

¿Qué dicen los docentes, futuros docentes y formadores de docentes sobre su formación en didáctica de la geometría 3d?

Natalia Sgreccia¹, Tulio Amaya de Armas² y Marta Massa³

¹Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Argentina. sgreccia@fceia.unr.edu.ar

²Facultad Educación y Ciencias de la Universidad de Sucre. Colombia. tulio031964@yahoo.es

³Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario. Argentina. mmassa@fceia.unr.edu.ar

Resumen. Se presenta un estudio comparativo sobre la formación de profesores de Matemática en relación a geometría del espacio y su didáctica entre diversos actores pedagógicos involucrados en la enseñanza de la geometría: docentes en ejercicio en la escuela secundaria, estudiantes avanzados de carreras de grado en Educación Matemática y quienes forman profesores de Matemática en instituciones especializadas. Se lo complementa con el análisis de semejanzas y diferencias en dos grupos de Argentina y Colombia, como parte de un trabajo colaborativo que se viene desarrollando con la intención de identificar algunos rasgos prototípicos sobre geometría del espacio y su didáctica en la formación de profesores en estos dos países. En la indagación se aplicaron distintas técnicas de recolección de la información (historia de vida, grupos enfocados y entrevistas).

Abstract. We present a comparative study about the training of Mathematics teachers regarding to tridimensional geometry and its didactics between different pedagogical actors involved in the teaching of the geometry: teachers of Mathematics who are working in secondary schools nowadays, advanced students of degree careers of Mathematics Education and those that train teachers of Mathematics in specialized institutions. We complement the research with a study of similarities and differences in two groups from Argentina and Colombia, as part of a collaborative work that has been developed with the intention of identifying some prototypes features about tridimensional geometry and its didactics in the training teachers in these countries. We applied different techniques (history of life, focus groups and interviews) to gather information.

MSC: 97C70.

1. Introducción

Numerosas aplicaciones actuales de la Matemática, muchas de ellas vinculadas con los desarrollos tecnológicos, requieren conocimiento geométrico sustantivo (Jones, 2002; Jones & Mooney, 2003; Lindgren & Schwartz, 2009; Ramadas, 2009a,b; Sorby, 2009). Así puede mencionarse situaciones vinculadas con el diseño computarizado, la robótica, las imágenes de diagnóstico médico, la animación computarizada y las presentaciones visuales. Disciplinas tales como química, física de materiales, biología, sistemas de información geográfica y en numerosos campos de la ingeniería, se recurre al modelado geométrico, especialmente tridimensional (3d) (Whitely 1999, citado en Jones, 2002). Liedtke et al. (1995) identifican una gran demanda de modelos 3d de objetos reales en situaciones de desarrollo de vuelos, simuladores, películas, planeamiento de paisaje, así como en la publicidad y la educación. De acuerdo con Jones (2002), los nuevos desarrollos en tecnología computacional hacen que, en este siglo, el pensamiento espacial, la visualización y la interpretación de información visual sean de vital importancia.

En el contexto educativo, la geometría es una de las áreas básicas para el desarrollo del pensamiento espacial y la visualización, que se potencian aún más al ser integrada para una construcción conceptual con la tecnología computacional. El desarrollo de la intuición espacial requiere habilidad para operar mentalmente con imágenes e inferir a partir de ellas. Además, compartir las imágenes visuales personales puede ayudar a desarrollar habilidades de comunicación y a concientizar a los estudiantes de las diversas interpretaciones que pueden darse de una imagen o una descripción, ya que la percepción del espacio y la forma no es tan directa (Fermüller et al., 1997).

Sin embargo, varios estudios evidencian que los docentes tienden a no enseñar Geometría, si bien figura en currículas de escuelas primarias y secundarias, por desconocimiento tanto de sus aspectos disciplinares como de su importancia (Báez & Iglesias, 2007; Gómez & Núñez, 2009). Si se la aborda, queda restringida al reconocimiento de nombres (Tavío & Méndez, 2006) o se limita a la geometría bidimensional (2d) (Moore-Russo & Schroeder, 2007).

Barrantes & Blanco (2006) llaman la atención sobre la pobre formación en geometría que ha tenido la mayoría de los profesores jóvenes, tanto en su escolaridad primaria y secundaria como en el Profesorado. Incluso, cuando la han tenido, el foco estuvo corrido hacia el álgebra y la medida (Banchoff, 2008). Jones (2000) destaca la importancia de la formación geométrica de los profesores y de la manera en que la aprendieron y señala que es inútil esperar que los docentes enseñen geometría de manera competente si han estudiado poca geometría (Jones, 2002). Esto se acentúa si la recuerdan como una parte difícil de la Matemática a la que se le dedicaba poco tiempo hacia el final del curso, con poco tratamiento en los libros de texto e importancia minimizada frente a lo algebraico (Blanco & Barrantes, 2003). Las propias experiencias escolares han participado fuertemente en la manera de organizar el conocimiento (Llinares, 2002), de conformar creencias y concepciones acerca de la Geometría, en especial, de la 3d. Esto influye fuertemente en las prácticas en clase de los docentes (Blanco & Barrantes, 2003; Cnop & Grandsard, 2004).

Gómez-Chacón (2006) advierte que la complejidad de las situaciones de aula, en las que los profesores noveles de escuela secundaria deben actuar, no se corresponde con la formación inicial recibida. De allí que la cuestionen al no ser capaces de enfrentar los desafíos educativos actuales (Fiorentini, 2007; Gómez Alfonso, 2006).

La formación de profesores para la enseñanza secundaria es una actual temática relevante en la Educación Matemática (Gómez & Lupiáñez, 2007; Lapostelle & Chevaillier, 2009; Rico Romero, 2004), en especial en Latinoamérica donde las reformas educativas han puesto de manifiesto necesidades y dificultades para su implementación (Borba, 2006; Esteve, 2009).

Jaworski (2008) propone mantener actualizada la formación inicial del profesor mediante un trabajo conjunto entre formadores de docentes y docentes en ejercicio. Serres Voisin (2007) reconoce la importancia del trabajo conjunto entre colegas en las instituciones para concretar acciones coherentes que mejoren la calidad educativa. Fiorentini (2007) destaca el papel de las prácticas colaborativas para la producción y el desarrollo de saberes y la construcción de una identidad profesional. En su larga práctica coordinando grupos colaborativos entre docentes en ejercicio, futuros docentes y formadores de docentes evidenció que, para problematizar o transformar el ideario y los saberes del profesor, no basta con promover sólo reflexiones sobre aspectos generales del proceso educativo en Matemática. Se requiere analizar las prácticas cotidianas para reconocer verdades cristalizadas por la tradición pedagógica, percibir lo diferente y la posibilidad de ruptura con lo establecido a partir del encuentro de docentes de instituciones diferentes -universidades y escuelas-, conformando una comunidad de profesores de Matemática. Esto permite analizar la articulación teoría-práctica en la formación de profesores de Matemática y actuar sobre ella, evitando la creación de parámetros de racionalidad teórica que no se corresponden con la práctica (Schön, 1993).

En este artículo se presenta un estudio comparativo entre diversos actores pedagógicos involucrados en la enseñanza de la geometría en Argentina y Colombia, como parte de un trabajo colaborativo que se viene desarrollando a fin de identificar algunos rasgos prototípicos sobre geometría del espacio y su didáctica en la formación de profesores en estos dos países.

2. Breve estado de situación de la enseñanza de la geometría 3d

Como una consecuencia del movimiento de renovación bourbakista (Matemática Moderna) la geometría elemental y la intuición espacial quedaron relegadas en su espacio formativo. Al respecto Freudenthal (1964) señalaba que, en los programas universitarios de todo el mundo, la palabra geometría era apenas mencionada y los mismos geómetras evitaban el término por parecerles fuera de moda. Esto afectó a las personas formadas en aquellos años, particularmente a quienes se desempeñarían como profesores.

En el Tercer Congreso Internacional sobre Educación Matemática (ICME 3), realizado en 1976, Atyiah propició el regreso de la geometría a su status de objetivo prioritario de enseñanza. Manifestó la necesidad de generar nuevas formas de enseñarla haciendo de la intuición geométrica un soporte poderoso para la comprensión (Castelnuovo, 1997).

La enseñanza de la geometría ha sido objeto de discusión en los últimos cuarenta años en relación al lugar dado a la dualidad empírico-teórica (Laborde et al., 2006). En varios países de Latinoamérica se pueden identificar tres grandes momentos en su enseñanza en la escuela secundaria: en las décadas 1950 y 1960, primó un tratamiento basado en enunciado, demostración y resolución de problemas específicos; en las décadas 1970 y 1980 fue prácticamente excluida y en el período 1990 - 2000, se la incorpora como motivación en relación con problemas concretos. En estudios previos (Sgreccia, 2008) se ha identificado en Argentina, como consecuencia de ello, una tensión entre la formación de los profesores en ejercicio - realizada en los dos primeros momentos mencionados- y las características actuales de las demandas sobre la enseñanza de la geometría.

Broitman & Itzcovich (2008), de Argentina, y Perry et al. (2008), de Colombia, manifestaron su preocupación por la escasa presencia de la geometría en la escuela, limitada al reconocimiento de los objetos geométricos y sus propiedades, sin dar oportunidad para que los alumnos construyan su significado a través de la resolución de problemas. Reconocieron la dificultad para instalar un enfoque que revierta esta situación debido a la escasez y falta de difusión de propuestas consistentes en este sentido.

Klieme et al. (2003) señalaron que los ítems de geometría de las pruebas TIMSS fueron los más difíciles para los alumnos, evidenciando su baja preparación frente a otros. Lehrer & Chazan (1998) sostuvieron que la geometría debería ser una parte importante de la Educación Matemática: un buen punto de partida para enseñar y aprender argumentación matemática, explorar conceptos y valorar esta ciencia como una parte de la cultura. Bartolini Bussi (2007) resaltó la relevancia matemática, cultural, cognitiva y social de las perspectivas espaciales como objeto de enseñanza.

