"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n. 25, 2015

G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Recuperare competenze matematiche all'ingresso di un percorso universitario, analisi di un'esperienza

Vincenzo Lombardo

vinlomb88@hotmail.it

Il progetto di Tutorato, Adeguamento delle conoscenze matematiche di base per il conseguimento degli obiettivi di Fisica, previsto per studenti del primo anno di alcune lauree triennali in Medicina, che mi è stato affidato a Novembre 2013, mi ha permesso di osservare e analizzare le principali carenze e difficoltà in matematica degli studenti. La rilevazione è stata effettuata mediante un Test preliminare di matematica, che ho realizzato selezionando dei quesiti tra quelli proposti nelle prove INVALSI di matematica per i quindicenni.

I risultati ottenuti mi hanno dato lo spunto per analizzare la situazione in modo più generale, valutando le carenze in matematica degli studenti al termine della scuola secondaria di secondo grado. In particolare ho cercato di comprendere l'origine e la causa di tali lacune con lo scopo di individuare le possibili strategie da attuare per avviare il processo di recupero.

Il tema trattato può interessare chiunque abbia a che fare con l'insegnamento e l'apprendimento della matematica, come insegnanti, ricercatori o tutor, allo scopo di condurre una riflessione, sia sugli apprendimenti raggiunti dagli studenti al termine della scuola secondaria di secondo grado, sia sulla validità delle scelte didattiche.

Nel primo paragrafo si descrive il problema del recupero in matematica all'ingresso dell'università oltre ad illustrare le possibili strategie che permetterebbero di prevenire la nascita delle carenze rilevate.

In un primo momento si osservano le principali difficoltà in matematica che incontrano gli studenti nel delicato passaggio scuola-università, valutando sia gli aspetti relazionali (rapporto con docenti e compagni), sia quelli didattici (organizzazione corsi, esami).

In secondo luogo si sottolinea il fatto che molti studenti presentano carenze anche in alcuni settori della matematica (es. geometria euclidea, algebra, probabilità, etc), considerati come conoscenze preliminari. In riferimento a tali conoscenze, si mettono in relazione le aspettative dei docenti universitari e di quelli delle scuole secondarie.

Si sottolinea come le convinzioni dello studente possano essere un aspetto da non sottovalutare nella fase di apprendimento, ciò permette anche di spiegare l'insuccesso di certe azioni di recupero. In particolare si argomentano le convinzioni sul compito, sull'ambiente, sulla disciplina e su se stesso.

Nel secondo paragrafo si descrive l'esperienza di tutorato, esponendo le strategie utilizzate per aiutare gli studenti a recuperare e si sottolinea il cambiamento ottenuto negli studenti al termine del processo di recupero.

1.Le competenze matematiche degli studenti all'ingresso universitario e il problema del loro recupero.

Le indagini OCSE confermano che il numero degli studenti che incontrano difficoltà in matematica al primo anno di università è molto elevato.

Il passaggio scuola-università è senza dubbio quello che comporta i maggiori cambiamenti nello status dello studente, nei suoi rapporti con colleghi e docenti, nelle sue abitudini di studio e strategie di apprendimento, nella sua autonomia di programmazione e gestione di un progetto curriculare personale. (Accascina et alli, 1998 pag. 63)

Quindi, oltre alle carenze nella preparazione di base, incidono la diversità dell'organizzazione didattica universitaria rispetto a quella della scuola, le convinzioni dello studente e carenze da attribuire a fattori metacognitivi.

Per analizzare in dettaglio queste difficoltà iniziali dello studente si sono presi in esame le analisi riportate nei libri: "La strage degli innocenti" Problemi di raccordo in matematica tra scuola e università di Giuseppe Accascina ed altri e "Difficoltà in matematica" di Rosetta Zan, da cui poi si sono tratte alcune importanti riflessioni.

Come afferma Rosetta Zan, docente di didattica della matematica dell'Università di Pisa: *Il fallimento in matematica è sempre stato considerato in qualche modo inevitabile, addirittura più naturale del successo*. (Zan 2007, pag 124)

Sono tre i punti di vista da cui guardare il problema: l'allievo, la matematica, la relazione tra allievo e la matematica. Ed è proprio quest'ultima relazione che si collega al ruolo dell'insegnante di matematica che, in quanto mediatore tra l'allievo e la disciplina, assume una posizione fondamentale all'interno del problema.

Più in generale è noto che la terna *Insegnante-Alunno-Sapere* (Chevallard, 1982), con le reciproche relazioni, ci dà la visione della connaturata complessità del processo di insegnamento e ci suggerisce la necessità, quando si affronta un problema di didattica, di prendere in considerazione tutti e tre i poli e soprattutto la relazione tra di essi.

Il fallimento nei corsi di matematica dipende da una preparazione di base non adeguata, legata sia a difficoltà di tipo algoritmico che di tipo concettuale. E' importante accorgersi in tempo del problema affinché gli studenti non continuino ad essere afflitti per i loro insuccessi e i docenti ad accorgersi tardivamente di questa situazione. Le difficoltà possono essere superate se si trova un "compromesso" da entrambe le parti.

E' importante che i docenti universitari indaghino sulle carenze più diffuse possedute dagli studenti ad inizio corso. In particolare, il docente dovrà di volta in volta decidere se un riferimento concettuale che intende utilizzare è, per gli studenti, completamente acquisito, acquisito solo in parte oppure non acquisito affatto.

Spesso succede che il docente universitario si crei uno stereotipo di studente che si avvicina allo studente proveniente dal liceo scientifico, quando in realtà in molti corsi di laurea nemmeno il 50\% proviene da questo istituto.

Molti corsi di laurea organizzano abitualmente dei precorsi in cui vengono riproposte agli studenti le conoscenze base necessarie. Tuttavia, se da un lato questa è l'occasione per colmare le lacune nelle conoscenze, dall'altro gli studenti con una buona preparazione iniziale potrebbero sottovalutare l'impegno necessario per portare a termine con successo l'intero corso. (Accascina G, et alli, 1998)

Le analisi descritte nel testo *La strage degli innocenti Problemi di raccordo in matematica tra scuola e università* (Accascina G. et alli, 1998), mettono in evidenza che di solito si assiste ad un paradosso: la maggior parte degli insegnanti delle scuole secondarie di secondo grado ha la convinzione che gli studenti abbiano acquisito buone conoscenze in matematica con le quali affrontare senza problemi l'università. Molti docenti universitari, invece, pensano che sia necessario riprendere gran parte degli argomenti già affrontati nel ciclo scolastico precedente.

Nel testo è riportata l'analisi di un Test proposto agli studenti che si iscrivono al primo anno dei Corsi di laurea in Matematica e Ingegneria Industriale (quello a più alto contenuto matematico tra i diversi indirizzi di Ingegneria).

Il test è composto da 32 quesiti riguardanti i seguenti argomenti: algebra, geometria analitica del piano, geometria euclidea del piano, geometria euclidea dello spazio, esponenziali e logaritmi, goniometria e funzioni goniometriche, logica, calcolo combinatorio, probabilità e modellizzazione.

