

Influencia del esquema aditivo en el desarrollo del razonamiento proporcional

Ceneida Fernández, S. Llinares
Universidad de Alicante, España

E-mail: ceneida.fernandez@ua.es, sllinares@ua.es

Resumen. El objetivo de este estudio es analizar la influencia del esquema aditivo en el desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes de educación secundaria. 558 estudiantes de educación secundaria respondieron a un cuestionario de problemas proporcionales y no proporcionales. Los resultados indican (i) que la capacidad de los estudiantes en identificar las relaciones proporcionales en los problemas proporcionales no implica necesariamente que sean capaces de identificar correctamente las relaciones aditivas en los problemas no proporcionales y viceversa; y (ii) que el tipo de relación multiplicativa entre las cantidades (entera o no entera) influía en el nivel de éxito en la resolución de los problemas proporcionales y no proporcionales.

Abstract. The focus of this study is to analyse the influence of the additive schema in the development of secondary school students' proportional reasoning. A test consisted of proportional and non-proportional problems was solved by 558 secondary school students. Results show (i) that students' ability to identify the multiplicative relationships between quantities in proportional problems does not necessary imply students' ability to identify the additive relationships between quantities in non-proportional situations and vice versa; and (ii) that the type of multiplicative relationship between quantities (integer or non-integer) influence on students' success when solving proportional and non-proportional problems.

Résumé. Le but de cette étude est d'analyser l'influence du schéma additif dans le développement du raisonnement proportionnel chez les élèves du secondaire. 558 élèves du secondaire ont répondu à un questionnaire de problèmes proportionnels et non proportionnels. Les résultats montrent (i) que la capacité des étudiants pour identifier les relations proportionnelles dans les problèmes proportionnels n'impliquent pas nécessairement qu'ils soient capables d'identifier correctement les relations additives dans les problèmes non proportionnels et vice versa ; et (ii) le genre de relation multiplicative entre les montants (entier ou non entier) a influencé dans le niveau de succès dans la résolution des problèmes proportionnels et non proportionnels.

1 1. La relación entre lo aditivo y lo multiplicativo en el desarrollo del razonamiento proporcional

Durante los últimos años se han venido realizando investigaciones sobre el razonamiento proporcional desde varias perspectivas (Berh, Harel, Post & Lesh, 1992; Misailidou & Williams, 2003; Noelting, 1980a, 1980b; Tourniaire & Pulos, 1985; Van Dooren, De Bock, Janssens & Verschaffel, 2008). Estas investigaciones han usado diferentes tipos de problemas (Cramer & Post, 1993), y han identificado estrategias correctas e incorrectas empleadas por los estudiantes (Christou & Philippou, 2002; Cramer & Post, 1993; Lamon, 1993; Tourniaire & Pulos, 1985). Una de las estrategias erróneas comúnmente usadas por los estudiantes en los problemas proporcionales se apoya en el uso de relaciones aditivas entre las cantidades. Por ejemplo, Hart (1988) indicó que muchos de los estudiantes de 13, 14 y 15 años en su investigación empleaban una relación aditiva errónea cuando resolvían el siguiente problema proporcional *“Mr. Short tiene un amigo llamado Mr. Tall. Cuando medimos sus alturas con cerillas, la altura de Mr. Short es de 4 cerillas y la altura de Mr. Tall es de 6 cerillas. ¿Cuántos clips son necesarios para medir la altura de Mr. Tall (cuando para la de Mr. Short son necesarios 6 clips)?”*. Por otra parte, Misailidou y Williams (2003) mostraron que un 53% de los estudiantes de edades comprendidas entre 10 y 13 años emplearon relaciones aditivas erróneas para su resolución apoyándose en: *“4 cerillas son iguales a 6 clips, luego 6 son 2 más que 4, por tanto hay que sumar”*.