Obara (2009) encontró que algunos estudiantes tienen dificultades con las actividades que involucran el sentido espacial porque no han tenido experiencias de análisis y exploración de objetos tridimensionales en su escolaridad básica. Precisamente, este resultado reitera lo que Sinclair (2003, citado en Fujita et al., 2004) había enunciado como uno de los problemas en educación geométrica: poca habilidad de los estudiantes para “ver” propiedades geométricas o decidir por dónde empezar cuando resuelven ejercicios de demostración.

Laborde (1994) advirtió que el alumno, al vivir cotidianamente en un espacio tridimensional, posee conocimientos espaciales implícitos antes de cualquier enseñanza, pero los mismos pueden ser parcialmente erróneos. En este sentido, hace un siglo Treutlien (1911, citado en Leung 2008) mencionaba que no es aconsejable el uso de objetos de la vida cotidiana para desarrollar las habilidades intuitivas espaciales, porque tales objetos podrían perturbar la concentración de los alumnos e, incluso, ellos podrían no reconocer las figuras geométricas en dichos objetos. Contrariamente, Banchoff (2008) sugirió diseñar material didáctico estimulante y específico para que los alumnos perciban el espacio.

Sharygin (2004) identificó la ubicación relativa de lo 2d y lo 3d como una de las mayores dificultades en las decisiones curriculares. Señaló una tensión que no ha podido resolverse: por un lado, desde lo epistemológico, la geometría 3d es primordial -el cuerpo sólido es el más importante objeto de las investigaciones geométricas- pero, por otro lado, en la teoría matemática, es más natural moverse desde lo 2d hacia lo 3d -la mayoría de los métodos en geometría 3d están basados en la reducción del problema a uno o varios de geometría 2d-.

Tavío & Méndez (2006) admitieron que la costumbre de trabajar en el aula sólo la geometría plana resentía la construcción del razonamiento sobre lo tridimensional. Reconocieron la conversión de lo tridimensional en bidimensional como uno de los inconvenientes más graves para aprender geometría. Según Senechal (2008), la geometría escolar ha estado dominada por los postulados, axiomas y teoremas de Euclides, atendiendo más a los aspectos lógicos que a los de orden psicológico. Algunos estudios (Alsina Catalá et al., 1995; Owens & Outhred, 2006) mostraron que los estudiantes pueden reconocer en el plano líneas paralelas y ángulos entre rectas, pero tienen dificultades en hacerlo en el espacio.

Además, la diversidad en el tamaño del espacio (micro, meso, macro, cosmo) a veces genera problemas en el aprendizaje de geometría, sobre todo cuando se limita el trabajo en el aula al meso-espacio, circunscripto al uso de los materiales manipulativos del espacio próximo, el banco y el cuaderno (Velásquez, 2006).

Gutiérrez (1996, citado en Owens & Outhred, 2006) advirtió que hay muchos estudios sobre las percepciones de los estudiantes de las formas bidimensionales, pero que hay pocos relativos a las tridimensionales. Schuster (1971) señaló la insuficiente atención prestada a los conceptos tri (o multi) dimensionales debido al sobre-énfasis puesto en la estructura axiomática.

En la actualidad en Argentina y en Colombia se evidencian comportamientos paradójicos en relación a la enseñanza de la geometría en las escuelas primarias y secundarias. Profesores, directivos y supervisores manifiestan preocupación porque, al ubicarse los contenidos geométricos al final de los programas, muchas veces no llegan a enseñarse por falta de tiempo. Sin embargo, estas mismas personas no los consideran prioritarios al evaluar y definir las condiciones para promocionar a sus alumnos (Broitman & Itzcovich, 2008; Perry et al., 2008). Tal paradoja se convierte en un correlato coherente si se considera que los encargados de decidir sobre la ubicación de geometría en la planificación anual son los mismos que evalúan a los estudiantes.

Barrantes & Blanco (2006) mostraron que, a pesar de los esfuerzos de investigadores por presentar nuevos métodos, recursos y materiales para la enseñanza de la geometría, la mayoría de los estudiantes de Profesorado continúa ingresando a los estudios superiores carente de conocimiento geométrico y con concepciones sesgadas sobre esta rama de la Matemática, como sus predecesores lo hicieron años atrás.

Particularmente Jones (2000) recalcó que muy pocos estudios le han prestado atención al conocimiento del profesor en geometría. La mayoría de los profesores noveles, y algunos experimentados, no están formados en geometría tanto desde lo disciplinar como en lo pedagógico. Para Jones (2002), enseñar bien geometría involucra entender los numerosos y variados usos de la geometría, poder reconocer problemas y teoremas geométricos interesantes, apreciar la historia y el contexto cultural de la geometría.

3. Marco teórico

Las *tendencias en la formación de profesores* en Matemática provienen de tres enfoques (Flores, 2007; Villella, 2001):

- *Tradicional*, que considera como un buen docente al que tiene adecuadas aptitudes personales innatas y que dispone de un alto dominio académico del contenido matemático que va a enseñar. Su perspectiva epistemológica es reduccionista, donde no se distingue la naturaleza del conocimiento disciplinar de la del profesional.
- *De racionalidad técnica*, que concibe al docente como un técnico que aplica los instrumentos aprendidos para gestionar con eficacia su enseñanza. El conocimiento así elaborado en las aulas se basa en los mismos supuestos epistemológicos de la Matemática que se aplican a su didáctica, sin considerar que ésta tiene otros referentes.
- *De progresión continua*, que entiende que la capacitación profesional comienza, pero no finaliza, en la formación inicial. La interacción entre la práctica y la teoría, así como el análisis de todos los referentes en los que se ejerce la profesión, se constituyen en aliados del proceso de formación. Combina una perspectiva crítica del desarrollo profesional, con una concepción integradora y compleja del saber profesional y una perspectiva constructivista de la organización y la elaboración de este saber.

Bass & Ball (2004) reconocen que las tareas del profesor de Matemática requieren de un conocimiento para enseñar que no suele ser enseñado en la carrera. Siguiendo la línea de Shulman (1986), Ball et al. (2008) identifican los siguientes *dominios de conocimiento matemático para enseñar*.

I. *Conocimiento común del contenido*: Comprende el conocimiento, las habilidades, el lenguaje matemático que poseen las personas que usan la Matemática en diversos ámbitos, no sólo de enseñanza. Los docentes necesitan disponer de muy buen dominio de estos contenidos que, por ejemplo, en geometría 3d les permitirá caracterizar los elementos de una pirámide; explicar por qué no existen prismas con una cantidad impar de vértices.

II. *Conocimiento en el horizonte matemático*: Comprende aquellos conocimientos que permiten adoptar una perspectiva sobre la manera en que los contenidos matemáticos se relacionan con otros en el currículum. Así ofrecen una visión para entender las conexiones entre nociones matemáticas que se presentarán más tarde, favoreciendo la toma de decisiones para dar respuesta a cuestiones relacionadas con la enseñanza, tales como: ¿Puede tener consecuencias matemáticas conflictivas algo que se ha dicho de manera explícita o implícita? ¿Es esto interesante e importante desde el punto de vista matemático? ¿Hay alguna desviación en las ideas matemáticas tratadas?

Entre las acciones que comprende este dominio, Ball & Bass (2009) mencionan: tener criterio sobre la importancia matemática; resaltar y subrayar puntos clave; anticipar y hacer conexiones; notar oportunidades matemáticas; entre otros.

Por ejemplo, al presentar una secuencia didáctica para que los alumnos descubran la existencia de los sólidos platónicos, el docente debería tener conciencia sobre la influencia de las decisiones tomadas en la secuencia para la continuación de los estudios (secundarios y superiores) o la cotidianeidad de los alumnos.

III. *Conocimiento especializado del contenido*: Comprende aquellos conocimientos y habilidades matemáticas exclusivas para la enseñanza. Al buscar patrones en errores de alumnos o al examinar si una propuesta no estándar funcionaría en general, los docentes tienen que recurrir a conocimientos y enfoques no requeridos en ámbitos distintos al de enseñanza: responder a los “por qué” de los estudiantes, encontrar un ejemplo para orientar un significado, reconocer qué está involucrado al usar una representación particular, conectar las representaciones a ideas subyacentes y a otras representaciones, vincular un contenido que se está enseñando con contenidos de otros años (anteriores o posteriores), explicar los objetivos y propuestas matemáticas a los padres, apreciar y adaptar el contenido matemático de los libros de texto, modificar tareas para que sean más fáciles o más difíciles, evaluar la plausibilidad de los reclamos de estudiantes, otorgar o evaluar explicaciones matemáticas, elegir y desarrollar definiciones útiles, usar notación y lenguaje matemáticos y ser crítico ante su uso, formular preguntas matemáticamente productivas, seleccionar representaciones para propuestas particulares, inspeccionar equivalencias. Cada una de estas tareas forma parte de la rutina de la tarea docente. Consideradas en conjunto estas tareas demandan un entendimiento y razonamiento exclusivo. La enseñanza requiere conocimiento más allá del que se le está enseñando a los alumnos.

Algunos ejemplos vinculados a la geometría 3d, adaptando los sugeridos por Ball (2010a,b) para otros contenidos matemáticos, son:

- Al experimentar en una cajita de remedios que la cantidad de vértices más la cantidad de caras menos la cantidad de aristas es dos, el docente debería saber: ¿es esto casual o accidental?, ¿funciona o es así en general?, ¿por qué?

- Para evaluar si los estudiantes entienden qué es un prisma, ¿qué representación plana sería bueno presentar?, ¿por qué?

