

Laboratorio di Matematica in classe: due nuove macchine per problemi nel continuo e nel discreto

Massimo Salvi & Pietro Milici
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo
E-mail: massimo.salvi@istruzione.it ; pietro.milici@unipa.it

Ricevuto in redazione il 3 Dicembre 2012

Abstract. In this work we will introduce two mathematical machines (originally invented by the authors) that can be useful in class during laboratorial activities. We decided to introduce them together because they appeared us complementary about the subtended contents, in fact one of them solves a discrete problem (diophantine equations) involving concepts as integers, divisibility, and in general discrete math, while the other machine (solving differential equations in a grapho-mechanical way) involves the complementary concepts of continuous math: curves, tangents, derivatives. In this paper we will just present the machines, deepening the ideas and the subtended mathematical contents, but we will not introduce didactical questions that will be treated in future works.

Riassunto. In questo lavoro vengono introdotte due macchine matematiche ideate dagli autori e potenzialmente utili ad essere sfruttate in classe in attività di laboratorio. Abbiamo deciso di introdurle assieme per una sorta di complementarità dei contenuti coinvolti, infatti una risolve un problema discreto (risoluzione di equazioni diofantee), coinvolgendo concetti relativi agli interi, alla divisibilità, alla matematica del discreto, mentre l'altra macchina (risolvendo grafo-meccanicamente equazioni differenziali) coinvolge i concetti complementari della matematica del continuo: curve, tangenti, derivate. In questo articolo ci limitiamo alla presentazione delle macchine, entrando nel dettaglio delle idee e dei concetti matematici che ne stanno alla base, senza però introdurre alcune questioni didattiche che dovranno essere approfondite in successivi lavori anche sperimentali.

1. Introduzione

In questo lavoro vengono introdotte due macchine ideate dagli autori e potenzialmente utili ad essere sfruttate in classe in attività di laboratorio di matematica. Perché due macchine? Intanto per una sorta di complementarità dei contenuti coinvolti, infatti una risolve un problema discreto e coinvolge concetti relativi agli interi, alla divisibilità, alla matematica del discreto, l'altra coinvolge i concetti complementari della matematica del continuo: curve, tangenti, derivate ed equazioni differenziali. Tuttavia, a nostro avviso tale complementarità non è riducibile ad una mera questione di contenuti ma coinvolge le differenti modalità di apprendimento e di argomentazione che possono favorire. In particolare la macchina ideata da uno degli autori (Milici) coinvolge aspetti cinematici (movimenti della macchina) e cinestesici (movimenti del corpo di chi la usa), che hanno a che fare con il cosiddetto "embodiment" (Radford et al., 2005), (Radford et al., 2004) e che possono fungere da metafore per i relativi concetti matematici e che possono avviare ed agevolare il loro apprendimento. D'altra parte se l'intuitività di certi artefatti matematici ne può facilitare lo studio, non sempre rende cogente la dimostrazione, che può restare in secondo piano di fronte all'evidenza, (se 'si vede' si potrebbe non sentire la necessità di dimostrare) e qua entra in gioco un'altra caratteristica che possono avere gli artefatti e di cui è esempio la seconda macchina di seguito presentata e ideata da uno degli autori (Salvi). Il funzionamento di questa macchina appare infatti meno intuitivo, meno legato alla fisicità del movimento e a nozioni comuni e pare rendere più cogente una dimostrazione. In entrambi i casi è presente molta matematica incorporata che può essere "letta" dagli studenti con la guida dell'insegnante. Le due macchine potrebbero quindi servire a stimolare e sviluppare diverse modalità di apprendimento e di argomentazione, ed offrire all'insegnante modalità differenziate e specifiche per il ricorso sia all'intuizione che al ragionamento rigoroso.

Recenti studi hanno messo in evidenza un effetto specifico di certi artefatti sull'apprendimento di concetti/idee matematiche, dovuto alle caratteristiche degli artefatti stessi, ad esempio si sono studiati gli effetti di un particolare gioco da tavolo sulla comprensione dei numeri da parte dei giocatori che lo hanno utilizzato (Siegler & Ramani, 2009): da parte nostra ci proponiamo di approfondire le modalità con le quali

le macchine qui presentate possono influire sugli apprendimenti dei concetti matematici che incorporano nei prossimi lavori. Ci proponiamo pure di approfondire i possibili legami che potrebbero esserci fra le potenzialità di simili artefatti, i quali paiono poter mobilitare in differente misura intuizione ed argomentazione rigorosa, e la doppia modalità di funzionamento (intuitivo/implicito e astratto/esplicito) della mente umana che sta emergendo dagli studi in scienze cognitive, e che va sotto il nome di *dual-process theory* (Evans, 2003), (Alter et al., 2007).

In questo articolo ci limitiamo alla presentazione di due macchine, entrando nel dettaglio delle idee e dei concetti matematici che ne stanno alla base, senza introdurre alcune questioni didattiche che dovranno essere approfondite in successivi lavori anche sperimentali.

2. Macchine per equazioni differenziali (di Pietro Milici)

La prima macchina che presentiamo funziona a valori continui, infatti traccia una curva che, per i vincoli fisici sottostanti, può essere interpretata come la soluzione di un'equazione differenziale. Tale approccio grafo-meccanico non è nuovo, e il comportamento di questa tipologia di macchine è quello che storicamente prende il nome di *movimento trazionale*, in quanto il movimento nei primi esempi storici era dovuto ad una *trazione*, come visibile in figura 1 (per approfondimenti storici vedi (Tournès, 2009)).