Pero por otra parte, también se ha identificado el uso por parte de los estudiantes de relaciones proporcionales en situaciones donde no son aplicables en diferentes dominios matemáticos como geometría, álgebra, aritmética y probabilidad (Van Dooren et al., 2008). En particular, los estudiantes usan relaciones proporcionales en situaciones que tienen una relación aditiva entre las cantidades (De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2007; Fernández, Llinares & Valls, 2008; Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2009; Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2010; Modestou & Gagatsis, 2007; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens & Verschaffel, 2005). Por ejemplo, en el problema no proporcional: *“Ana y Sofía están corriendo alrededor de una pista de atletismo. Ana empezó primero. Cuando Ana había dado 9 vueltas, Sofía había dado 3 vueltas. Cuando Ana completó 15 vueltas, ¿cuántas vueltas había dado Sofía?”* que es modelizado mediante la función $f(x) = x + b$, $b \neq 0$ (llamaremos a este tipo de situaciones en esta investigación “aditivas” como en la

investigación de Van Dooren et al. (2005)), Karplus, Pulos y Stage (1993) observaron que 32 de 33 estudiantes para maestro respondieron erróneamente empleando relaciones de proporcionalidad. Por otra parte, Van Dooren et al. (2005) observaron un aumento del uso erróneo de relaciones multiplicativas en la resolución de las situaciones aditivas desde 3º curso a 6º curso de educación primaria.

Ante estos dos tipos de evidencias no se puede considerar que un estudiante que resuelve correctamente problemas proporcionales razone proporcionalmente puesto que no es capaz de discriminar situaciones proporcionales de situaciones no proporcionales. A partir de esta constatación Modestou y Gagatsis (2009, 2010) proponen un modelo de razonamiento proporcional que considera un amplio conjunto de habilidades cognitivas. En particular, el modelo integra aspectos del razonamiento analógico, la resolución de diferentes tipos de problemas de proporcionalidad y un nuevo aspecto de carácter meta-cognitivo. Este último aspecto tiene en cuenta la habilidad de diferenciar situaciones proporcionales de las no proporcionales y la habilidad de resolver situaciones no proporcionales. El modelo de razonamiento proporcional propuesto por Modestou y Gagatsis proporciona una nueva perspectiva en el diseño de cuestionarios para la evaluación del razonamiento proporcional al indicar que es necesario usar problemas proporcionales junto con problemas no proporcionales.

Esta situación subraya las relaciones evidentes que existen entre los esquemas aditivos y multiplicativos de los estudiantes en el desarrollo del razonamiento proporcional. Durante varias décadas, algunas investigaciones se han centrado en comprender el desarrollo del razonamiento multiplicativo y, en particular, en la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo. Las estructuras multiplicativas tienen algunos aspectos en común con la estructura aditiva, por ejemplo la multiplicación como “suma repetida”, pero también tienen su propia especificidad que no es reducible a aspectos aditivos. Por ejemplo, el producto cartesiano en problemas del tipo “Con 6 pantalones y 4 camisetas, ¿cuántas combinaciones posibles se pueden hacer?” o la idea de razón como un índice comparativo que no se deriva de la estructura aditiva como en el siguiente problema “Marta y Sofía quieren pintar sus habitaciones exactamente del mismo color. Marta mezcla 4 botes de pintura amarilla y 6 botes de pintura roja. Sofía ha usado 7 botes de pintura amarilla. ¿Cuántos botes de pintura roja necesitará?”. Esta situación indica que la construcción del significado de la idea de razón, como

idea clave para entender la relación entre el esquema aditivo y multiplicativo, requiere un cambio cualitativo en los esquemas cognitivos de los estudiantes de educación primaria en la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo para manejar nuevas situaciones (Fernández & Llinares, 2010, 2011; Greer, 1994; Lamon, 1993). La diferencia entre las situaciones proporcionales y las situaciones aditivas y el comportamiento de los estudiantes al intentar resolverlas constituyen un contexto idóneo para el estudio de la manera en la que los estudiantes construyen el significado de razón como aspecto característico de su transición desde el pensamiento aditivo al multiplicativo, y en particular para estudiar la influencia del esquema aditivo en el desarrollo del razonamiento proporcional (Fernandez, Llinares, Modestou & Gagatsis, 2010).

El presente estudio relaciona dos aspectos de la investigación en desarrollo del razonamiento proporcional. Por una parte, la confluencia de los dos fenómenos - uso de relaciones proporcionales en situaciones no aplicables y el uso de relaciones aditivas erróneas en problemas proporcionales- y por la otra, los estudios sobre las variables de tarea que influyen en estos fenómenos. En particular, el objetivo de este estudio es

- analizar la influencia del esquema aditivo en el desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes de educación secundaria

puesto de manifiesto por los cambios en las relaciones implicativas entre los niveles de éxito en la resolución de problemas proporcionales y problemas con estructura aditiva y por la influencia de las relaciones multiplicativas entre los números.