- Ante distintas definiciones de pirámide, ¿cuál es matemáticamente precisa? Para las definiciones que no son matemáticamente precisas, dar un ejemplo que muestre qué es incorrecto

IV. *Conocimiento del contenido y de los alumnos*: Atiende a aquellos conocimientos que le permite prever respuestas, actitudes, dificultades, confusiones y aciertos de sus alumnos en relación con el conocimiento matemático, muchas veces interpretando un lenguaje propio poco riguroso. Así, al elegir un ejemplo, los

docentes necesitan predecir qué les interesará o motivará a sus alumnos; al asignar una tarea, los docentes necesitan anticipar qué harán o encontrarán fácil o difícil sus alumnos. Cada una de estas tareas requiere una interacción entre saberes matemáticos específicos y conocimientos de naturaleza cognitiva sobre sus alumnos. La familiaridad con errores frecuentes y anticiparse a ellos seleccionando acciones y estrategias es un ejemplo de este dominio de conocimiento.

En la línea de Ball (2010a,b), un docente da cuenta de este tipo de conocimiento al buscar responder:

-¿Cuáles son los errores comunes que cometen los alumnos cuando reconocen los elementos de los cuerpos poliedros y redondos?

- ¿De qué manera las experiencias de los alumnos con cuerpos con forma estándar sostienen, o confunden, el entendimiento del trabajo con cuerpos no convencionales?

- ¿Qué dificultades tienen típicamente los alumnos al explorar las propiedades de cuerpos geométricos y por qué?

- ¿Cómo escribir una definición precisa de cilindro que puedan utilizar los alumnos de segundo año del secundario?

- ¿De qué manera la noción de paralelepípedo puede expresarse en una forma que sea tanto precisa matemáticamente como posible de utilizar por los alumnos?

- ¿Qué parte de esta frase es mayormente desafiante para los adolescentes?

V. *Conocimiento del contenido y de la enseñanza*: Comprende los aspectos específicos vinculados con la Didáctica de la Matemática. Los docentes expresan este conocimiento cuando secuencian contenidos particulares para enseñar, eligen los ejemplos para iniciar la construcción de un concepto y para profundizar el contenido, evalúan las ventajas y desventajas didácticas de las representaciones que se usan para enseñar una idea específica e identificar qué métodos y procedimientos diferentes se permiten desde la enseñanza. Cada una de estas tareas requiere una interacción entre entendimiento matemático específico y un entendimiento de aspectos pedagógicos que afectan el aprendizaje del alumno.

Algunos ejemplos, adaptando los sugeridos por Ball (2010a,b) para otros contenidos matemáticos, son:

- ¿Qué representación usaría para introducir el significado de poliedro regular o para explicar la construcción de los poliedros regulares?

- ¿Qué secuencia de problemas podría seleccionarse para comenzar el trabajo sobre secciones planas de cuerpos redondos?

- En una discusión en el grupo-clase, ¿qué procedimientos, que den solución a una representación o construcción específicas, presentaría y en qué orden?

- Dadas ciertas representaciones planas de prismas, ¿cómo las secuenciaría para discutir el concepto de prisma?, ¿qué actividad crearía utilizando estas representaciones planas de prismas para establecer una discusión productiva dirigida a desarrollar una definición?

- En una discusión en el grupo-clase, ¿cuál de estas representaciones planas de prismas sería conveniente usar primero?

VI. *Conocimiento del contenido y del currículum*: Según Shulman (1986), el conocimiento del currículum comprende el rango completo de programas diseñados para la enseñanza de asignaturas y contenidos particulares en un nivel educativo determinado, la variedad de materiales didácticos disponibles en relación a tales programas y el conjunto de características que sirven tanto como indicación o contraindicación para el uso de materiales curriculares particulares en circunstancias específicas. Además, el autor señala dos dimensiones de este conocimiento que son importantes para la enseñanza: el conocimiento lateral del currículum y el conocimiento vertical del currículum. El primero relaciona el conocimiento del currículum que se está enseñando con el currículum que los alumnos están aprendiendo en otras materias. El segundo

incluye la integración significativa de un contenido matemático con aquellos ya enseñados y orientados para posibilitar aprendizajes futuros, así como las formas de materializar lo abstracto.

Algunas preguntas que dan cuenta de este conocimiento son:

- ¿En qué año de la escolaridad se les suele enseñar a los alumnos a explorar la relación de Euler en poliedros convexos?
- ¿Cómo está relacionada la construcción de cuerpos cualesquiera con la construcción de cuerpos regulares en el currículum escolar?
- ¿Cuáles cuerpos poliedros y redondos podrían serles familiares, y cuáles no, a los alumnos de años previos de la escolaridad?

4. Metodología

Con un enfoque cualitativo y desde una perspectiva empírica, con alcance descriptivo-correlacional (Hernández Sampieri et al., 2003), se indagó acerca de las visiones sobre la propia formación en didáctica de la geometría 3d de tres tipos de actores pedagógicos implicados con ella: docentes en ejercicio, futuros docentes y formadores de docentes. Así, el estudio estuvo constituido por tres muestras de interés:

Muestra 1: 24 docentes en Matemática en ejercicio (12 argentinos y 12 colombianos), quienes realizaron su formación docente inicial en diversos períodos, comprendidos entre 1975 y 2005. Dan más de ocho horas diarias de clases en varias instituciones educativas, destinando tiempo extra en planificar sus clases. Aproximadamente la tercera parte continúa estudiando carreras de posgrado.

Muestra 2: 8 futuros docentes en Matemática (4 de cada país), quienes al momento de este estudio estaban cursando el penúltimo o último año de la carrera. Realizaron sus estudios secundarios entre fines de la década de 1990 y comienzos de la del 2000.

Muestra 3: 8 formadores de docentes en Matemática (4 de cada país), estando 5 de ellos (3 argentinos y 2 colombianos) a cargo de asignaturas vinculadas con geometría y 5 de ellos (3 argentinos y 2 colombianos) a cargo de asignaturas vinculadas con didáctica (2 argentinos son docentes simultáneamente en geometría y en didáctica). Tres tienen una antigüedad de 1 año, tres de 6 años y dos de 12 años en la asignatura.

Como técnicas para la recolección de la información se recurrió a relatos de vida, entrevistas semi-estructuradas y grupos enfocados (Bolívar et al., 2001). En la Tabla 1 se esquematiza el guión delineado para la aplicación de las técnicas mencionadas a cada una de las muestras.

Tabla 1. Guión de los protocolos empleados para cada muestra.

Docentes en Matemática en ejercicio	Futuros docentes en Matemática	Formadores de docentes em Matemática
Caracterización de un día habitual de su vida profesional. Recuerdos sobre su etapa de estudiante para ser profesor. Su propia enseñanza actual de la geometría 3d.	Presentación personal y sobre su situación actual en la carrera. La geometría 3d como recuerdo escolar (primaria y secundaria). Particularidades de la geometría 3d. Recursos y materiales didácticos. Enseñanza de los sólidos platónicos en la secundaria.	Presentación personal y profesional. Recuerdos sobre la asignación de su cargo actual (vinculado con didáctica y/o con geometría). Relaciones con la didáctica de la geometría 3d en su asignatura. Trabajo de particularidades didácticas (geométricas) en sus clases de geometría (didáctica). Particularidades de su asignatura para la formación de un Profesor en Matemática.
Contribuciones de su formación inicial en el área de didáctica de la geometría 3d.	La formación inicial en didáctica de la geometría 3d. Contribución de los distintos campos de formación (disciplinar y didáctico).	Aspectos poco logrados en su asignatura vinculados con didáctica de geometría 3d.
Aspectos que le hubiera gustado enfatizar en geometría 3d.	Aportes para mejorar la formación inicial de didáctica de geometría 3d.	
Recuerdo de un registro significativo.		
Preguntas que desearía le fueran realizadas sobre didáctica de la geometría 3d.		

Las transcripciones de los registros recogidos para cada muestra fueron procesadas siguiendo técnicas de análisis de contenido de acuerdo a un conjunto de ideas básicas (Bernárdez, 1995): segmentación en unidades; identificación de indicadores de sus conocimientos sobre geometría, geometría 3d y didáctica de la geometría atendiendo a los 6 dominios de Ball et al. (2008); agrupamiento sobre la base de tales dominios, identificando las distintas modalidades asociadas. Finalmente se buscaron semejanzas y diferencias en cada muestra según el país de pertenencia de los actores involucrados (Argentina y Colombia) y se establecieron comparaciones entre los dominios de conocimiento asociados a los actores pedagógicos integrantes de las tres muestras.

5. Resultados y análisis interpretativo

5.1. Estudio con docentes de Matemática en ejercicio

- *Relativo al conocimiento común del contenido*: los profesores de ambos países manifiestan que su formación inicial¹ fue prioritariamente disciplinar. Reconocen sus dificultades de aprendizaje en Geometría, valorando el nivel académico de sus profesores. Los docentes argentinos reconocen que la formación recibida en geometría fue base para su posterior aprendizaje de la didáctica específica en actividades de capacitación posteriores o en su práctica docente. Los profesores colombianos hacen referencia a las orientaciones generales de las clases y su aprendizaje, sin mayores especificaciones.

Ambos grupos coinciden en que les hubiese gustado enfatizar en la resolución de problemas geométricos en su formación inicial, sin hacer referencias específicas a los tridimensionales. También es recurrente la frase “a esta rama de la Matemática se la suele dejar de lado” incluyéndose aquí su formación inicial.