2.1. Risoluzione grafo-meccanica di problemi differenziali

Storicamente il problema di trovare le proprietà della tangente a una data curva è un classico problema greco ("problema *diretto* della tangente"), ma è stato solo nel XVII secolo che si è sviluppato il "problema *inverso* della tangente", ossia il problema di trovare una curva una volta date le proprietà che la sua tangente deve rispettare. L'idea principale è il fatto che la tangente in un punto non deve necessariamente essere definita solo dopo che la curva è data, ma è invece possibile disegnare la curva grazie ai vincoli derivanti dal porre le proprietà della tangente: storicamente il primo esempio di tali curve è la *trattrice*, generata tirando un filo alla cui estremità è legato un corpo pesante (vedi figura 1). Il *movimento trazionale* è la risposta grafo-meccanica a tali problematiche.

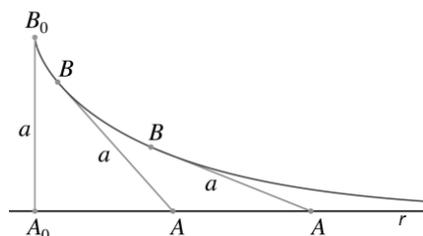


Figura 1. Consideriamo su un piano orizzontale un corpo pesante B (soggetto all'attrito del piano) legato ad un filo a (idealmente senza peso e senza attrito), e immaginiamo di tirare l'altra estremità di a , il punto A , lungo una retta r tracciata sul piano. Per l'attrito col piano, il corpo B offrirà resistenza alla trazione della corda: tirando lentamente A in modo da poter trascurare l'inerzia acquisita la B , la curva descritta dal corpo pesante è chiamata *trattrice*. E' da notare come per la costruzione della curva sia fondamentale il fatto che il filo a sia sempre tangente alla curva.

Per quello che ci riguarda, volendo meccanicamente "gestire" la tangente, consideriamo un disco (che chiameremo *ruota*) che rotola senza strisciare su un piano (detto *base*): chiamando *direzione della ruota* la retta generata dall'intersezione tra il piano del disco e la *base*, la *direzione della ruota* sarà sempre tangente alla curva tracciata dal punto di contatto del disco quando esso rotola (figura 2). Pertanto se imponiamo delle condizioni alla *direzione della ruota* possiamo costruire una curva una volta fissate le proprietà che la sua tangente deve rispettare.

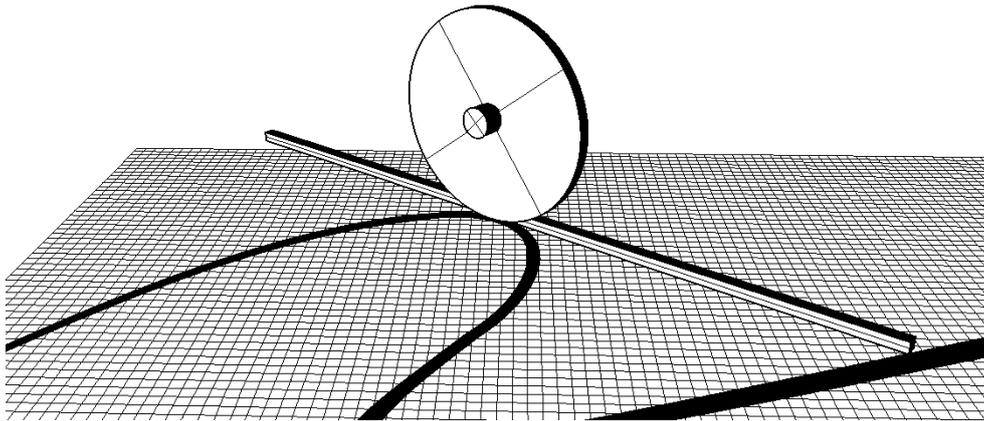


Figura 2. Un disco che rotola seguendo una qualsiasi curva regolare ha la proprietà di avere la propria *direzione* (in figura rappresentata da un'asta) tangente alla curva stessa.

Vediamo adesso come porre condizioni alla *direzione della ruota* per costruire una specifica famiglia di curve al variare di due parametri reali (k e α). Come visibile in figura 3, consideriamo due punti P e Q che si muovono sulla retta r mantenendo fissa la distanza $PQ=k$. Inoltre consideriamo un punto S sulla retta perpendicolare ad r e passante per P , e poniamo in S una ruota la cui direzione d sia costantemente inclinata di un angolo α rispetto alla retta SQ . Al muovere del punto P su r la distanza SP aumenterà o diminuirà a seconda della direzione d , che infatti dovrà sempre essere tangente alla curva descritta da S . Vediamo in particolare quali sono le curve così costruite da S .