I risultati scaturiti dall'indagine evidenziano che la preparazione degli studenti in questione era piuttosto carente e molto grave in alcuni settori della matematica. Naturalmente la situazione si

presentava diversificata a seconda del corso di studi secondario conseguito dallo studente, ma in generale si presentava negativa per tutti i corsi di provenienza, anche per quegli indirizzi in cui è presente un vasto programma di matematica (Liceo scientifico, Istituto Tecnico Industriale).
E' importante andare ad indagare sui motivi che rendono così difficile la risposta a queste domande e ricercare se le difficoltà nascono dal modo stesso di formulare le domande oppure dal fatto che in questo settore l'insegnamento tende a sviluppare più processi di tipo meccanico che capacità di riflettere sulle situazioni e sui significati dei procedimenti.
Dai risultati del test possiamo dedurre una situazione generale delle possibili difficoltà in matematica degli studenti all'inizio del percorso universitario. Confrontando questa situazione insieme al punto di vista dei docenti dei diversi istituti (scuola-università) sulle conoscenze preliminari possedute dagli studenti, possiamo dedurre alcune riflessioni.
Per quanto riguarda l'algebra il docente di scuola secondaria pensa che lo studente possieda un livello di conoscenze adeguato, contrariamente da quello che pensa il docente universitario.
Per gli argomenti insiemi e elementi di logica, i docenti universitari sono convinti che sia il tema meno conosciuto dagli studenti. In realtà non si rendono conto che i ragazzi sin dalle elementari iniziano a familiarizzare con questi argomenti e dunque per gli esiti dei test su queste tematiche sono soddisfacenti.
Invece per quanto riguarda gli esiti negativi in geometria è possibile siano frutto di una prassi didattica molto diffusa in cui le dimostrazioni sono presentate come un prodotto finito: lo studente non partecipa alla costruzione delle conoscenze che gli vengono proposte. Per questo motivo *il problema della costruzione geometrica costituisce un buon contesto per introdurre gli allievi alla geometria come sistema teorico; l'affrontare problemi di costruzione consente la nascita del bisogno intellettuale di validare le procedure di costruzione, e quindi, la nascita di motivazioni all'attività dimostrativa (Arzarello, 1999)*
Osserviamo quindi che, al di là della significatività del test dal punto di vista del contenuto e della rappresentatività del campione, si può ipotizzare che gran parte degli studenti avrà avuto, o avrà, da superare non poche difficoltà iniziali nello studio della matematica.
Al primo anno, in genere, si insegnano le materie che richiedono l'acquisizione delle conoscenze base per poter affrontare le materie degli anni successivi e spesso si tratta di contenuti corposi in vista delle esigenze degli insegnamenti a seguire. E' necessario, quindi, che i corsi del primo semestre siano strutturati in modo da coinvolgere il più possibile lo studente. Ad esempio si potrebbero organizzare, durante il corso, delle esercitazioni mirate in cui lo studente possa svolgere effettivamente esercizi, problemi e prove di verifica che incidano sull'esame finale.

Solo in questo modo lo studente è in grado di comprendere meglio se ha intrapreso il percorso più adeguato alle proprie capacità e aspettative.
In realtà, la maggior parte dei corsi di laurea sono strutturati in tutt'altra maniera. In alcuni corsi di laurea le materie del primo anno sono ancora annuali, senza prove intermedie e dunque non consentono, in questo modo, che lo studente possa valutare in tempo le proprie scelte.
E' importante, inoltre, analizzare le convinzioni dello studente. E' difficile dare una definizione precisa di convinzione, tuttavia seguendo l'approccio di Rosetta Zan possiamo classificare le convinzioni in tre categorie connesse tra di loro:
1.Convinzioni più o meno esplicite sulla difficoltà della materia.
2.Convinzioni su di sé debilitanti (in cui gioca un ruolo centrale il comportamento dell'insegnante), con una forte componente affettiva, associate in particolare ad emozioni negative.
3. Sistemi di convinzioni che derivano dal fatto che le convinzioni sulla matematica interagiscono profondamente con le convinzioni che l'allievo ha su di sé.

I sistemi di convinzioni costituiscono la cornice entro cui un individuo seleziona le proprie risorse cognitive, cioè prende le decisioni. L'individuo interpreta continuamente il mondo intorno a sè, *le convinzioni sono il risultato di questo continuo tentativo di dare senso alla realtà e allo stesso tempo determinano gli schemi con cui l'individuo si avvicina al mondo e si approccia alle situazioni che deve affrontare.* (Zan 2007, *Difficoltà in Matematica* pag. 169)
Secondo l'approccio di Shoenfeld, professore di Matematica presso l'Università della California a Berkeley, è importante analizzare:

- Le convinzioni sul compito
- Le convinzioni sull'ambiente -> teorie del successo
- Le convinzioni sulla matematica
- Le convinzioni su di sé

Si tratta di distinzioni teoriche, poiché i vari tipi di convinzione di solito interagiscono in modo significativo, tuttavia la caratterizzazione proposta è funzionale ad analizzare in modo sistematico i comportamenti e le risposte degli studenti.
Supponiamo ad esempio che un allievo debba risolvere il seguente problema:
Trova almeno una soluzione dell'equazione $4x^3 - x^4 = 30$*, oppure spiega perché non esistono soluzioni.*

Se l'allievo vede il problema come un problema di algebra (in fondo si parla di equazioni, e la prima parola del testo è "trova") e ritiene che il contesto dell'algebra sia caratterizzato da procedure (essenzialmente la manipolazione di espressioni algebriche), queste convinzioni lo guideranno nel processo risolutivo, ed in particolare gli impediranno di provare altre strade: ad esempio quella di dimostrare che non esistono soluzioni, utilizzando l'osservazione che la funzione $f(x) = 4x^3 - x^4$
ha valore massimo 27, e quindi non può assumere il valore 30 (Zan, 2007, *Difficoltà in matematica* pag. 173)

Particolarmente interessanti sono le cosiddette teorie del successo, che comprendono le convinzioni sugli obiettivi dell'insegnamento e sulle aspettative dell'insegnante, le convinzioni su cosa vuol dire aver successo in matematica e quali sono le cause del successo o le strategie da attivare per avere successo.
Alcuni esempi significativi in cui si evidenziano queste convinzioni sono:

- *Per studiare la matematica basta fare esercizi, non è necessario studiare la teoria.*

...succede con la teoria matematica quello che succede con il libretto di istruzioni di un nuovo elettrodomestico: una volta che abbiamo imparato ad usarlo possiamo dimenticarci delle istruzioni, ed il libretto può essere chiuso in un cassetto; lo andremo a cercare solo nel caso di un mancato funzionamento che non sappiamo come risolvere, e solo con quel preciso obiettivo. (Zan, 2007, *Difficoltà in matematica* pag. 175)

La teoria oggetto delle spiegazioni dell'insegnante o dei libri di testo viene quindi interpretata come "istruzioni per l'uso" e quindi può essere dimenticata appena si acquisisce.

- *Il buon senso in matematica non serve.*

Si tratta di quelle situazioni in cui l'insegnante di matematica rimane stupito del comportamento dello studente, ad esempio quando si blocca davanti ad un passaggio che richiederebbe solo un po' di buon senso, dove per "buon senso" si intende l'uso di una certa razionalità interna alla matematica che rispetta le sue regole del gioco.

- *Per imparare in matematica ci vuole tanta memoria.*

Questa convinzione deriva da un'altra convinzione dello studente: quella di non poter capire. Per questo motivo si convince che è più semplice memorizzare.