Todos formularon numerosas preguntas sobre geometría vinculadas con las siguientes ideas-eje: formación de geometría en el Profesorado (como por ejemplo: “en la formación docente en Geometría, ¿recibieron sólo contenidos conceptuales o les enseñaron también estrategias para aplicar en la escuela?”); relación entre la formación en geometría en el Profesorado y en la secundaria (“¿conecta geometría con otros ejes en el Diseño o la enseñanza como la aprendió -separada de las otras ramas de la Matemática-?”); organización curricular de la Geometría en el Plan de Estudios (“¿considera que las materias relacionadas con Geometría del Profesorado de Matemática están bien distribuidas a lo largo de los años del cursado y el tiempo que se dispone para desarrollarlas es suficiente?”).

- *Relativo al conocimiento en el horizonte matemático*: casi la mitad de los profesores de ambos países recuerdan significativamente algunas actividades con alumnos e intercambios con colegas que les permitieron tomar conciencia de la forma de orientar contenidos.

Las preguntas formuladas pueden categorizarse en: enseñanza de la geometría lidiando con la poca formación del docente en el tópico (“¿cómo afrontas tu tarea docente con todas las inseguridades y baches que le dejó el Profesorado en muchos aspectos, sobre todo en cuanto a geometría se refiere?”); actitud ante debilidades formativas en geometría (“¿qué actitud adopta frente al conocimiento de tus falencias en geometría, en caso de tenerlas?”); gusto del docente hacia la enseñanza de la geometría; importancia de la geometría en la vida cotidiana.

- *Relativo al conocimiento especializado del contenido*: los docentes de ambos países concuerdan que, en su etapa de formación como profesores, la didáctica específica se dejaba de lado. La mayoría recuerda su primera práctica docente como decisiva para confirmar su elección vocacional, independientemente del contenido matemático que tuvieron que enseñar. Los docentes argentinos hacen referencia a un par de experiencias aisladas en didáctica de la geometría en su época de estudiantes, reconociendo la debilidad de su formación inicial en esta área. La mayoría considera que sus conocimientos específicos, en general no sólo de geometría 3d, los obtuvieron por ensayo y error en su propia práctica o por estudios posteriores.

¹ En Argentina esta formación corresponde al denominado Profesorado en Matemática. En Colombia, son Licenciados en Matemáticas.

- *Relativo al conocimiento del contenido y de los estudiantes*: los profesores de los dos países manifiestan la importante valoración del trabajo grupal en el proceso de aprendizaje vivido como estudiante, reconociendo que la ayuda recíproca en la planificación de actividades les permitió superar etapas y reafirmar su vocación. Esto indica, aunque levemente, una apreciación favorable hacia esta forma de trabajo de los alumnos al pensar en sus procesos de aprendizajes. Para fortalecer la geometría como espacio formativo, dos docentes colombianos proponen que los formadores de profesores no supongan que los alumnos conocen geometría a su ingreso a la carrera de grado.
- *Relativo al conocimiento del contenido y de la enseñanza*: los docentes argentinos y colombianos coinciden en que, en su formación inicial, les hubiese gustado profundizar en el uso de materiales concretos y estrategias didácticas utilizando TIC. Prácticamente todos agregan que les hubiese interesado enfatizar en la didáctica de la geometría 3d, específicamente en la planificación de clases y análisis de su desarrollo en el aula. Sobre este aspecto de enseñanza, en seis casos se especificaron, además, contenidos geométricos particulares, tanto 3d (la construcción y descomposición de sólidos, propiedades de sólidos, pensamiento tridimensional, movimientos en el espacio, volumen) como 2d (trabajo con polígonos, relación entre superficie y área, semejanza y congruencia).

Marcadamente ambos grupos recuerdan también a algunos profesores que, por sus clases y su buen trato personal, han plasmado rasgos en los modelos que utilizan en sus enseñanzas.

Los aportes recogidos a partir de las preguntas que formularon refieren a: utilización de tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría (“¿tenemos tiempo, en el dictado de las clases de Matemática de trabajar con las TIC?”); estrategias de enseñanza de geometría en el aula (“sobre la enseñanza en sí de la geometría, ¿cómo se trabaja en el aula?”); recursos didácticos (“¿qué material concreto utiliza en sus clases de geometría?”).

- *Relativo al conocimiento del contenido y del currículum*: los docentes de ambos países mencionan la poca presencia real de la geometría en la escuela secundaria.

Las preguntas que formularon giran alrededor de: métodos de enseñanza en el sistema educativo (“¿cómo se están desarrollando los contenidos en los diferentes niveles?”); selección y secuenciación de contenidos geométricos para el aula (“¿qué enseña de Geometría cada docente, induce o deduce, demuestra?”); formación de geometría en los niveles primario y secundario de educación (“¿cómo relaciona lo que ya vio de geometría como alumno de la escuela primaria y secundaria con lo que sintió luego como alumno del Profesorado y como docente?”).

Síntesis interpretativa: resulta llamativo que ningún docente mencionara instancias periódicas y permanentes de trabajo colaborativo con colegas para reflexionar sobre sus prácticas en la enseñanza de la Geometría, en especial la 3d, a fin de superar las debilidades formativas declaradas, sobre todo teniendo en cuenta la fuerte valoración de la actividad grupal realizada en su formación inicial. Emerge así un indicador del trabajo aislado que realizan los docentes, en contraposición con las consideraciones de Serres Voisin (2007), posiblemente -se aventuran a conjeturar los autores de este artículo- debido a la sobrecarga laboral en distintas instituciones o a una falta de cultura institucional, que los lleva a añorar, con insistencia, los momentos de socialización con profesores y compañeros durante su etapa de formación, en contraste con lo que realizan en la actualidad en la escuela secundaria

Es notoria la concordancia de opiniones acerca de la poca presencia de geometría en la escuela secundaria, evidenciándose la pobre formación inicial en el área de los docentes, observándose la carencia de parámetros de referencia, ya observada por Barrantes & Blanco (2006). Consecuentemente, cabe observar que la no aparición de algunos aspectos referidos a la geometría 3d no equivale a que a los docentes no les hubiese gustado enfatizar en ellos, sino que, al desconocer tales parámetros (por ejemplo: criterio de selección de problemas geométricos para introducir la noción de coordenadas espaciales), no pueden visualizarlos como elementos de mejora.

Aparece fuertemente marcado el contraste entre lo que los docentes estudiaron en el período de formación y lo que efectivamente realizan en sus prácticas cotidianas. Esto se evidencia en la significativa demanda de formación en aspectos puntuales de didáctica de la geometría para aplicar en las aulas. Realizando una

mirada cualitativa sobre los aspectos en relación a la enseñanza de geometría 3d que a los docentes les hubiese gustado enfatizar en su formación, se advierte que ellos son ejes troncales de trabajo desde lo establecido en los documentos oficiales, en la actualidad en ambos países. Tal solicitud de los docentes constituye una evidencia más acerca de la tensión entre los momentos de formación con el de ejercicio de la docencia (Sgreccia, 2008).

Recorriendo los distintos dominios de conocimiento, llama la atención que simultáneamente se den estas tres cuestiones: el reconocimiento por parte de los docentes de la importancia de la geometría en la formación de los estudiantes de secundaria; la poca presencia real de la geometría en los planes de estudio de este nivel; la escasa presentación de alternativas para solucionar este problema. Este comportamiento paradójico se corresponde con lo señalado oportunamente por otros referentes argentinos y colombianos (Broitman & Izcovich, 2008; Perry et al., 2008).

Resulta sumamente enriquecedor la cantidad y variedad de aportes de los docentes en relación a qué les hubiese gustado que les pregunten sobre didáctica de la geometría 3d. Los mismos permiten visualizar sus propias inquietudes, emergentes en la actualidad a partir de una compleja relación entre su formación y su práctica situada. En este sentido, evidencian el nivel de preocupación de quienes hoy tienen a su cargo la enseñanza de la geometría en la escuela secundaria.

5.2. Estudio con futuros docentes en Matemática

- *Relativo al conocimiento común del contenido*: los estudiantes argentinos recuerdan pocos contenidos geométricos de sus estudios secundarios: dos aluden a la representación de ciertos sólidos en sistemas de coordenadas cartesianas y el cálculo de volúmenes; otro hace referencia al trabajo con figuras planas y el restante declara no haber trabajado con cuerpos sólidos en ese nivel. Tres estudiantes colombianos recuerdan de su escuela primaria, el trabajo con figuras planas elementales (triángulos, cuadrados y círculos), explicitando además uno de ellos que en dicho nivel se enfatizaba mucho en las operaciones básicas. En el nivel secundario, sólo dos recuerdan haber trabajado geometría, con la ubicación de puntos en sistemas cartesianos (2d y 3d) y teoremas geométricos, postulados y semejanzas en el plano. Un estudiante argentino comenta que, en su formación superior, se aborda sólo la geometría euclidiana 2d, restringiéndose el estudio de lo 3d a lo analítico. Todos coinciden en que en la carrera no hicieron la demostración matemática acerca de la existencia de cinco y sólo cinco sólidos platónicos.

Tres estudiantes colombianos sólo recuerdan las secciones cónicas; otro comenta que en geometría elemental trabajó con teoremas y demostraciones; con vectores y coordenadas polares en geometría analítica, sin especificar la dimensión y hace referencia a la resolución grupal de problemas geométricos vinculados con la realidad. Uno de ellos reclama formación en el conocimiento de mayor variedad de geometrías ya que identificó seis o siete en Internet y vio sólo una o dos en la carrera. Otros dos consideran propicio el trabajo geométrico desde el inicio de la carrera, fundamentando, uno de ellos, que no se puede hacer didáctica de la geometría sin conocer geometría. Cabe destacar que ningún estudiante colombiano recuerda haber trabajado con geometría 3d en la primaria, siendo para ellos “normal” -como se menciona en un caso- abordar sólo las figuras planas y no cuestionarse aspectos relacionados con la tridimensionalidad del espacio real.