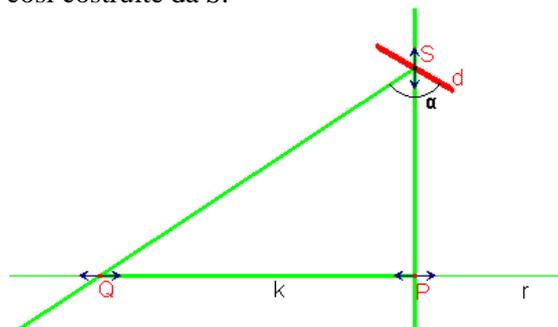


Figura 3. Schema della macchina al variare dei due parametri k (la distanza PQ) ed α (l'angolo di inclinazione tra la retta SQ e la direzione d della ruota incentrata in S , in figura rappresentata dal segmento rosso).

Adesso inquadrriamo in linguaggio analitico il comportamento della macchina, fino a ricavarne una formula (per fare questo prima di tutto considereremo la macchina su di un piano cartesiano per poi tradurre le proprietà della tangente in equazioni differenziali). Per semplificare la notazione prendiamo la retta r come ascissa del piano cartesiano, quindi il punto P avrà coordinate $(x;0)$, il punto Q avrà coordinate $(x-k;0)$ ed il punto S invece $(x;f(x))$: ora rimane solo da tradurre la proprietà che la tangente in S sia inclinata di un angolo α rispetto a SQ . Il coefficiente angolare della retta SQ sarà $SP/PQ=f(x)/k$, pertanto l'angolo SQP sarà $\arctg(f(x)/k)$, da cui si ha che l'angolazione di d sarà $\alpha + \arctg(f(x)/k)$. Considerando che l'inclinazione della tangente d in analitico si traduce con la derivata di $f(x)$ (ovvero l'ordinata del punto S), otteniamo l'equazione differenziale

$$f'(x) = \operatorname{tg}(\alpha + \arctg(f(x)/k)) \quad (*)$$

Per avere un'idea delle soluzioni di (*) dobbiamo prima di tutto notare che il parametro k provoca solo una "deformazione lineare" della curva, ovvero è sempre possibile applicare una trasformazione delle coordinate $x'=ax, y'=by$ in cui la trasformata di f soddisfi (*) nel caso particolare $k=1$. Per fare questo, una volta definito k , basta considerare $x'=kx, y'=y/k$: infatti se consideriamo la funzione g tale che $(x',g(x'))_{OXY'}$ coincida sul piano con la curva $(x,f(x))_{OXY}$, abbiamo $g(x)=f(kx)/k$ per cui vale $g'(x)=\operatorname{tg}(\alpha + \arctg(g(x)))$. Inoltre, avendo la funzione tg periodo π , otterremo periodicamente la stessa (*) quando α varia di π : ecco perché in figura 4, per fare 4 esempi, α è fatto variare a step di $\pi/4$.

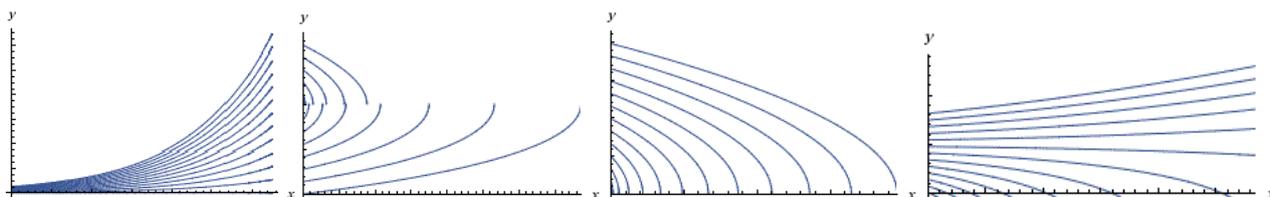


Figura 4. Andamento delle soluzioni di (*) al variare di α : da sinistra a destra $\alpha = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ (grafici realizzati col software Wolfram Alpha, <http://www.wolframalpha.com/>). Le differenti funzioni tracciate all'interno dello stesso grafico sono ottenute al variare delle condizioni iniziali.

2.2. Una nuova macchina trazionale

Con riferimento alla fotografia di figura 5, il prototipo realizzato si presenta come una tavola su cui scorre orizzontalmente (rispetto all'orientamento della figura) un telaio in legno. Nel telaio è libero di muoversi un cilindro d'ottone al cui interno gira una ruota perpendicolare al piano. La rotazione del cilindro è determinata dal passaggio di un'asta ad esso solidale per un perno la cui posizione è fissa sul telaio. Il meccanismo, per le sue proprietà meccaniche (in particolare l'angolazione fissa della ruota rispetto all'asta), definirà univocamente la traiettoria della ruota, che descriverà pertanto una curva.