- *Per andare bene in matematica bisogna essere portati.*

Questa convinzione si collega alla considerazione generale che si ha sulla matematica, citata anche all'inizio: l'insuccesso in matematica è più naturale del successo.
Possiamo pensare che il successo venga interpretato in modi diversi. Ad esempio in un contesto scolastico alcuni studenti identificano il successo con il rendimento, cioè prendere buoni vuoti, altri invece identificano il successo con la percezione di capire.
Lo studente che identifica il successo con il rendimento dirigerà l'impegno nella direzione delle sue convinzioni sulle aspettative dell'insegnante. Il problema è che certe teorie del successo risultano vincenti in un certo ordine di scuola ma risultano perdenti in un altro ordine di scuola o con un altro insegnante, dove cambiano i programmi, i contenuti e le richieste degli insegnanti.
Un altro problema da considerare, è la diversa combinazione delle visioni della matematica tra insegnante e allievo.
Sovente si assiste ad una visione strumentale da parte dell'allievo e relazionale da parte dell'insegnante: ad esempio quando lo studente dice “ho capito” in realtà intende dire una cosa diversa da quella dell'insegnante. Per lo studente capire significa applicare le regole apprese, invece per l'insegnante significa comprendere i perché e le relazioni implicite.
Se l'allievo ritiene di “non potercela fare” rinuncerà ad attivare i processi di controllo. Affinché l'allievo investa le energie e le risorse necessarie per l'attivazione di questi processi è necessario che creda di avere le risorse necessarie da attivare riguardo alle sue conoscenze, cioè che sia consapevole di potercela fare.
E' dunque evidente, considerando le difficoltà che uno studente incontra all'inizio di un percorso universitario, che queste difficoltà non sono collegabili solo a carenze di conoscenze.
Solitamente le difficoltà maggiori si evidenziano nell'incapacità di decidere quali conoscenze utilizzare per affrontare un problema. Ovviamente, sono notevoli ostacoli anche gli atteggiamenti negativi, quali ad esempio la mancanza di interesse, di determinazione, di motivazione, o l'insicurezza, che spinge lo studente ad attribuire, in questo modo, all'insegnante la responsabilità dell'eventuale insuccesso.

La maggior parte degli studenti attribuisce il proprio fallimento in matematica alle lacune di base e alle difficoltà intrinseche della materia, assumendo un atteggiamento di scarso impegno e apprendimento passivo, rinunciando a priori ad utilizzare le proprie risorse.

Il problema che ci si pone è quello di indagare come sia possibile agire in modo da superare tali difficoltà.

La questione naturalmente investe l'intero percorso scolastico, dalle elementari alla scuola secondaria di secondo grado, ma un contesto in cui si pone in modo particolare è quello del passaggio dalla scuola secondaria di secondo grado all'università.

In questo momento di passaggio si aggiunge inoltre la difficoltà di convincere uno studente a rivedere in modo sistematico e con attenzione argomenti già affrontati.

Bisogna, quindi, interpretare in modo costruttivo il fallimento dello studente, suggerendo nuove direzioni per l'impegno e definendo di volta in volta le strategie da utilizzare.

Questo è possibile solo se lo studente si assume la responsabilità dell'apprendimento: ciò comporta uno sforzo notevole, che può avvenire solamente se viene attribuito un valore positivo a tale sforzo.

E' interessante quanto sottolinea Rosetta Zan:

In un contesto di recupero, in cui è cruciale all'inizio condividere gli obiettivi, non si ottiene a mio parere un cambiamento imponendo d'autorità l'obiettivo che in quanto esperti riteniamo "giusto". Per lo stesso motivo l'obiettivo esplicito del corso comunicato agli studenti era quello di aiutarli a superare l'esame: non sarebbe stato altrettanto condivisibile l'obiettivo di imparare la matematica. E' una sfida per il docente dimostrare agli studenti che proprio imparare la matematica può essere il percorso più economico e sicuro per raggiungere i loro obiettivi.

Proprio nella direzione della "sfida" citata, durante l'esperienza di tutorato descritta nel paragrafo che segue, ho sperimentato alcune attività di matematica nell'ipotesi di un lavoro mirato a rendere gli studenti consapevoli dei propri processi decisionali e capaci di prendere decisioni adeguate.

2.Un'esperienza di tutorato

Nel mese di luglio 2013 mi è stato assegnato un progetto di Tutorato (come detto precedentemente)
A supporto di un corso di Fisica di base (3 cfu) per gli studenti delle seguenti lauree triennali: Fisiopatologia cardiocircolatoria e perfusione cardiovascolare, Tecniche di laboratorio biomedico, Tecniche di radiologia medica per immagini e radioterapia, Tecniche ortopediche, Dietistica e Igiene dentale.

Gli argomenti trattati nel corso di Fisica riguardano i seguenti temi: grandezze vettoriali e scalari, sistemi di misurazione, meccanica, meccanica dei fluidi nei sistemi biologici, termologia, termodinamica, fenomeni elettrici e fenomeni ondulatori.
Gli obiettivi del progetto, come si può evincere dallo stesso nome, erano: conformare le conoscenze matematiche degli studenti ai fini di un proficuo apprendimento dei concetti di fisica, mettere in evidenza lo stretto rapporto tra le due discipline e fare apprezzare la matematica in quanto strumento di cui si serve la fisica; senza tralasciare un obiettivo comune a tutti i progetti di tutorato ovvero quello di contribuire a rimuovere ostacoli e lacune allo scopo di una attiva e partecipata frequenza del corso.
All'inizio del corso di Fisica, prima dell'inizio del tutorato, è stato chiesto ai ragazzi di svolgere, in forma anonima, un Test di matematica di base (vedi Appendice). Gli studenti presenti il giorno del Test erano 83, essi sono stati informati del fatto che il Test non avrebbe avuto nessuna influenza sulla valutazione finale e che avrebbe soltanto verificato il livello delle loro competenze matematiche iniziali.
Nel Test sono stati inseriti degli esercizi, selezionati dalle prove INVALSI per le classi seconde delle scuole secondarie di secondo grado, riguardanti: percentuali, potenze, geometria, traduzione di grafici e tabelle, passaggio dal linguaggio verbale al linguaggio simbolico e la risoluzione di equazioni.
In particolare gli esercizi sono stati selezionati appositamente in modo che lo studente, per risolverli, non debba necessariamente ricorrere alla formula o all'applicazione delle proprietà teoriche, ma debba riflettere sulle conoscenze possedute. Lo studente, ad esempio, nei quesiti sulle percentuali deve aver chiaro che aumentare una quantità del 20% equivale a moltiplicarla per 1.2, e questo è preferibile rispetto al ricorso ad una proporzione, oppure se deve risolvere $2^{37} + 2^{38}$ non deve necessariamente ricorrere al raccoglimento parziale e all'applicazione delle proprietà delle potenze per accorgersi che l'ordine di grandezza di questa somma è 2^{38}.
Con la docente del corso di Fisica si era scelto di inserire questi argomenti perché, a nostro parere, rivestono un ruolo essenziale per svolgere ulteriori considerazioni nell'ambito fisico.
Il risultato del Test ha permesso agli studenti di valutare il loro livello di preparazione iniziale, spronando i ragazzi con più difficoltà a farsi carico del recupero.
In molti elaborati si osservano carenze dovute a mancanza di controllo di tempo (in particolare veniva dedicato ad un singolo esercizio una parte eccessiva del tempo totale disponibile); mancanza di controllo sui procedimenti e sui calcoli; rinuncia a priori ad affrontare alcuni esercizi. I commenti

relativi ai singoli esercizi del Test e l'analisi dei risultati sono presentati in dettaglio alla fine del paragrafo.