- *Relativo al conocimiento en el horizonte matemático*: un estudiante argentino manifiesta que la geometría 3d le ayudó a globalizar la geometría 2d y a articular la Matemática con ésta. Otro reconoce a la geometría como una parte importante de la cultura del hombre, con un papel protagónico para formar el razonamiento lógico y desarrollar habilidades cotidianas. Destaca que la geometría ofrece medios para describir, analizar y comprender el mundo e integrar otras ciencias y saberes.

Sobre los aportes del conocimiento sobre geometría 3d en otras áreas, dos argentinos hacen referencia a la geometría analítica -uno a funciones 3d y el otro a vectores 3d. El primero argumenta que cuesta abstraerse del plano, sobre todo imaginar y graficar y sugiere el uso de algún software para iniciar la actividad de representación bidimensional de lo tridimensional. Dos estudiantes colombianos vinculan la geometría sólida con la analítica, el trabajo en tercera dimensión con las coordenadas de un punto en el espacio. Otro nombra algunos poliedros y destaca su percepción en la vida real.

Como mejora en la carrera, un estudiante argentino menciona “poder ver” la geometría en contextos extra escolares (en la calle, naturaleza, vida cotidiana, arte, arquitectura), fundamentando que le sirve como futuro docente para convencerse de su valor, adquirir criterios y como una buena fuente de conocimiento. Comenta que, en su formación, ha contribuido el intercambio con alumnos de la misma carrera de otras instituciones, los programas educativos de televisión, Internet y libros que le han permitido profundizar.

Los futuros profesores argentinos formularon algunas preguntas asociadas con este dominio de conocimiento, cuyas ideas comunes son: ejemplos de aplicaciones de la geometría; motivos para enseñar geometría en cualquier nivel educativo y edad.

- *Relativo al conocimiento especializado del contenido*: para enseñar que existen sólo cinco sólidos platónicos, uno de los futuros educadores argentinos enfatiza la investigación y la reflexión sobre el origen, historia, propiedades, particularidades y aplicaciones. Otros dos hacen referencia a materiales concretos (software o desarrollos planos -para armarlos- o kit de cuerpos -para mostrarlos y describir características-), a partir de los cuales los alumnos descubrirían la existencia de sólo cinco poliedros regulares convexos, señalando, otra vez, que cuesta abstraerse del plano y sin explicitar una secuencia de acciones puntuales. El estudiante restante hace referencia al recuerdo de los nombres de estos sólidos por parte de los alumnos, sin justificar la existencia de sólo cinco. Un estudiante colombiano considera que se pueden construir con origami en el aula, sin dar mayores detalles, y otro hace referencia a videos, que muestren el por qué de los sólidos platónicos y a qué se debe su nombre, diciendo que lo enseñaría así porque él lo aprendió así.

Sobre cuestiones a mejorar, un estudiante argentino dice que en las materias pedagógicas no se discuten cuestiones matemáticas pero sí lo hacen en Matemática o Didáctica de la Matemática. Otro requiere más tiempo para profundizar temas y la diferenciación de la didáctica según los niveles educativos. Dos hacen referencia a dificultades para la transposición didáctica en Matemática, en general. Los futuros docentes colombianos mencionan las asignaturas Didáctica y Práctica Docente y acuerdan en la dificultad que experimentan en el período de práctica en la escuela secundaria. Se quejan de los docentes universitarios, por desconocer las realidades del nivel secundario y por el desfasaje entre los enfoques de algunas asignaturas, como Didáctica y Práctica Docente. La disconformidad con esta situación se la atribuyen a que hay docentes que sólo trabajan en la Universidad, incluso mayoritariamente vinculados con materias de Matemática, quienes pretenden implementaciones en el aula que resultan difíciles de alcanzar por ellos, como practicantes, en una escuela concreta. En tres casos hacen referencia a la falta de orientación para una transposición didáctica en geometría euclidiana.

Dos de los futuros docentes argentinos hacen referencia a la importancia de las observaciones de clases, fundamentándose que le sirven como modelo de desarrollo de enfoques, estrategias y recursos, articulando lo disciplinar y didáctico.

Las inquietudes de los futuros docentes colombianos se vinculan con: forma en que los docentes (de los distintos niveles educativos) les han enseñado geometría; abordaje y orientación de la geometría en la universidad, es decir, maneras en que los formadores de docentes asumen la geometría; oportunidades que han tenido, como futuros profesores, de enseñar geometría y diseñar una unidad didáctica de la misma; relaciones entre lo que los formadores de docentes enseñan sobre geometría en la universidad y lo que les enseñan a los futuros docentes sobre cómo se debe trabajar geometría en la secundaria.

- *Relativo al conocimiento del contenido y de los estudiantes*: al fundamentar sobre mejoras en la carrera, un estudiante argentino reconoce la necesidad de fortalecer la formación con criterios y fundamentos para la toma de decisiones sobre la selección de contenidos destinados a los adolescentes. De esta forma, considera que podrán dar respuestas cuando sus alumnos cuestionen el para qué y el por qué de lo que se les enseña. Un futuro profesor colombiano da indicios de debilidades formativas al sugerir débilmente y sin convencimiento que estudiar geometría en la carrera puede resultar atractiva a los alumnos.

Respecto al período de práctica en las escuelas, los futuros docentes colombianos mencionan que, al intentar desarrollar clases sobre la base de alguna situación problemática, según les enseñaran en la universidad, los alumnos de secundaria reaccionan negativamente por estar acostumbrados a que el docente les proporcione las definiciones y propiedades y les dé ejercicios. Ante este hecho, argumentan que, como

practicantes, tienen que “seguir la corriente” de los modos de trabajo instalados en la escuela secundaria, dificultándose la innovación. Los futuros profesores argentinos no mencionaron imposibilidades para desarrollar propuestas innovadoras en las aulas.

- *Relativo al conocimiento del contenido y de la enseñanza:* tres de los futuros docentes argentinos recuerdan, sólo en su tránsito por la escuela primaria, el trabajo con materiales concretos para el aprendizaje de la geometría 2d y 3d. En cuanto a las contribuciones de su formación superior para enseñar geometría 3d, mencionan siete asignaturas vinculadas con geometría y una con el componente didáctico, con ausencia de un tratamiento específico sobre geometría 3d así como de didáctica del cálculo o de la probabilidad. Un estudiante resalta el trabajo con materiales concretos en su formación para ser profesor, pero ninguno hizo referencia alguna al nivel secundario de su educación recibida.

Dos estudiantes argentinos hacen referencia al uso de software en Matemática pero sin un análisis didáctico. Específicamente un estudiante argentino declara no haber trabajado con el Cabri. Estos estudiantes también mencionan que en su formación como profesores han aprendido un uso reflexivo del pizarrón y de las tizas de colores. Uno de ellos recuerda el análisis del uso de materiales y recursos didácticos en el Taller de Docencia, mientras que en la asignatura Didáctica de la Matemática es un aspecto del contenido *planificación*, sin un tratamiento en sí mismo. En cuanto a las habilidades que se pueden promover mediante el uso de tales materiales, uno menciona construcción, dibujo y observación de los cuerpos. Todos coinciden en que no aprendieron a usar el geoplano y que construyeron cuerpos para participar de una muestra de difusión de la carrera a la comunidad, considerándose esta forma de presentación del contenido como motivadora para el público asistente a dicha muestra.

Tres estudiantes colombianos hacen referencia al software Cabri (2d y 3d); uno sostiene que es lo más rico que vio en didáctica de la geometría y, otro mencionó que queda en ellos, como futuros docentes, la tarea de indagar sobre el abordaje de geometría con este software con alumnos de escuela secundaria. Uno de ellos nombró además los software Derive y Logo.

Uno de los estudiantes colombianos menciona diversos recursos para proyectar imágenes (cañón, retroproyector, proyector de opaco, rotafolio, tablero portátil, proyector de diapositivas) y también al geoplano. Un estudiante colombiano solicita mayor formación en estrategias didácticas en geometría.

- *Relativo al conocimiento del contenido y del currículum:* un estudiante argentino comenta como significativo que un docente de la carrera le solicitó armar una secuencia didáctica para implementar en la escuela secundaria de alguno de los contenidos geométricos que no figura en los diseños curriculares jurisdiccionales (y, por ende, tampoco en los libros de texto).

Uno de los estudiantes colombianos menciona, como actividad específica con geometría en su escolaridad previa, un Taller para Geometría al que asistía una hora por semana. Los dos restantes no recuerdan actividades de este tipo, explicitando uno de ellos que la geometría se deja de lado en la escuela.

Entre las preguntas relacionadas con este dominio se destacan: motivos de ausencia de una asignatura “Geometría y su didáctica” en la carrera; motivos de la ausencia de enseñanza de ciertas habilidades (dibujar, construir y observar) en las escuelas.

Síntesis interpretativa: el estudio muestra el escaso abordaje de contenidos geométricos en las escuelas primaria y secundaria en ambos países en función de los escasos recuerdos sobre el estudio de geometría. En este último nivel aparece más la geometría de tipo analítica. Llama la atención la escasez de recuerdos sobre el estudio de geometría 3d en la primaria por parte de los colombianos, restringiendo su visión de lo habitual a lo bidimensional.

Las respuestas de los estudiantes argentinos denota la ausencia de un abordaje intencional de la geometría en general y, en particular, de la 3d en las asignaturas del campo pedagógico, quedando limitado a algún trabajo circunstancial a partir de alguna clase observada. El tratamiento de lo 3d presente en la carrera es básicamente analítico, sin una contribución de la didáctica de la geometría como sería deseable para la formación del futuro profesor de Matemática. En términos generales, se percibe deficiencia en la formación

de los conocimientos de geometría 3d, ya que los argumentos están sostenidos sólo desde generalidades didácticas, restringidos en los recursos o focalizados en lo analítico.