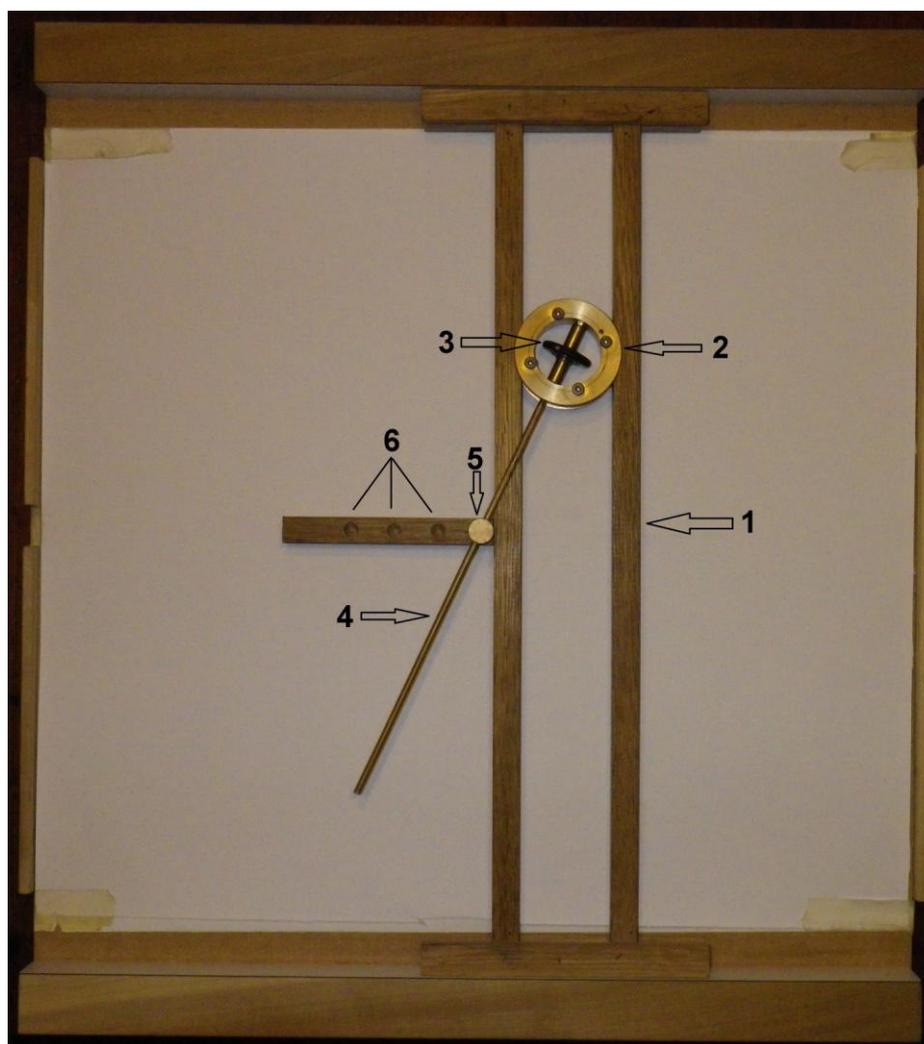


Figura 5. Prototipo in legno della macchina matematica. Legenda della figura:

- | | | |
|----------------------------------|---|--------------------------------------|
| 1- telaio in legno da traslare | 2- cilindro cavo in ottone | 3- ruota |
| 4- asta solidale al cilindro (2) | 5- perno attraverso cui scorre l'asta (4) | 6- fori su cui spostare il perno (5) |

Con riferimento alla legenda di figura 5, alla formula (*) e allo schema di figura 3, il parametro k viene impostato fisicamente spostando il perno (5) nei vari fori (6), mentre, focalizzandoci sul cilindro di ottone (2), possiamo notare come alla sua sommità siano presenti delle viti, che permettono di modificare l'angolazione α della ruota rispetto all'asta (in figura 5 $\alpha=\pi/2$). In particolare nel prototipo realizzato, siccome 4 viti equidistribuite permettono rotazioni di angoli retti, α può assumere solo valori 0 e $\pi/2$ (vedi figura 6).

Nel caso $\alpha=0$ la formula (*) diventa $f'(x) = \text{tg}(\arctg(f(x)/k)) = f(x)/k$, che pertanto è risolta dalle funzioni esponenziali $f(x) = c \cdot e^{(x/k)}$, in cui la costante c è definita dalla condizione iniziale (la condizione iniziale fisicamente vuol dire il punto (x,y) in cui si trova la ruota quando il telaio viene posto sulla tavola, ovvero quando la ruota, iniziando a rotolare, pone la condizione differenziale evitando il movimento trasversale).

Nel caso $\alpha=\pi/2$ invece la formula (*) diventa $f'(x) = \text{tg}(\pi/2 + \arctg(f(x)/k))$. Considerando la formula per la somma interna alla tangente $\text{tg}(a+b) = (\text{tg}(a) + \text{tg}(b)) / (1 - \text{tg}(a)\text{tg}(b))$, se facciamo $\lim_{a \rightarrow \pi/2} (\text{tg}(a) + f(x)/k) / (1 - \text{tg}(a) \cdot f(x)/k)$ otteniamo $f'(x) = -k/f(x)$. Pertanto le soluzioni sono $\pm \sqrt{2} \sqrt{c - kx}$ (dove c dipende dalla condizione iniziale).

Riassumendo quindi la macchina permette di costruire delle funzioni esponenziali per $\alpha=0$ (limitatamente a tale caso opportune macchine trazionali erano già state ideate, con piccole variazioni tecniche, nel 1706 da Perks e nel 1728 da Poleni) e parabole per $\alpha=\pi/2$.

