice "completa il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire sia uguale a 92" quindi per inserire il 92 potrebbero anche esserci altri metodi…"
- **Ester:** "L'esercizio dice: completa il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire sia uguale a 92".
- **Prof.:** "Pensate".
- **Ester:** "Ma in pratica, professoressa dobbiamo inserire il 92?".
- **Prof:** "Si, che sia più grande".
- **Ester:** "Oltre il 92?".
- **Prof:** "No. Così c'è scritto? Concetta cosa stavi pensando?".
- **Concetta Oste:** "Forse fare la somma di tutti i termini, se è più grande di 92 sottrarlo con 26 a .
- **Prof:** "Proviamo!".
- **Irene:** "Io dicevo, sommiamo solo quelli che abbiamo scritto noi".
- **Concetta:** "Non ci arriviamo a 92".
- **Simona:** "Oppure sommare tutti i numeri di una colonna e moltiplicarla per 26".
- **Ester:** "Forse sommare tutti i numeri scritti e sottrarli con tutti quelli che abbiamo scritto noi.

- **Morena:** “Oppure fare la somma di tutte le colonne per 4”.
- **Prof:** “Il massimo numero ….Già voi avete dei numeri. Si! E sono 14, 11, 7, 10, in qualche posto questi già ci sono. Dobbiamo metterci il 92”.
- **Concetta:** “Forse il 92 metterlo al posto della lettera a”.
- **Ester:** “E se aggiungiamo un'altra colonna?”.
- **Jessica Grisaffi:** “Io dicevo di sottrarre il 92 per il risultato di ogni colonna”.
- **Irene:** “Non può risultare!”.
- **Ester:** “Secondo me non ha senso…”.
- **Serena:** “Io dicevo di sommare tutti i numeri e sottrarli a quelli con cui noi abbiamo sottratto a-4, a-2...”.
- **Jessica Giunta:** “Prima stiamo sommando tutti i numeri che erano già presenti nel quadrato magico e quelli che abbiamo inserito noi. Dopo di che il risultato intendiamo sottrarlo a 26 solo che non ci risulta perché ci viene 82 e invece deve risultare 92”.
- **Serena:** “Sommiamo prima tutti i numeri positivi tranne quelli negativi, cioè a-2, a-6 e cosi via.
- **Jessica Giunta:** “Quelli che hanno a-2, a-4…..E sottrarli a 26”.
- **Serena:** “Eh ! no a 26. E perché a 26?”.
- **Jessica Giunta:** “Non si può sottrarre a 26”.
- **Serena:** “No, va bene si può sottrarre”.
- **Jessica Giunta:** “No perché è un numero troppo grande”.
- **Serena:** “Allora il risultato della somma dei numeri negativi dà –12 più quelli positivi dà 82; ma non può essere perché dovrebbe risultare 92. Si ma facciamola questa somma”.
- **Jessica Giunta:** “Abbiamo provato a fare la somma dei numeri positivi meno la somma dei numeri negativi (116-12)”.
- **Serena:** “E questo volevo dire io”.
- **Morena:** “Viene un numero con lo zero”.
- **Jessica:** “Verrebbe 90, ma forse ho sbagliato a fare il calcolo”.
- **Prof:** “Fatemi capire!”
- **Jessica:** “Se facciamo la somma di tutti i numeri positivi tranne a-4 e gli altri numeri negativi”.
- **Ester:** “No stiamo sbagliando, il massimo numero da inserire è 92, giusto prof.?”.
- **Prof:** “Si , il massimo numero da inserire è 92”.
- **Ester:** “Ma si può inserire un'altra colonna?”.
- **Jessica:** “Se le colonne sono tutte occupate, come facciamo a inserire un altro numero?”.
- **Prof:** “Ci sono alcune colonne che non sono ben definite”.
- **Ester:** “Ad esempio dove c’è scritto a-2…”.
- **Jessica:** “16+5+9 no e se facciamo il 92 meno la somma di alcune colonne”.
- **Prof:** “Il massimo numero da inserire sia 92”.
- **Concetta:** “Se facciamo la somma 26 * 4 (numero delle colonne). Il risultato verrebbe 104 meno la somma dei numeri negativi (12) e dà come risultato 92”.
- **Jessica Grisaffi:** “Ma non è il risultato 92, lo devi usare!”.
- **Concetta:** “Io ho fatto la somma 26+a per 4, il numero delle colonne che dà 104 meno la somma dei numeri negativi, cioè –12, risulta 92”.

- **Prof:** “Dove lo metti il 92?”.
- **Jessica:** “Ma se noi lo inseriamo, poi non risulta più 26 a”.
- **Prof:** “Ma non è 26a, è 26+a”.
- **Serena:** “Se facciamo 92 –26 si trova a”.
- **Simona:** “Ma che centra!”
- **Prof:** “E’ sbagliato ma centra!”.
- **Ester:** ““a” è un incognita quindi deve essere sostituito con un numero che non supera il 92, quindi per esempio “a-4” se noi mettiamo un numero che sottratto ad a-4 poi sommato con tutta la colonna dobbiamo trovare il massimo numero che sia 92 e quindi vediamo se risulta. Stiamo cercando di sostituire “a” con un numero, però non più grande di 92”.
- **Irene:** “Ma se facciamo 16+5+9=30-4=26+92 (che è la “a”) e viene 26+92 ed ecco risultato il problema “a” è 92”.
- **Morena:** “Penso che: il numero deve essere per forza 92 perché sottratto con “a-4” dà –92 quindi è un numero minore di 92 e anche a-6 ed a-2 perché tutti i numeri sarebbero minori di 92”.

Validazione:

Parla Ester <u>Sanalitro</u>, portavoce del gruppo.
“Faccio parte del secondo gruppo e mi chiamo Sanalitro Ester, noi abbiamo risolto nel quadrato magico per prima cosa la terza riga orizzontale perché mancava un solo termine quindi dopo averla eseguita trovando 5 abbiamo continuato con la diagonale obliqua ed abbiamo trovato 3, in seguito abbiamo svolto la seconda colonna verticale trovando “a-4”, perché dovevamo mettere per forza la “a” dato che la somma è 26+a , abbiamo sottratto da “a” un numero che era quattro, perché la somma dava un numero maggiore di “26 +a”.
Poi abbiamo riflettuto, dopo aver completato il quadrato inserendo altri numeri, sul fatto di inserire nella tabella il 92 e siamo arrivati alla conclusione che dato che la “a” è un incognita, abbiamo provato a sostituirla con 92 sottraendola in questo caso con 4 viene un numero che è risultato più piccolo di 92 e quindi abbiamo fatto la stessa operazione con “a-2” ed “a-6” e vengono sempre numeri più piccoli di 92.
Poi abbiamo provato a fare anziché “a-4”; “a+4” ed abbiamo visto che il numero era maggiore di 92 e quindi non poteva risultare”.

<u>Componenti del gruppo:</u>
Ester Sanalitro, Jessica Giunta, Concetta Oste, Morena Costanzo, Serena Costa, Jessica Grisaffi, Gabriele Perra, Federica Guaietta, Irene Trommino