Esta investigación pretende aportar información acerca de la manera en la que los estudiantes construyen el significado de la idea de razón considerando las relaciones entre los niveles de éxito en la resolución de problemas proporcionales, donde las estrategias proporcionales son adecuadas pero las aditivas son incorrectas y problemas con estructura aditiva ($f(x) = x + b$, $b \neq 0$), donde las estrategias aditivas son adecuadas pero las estrategias proporcionales son incorrectas.

2 Método

2.1 . Participantes y contexto

Los participantes de la investigación fueron 558 estudiantes de educación secundaria: 124 estudiantes de 1º ESO (12-13 años), 151 estudiantes de 2ºESO (13-14 años), 154 estudiantes de 3ºESO (14-15 años) y 129 estudiantes de 4ºESO (15-

16 años). Aproximadamente había el mismo número de chicos que de chicas. De acuerdo con el currículo de educación secundaria, los estudiantes de 1º y 2º de educación secundaria deberían ser capaces de identificar las relaciones de proporcionalidad entre los números mediante el análisis de tablas y además, ser capaces de usar el algoritmo de la regla de tres (productos cruzados) para resolver problemas proporcionales de valor perdido. En 3º y 4º curso, el énfasis está en el estudio de la proporcionalidad a partir de las funciones lineales.

2.2 . Instrumentos de recogida de datos

El instrumento de recogida de datos es un cuestionario formado por 12 problemas: 4 problemas proporcionales, 4 problemas aditivos y 4 problemas “distractores”. Los problemas proporcionales se modelan mediante la función $f(x) = ax$, con $a \neq 0$, luego la relación entre las cantidades es multiplicativa. Por otra parte, usamos el término *problemas aditivos* (Van Dooren et al., 2005) para designar a situaciones no proporcionales modeladas como $f(x) = x + b$, con $b \neq 0$, ya que la relación entre las cantidades que definen la situación es aditiva. Describiremos las diferencias semánticas de las relaciones entre las cantidades, en estas dos situaciones, mediante dos ejemplos. Un ejemplo de problema proporcional es el siguiente:

- Raquel y Juan están plantando flores. Empezaron al mismo tiempo pero Juan es más rápido. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas flores ha plantado Juan?

En este problema la frase “*Empezaron al mismo tiempo pero Juan es más rápido. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores*” describe una relación multiplicativa entre las cantidades. El número de flores que ha plantado Juan es 3 veces el plantado por Raquel ($12 = 4 \times 3$). Sin embargo, en los problemas aditivos, las cantidades están relacionadas aditivamente. Un ejemplo de problema aditivo es:

- Raquel y Juan están plantando flores. Plantan a la misma velocidad pero Juan empezó antes. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas flores ha plantado Juan?

En este tipo de problema, la frase “*Plantan a la misma velocidad pero Juan empezó antes. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores*” describe un relación aditiva entre las cantidades. Juan ha plantado 8 flores más que Raquel ($12 = 4 + 8$). La diferencia entre ambas situaciones está en “3 veces” y “8 flores más”.

Los problemas “distractores” fueron incluidos para variar las tareas propuestas y evitar los efectos de aprendizaje y respuestas estereotipadas. Estos problemas fueron formulados de forma que se mantuviesen lo más parecido posible a los problemas experimentales pero con una estructura diferente. Además, también tuvimos en cuenta el tipo de razón (entera o no entera) y la naturaleza de las cantidades (discretas o continuas). De esta manera, 2 de los 4 problemas proporcionales (P) y 2 de los 4 problemas aditivos (A) tenían cantidades discretas (D) (uno con razones internas y externas enteras [I], D-I, y otro con razones internas y externas no enteras [N], D-N). Los otros 4 problemas (2 proporcionales y 2 aditivos) tenían cantidades continuas (C) (de nuevo, 2 con razones enteras, C-I, y 2 con razones no enteras, C-N). La Tabla 1 ejemplifica cómo hemos considerado las variables experimentales.