Sulla base dei risultati ottenuti nella prova iniziale abbiamo deciso di dedicare i primi incontri di tutorato alla correzione dei quesiti del Test, proponendo attività specifiche che miravano alla rivisitazione delle conoscenze base necessarie.

La prima difficoltà è stata quella di catturare l'attenzione sugli argomenti matematici trattati, in quanto ritenuti dagli studenti non necessari per il superamento dell'esame di Fisica. E' stato necessario un po' di tempo affinché scoprissero l'importanza delle relazioni tra le due discipline.

Nei primi incontri ho avuto modo di osservare come gli studenti facessero fatica ad individuare e a ragionare su certe semplici relazioni, come ad esempio quelle tra accelerazione, velocità, spazio e tempo nelle leggi del moto. In particolare avevano difficoltà nell'individuare i rapporti di proporzionalità diretta e inversa nelle grandezze in gioco e risultava complicato capire quando applicare, per risolvere gli esercizi proposti, una formula piuttosto che un'altra.

Questo è dovuto probabilmente ad uno studio meccanico e mnemonico delle formule, con l'omissione della comprensione delle relazioni tra le grandezze in questione.

Un altro problema in cui ci si è imbattuti inizialmente è stato il fatto che molti studenti non avevano mai studiato fisica nei loro percorsi precedenti e alcuni di loro, pur avendola studiato in passato, avevano ripreso gli studi dopo parecchi anni. A queste situazioni particolari si è cercato di dedicare più tempo, fissando alcuni incontri individuali e mirati.

Gli altri incontri di tutorato sono stati dedicati alla risoluzione di compiti d'esame. In particolare si è proceduto in modo graduale, cercando di andare di pari passo con gli argomenti svolti dalla docente a lezione (il tutorato si è svolto in concomitanza con le lezioni).

Una strategia che ho utilizzato, grazie anche al numero non elevato di studenti, è stata la risoluzione a turno degli esercizi alla lavagna. Ho tentato di non lasciarmi sfuggire ogni singolo spunto offerto dall' allievo, anzi ho scelto di valorizzarlo. Da qui è nato lo spunto per riflettere insieme su quali concetti potevano essere implicati nella soluzione dei problemi.

Grazie all'utilizzo di questa strategia ogni studente ha avuto la possibilità di valutare le conoscenze possedute esplicitando i propri dubbi, di mettere in discussione il suo metodo di studio di assumere la consapevolezza dell'eventuale necessità di colmare alcune lacune.

Si è cercato di aiutare gli studenti ad interpretare in modo costruttivo il proprio fallimento, suggerendo nello stesso tempo nuove direzioni per l'impegno, in modo da favorire il successo ed aumentare la propria fiducia.

Inoltre ho osservato che ogni studente assumeva un atteggiamento diverso, non aveva paura di esternare i propri dubbi e le proprie difficoltà in quanto, rispetto all'insegnante, vedeva il tutor più "vicino" a lui, grazie anche all'ambiente e al contesto che si era venuto a creare, eliminando in questo modo quei sentimenti di ansia e timore che ostacolano la partecipazione.

Periodicamente ho proposto delle schede con esercizi e domande di riepilogo. Queste schede non sono state raccolte al termine della compilazione, perché ideate con lo scopo di consentire il miglioramento delle capacità di autovalutazione e di riflessione sui propri punti di forza e di debolezza relativi agli argomenti in questione.

Ho sottolineato l'importanza di pianificare un programma di studio efficiente, che preveda ovviamente lo studio di ogni parte, ma anche tempi specifici per la ripetizione di alcuni argomenti, soprattutto quelli ritenuti più importanti e quelli che richiedono maggiore capacità di memorizzazione.

A conclusione dell'esperienza si può dire che l'intervento ha avuto pieno successo. Al termine del corso gli studenti manifestavano un notevole cambiamento a livello di comportamenti metacognitivi e di atteggiamenti: riuscivano a fare dei collegamenti e ad impegnarsi in modo critico, erano in grado di individuare i propri dubbi, davanti ad una prova scritta mettevano in atto strategie di controllo, si mostravano più interessati alla materia, ma soprattutto si sentivano più sicuri di "potercela fare" in quanto era forse cambiata la percezione della controllabilità dei fallimenti precedenti. Tali cambiamenti sono stati del resto confermati dai risultati: tutti gli studenti hanno superato la prova scritta nei primi due appelli, riportando anche buone votazioni finali (dei 15 studenti che hanno frequentato il tutorato in maniera assidua, 4 studenti sono stati valutati nella fascia 21-24, 10 con una votazione tra 25-29 e addirittura uno studente ha ottenuto la votazione di 30 e lode).

Nelle seguenti figure è rappresentato il confronto tra gli esiti del Test e i risultati ottenuti dagli studenti del biennio delle scuole secondarie di secondo grado. Non sono riportati gli esiti relativi ai quesiti delle prove Invalsi 2012, poiché in quell'anno non sono stati pubblicati, ad eccezione dell'esercizio 11 analizzato in un lavoro in cui si confrontano alcuni risultati ottenuti dalle prove dei tredicenni e dei quindicenni