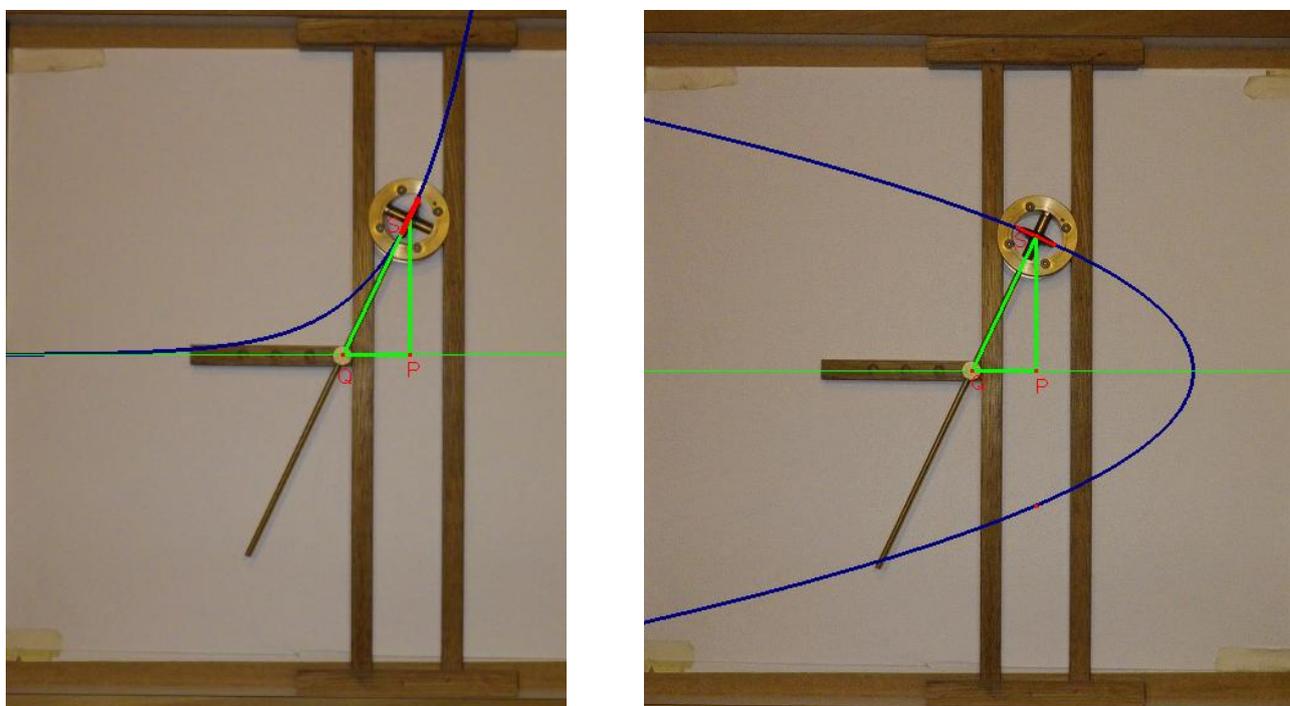


Figura 6. La macchina e le curve generate rispettivamente nel caso di $\alpha=0$ (sinistra) e $\alpha=\pi/2$ (destra).

Tale macchina, proseguendo la proposta didattica di un uso laboratoriale di *strumenti trazionali* (Di Paola & Milici, in press), si propone come un artefatto il cui utilizzo può aiutare nell'introdurre "concretamente" concetti coinvolti nei problemi differenziali (tangente, funzione, parametro, derivata, equazioni differenziali) e facilitare un passaggio tra registri (concreto/meccanico, geometrico, analitico) per gli studenti delle scuole secondarie superiori, sia per coloro che ancora devono venire in contatto con questi problemi (per farsi una prima idea intuitiva) sia per quelli che hanno già affrontato in maniera formale le tematiche del calcolo infinitesimale (per consolidare con esperienze sensibili la parte teorica).

In particolare questa macchina permette percorsi sia di esplorazione (dal concreto alla matematica) che di costruzione (dalla matematica al concreto: come si deve comporre l'artefatto per tracciare una determinata curva?).

Inoltre, riguardo al moderno utilizzo di macchine "trazionali" sono da citare i recenti lavori sul "compasso logaritmico" (Milici & Dawson, 2012), che include ed estende riga e compasso, ed infine per una re-interpretazione delle potenzialità costruttive del metodo trazionale in termini di computazione analogica si possono vedere i lavori (Milici, 2012a; 2012b).

3. Una equazione diofantea lineare (di Massimo Salvi)

La seconda macchina che presentiamo permette di trovare due soluzioni particolari di un classico problema di teoria dei numeri, l'equazione diofantea $ax - by = \pm 1$. E' noto ai matematici occidentali almeno a partire dal '600 che condizione necessaria e sufficiente affinché sia risolvibile in Z è che i coefficienti interi a e b siano primi fra loro, risultato noto anche come identità di Bachet-Bezout (Bachet, 1884; Bezout, 1779). E' anche noto che le soluzioni, quando esistono, sono infinite (Olds, 1963). I metodi di risoluzione che si trovano in letteratura sono quello di Eulero, che si fonda sull'algorithm euclideo di ricerca del massimo divisore comune e quello basato sullo sviluppo di frazioni continue (Davenport, 1994).

Nel seguito mostreremo una caratterizzazione geometrica di due particolari soluzioni, viste come coordinate di due punti nel piano, un punto $S_1(x_0; y_0)$ per il valore 1 dell'equazione e l'altro $S_2(x'_0; y'_0)$ per il valore -1 . Mostreremo che tali punti hanno una caratteristica geometrica interessante (Teorema 1) e che i punti $O(0;0)$, $P(a;b)$, $S_1(x_0; y_0)$, $S_2(x'_0; y'_0)$ formano un parallelogramma con area 1 (Teorema 2).