Tabla 1. Ejemplo de problemas y manipulación de la naturaleza de las cantidades (versiones D y C) y tipo de razón (versiones I y N)

Ejemplos		I		N	
P-D	Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Empezaron al mismo tiempo pero Tomás es más rápido. Cuando Pedro ha cargado a cajas, Tomás ha cargado b cajas. Si Pedro ha cargado c cajas, ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?	40	160	40	100
		80	x	60	x
A-D	Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado a cajas, Tomás ha cargado b cajas. Si Pedro ha cargado c cajas, ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?	40	160	40	100
		80	x	60	x
P-C	Ana y Raquel están patinando. Empezaron al mismo tiempo pero Raquel es más rápida. Cuando Ana ha patinado a metros, Raquel ha patinado b metros. Si Ana ha patinado c metros, ¿cuántos metros ha patinado Raquel?	150	300	80	120
		600	x	200	x

A-C	Ana y Raquel están patinando. Patinan a la misma velocidad pero Raquel empezó antes. Cuando Ana ha patinado a metros, Raquel ha patinado b metros. Si Ana ha patinado c metros, ¿cuántos metros ha patinado Raquel?	150	300	80	120
		600	x	200	x

Las cantidades son esquemáticamente representadas como a b c x

Los estudiantes resolvieron los 12 problemas durante el transcurso de su clase habitual de matemáticas con lo que dispusieron aproximadamente de 50 minutos. Fueron los propios profesores de matemáticas de cada centro los que pasaron los cuestionarios tras haber recibido las indicaciones oportunas por parte de los investigadores. Podían utilizar calculadoras, pero se indicó que no olvidaran escribir las operaciones en el cuadro correspondiente.

2.3 . *Análisis*

Puesto que el objetivo de la investigación es el estudio de los cambios en las relaciones entre los niveles de éxito de los estudiantes cuando resuelven los diferentes tipos de problemas a lo largo de educación secundaria, se llevó a cabo un análisis estadístico implicativo (Gras, 1995; Gras & Knutz, 2007; Gras, Suzuki, Guillet & Spagnolo, 2008) utilizando el software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive). Del análisis implicativo se obtuvieron diagramas implicativos que permiten estudiar relaciones del tipo: “el éxito en un problema A implica el éxito en un problema B”.

Tabla 2a. Análisis de protocolos de los estudiantes

Problema	Respuesta estudiante	Identificación de la respuesta y codificación
P-D-I. Ana y David están fabricando muñecas. Empezaron al mismo tiempo pero Ana es más lenta. Cuando Ana ha fabricado 12 muñecas, David ha fabricado 24 muñecas. Si Ana ha fabricado 48 muñecas, ¿cuántas muñecas ha fabricado David?	$\begin{array}{r} 48 \\ \times 2 \\ \hline 96 \end{array}$	El estudiante identifica la relación multiplicativa entre las cantidades ($12 \times 2 = 24$) Codificación: 1
A-D-I. Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado 4 cajas, Tomás ha cargado 16 cajas. Si Pedro ha cargado 8 cajas, ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?	$\begin{array}{r} 16 \\ -4 \\ \hline 12 \\ +8 \\ \hline 20 \end{array}$	El estudiante identifica la relación aditiva entre las cantidades ($16 - 4 = 12$) Codificación: 1

Tabla 2b. Análisis de protocolos de los estudiantes

Problema	Respuesta estudiante	Identificación de la respuesta y codificación
P-C-N. Susana y Margarita están remando una canoa. Empezaron al mismo tiempo pero Margarita es más rápida. Cuando Susana ha remado 4 metros, Margarita ha remado 10 metros. Si Susana ha remado 6 metros, ¿cuántos metros ha remado Margarita?	$\begin{array}{r} 10 \\ -4 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ +6 \\ \hline 12 \text{ m} \end{array}$	El estudiante no identifica la relación multiplicativa entre las cantidades (identifica una relación aditiva) Codificación: 0
A-C-I. Pablo y Tomás están escalando la fachada de un rascacielos. Escalan a la misma velocidad pero Pablo empezó más tarde. Cuando Pablo ha escalado 3 metros, Tomás ha escalado 9 metros. Si Pablo ha escalado 6 metros, ¿cuántos metros ha escalado Tomás?	$9 = 3 \cdot 3$ $6 \cdot 3 = 18$	El estudiante no identifica la relación aditiva entre las cantidades (identifica una relación multiplicativa) Codificación: 0