Cuando los alumnos colombianos van a realizar sus prácticas docentes en la escuela secundaria, lo instituido en este nivel tiene más peso en sus acciones que lo que aprendieron en la universidad. La preocupación de los estudiantes sobre la desarticulación entre la formación docente en la universidad y la escuela secundaria es más fuerte (e independiente) que el contenido matemático en escena (al cual pareciera que no se le prestara atención y que quedara consecuentemente en segundo plano). Ante el choque que se observa entre lo que les enseñan a los futuros docentes colombianos en la universidad y lo que se produce en los salones reales de clase de escuela secundaria, pareciera que los estudiantes de Profesorado en sus prácticas de Residencia están solos para decidir y suelen decidir seguir por el camino que inicialmente genera menos conflictos: trabajar como lo venía haciendo el docente de ese curso, dejando de lado lo que les enseñaron en la universidad. Ante este panorama, cabe preguntarse si estos futuros profesores, cuando ejerzan como profesionales, podrán lograr un cambio en una tradición o si, por el contrario, seguirán dejándose llevar por rutinas establecidas sin visualizar alternativas de superación. Aquí surge un interrogante: ¿dónde están el formador y co-formador (docente a cargo del curso donde el futuro profesor realiza sus prácticas de Residencia)? Aquí aparece un ejemplo puntual de lo que Schön (1993) caracterizó como “seducción y abandono” por parte de la universidad en la formación de profesores en Matemática.

En ambos grupos de estudiantes se nota la sobredimensión dada al recurso didáctico (como “garantía de efectividad”) para que el descubrimiento por parte de los alumnos se produzca “mágicamente” como sugiere Flores (2006), sin argumentos didácticos que actúen de soporte de la propuesta y que contribuyan a pensar el diseño de una secuencia posible.

En la propuesta de enseñanza de los sólidos platónicos elaborada por los estudiantes argentinos no aparece la justificación matemática de la existencia de cinco y sólo cinco. Sólo se hace referencia a “mostrar”, “nombrar” y “describir características”. Se dice “lo bueno sería que ellos lo vayan descubriendo”. Aquí se observan dos cuestiones: no se explicita qué harían como docentes para lograr tal descubrimiento en sus alumnos; y, por otro lado, la falta de concreción de la propuesta para el aula como sugiere la forma condicional del verbo que emplearon o para la expresión de esta idea. Para los colombianos pareciera que enseñar que existen sólo cinco poliedros regulares convexos se restringe a presentarlos o construirlos con cierto material. Aquí el recurso predomina sobre la intencionalidad didáctica de la producción matemática como justificación. Además, cabe recordar la explicitación (en el caso de los argentinos) y no alusión (de los colombianos) acerca de la ausencia del estudio de la demostración de la existencia de cinco y sólo cinco sólidos platónicos en la etapa de formación de la carrera.

En general, se enumeran recursos puntuales sin indicadores de reflexión al respecto, como emergentes de algún acercamiento esporádico que tuvieron en algún momento o por haber trabajado en forma medianamente sistemática y reflexiva con los mismos.

Los resultados sugieren que nadie se hace cargo en la formación docente de la transposición didáctica, siendo éste un indicador del “choque” que los estudiantes denuncian cuando inician sus prácticas áulicas en la secundaria. Con respecto a geometría, solicitan más formación desde lo disciplinar (tiempo y aplicaciones), no especificándose en lo 3d.

La pobreza de las respuestas en cuanto a la contribución de los distintos tipos de formación (disciplinar y didáctica) posiblemente se deba a la carencia de reflexiones metacognitivas al respecto.

Si bien expresaron un amplio abanico de cuestiones relacionadas con sus inquietudes y/o preocupaciones, las mismas no se efectuaron sobre particularidades de lo 3d. Los interrogantes de los estudiantes argentinos giran alrededor de los “por qué” (ausencias en la carrera/en la escuela secundaria) y “para qué” (implementación de la geometría), es decir, de rasgos explicativos y pragmáticos, respectivamente. Las preguntas de los colombianos contemplan la forma en que les enseñan geometría en la universidad y las demandas de la escuela secundaria. Ambos consideran como vacante en la formación instancias en las que se discuta cómo trabajar los contenidos geométricos en la secundaria.

Hemos evidenciado, a partir de la voz de los futuros docentes de Matemática, demandas muy claras hacia su formación. Quizás algunas de estas peticiones resulten ya conocidas, pero sorprende que en la actualidad sigan irrumpiendo con tanta fuerza, interpelándonos y constituyéndose así en constantes desafíos.

5.3. Estudio con formadores de docentes en Matemática

- *Relativo al conocimiento común del contenido*: los docentes colombianos coinciden en considerar prioritario el conocimiento de la disciplina en la formación de un profesor en Matemática y dicen formar en ello. Entre los argentinos, dos consideran que no debería limitarse la enseñanza de la geometría a un enfoque axiomático y otro, en particular, revaloriza la presencia de la geometría esférica (uno de los modelos de geometrías no euclidianas) en la formación. Cabe observar que no hay ninguna mención explícita de contenidos tridimensionales puntuales.
- *Relativo al conocimiento en el horizonte matemático*: tres profesores (dos argentinos y un colombiano) explicitan no haber establecido relaciones en su asignatura con la geometría 3d. Los restantes establecieron ligeras vinculaciones, como las que mencionan los argentinos: representaciones gráficas 3d para interpretar situaciones, actividades de aplicación y relaciones entre diversas dimensiones. A su vez, los colombianos reconocen a la geometría como herramienta para el descubrimiento de los estudiantes, pero señalan una presencia implícita de los recursos didácticos específicos de la geometría 3d. En particular, uno señala, sin mayores especificaciones, que “todos los temas se pueden relacionar con la geometría 3d”.
- *Relativo al conocimiento especializado del contenido*: todos los profesores que enseñan geometría dicen contemplar simultáneamente los aspectos didácticos en sus clases, así como los que enseñan didáctica señalan considerar las particularidades geométricas, por ser importante para la formación de Profesores en Matemática.

La diversidad de respuestas muestra que los docentes de ambos países consideran estar contribuyendo, desde su asignatura, a la formación disciplinar y didáctica de los futuros profesores en contenidos geométricos necesarios y que favorecen a la formación de la futura práctica docente mediante la reflexión sobre la acción docente, como señala uno de ellos.

- *Relativo al conocimiento del contenido y de los estudiantes*: un profesor colombiano menciona enseñar sobre los condicionantes del contexto y en función de los intereses de los estudiantes. Otro destaca la importancia de promover en los alumnos la aplicación de los contenidos atendiendo a la diversidad de realidades (desde lo social, cultural, económico, cognitivo, emocional, etc.) y desarrollar con predominancia esta habilidad en sus alumnos.

Tres docentes argentinos sostienen que las debilidades en la formación de profesores en didáctica de la geometría 3d -entre otros- podrían mejorarse si se trabaja en forma conjunta entre profesores de los institutos de formación docente. Los restantes señalan que la mejora podría realizarse trabajando específicamente con alumnos en una revisión de los contenidos prioritarios de la escuela secundaria. También aluden a incentivar la realización de trabajos prácticos orales y de colaboración entre los alumnos.

Los formadores colombianos manifiestan diversidad de aspectos no logrados en el trabajo con los futuros docentes, proponiendo estrategias para superarlos: innovación, trascendiendo una mera reproducción de los textos; capacidad para la demostración, utilizando razonamientos formales; manipulación de algunos recursos indispensables para enseñar Matemática introduciendo su uso en las aulas concretamente; deseo de aprender y de enseñar, como formación permanente. Para mejorar proponen: la retroalimentación con el docente y con los compañeros; la cantidad y calidad de experiencias sobre los distintos temas; el tiempo destinado a actividades de razonamiento; el acceso a las salas de informática; el planteamiento de situaciones motivadoras para los alumnos.

- *Relativo al conocimiento del contenido y de la enseñanza*: todos los profesores acuerdan en la importancia de la transposición didáctica en el quehacer de los futuros docentes y coinciden en la riqueza que ofrece la geometría para vincular otros contenidos matemáticos entre sí. Los profesores argentinos sostienen, en pos de una mejora, la necesidad de actuar para que los futuros docentes adquieran una postura crítica y

creativa para realizar las prácticas de Residencia, ya que ellos suelen adherir acríticamente a las propuestas de los co-formadores. Señalan la necesidad de desarrollar en ellos la disposición para dar y recibir críticas. También demandan destinar mayor tiempo al uso de materiales didácticos, como los software cuando se está formando al futuro docente. También destacan la importancia de enriquecer la expresión oral y escrita.

Las preguntas de los formadores de docentes giran alrededor de grado de satisfacción que obtiene en su desempeño, considerándolo como motor para la enseñanza (“¿se siente a gusto dictando la materia?”, “¿disfruta usted la asignatura con sus estudiantes?”, “¿le gustaría volver a trabajar con esta asignatura?”).

- *Relativo al conocimiento del contenido y del currículum*: sólo un docente colombiano menciona la importancia de la integración entre teoría y práctica desde el desarrollo histórico de la pedagogía y las reflexiones críticas sobre el fenómeno educativo en Latinoamérica. Este aspecto particular no fue reconocido en las respuestas de los formadores argentinos.

Entre las mejoras a realizar, los argentinos consideraron: la vinculación entre los trayectos de práctica y las asignaturas específicas, la resolución de problemas, la aplicación de la Matemática a situaciones cotidianas y, específicamente, la introducción de la geometría como campo disciplinar en las prácticas de residencia dada su exclusión de la escuela secundaria.