Nella parte finale si mostrerà come tale caratteristica geometrica si presti ad una realizzazione concreta (macchina matematica) che può avere una utilità didattica.

3.1. Due teoremi geometrici sulle soluzioni di $ax - by = \pm 1$

Dati due interi a e b primi fra loro, consideriamo nel piano cartesiano il rettangolo di vertici $O(0;0)$, $Q(0;b)$, $P(a;b)$, $R(a;0)$, ed indichiamo con M l'insieme dei punti con coordinate intere di tale rettangolo e che giacciono al di sopra del segmento (diagonale) OP . Analogamente possiamo indicare con m l'insieme dei punti che stanno al di sotto (Fig.7). Dato che a e b sono primi fra loro gli unici punti del rettangolo a coordinate intere che giacciono sul segmento OP sono O e P . Fra i punti di M consideriamo il punto p il cui segmento Op ha il coefficiente angolare minore, se ci sono più punti con lo stesso coefficiente, tali punti giacciono sulla stessa retta, scegliamo il punto che è più vicino ad O , indichiamo tale punto con $S_1(x_0; y_0)$. Analogamente procediamo con i punti dell'insieme m , considerando in questo caso il punto p' per il quale il segmento Op' ha il coefficiente angolare maggiore, se ci sono più punti scegliamo quello più vicino ad O e indichiamo tale punto con $S_2(x'_0; y'_0)$.

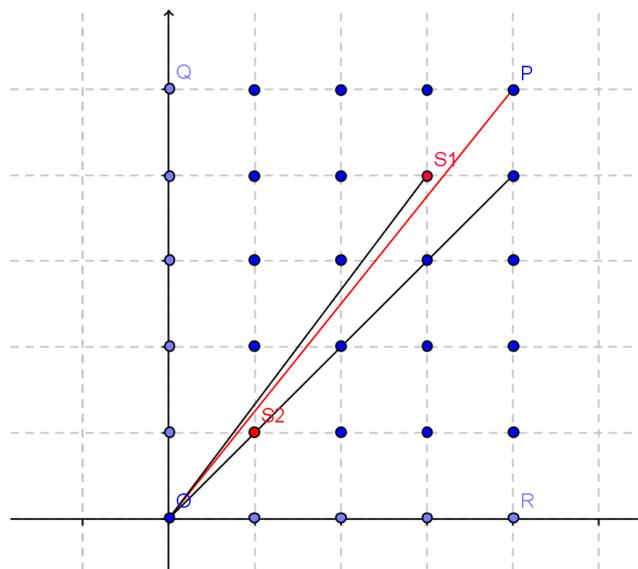


Figura 7

Si può dimostrare che il punto $S_1(x_0; y_0)$ è legato ad una soluzione intera dell'equazione $ax - by = 1$, in particolare si ha che $ay_0 - bx_0 = 1$. Analogamente per il punto $S_2(x'_0; y'_0)$ si avrà $ay'_0 - bx'_0 = -1$. Vale quindi il seguente:

Teorema 1: *Due soluzioni dell'equazione $ax - by = \pm 1$, dove a e b sono relativamente primi, sono associati a punti con coordinate intere $S_1(x_0; y_0)$ e $S_2(x'_0; y'_0)$ i quali, all'interno del rettangolo $OQPR$, escludendo P e O , (Fig. 7) formano con il punto O un segmento la cui pendenza è, rispettivamente, minima per i punti del rettangolo al di sopra del segmento OP (per l'equazione $ay_0 - bx_0 = 1$) e massima per i punti del rettangolo al di sotto del segmento OP (per l'equazione $ay'_0 - bx'_0 = -1$). Le coordinate di tali punti soddisfano le equazioni: $ay_0 - bx_0 = 1$ e $ay'_0 - bx'_0 = -1$*

Si può dimostrare che all'interno del rettangolo $OQPR$ le soluzioni legate ai punti $S_1(x_0; y_0)$ ed $S_2(x'_0; y'_0)$ sono le sole a soddisfare l'equazione $ax - by = \pm 1$, ovvero non ci sono altri punti che portino ad altre soluzioni. Inoltre si può dimostrare che vale il seguente :

Teorema 2: *data l'equazione $ax - by = \pm 1$, dove a e b sono primi fra loro, esistono all'interno del rettangolo $OQPR$ (Fig. 7) due punti $S_1(x_0; y_0)$ e $S_2(x'_0; y'_0)$ associati a soluzioni dell'equazione (Teorema 1) che formano con i punti O e P un parallelogramma di superficie 1.*

Senza entrare nei dettagli delle dimostrazioni, che possono essere trovati in (Salvi, 2013), possiamo dire che sono molte le possibilità per la scelta dei contenuti da affrontare con alunni delle superiori che, a discrezione dell'insegnante, potranno comprendere la geometria analitica (retta, distanza punto-retta, interpretazione geometrica del determinante), l'aritmetica (teorema fondamentale dell'aritmetica, riduzione delle frazioni, identità di Bachet-Bezout) ed anche la formula di Pick, la quale, pur non facendo parte dei programmi ministeriali, può rappresentare un interessante complemento utile anche per l'uso della dimostrazione per induzione in geometria.