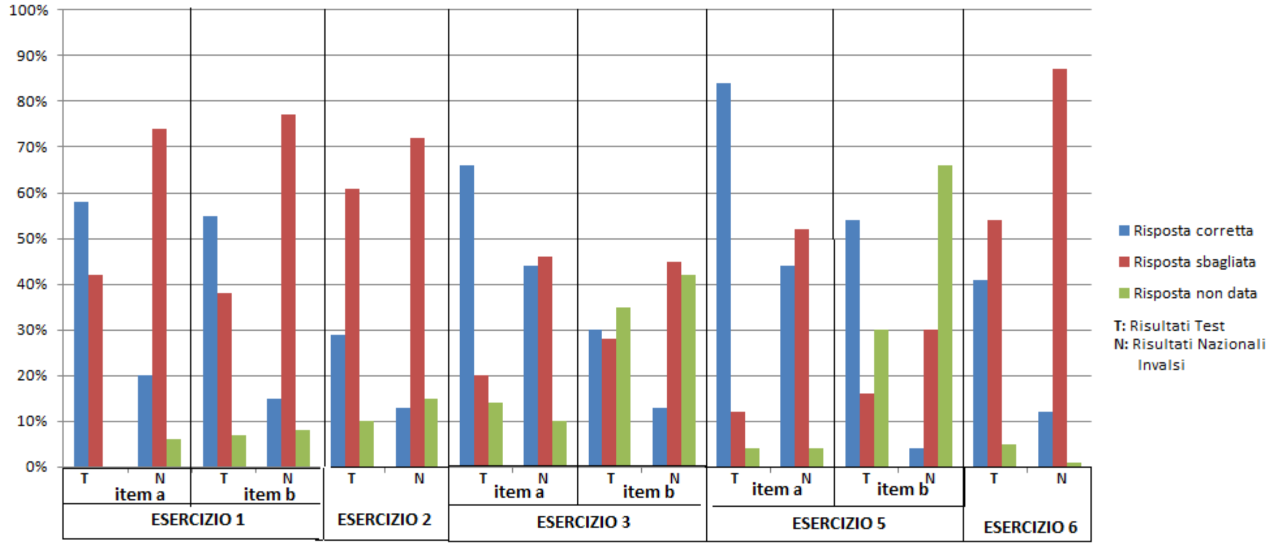


FIGURA 1

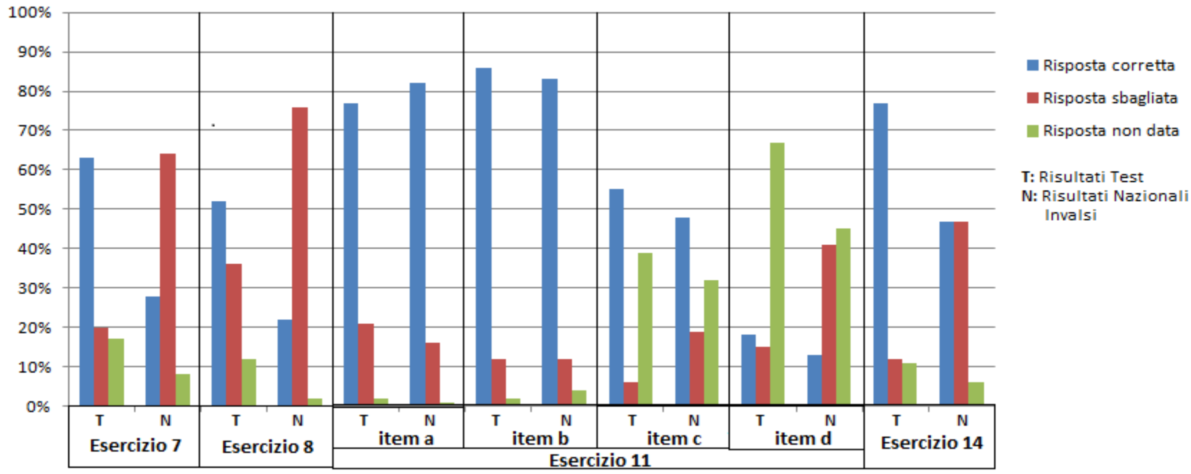


FIGURA 2

Dagli esiti riassunti nelle figure 1 e 2, si osserva facilmente che gli studenti universitari hanno ottenuto globalmente dei risultati migliori rispetto a quelli nazionali, del resto sarebbe stato preoccupante osservare il contrario.

Non mi sembra significativo entrare nel dettaglio di questo confronto, tuttavia possiamo osservare che in alcuni quesiti, cioè nell'esercizio 2 e nell'esercizio 11 (item a), b), c)), si sono ottenuti risultati simili.

ESERCIZIO 2

Per l'acquisto di un computer sono stati spesi 300 euro. Il prezzo è composto dal costo base più l'IVA, pari al 20% del costo base. Quanto è stato pagato di IVA?

Risposta: …………………. euro

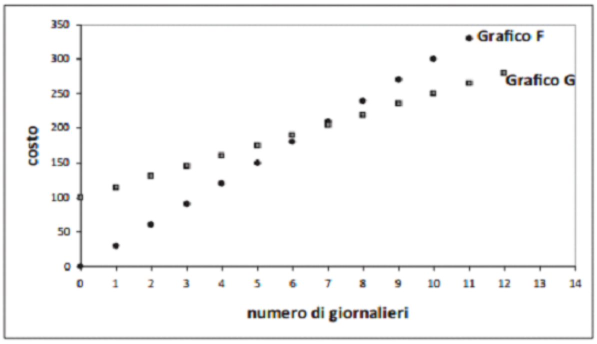
L'esercizio 2 è uno dei quesiti sulle percentuali, in particolare si tratta di un problema inverso. Dal grafico 1 osserviamo che si è ottenuta una percentuale di risposte corrette inferiore al 30% per entrambi i gruppi di studenti (per gli studenti della scuola secondaria addirittura inferiore al 15%). Se poniamo l'attenzione anche sugli altri risultati, relativi ai quesiti sulle percentuali (l'esercizio 1 e l'item b dell'esercizio 5), non si osserva una situazione migliore. Infatti in nessuno degli esercizi si ottiene
una percentuale di risposte corrette superiore al 60%.

Le usuali prassi scolastiche, i libri di testo e i risultati insoddisfacenti, che puntualmente si ottengono a vari livelli scolastici su questo argomento, mettono in luce quanto sia necessario ripensare ancora alle azioni didattiche che nella scuola secondaria di primo e secondo grado accompagnano lo sviluppo del ragionamento proporzionale e di conseguenza l'utilizzo consapevole delle percentuali.

Il problema è che il contesto matematico sulle percentuali deve essere scollegato dal contesto tradizionale della teoria delle proporzioni per essere collocato più opportunamente nell'ambito della funzione di proporzionalità diretta coerentemente alle Indicazioni Nazionali. (Ad esempio in riferimento al nostro Test, nell'item a dell'esercizio 5 su 45 studenti che hanno risposto correttamente, 44 hanno utilizzato come strategia risolutiva le proporzioni e solo uno studente ha utilizzato il rapporto di proporzionalità).

ESERCIZIO 11

Mario va in vacanza in una località sciistica. Per usufruire degli impianti di risalita (seggiovie, funivie, ...), può scegliere tra due offerte, A e B, entrambe valide per tutta la stagione invernale.
Offerta A: costo iniziale fisso di 100 euro più 15 euro per ogni giornaliero (ossia per ogni giorno in cui si usano gli impianti di risalita).
Offerta B: 30 euro per ogni giornaliero, senza costo iniziale.
Osserva la seguente figura.



a. **Quale, fra i grafici F e G, rappresenta l'offerta A?**
A. ☐ Il grafico **F**
B. ☐ Il grafico **G**

b. **Se Mario usa gli impianti di risalita solo per cinque giorni durante la stagione invernale, quale offerta gli conviene scegliere?**
Risposta: ....

c. **Scrivi due formule, una per l'offerta A e una per l'offerta B, che esprimano il costo *c* al variare del numero di giornalieri *g*.**
Offerta A: $c =$ ....
Offerta B: $c =$ ....

d. **Qual è il numero di giornalieri per cui il costo dell'offerta B è una volta e mezza il costo dell'offerta A?**
Risposta: ....

Per quanto riguarda l'esercizio 11 osserviamo che nei quesiti a e b gli studenti hanno ottenuto un buon risultato (nell'item a) gli esiti nazionali risultano addirittura migliori di quelli del Test).

Questo fatto, a mio parere, deriva probabilmente dalla difficoltà non elevata degli esercizi ma anche dall'osservazione che avevamo già presentato nel Capitolo 1: poiché si tratta di quesiti prettamente di logica, lo studente si sente in un certo senso più "libero" di ragionare senza la necessità di ricorrere a formule o algoritmi.