Como trascendente para el currículum de geometría, un docente argentino menciona un listado de habilidades (interpretar el entorno, desarrollar el razonamiento, crear conectivos lógicos y necesarios en la resolución de problemas, desarrollar la visualización y la representación, fomentar la creatividad), sin establecer jerarquización alguna. Un colombiano hace referencia al desarrollo de procesos de pensamiento (descubrimiento, razonamiento, demostración) y a una mirada descubridora y motivadora de la Matemática.

Síntesis interpretativa: Es notable la prácticamente nula vinculación explícita de la enseñanza con aspectos específicos de geometría 3d. Casi todos dicen trabajar geometría y su didáctica en forma integrada, aunque sin especificar detalles. Tampoco los formadores se cuestionan sobre los detalles correspondientes ni realizan una actividad conjunta entre futuros docentes y formadores de docentes para iniciar así procesos de prácticas colaborativas (Fiorentini, 2007).

Sobre las particularidades de la asignatura para la formación de un profesor de Matemática, los formadores no introducen especificaciones puntuales sobre los distintos dominios de conocimiento matemático para enseñar (Ball et al., 2008), son más bien apreciaciones generales. Ellos consideran estar contribuyendo a formar docentes que integren lo disciplinar y didáctico, que puedan actuar en los diferentes contextos y reflexionar sobre sus prácticas. El problema radica en que ellos, como responsables de formar a los futuros profesores, parecen estar muy conformes con sus formas de enseñanza actual, sin idear alternativas para mejorar sus prácticas de enseñanza de la geometría 3d o su didáctica en la carrera.

En los aspectos por mejorar, es llamativo cómo el peso recae sobre los estudiantes o la carrera y no sobre sí mismos como docentes, característica que agudiza la distancia hacia una posible mejora. Se aprecia una ligera diferencia entre los docentes argentinos y colombianos, donde los primeros apuestan más al trabajo conjunto entre colegas para sortear las dificultades. De todos modos, en ambos casos queda claro un trabajo aislado de los docentes.

Las preguntas que a los docentes les gustaría que les formulen giran alrededor de su grado de satisfacción con la materia que dictan, con la relación con sus alumnos y con lo que acontece en sus clases.

6. Análisis comparativo y reflexiones finales

Desde lo dicho por los formadores de docentes, se puede inferir la poca vinculación que realizan en sus asignaturas con geometría 3d, lo que también se refleja en lo dicho por los estudiantes de Profesorado. Sin embargo, ambos grupos dan fe de la trascendencia de la geometría para el trabajo con situaciones concretas, el establecimiento de relaciones entre dimensiones geométricas (1d, 2d, 3d, ..., nd) y la articulación de la Matemática, acordando en que la geometría debe ser una parte importante de la Educación Matemática (Lehrer & Chazan, 1998).

Casi todos los formadores de docentes dicen trabajar geometría y su didáctica en forma integrada. Sin embargo, los estudiantes de Profesorado no lo perciben así. Incluso los formadores de docentes parecen estar muy conformes con su forma de enseñanza en la carrera. Aquí también emerge una ausencia de correspondencia con lo que manifiestan y solicitan los futuros profesores.

Los docentes en ejercicio también hacen referencia a la poca presencia real de la geometría en general y, en particular, de la 3d en la escuela secundaria y confiesan que a sus conocimientos sobre la didáctica específica los obtuvieron desde su propia práctica o desde estudios posteriores. Expresan de esta manera evidencias de la poca vinculación con la didáctica de la geometría en su formación de grado, destinada a construir sólo una base de contenido disciplinar, propio de una tendencia de formación de profesores tradicional, según Flores (2007) y Vilella (2001). Esto se contrapone con lo recogido en el estudio con los formadores de docentes quienes manifiestan contribuir en la formación tanto en geometría como en su didáctica. Particularmente, los docentes argentinos en ejercicio mencionan formación en contenidos geométricos pero no en su didáctica. Esto parece haber cambiado en los últimos años ya que los estudiantes del Profesorado manifiestan recibir formación en geometría y su didáctica, solicitan mayor formación en la transposición didáctica de los contenidos y, acorde con esto, también requieren mayor correspondencia entre lo que se desarrolla en la universidad y en la escuela secundaria (sobre todo los colombianos), lo cual suele traerles sus primeras dificultades en la práctica de Residencia. Lo anterior concuerda con lo planteado por Gómez-Chacón (2006) en cuanto a la falta de correspondencia entre la complejidad de las situaciones áulicas de secundaria con la formación inicial recibida. Cabe preguntarse: ¿cómo harán estos profesores para lidiar con los retos (tecnológicos, sociales, etc.) del futuro, en el sentido planteado por De la Torre et al. (2006)?

Entre los recuerdos significativos de los formadores de docentes, se destacan anécdotas con sus alumnos de Profesorado, correspondiéndose con los de los futuros docentes y docentes en ejercicio, quienes suelen tener muy buenos recuerdos de sus profesores. Los futuros docentes y los docentes en ejercicio recuerdan de su etapa de estudiantes el trabajo en grupo con sus compañeros, fundamentando su importancia en el apoyo mutuo y la superación de sucesivas etapas. Los docentes en ejercicio y los formadores de docentes no mencionan reuniones con pares en su desempeño como docentes, lo que no se corresponde con sus recuerdos de su etapa como estudiantes del Profesorado. Es un nivel de socialización basado en un trabajo colaborativo que parece perderse con el ingreso al ejercicio de la profesión docente.

A los tres grupos les hubiese gustado que les preguntaran sobre la importancia de la geometría para los estudiantes (¿será porque ellos mismos quieren tener más información / formación al respecto?), adhiriendo a Jones (2002), sin llegar a puntualizar habilidades específicas. También omiten términos específicos (como intuición, percepción, visualización, imaginación) que constituyen facetas claves de la geometría 3d.

Además es muy probable que los estudiantes de Profesorado egresen sin saber que en la actualidad se reconocen más de cincuenta geometrías (Malkevitch, 1991, citado en Jones, 2002), menos aún habiendo estudiado sus características, ejemplos prototípicos y aplicaciones a problemas concretos, y menos todavía, habiendo discutido sobre su pertinencia curricular o abordaje didáctico. Al recorrer los resultados, no extraña esta conclusión. Incluso cabe preguntarse: ¿son formados los docentes argentinos y colombianos para “enseñar bien geometría”, en términos de Jones (2002)?

Particularmente se pudo evidenciar que la geometría 3d deviene de dos niveles de tensión: la geometría dentro de la Matemática, por un lado, y lo referido a lo tridimensional dentro de la geometría, por otro lado.

Entre los aspectos por mejorar, los tres grupos coinciden en el trabajo concreto en geometría, el conocimiento de estrategias didácticas, el uso de tecnologías y la resolución de problemas, demandando así una pedagogía nueva en geometría en términos de Fujita et al. (2004). Los formadores de docentes reconocen que se deben mejorar los acuerdos entre ellos mismos al interior de la carrera -en concordancia con De la Torre et al. (2006)-, lo que se refleja en el sentir de los futuros docentes colombianos, quienes muestran inconformismo con los distintos enfoques de didáctica y práctica docente, y con la incongruencia entre las indicaciones que reciben en la universidad y la realidad de la escuela secundaria. Se constata que cuestionan su formación inicial porque no pueden enfrentar los desafíos actuales de la complejidad escolar, adhiriendo a lo expresado por Fiorentini (2007) y Gómez Alfonso (2006).

A la iniciativa de Jaworski (2008), de trabajo colaborativo entre formadores de docentes y docentes en ejercicio, se propone la incorporación de estudiantes de la carrera, al estilo de las experiencias que viene llevando a cabo Fiorentini (2007) ya que ellos podrían introducir, con naturalidad en el grupo, una forma de trabajo que desarrollan habitualmente, promoviendo la intervención de los primeros. Al mismo tiempo vivenciarían los aportes emergentes cuando se entrelazan las dificultades de la enseñanza en el aula (la práctica) con la mirada teórica.

Entre los docentes en ejercicio, docentes en formación y formadores de docentes, se puede caracterizar como común una reflexión precaria sobre el horizonte matemático (Ball et al., 2008) de la geometría 3d, tanto en la escuela secundaria como en la carrera, ya que en los casos que se fundamentan las respuestas, no trascienden su propio ámbito inmediato.

A partir de los resultados se puede inferir que la tendencia formativa (Flores, 2007; Vilella, 2001) en la carrera, tanto en lo disciplinar como en lo didáctico, en geometría sólida tiene rasgos: tradicionales (según los futuros docentes y docentes en ejercicio) y de progresión continua (según los formadores de docentes, quienes manifiestan satisfacción por el trabajo que realizan con sus estudiantes de Profesorado). Este contraste resulta significativo por dos motivos: 1. pareciera que, en cuanto a la acción puntual en formación de profesores en geometría, en los últimos tiempos las cosas no han cambiado mucho, pues tanto estudiantes como egresados sostienen un planteamiento análogo; 2. se visualiza como dificultosa la generación de mejoras en la formación de profesores en el corto/mediano plazo, ya que los que tienen a su cargo dicha tarea (formadores de docentes) parecen estar conformes con el desempeño de su tarea en la actualidad, lo que podría ser un agravante para la situación, si se tiene en cuenta que esto no permite visualizar algunos aspectos a mejorar en los Profesorados.

Para finalizar, queremos apostar a una cuota de humildad por parte de los formadores de docentes, tarea que nosotros también desempeñamos, para iniciar un proceso necesario de revisión crítica de las prácticas, porque sino ¿cómo vamos a pretender formar profesionales reflexivos si no empezamos a hacerlo (no sólo predicarlo) desde nuestro accionar en clase? -de acuerdo con De La Torre et al. (2006)-. Más precisamente, creemos que (sostenido por los resultados aquí presentados) tales reflexiones no deben ser sobre aspectos generales, sino sobre particularidades -en concordancia con Fiorentini (2007)- sobre la enseñanza de la geometría 3d.