3.2. Una macchina per uso didattico

Quanto visto nel paragrafo precedente consente la realizzazione di una macchina che viene schematizzata in Fig. 8. L'idea di utilizzare fili e chiodi per caratterizzare “fisicamente” i punti a coordinate intere è presente in Klein (Olds, 1963, pag.91) ma l'esempio di Klein si riferisce ad una rappresentazione delle ridotte di una frazione continua ed è diverso da quello qui discusso,

In Fig.8 i punti a coordinate discrete sono occupati da sottili asticelle (ad esempio chiodi sottili o spilli) fissati su una base rigida (es. legno), nell'origine O viene posto il capo di un sottile filo metallico (o di un elastico) la cui seconda estremità viene fissata nel punto P di coordinate fissate dalla particolare equazione che si vuole risolvere. Evidentemente la quantità di punti che è presente limita i coefficienti dell'equazione, ma lo scopo della macchina è dichiaratamente solo di tipo didattico e quindi tale limitazione non rappresenta un problema. In sostanza si tratta di un geopiano del tipo ideato da Gattegno (Gattegno, 1954) che di solito viene utilizzato come sussidio didattico per l'insegnamento della geometria a livello elementare e medio (Castelnuovo & Barra, 1976), che qui viene modificato con l'aggiunta di una numerazione ai due lati che fungono da assi cartesiani, ed usato per risolvere un problema di aritmetica superiore.

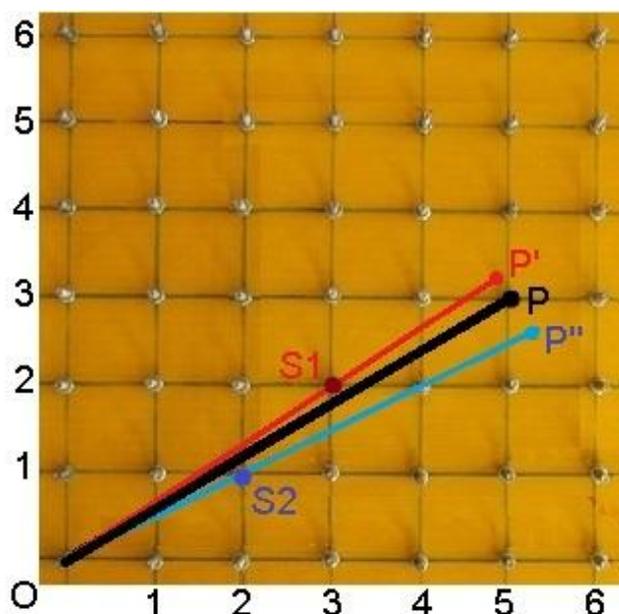


Figura 8

Il funzionamento è il seguente: se l'equazione da risolvere è, come nell'esempio della figura, $5x - 3y = \pm 1$, consideriamo il punto P di coordinate (5;3), si fissa un capo del filo in P e, tenendo teso il filo, lo si sposta in senso antiorario verso P' fino a quando il filo incontra il primo chiodo in S1, che in questo caso è il punto (3;2) poi in senso orario fino a quando incontra S2, in questo caso con coordinate (2;1). Se il filo incontra più chiodi allineati si considera quello più vicino all'origine. Le coordinate di tali punti forniscono due soluzioni particolari. Nell'esempio si verifica infatti che $5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1$ e $5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -1$. Infatti i punti S1 ed S2 che il filo incontra durante lo spostamento descritto soddisfano la condizione rispettivamente di minimo e massimo coefficiente angolare, discussa nella parte 2 del paragrafo precedente (Teorema 1). Questo dipende dal fatto, facilmente verificabile, che durante il suo spostamento il filo non incontrerà punti a coordinate intere prima di incontrare S1 ed S2, dato che i punti P' e P'' sono sempre all'interno dei quadrati adiacenti il punto P (precisamente quello in alto a sinistra e quello in basso a destra del punto P). Tutte le soluzioni dell'equazione di partenza si ottengono, come noto, aggiungendo un numero intero di volte il vettore (a,b), in questo caso (5,3) alle soluzioni particolari.

Riteniamo che questa macchina (o una simile) possa essere utilmente costruita e studiata da studenti di scuola superiore assieme ai docenti dato che la matematica coinvolta, come si è visto, è alla loro portata anche se in certi punti va anche al di là di quanto previsto dai programmi ministeriali (es. formula di Pick o le stesse equazioni diofantee). Riteniamo tuttavia che questo possa rappresentare una bella opportunità per introdurre già nelle superiori alcuni concetti di matematica discreta che sono da diversi anni utilizzati in applicazioni pratiche importanti.

4. Conclusioni

Da quanto esposto siamo convinti che le macchine presentate possano svolgere un utile ruolo didattico, con la guida dell'insegnante, nelle classi delle scuole superiori e ai primi anni di università. Analogamente a quanto è stato proposto e studiato per altre macchine matematiche presenti nella storia, che sono state rivalutate modernamente a fini didattici (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006), crediamo che tale fine possa essere perseguito anche con macchine originali (nuove), che non hanno necessariamente un antecedente noto nella storia.