Questi esercizi, a mio parere, possono contrastare quelle convinzioni che gli studenti hanno sulla disciplina: "Per andare bene in matematica bisogna essere portati, per imparare in matematica ci vuole tanta memoria, etc." Riuscire a risolvere questi esercizi può dunque sollecitare un ricorso più frequente alle proprie capacità critiche.

Questo atteggiamento deve essere alla base di ogni procedimento risolutivo, prima del ricorso alla teoria, alle proprietà e alle formule, che sono sicuramente conoscenze importanti e indispensabili per la risoluzione ma devono essere richiamati al momento opportuno.

Dal confronto dei risultati tra le due categorie di studenti è possibile osservare che il quesito che risulta più facile per entrambe è l'item b dell'esercizio 11. Dalla figura 2, infatti, si osserva una buona percentuale di risposte corrette, 86%, ottenuta dai ragazzi universitari e 83% dai quindicenni.

Per quanto riguarda l'esercizio più difficile, per i quindicenni è risultato l'item b dell'esercizio 5. Dalla figura 1, infatti, si osserva una percentuale di risposte corrette pari al 4%. Inoltre, è possibile osservare che in questo esercizio gli studenti di scuola secondaria hanno ottenuto la percentuale maggiore di risposte omesse (66%).

ESERCIZIO 5

La seguente tabella riporta il numero di vittime per incidenti stradali dal 2001 al 2007 in una regione italiana.

Anno	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**
Numero di vittime	792	776	700	681	635	539	531

(Fonte: Eurostat, Regional Transport Statistics)

b. **Di quale percentuale è diminuito il numero di vittime per incidenti stradali dal 2001 al 2007?**
Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e infine riporta il risultato.

....

....

....

Risultato: ....

Per gli studenti universitari, invece, è risultato più difficile l'item d dell'esercizio 11 (nella pagina precedente), dalla figura 2, infatti, possiamo osservare la percentuale di risposte corrette pari al 18%.

Anche in questo caso, come per i quindicenni, nell'esercizio con la percentuale più bassa di risposte corrette si è ottenuta la percentuale più alta di risposte omesse che è pari al 67%.

Un altro risultato interessante da osservare è l'esercizio con la percentuale più alta di risposte sbagliate. E' probabile, in questo caso, che lo studente abbia una consapevolezza errata degli argomenti in questione: il fatto che lo studente risponda al quesito, a differenza del caso in cui non

risponde (perché non sa rispondere o perché è insicuro), dimostra come egli ritenga di conoscere la risoluzione del problema, che poi tuttavia si rivela errata.
Per i quindicenni l'esercizio con la percentuale più alta di risposte sbagliate è il numero 6 (87%).

ESERCIZIO 6

Qual è la metà del numero $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$?

☐ A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$

☐ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$

☐ C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$

☐ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$

Per gli studenti universitari è l'esercizio 2, con una percentuale pari al 61%.

ESERCIZIO 2

Per l'acquisto di un computer sono stati spesi 300 euro. Il prezzo è composto dal costo base più l'IVA, pari al 20% del costo base. Quanto è stato pagato di IVA?

Risposta: .... euro

In conclusione, gli esercizi proposti nel Test non si sono rivelati banali per gli studenti all'ingresso universitario e dunque gli esiti ottenuti e le analisi delle strategie scorrette hanno dato indicazioni importanti per la progettazione del recupero delle rispettive competenze matematiche.

Conclusioni

L' esperienza di tutor e la stesura di questo lavoro mi hanno permesso di effettuare delle considerazioni di carattere generale sul contesto del recupero. In primo luogo, è importante sottolineare che il problema del recupero per gli studenti non è caratterizzato solamente dalla mancanza di conoscenze base sulla disciplina, ma anche da una serie di fattori che influenzano l'atteggiamento di rifiuto e sconfitta a priori.

Lo studente deve assumere la consapevolezza che esistono motivi differenti connessi al proprio insuccesso, deve quindi mettere in discussione le modalità e l'atteggiamento con cui affronta il recupero. Ad esempio, dovrebbe essere in grado di attribuire il proprio fallimento ad un metodo di studio inadeguato, e non utilizzare come unica scusante la difficoltà intrinseca della matematica.
Il contesto del recupero potrebbe diventare, quindi, il mezzo attraverso il quale si aiutano gli studenti a raggiungere tale consapevolezza, grazie a delle attività o all'attuazione di strategie che attivano in loro processi metacognitivi adeguati.
Nel momento in cui si rendono conto che il nuovo approccio produce risultati positivi,
saranno in grado di esercitare un controllo sulle cause del precedente fallimento,
modificando il proprio metodo di studio.
Come afferma Rosetta Zan: *Nel recupero è come insegnare ad andare in bicicletta ad un bambino che ci ha provato tante volte senza mai riuscire, cadendo e facendosi male: bisogna prima di tutto convincerlo a riprovare.*

Appendice A

Questionario di MATEMATICA

Maturità conseguita con voto ..../100 presso:

☐ **Liceo Scientifico**

☐ **Liceo Classico**

☐ **Istituto Tecnico (quale?) ....**

☐ **Altro (precisare): ....**

ESERCIZIO 1

Considera un quadrato di lato *a*.

a. **Se si aumenta il lato *a* del 20%, si ottiene un nuovo quadrato di lato *b*. Quale delle seguenti espressioni rappresenta la misura di *b*?**

A. ☐ $20\,a$

B. ☐ $1{,}20\,a$

C. ☐ $a + 20$

D. ☐ $a + 0{,}20$

b. **Di quanto aumenta in percentuale l'area del quadrato di lato *b* rispetto all'area del quadrato di lato *a*?**

A. ☐ Del 20%

B. ☐ Del 40%

C. ☐ Del 44%

D. ☐ Del 120%

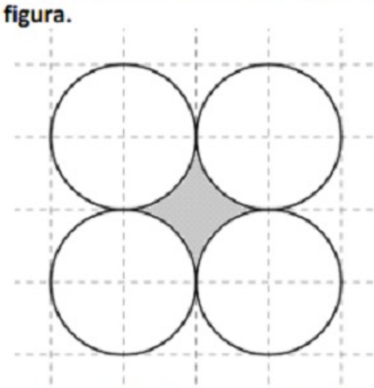
ESERCIZIO 2

Per l'acquisto di un computer sono stati spesi 300 euro. Il prezzo è composto dal costo base più l'IVA, pari al 20% del costo base. Quanto è stato pagato di IVA?

Risposta: .... euro

ESERCIZIO 3

Ricorda che la lunghezza di una circonferenza si calcola moltiplicando il suo diametro per π e che l'area di un cerchio si ottiene moltiplicando il quadrato del suo raggio per π. Quattro circonferenze, ciascuna con diametro 10 cm, sono tangenti a due a due come mostrato nella seguente figura.



a. **Il perimetro della regione evidenziata in grigio misura in centimetri:**

A. ☐ 20π

B. ☐ 10π

C. ☐ 5π

D. ☐ 4π

b. **La superficie della regione evidenziata in grigio misura** .... cm²

ESERCIZIO 4

Si sa che $2^{10} = 1024$. Quale fra le seguenti potenze del 10 è quella che più si avvicina a 2^{70}?

A. ☐ 10^{24}

B. ☐ 10^{21}

C. ☐ 10^{14}

D. ☐ 10^{7}

Scrivi il ragionamento o i calcoli che hai svolto per trovare il risultato:..............