Bibliografía

- Alsina Catalá, C., Burgués, C. & Fortuny Aymemí, J. (1995). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.
- Báez, R. & Iglesias, M. (2007). Principios Didácticos a Seguir en el Proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría en la UPEL “El Mácaro”. *Enseñanza de la Matemática*, 12 al 16, 67-88.
- Ball, D. (2010a). *Knowing mathematics well enough to teach it: From teachers' knowledge to knowledge for teaching*. Conferencia presentada en el Institute for Social Research Colloquium, Ann Arbor, MI, Abril.
- Ball, D. (2010b). *Learning to do mathematics as a teacher*. Conferencia presentada en el National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM) Annual Conference, San Diego, CA, Abril.
- Ball, D. & Bass, H. (2009). *Mit einem Auge auf den mathematischen Horizont: Was der Lehrer braucht für die Zukunft seiner Schüler*. Conferencia presentada en la 43. Jahrestagung für Didaktik der Mathematik, Oldenburg, Marzo.
- Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Banchoff, T. (2008). Dimensión. En L. Steen (Ed.), *La enseñanza agradable de las matemáticas* (pp. 17-65). México: Limusa.

- Barrantes, M. & Blanco, L. (2006). A study of prospective primary teachers' conceptions of teaching and learning school Geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 411-436.
- Bartolini Bussi, M. (2007). Semiotic mediation: fragments from a classroom experiment on the coordination of spatial perspectives. *ZDM Mathematics Education*, 39, 63-71.
- Bass, H. & Ball, D. (2004). A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching: the case of mathematical reasoning. En J. Wang & B. Xu (Eds.), *Trends and challenges in Mathematics Education* (pp. 295-313). Shanghai: East China Normal University.
- Bernárdez, E. (1995). *El papel del léxico en la organización textual*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- Blanco, L. & Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6 (2), 107-132.
- Bolívar, A., Domingo, J. & Fernández, M. (2001). *La investigación biográfico-narrativa en educación*. Madrid: La Muralla.
- Borba, M. (2006). Diversidade de questões em formação de professores de matemática. En M. Borba (Org.), *Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática* (pp. 9-26). Belo Horizonte: Autêntica.
- Broitman, C. & Itzcovich, H. (2008). La geometría como medio para “entrar en la racionalidad”. Una secuencia para la enseñanza de los triángulos en la escuela primaria. *12(ntes). Enseñar matemática*, 4, 55-86.
- Castelnuovo, E. (1997). *La Geometría*. Firenze: La Nuova Italia.
- Cnop, I. & Grandsard, F. (2004). More efficient teaching and learning of Mathematics. En J. Wang & B. Xu (Eds.), *Trends and challenges in Mathematics Education* (pp. 223-234). Shanghai: East China Normal University.
- De la Torre, E., Díaz Regueiro, M. & Guerrero, S. (2006). Formación inicial y continua del profesorado de primaria y secundaria. *UNO*, 12 (41), 20-39.
- Esteve, J. (2009). La formación de profesores: bases teóricas para el desarrollo de programas de formación inicial. *Revista de Educación*, 350 (septiembre-diciembre), pp.15-30.
- Fermüller, C., Cheong, L. & Aloimonos, Y. (1997). The Geometry of Visual Space Distortion. *Lecture notes in computer science*, 13 (15), 249-277.
- Fiorentini, D. (2007). Desarrollo profesional del maestro de matemáticas a partir de la reflexión, colaboración e investigación sobre la práctica. En E. Mancera & C. Pérez (Eds.), *Historia y Prospectiva de la Educación Matemática* (pp. 137-147). México, DF: Edebé.
- Flores, P. (2006). Los materiales y recursos didácticos en la formación de profesores de matemáticas. *UNO*, 12 (41), 77-97.
- Flores, P. (2007). Profesores de Matemáticas Reflexivos: Formación y Cuestiones de Investigación. *PNA*, 1 (4), 139-159.
- Freudenthal, H. (1964). The role of geometrical intuition in modern mathematics. I.C.S.U. *Review of World Science*, 6.
- Fujita, T., Jones, K. & Yamamoto, S. (2004). *Geometrical intuition and the learning and teaching of geometry*. Trabajo presentado en el Topic Study Group 10 del 10th International Congress on Mathematical Education. Copenhagen, Julio.
- Gómez, P. & Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1 (2), 79-98.
- Gómez, C. & Núñez, E. (2009). Geometría intuitiva desde el cuarto de baño. *Números*, 70, 89-104.

- Gómez Alfonso, B. (2006). Los trabajos de la conferencia de decanos y directores de Magisterio y educación sobre titulaciones de segundo y tercer ciclo en matemáticas. *UNO*, 12 (41), 68-75.
- Gómez-Chacón, I. (2006). Matemáticas: El Informe PISA en la práctica. Una acción formativa del profesorado. *UNO*, 12 (41), 40-51.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. & Baptista Lucio, P. (2003). *Metodología de la investigación* (3ª ed.). México, DF: Mc Graw Hill.
- Jaworski, B. (2008). Development of the Mathematics teacher educator and its relation to teaching development. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education (Vol. 4)* (pp. 335-361). Rotterdam: Sense Publishers.
- Jones, K. (2000). Teacher knowledge and professional development in geometry. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 20 (3), 109-114.
- Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice* (pp 121-139). Londres: RoutledgeFalmer.
- Jones, K. & Mooney, C. (2003). Making space for geometry in primary mathematics. En I. Thompson (Ed.), *Enhancing primary Mathematics teaching* (pp. 3-15). Londres: Open University.
- Klieme, E., Reiss, K. & Heinze, A. (2003). Geometrical Competence and Understanding of Proof. A Study Based on TIMSS Items. En F. Lin & J. Guo (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Science and Mathematics Learning* (pp. 60-80). Taipei: National Taiwan Normal University.
- Laborde, C. (1994). *Problemas de la enseñanza de la geometría en el secundario*. (B. Capdevielle, L. Varela & P. Willson, Trad.). Buenos Aires: Ministerio de Educación.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 275-304). Rotterdam: Sense Publishers.
- Lapostolle, G. & Chevallier, T. (2009). Formación inicial de los docentes de colegios en Francia. *Revista de Educación*, 350 (septiembre-diciembre), pp. 145-172.
- Lehrer, R. & Chazan, D. (eds.) (1998). *Designing Learning Environments for Developing Understanding of geometry*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Leung, I. (2008). Teaching and learning of inclusive and transitive properties among quadrilaterals by deductive reasoning with the aid of Smart Board. *ZDM Mathematics Education*, 40, 1007-1021.
- Liedtke, C., Grau, O. & Growe, S. (1995). *Use of explicit knowledge for the reconstruction of 3d object geometry*. Trabajo presentado en la International conference on computer analysis of images and patterns. Praga, Abril.
- Lindgren, R. & Schwartz, D. (2009). Spatial Learning and Computer Simulations in Science. *International Journal of Science Education*, 31 (3), 419-438.
- Llinares, S. (2002). La práctica de enseñar y aprender a enseñar Matemáticas. La generación y uso de instrumentos de la práctica. *Revista de Enseñanza Universitaria*, (19), 115-124.
- Moore-Russo, D. & Schroeder, T. (2007). *Preservice and inservice secondary mathematics teachers' visualization of three-dimensional objects and their relationships*. Trabajo presentado en el Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Reno, Nevada, Octubre.
- Obara, S. (2009). Decomposition solids to develop spatial sense. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14 (6), 336-343.

- Owens, K. & Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 83-115). Rotterdam: Sense Publishers.
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A. & Molina, O. (2008). *Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para la formación inicial de profesores*. Trabajo presentado en el Simposio Iberoamericano de Enseñanza de la Matemática. Aprendizaje y enseñanza de la geometría. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Ramadas, J. (2009a). Introduction to the Special Issue on “Visual and Spatial Modes in Science Learning. *International Journal of Science Education*, 31 (3), 297-299.
- Ramadas, J. (2009b). Visual and Spatial Modes in Science Learning. *International Journal of Science Education*, 31 (3), 301-318.
- Rico Romero, L. (2004) Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado*, 8 (1), 1-15.
- Schuster, S. (1971). On the teaching of geometry. A potpourri. *Educational Studies in Mathematics*, 4, 76-86.
- Senechal, M. (2008). Forma. En L. Steen (Ed.), *La enseñanza agradable de las matemáticas* (pp. 149-192). México: Limusa.
- Serres Voisin, Y. (2007). Un estudio de la formación profesional de docentes de matemáticas a través de investigación-acción. *Revista de Pedagogía*, 28 (82), 287-310.
- Sgreccia, N. (2008). *Currículum de geometría en Argentina*. Trabajo presentado en el Topic Study Group 12 del 11th International Congress on Mathematical Education. Monterrey, Julio.
- Sharygin, I. (2004). On the concept of School Geometry. En J. Wang & B. Xu (Eds.), *Trends and challenges in Mathematics Education* (pp. 43-51). Shanghai: East China Normal University.
- Schön, D. (1993). Teaching and learning as a reflective conversation. En L. Montero & J. Vez (eds.). *Las didácticas específicas en la formación del profesorado* (pp. 5-18). Santiago de Compostela: Torculo.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.
- Sorby, S. (2009). Educational Research in Developing 3-D Spatial Skills for Engineering Students. *International Journal of Science Education*, 31 (3), 459-480.
- Tavío, C. & Méndez, J. (2006). La democratización del conocimiento matemático: popularizando la geometría. *UNO*, 12 (42), 61-70.
- Velásquez, F. (2006). La geometría, una enseñanza imprescindible. *UNO*, 12 (42), 5-10.
- Villella, J. (2001). *Uno, dos, tres... Geometría otra vez. De la intuición al conocimiento formal en la EGB*. Buenos Aires: Aique.