Siamo consapevoli della complessità che portano con sé tali artefatti matematici e intendiamo approfondirli con ulteriori studi che si muovano sia sul fronte storico-epistemologico che su quello della sperimentazione critica e consapevole in aula. In questo senso questo contributo vuole essere solo una presentazione di due possibili macchine che consentono percorsi ricchi di contenuti (pensiamo di averlo mostrato) e potenzialmente coinvolgenti (ce lo auguriamo). Le ulteriori ricerche sul campo dovranno chiarire l'efficacia sugli apprendimenti degli alunni e il ruolo dell'insegnante, per non limitarsi a proporre una didattica di tipo A, ma puntando piuttosto verso una didattica di tipo B (adottando la definizione di D'Amore (D'amore,

1999)). Riteniamo che per sfruttare le potenzialità didattiche di questi e di altri artefatti si debba tenere conto di tutti gli aspetti coinvolti nella relazione di insegnamento-apprendimento. In particolare potremo fare riferimento al quadro teorico introdotto da Bussi e Mariotti (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) che inquadra la relazione di insegnamento-apprendimento con artefatti matematici in una visione vygotskiana, nella quale gioca un ruolo fondamentale anche l'insegnante come mediatore che guida la trasformazione dei segni situati prodotti dagli studenti in segni matematici. Come la ricerca in Didattica della Matematica ha mostrato, non è certamente sufficiente l'utilizzo di un qualunque artefatto di per se a garantire l'apprendimento di contenuti matematici ma va considerato anche il ruolo dell'interazione con l'insegnante ed i pari. In questa ottica alcune delle future indagini potranno essere finalizzate a studiare il *potenziale semiotico* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2005) delle due macchine ed il ruolo dell'insegnante.

Riferimenti

Alter, A.L., Oppenheimer, D.M., Eyre, R.N. & Epley, N. (2007), Overcoming Intuition: Metacognitive Difficulty Activates Analytic Reasoning, *Journal of Experimental Psychology: Vol.136, N° 4, 569-576*

Bachet, Claude-Gaspar, sieur de Méziriac (1581-1638), *Problèmes plaisants & délectables qui se font par les nombres* ; cinquième édition revue, simplifiée et augmentée par A. Labosne, Paris : Gauthier-Villars, 1884

Bartolini Bussi, M.G. & Mariotti, M.A. (2008), Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifact and signs after a Vygotskian perspective. In *English e al. (Eds.) Handbook of International Research in Mathematics Education (pp.746-783). New York and London, Routledge*

Bartolini Bussi, M.G. & Mariotti M.A. (2005), Mediazione semiotica nella didattica della matematica : artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij, *Studio realizzato nell'ambito del progetto PRIN2005 Significati , congetture, dimostrazioni: dalle ricerche di base in didattica della matematica alle implicazioni curricolari, Unità di Ricerca di Modena e Reggio Emilia e Siena.*

Bartolini Bussi, M. G. & Maschietto M.(2006), *Macchine matematiche : dalla storia alla scuola*, Springer

Bezout, E. (1779), *Théorie générale des équations algébriques*

Castelnuovo E. & Barra M. (1976), *Matematica nella realtà*, Bollati Boringhieri

D'Amore, B. (1999), *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora Editrice-Bologna

Davenport, H. (1994), *Aritmetica superiore: un'introduzione alla teoria dei numeri*, Zanichelli

Di Paola, B. and Milici, P. (in press), Geometrical-mechanical artefacts mediating tangent meaning: the tangentograph, *Acta Didactica Universitatis Comenianae*.

Evans, J.S.B.T. (2003). In two minds: Dual process accounts of reasoning. *Trends in Cognitive Sciences*, 7, 454-459. doi: 10.1016/j.tics.2003.08.012

Gattegno, C. (1954), The Gattegno Geoboards, in *Bulletin of the Association for Teaching Aids in Mathematics*, N°.3

Milici, P. (2012a), Tractional Motion Machines: tangent-managing planar mechanisms as analog computers and educational artifacts. In *Unconventional Computation and Natural Computation, Lecture Notes in Computer Science* , Volume 7445, 2012, pp 164-173.

Milici, P. (2012b), Tractional Motion Machines extend GPAC-generable functions, *International Journal of Unconventional Computing*, Vol. 8, n. 3, pp 221-233.

Milici, P. and Dawson, R. (2012), The Equiangular Compass, *The Mathematical Intelligencer*, DOI: 10.1007/s00283-012-9308-x.

Olds, C.D. (1968), *Frazioni continue*, Zanichelli

Radford L., Demers S., Guzman J., Cerulli M, (2004), The sensual and the conceptual: artefact-mediated kinesthetic actions and semiotic activity, in *M.J.Hoines and A.B.Fuglestad (eds.), Proceedings of the 28 Conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME 28), Vol.4,pp. 73-80, Norway:Bergen University College*

Radford L., Bardini C., Sabena C., Diallo P., Simbagoye A. (2005), On embodiment, artifacts and signs:a semiotic-cultural perspective on mathematical thinking, in *Chick H.L. & Vincent J.L. (eds.). Proceedings of the 29 Conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME 29), Vol.4,pp. 113-120, Melbourne:PME*

Salvi, M. (2013) (submitted), Una dimostrazione geometrica dell'identità di Bachet-Bezout, *Archimede*

Siegler R.S. & Ramani G. B. (2009), Playing Linear Number Board Games-But Not Circular Ones-Improves Low-Income Preschooler' Numerical Understanding, *Journal of Educational Psychology*, Vol.101, N°3, 545-560

Tournès, D. (2009), *La construction tractionnelle des equations differentielles*, Paris: Blanchard.