...

...

ESERCIZIO 5

La seguente tabella riporta il numero di vittime per incidenti stradali dal 2001 al 2007 in una regione italiana.

Anno	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**
Numero di vittime	792	776	700	681	635	539	531

(Fonte: Eurostat, Regional Transport Statistics)

a. **In quale dei seguenti periodi si è avuta la diminuzione più consistente del numero di vittime per incidenti stradali?**

A. ☐ tra il 2001 e il 2002

B. ☐ tra il 2002 e il 2003

C. ☐ tra il 2003 e il 2004

D. ☐ tra il 2004 e il 2005

b. **Di quale percentuale è diminuito il numero di vittime per incidenti stradali dal 2001 al 2007?**
Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e infine riporta il risultato.

....

....

....

Risultato: ....

ESERCIZIO 6

Qual è la metà del numero $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ **?**

☐ A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$

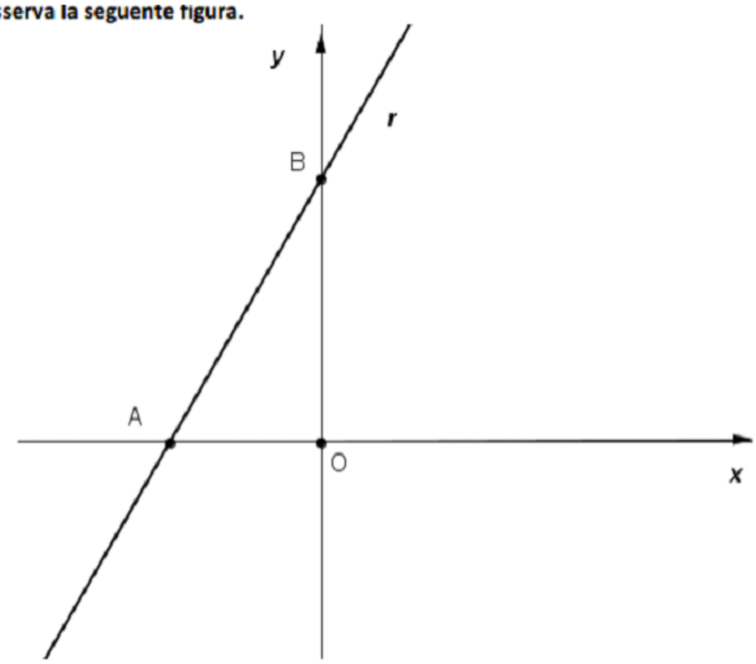
☐ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$

☐ C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$

☐ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$

ESERCIZIO 7

Osserva la seguente figura.



Le coordinate di A sono (– 3; 0) e l'area del triangolo AOB è 9.
Quale fra le seguenti equazioni rappresenta la retta *r*?

A. ☐ $y = 2x + 6$

B. ☐ $y = -2x - 6$

C. ☐ $y = 3x + 9$

D. ☐ $y = -3x - 9$

ESERCIZIO 8

L'espressione $10^{37} + 10^{38}$ è anche uguale a

☐ A. 20^{75}

☐ B. 10^{7}

☐ C. $11 \cdot 10^{37}$

☐ D. $10^{37 \cdot 38}$

ESERCIZIO 9

In un negozio un abito è messo in vendita con uno sconto del 30% sul prezzo originario. Durante la stagione dei saldi il prezzo già scontato viene ancora abbassato del 10%. Qual è la percentuale complessiva di sconto sul prezzo originario dell'abito?

A. ☐ 20%

B. ☐ 33%

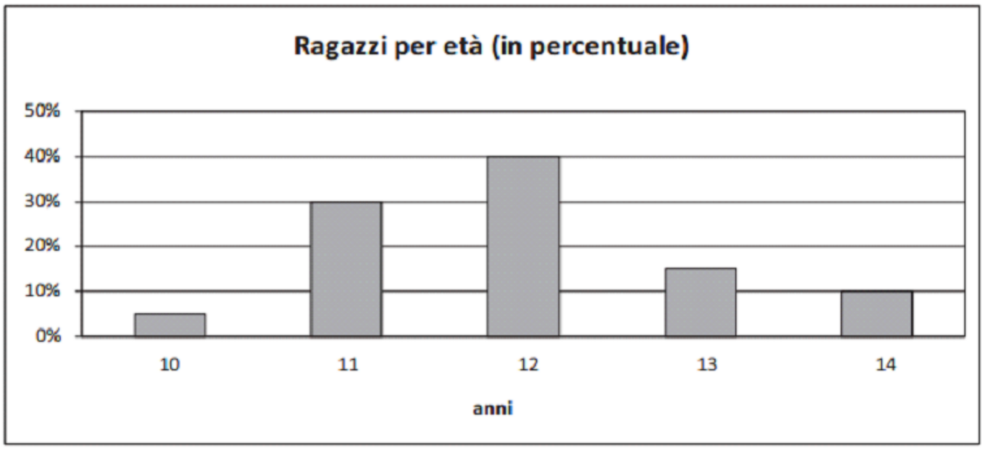
C. ☐ 37%

D. ☐ 40%

Scrivi i calcoli che hai fatto per rispondere. …...

ESERCIZIO 10

Un gruppo di boyscout è formato da ragazzi di età compresa tra i 10 e i 14 anni. La distribuzione delle frequenze percentuali delle età è riportata nel diagramma seguente:

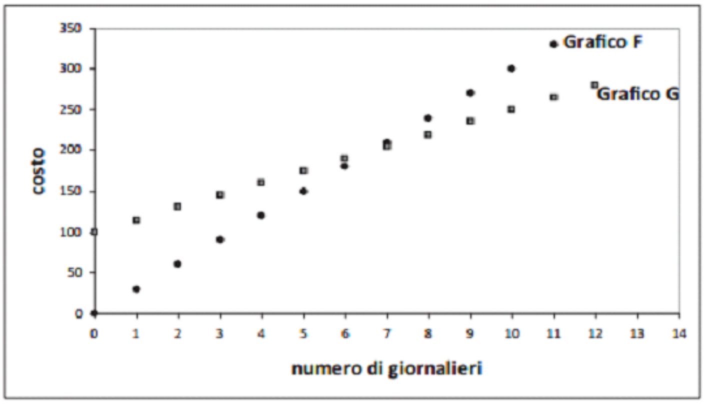


Sulla base dei dati riportati nel diagramma, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

		V	F
a.	Più dell'80% dei ragazzi ha meno di 13 anni.	☐	☐
b.	Meno del 70% dei ragazzi ha più di 11 anni.	☐	☐
c.	La percentuale di ragazzi che hanno 12 o 14 anni è uguale alla percentuale di ragazzi che hanno 10 o 11 o 13 anni.	☐	☐

ESERCIZIO 11

Mario va in vacanza in una località sciistica. Per usufruire degli impianti di risalita (seggiovie, funivie, ...), può scegliere tra due offerte, A e B, entrambe valide per tutta la stagione invernale.
Offerta A: costo iniziale fisso di 100 euro più 15 euro per ogni giornaliero (ossia per ogni giorno in cui si usano gli impianti di risalita).
Offerta B: 30 euro per ogni giornaliero, senza costo iniziale.
Osserva la seguente figura.



a. Quale, fra i grafici F e G, rappresenta l'offerta A?

A. ☐ Il grafico **F**

B. ☐ Il grafico **G**

b. Se Mario usa gli impianti di risalita solo per cinque giorni durante la stagione invernale, quale offerta gli conviene scegliere?

Risposta: ....

c. Scrivi due formule, una per l'offerta A e una per l'offerta B, che esprimano il costo *c* al variare del numero di giornalieri *g*.

Offerta A: $c =$ ....

Offerta B: $c =$ ....

d. Qual è il numero di giornalieri per cui il costo dell'offerta B è una volta e mezza il costo dell'offerta A?

Risposta: ....

ESERCIZIO 12

Durante il periodo estivo Anna deve leggere un libro di 305 pagine come compito per le vacanze. Nel mese di giugno si riposa e a partire dal primo giorno di luglio legge 5 pagine al giorno per tutto il mese. In agosto va in vacanza con i genitori e dimentica il libro a casa; al suo ritorno, negli ultimi 10 giorni di vacanza, per terminare il libro legge 15 pagine al giorno. Quale, fra i seguenti grafici, può rappresentare l'andamento del numero di pagine lette da Anna nel periodo estivo?

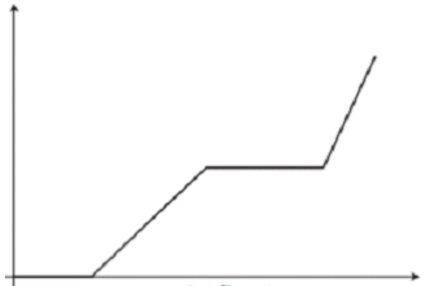


Grafico 1

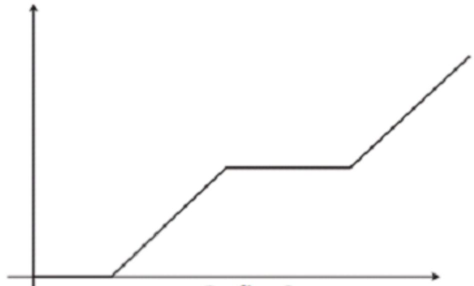


Grafico 2

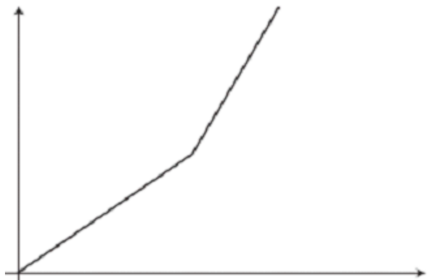


Grafico 3

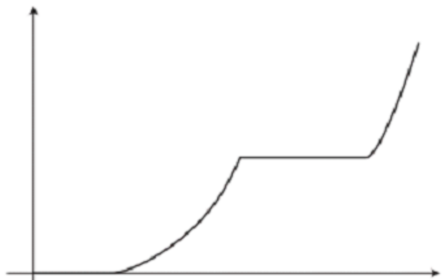


Grafico 4

A. ☐ Il grafico 1

B. ☐ Il grafico 2

C. ☐ Il grafico 3

D. ☐ Il grafico 4

ESERCIZIO 13

L'equazione $x(x-1)=6$ ha fra le sue soluzioni

A. ☐ $\frac{1}{6}$

B. ☐ 3

C. ☐ 6

D. ☐ 7

ESERCIZIO 14

Carlotta, nel periodo di Natale, lavora come commessa in un negozio di calzature e guadagna 8 euro all'ora più una commissione del 5% sul ricavo totale delle scarpe che riesce a vendere. Quale formula esprime il suo guadagno *g*, se lavora *h* ore e vende scarpe per un valore totale di *s* euro?

☐ A. $g = 8h + 0{,}05s$

☐ B. $g = 8h + 0{,}5s$

☐ C. $g = 5h + 8s$

☐ D. $g = 8h + 5s$

ESERCIZIO 15

Luigi e Paolo investono la stessa somma di denaro. Dopo il primo anno, la somma investita da Luigi è aumentata del 10% e quella investita da Paolo è diminuita del 5%. Luigi e Paolo decidono di reinvestire per un altro anno ancora le somme ottenute dopo il primo anno. Nel secondo anno Luigi perde il 5%, mentre Paolo guadagna il 10%.
Se Luigi e Paolo hanno investito inizialmente una somma di 1000 euro ciascuno, quanto avrà ciascuno dei due alla fine del secondo anno? Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e infine riporta i risultati.

....

....

....

Luigi: .... euro

Paolo: .... euro

Bibliografia

[1] Accascina G., Berneschi P., Bornoroni S.,De Vita M., Della Rocca G., Olivieri G., Parodi G. P., Ferruccio R., 1998
La strage degli innocenti Problemi di raccordo in matematica tra scuola e università,
Giovanni Battagin Editore, S.Zenone degli Ezzelini (Treviso)

[2] Alivernini F., Amici M., Campodifiori E., Cardone M., Falzetti P., Freddano M., Giangiacomo P, Lasorsa C., Martini A., Mastrogiovanni A., Mattei A., Papini M., Ricci R., Tortora V., Vinci E.,
Rivelazioni Nazionali sugli apprendimenti 2012/2013, il quadro di sistema .
http://www.invalsi.it/snvpn2013

[3] Arzarello F., Olivero F., Paola D., Robutti O. (1999).
I problemi di costruzione geometrica con l'aiuto di Cabri.
INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE. vol. 22B/4, pp. 309-338 ISSN: 1123-7570.

[4] Chevallard Y., Joshua M.A. (1982). Un example d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. Recherches en didactique des mathématiques, vol.3 (1), 159-239.

[5] De Virgilis R., Pesci A.
I quesiti di matematica INVALSI 2013 sulle percentuali: dall'analisi degli errori al ripensamento dell'azione didattica.
L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol 37B n.2, pagg. 139-158

[6] Garuti R., Impedovo M., Orlandi A., Paola D.
Risultati Nazionali prove Invalsi matematica 2011/2012, quaderni SNV n. 4/2012-MAT
http://www.invalsi.it/snvpn2013

[7] Impedovo M., Orlandi A., Paola D.
Invalsi, Servizio Nazionale di valutazione a.s. 2010/2011, Guida sintetica alla lettura della prova di Matematica Classe seconda-Scuola secondaria di secondo grado, Quaderni SNV n. 1-MAT
http://www.invalsi.it/snv2012

[8] INVALSI, Rilevazione degli apprendimenti a.s. 2010/2011, Prova di Matematica,
Scuola secondaria di secondo grado, Classe seconda
http://www.invalsi.it/snv1011

[9] INVALSI, Rilevazione degli apprendimenti a.s. 2011/2012, Prova di Matematica,
Scuola secondaria di secondo grado, Classe seconda
http://www.invalsi.it

[10] INVALSI, Rilevazione degli apprendimenti a.s. 2012/2013, Prova di Matematica,
Scuola secondaria di secondo grado, Classe seconda
http://www.invalsi.it/snvpn2013

[11] Zan R., 1996
Difficoltà di Apprendimento e Problem Solving: Proposte per un'attività di recupero,
L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol 19B n.4, pagg. 311-349

[12] Zan R., 2007
Difficoltà in Matematica. Osservare, Interpretare, Intervenire
Springer-Verlag Italia