Para poder realizar este análisis, en primer lugar, se identificaron las respuestas correctas e incorrectas en cada problema (nivel de éxito o logro). Éstas fueron codificadas con un 0 o un 1 según el siguiente criterio:

- En los problemas proporcionales, si la respuesta del alumno refleja que ha identificado la relación multiplicativa entre las cantidades se ha codificado con un 1, y si la respuesta del alumno refleja que no ha identificado la relación multiplicativa entre las cantidades o ha dejado en blanco el ejercicio se ha codificado con un 0.
- En los problemas aditivos, si la respuesta del alumno refleja que ha identificado la relación aditiva entre las cantidades se ha codificado con un 1, y si la respuesta del alumno refleja que no ha identificado la relación aditiva entre las cantidades o ha dejado en blanco el ejercicio se ha codificado con un 0.

La Tabla 2(a, b) ejemplifica cómo realizamos esta codificación a través de protocolos de los estudiantes.

3 Resultados

El análisis implicativo se realizó por curso, a un 90% de significación (Figuras 1, 2, 3 y 4). Los resultados del análisis muestran dos características relevantes. En primer lugar aparecen dos cadenas implicativas independientes entre sí en los cuatro cursos de la educación secundaria: una cadena que relaciona los problemas aditivos y otra cadena que relaciona los problemas proporcionales indicando que los niveles de éxito en los problemas aditivos y proporcionales no se relacionan. En segundo lugar, que las relaciones multiplicativas enteras o no enteras entre las cantidades influye en la actuación de los estudiantes en la estructura aditiva y en la estructura multiplicativa ocupando diferentes posiciones. Mientras en las situaciones aditivas, las relaciones enteras determinan los inicios de las cadenas, en las situaciones proporcionales son las relaciones no enteras. Es decir, en las situaciones aditivas cuando los estudiantes respondieron correctamente a los problemas con relaciones enteras, es posible inferir que responderán también correctamente a las situaciones con relaciones no enteras. De manera inversa, en las situaciones proporcionales, cuando los estudiantes respondieron correctamente a las situaciones con razones no enteras, es posible inferir que son capaces de responder también correctamente a las situaciones con razones enteras. Sin embargo, la naturaleza discreta o continua de las cantidades parece no influir en ninguno de los problemas.

De manera específica, la Figura 1 muestra el diagrama implicativo correspondiente al 1^{er} curso. La primera cadena que relaciona los problemas

aditivos indica que si los estudiantes tienen éxito con el problema de relaciones multiplicativas entre las cantidades enteras y cantidades discretas (A-D-I) entonces también tendrá éxito en el problema con relaciones enteras y cantidades continuas (A-C-I). El estudiante que tenga éxito en este último, también tendrá éxito en los problemas aditivos con relaciones no enteras (A-D-N y A-C-N). Por tanto, el problema aditivo más difícil para los estudiantes de primer curso de secundaria fue el que tenía relaciones multiplicativas enteras y cantidades discretas, y los problemas más fáciles los que tenían relaciones multiplicativas no enteras independientemente de la naturaleza de las cantidades.

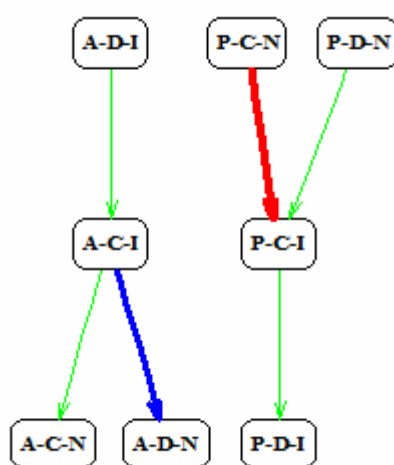


Figura 1. Diagrama implicativo 1º ESO

En los problemas proporcionales, si el estudiante tiene éxito en los problemas con razones no enteras (P-C-N y P-D-N), también tendrán éxito en el problema con razones enteras y cantidades continuas (P-C-I). Y si el estudiante tiene éxito en este último problema, también tendrá éxito en las versiones con cantidades discretas (P-D-I). Luego los problemas proporcionales más difíciles para los estudiantes de primer curso de secundaria son los que tienen razones no enteras, siendo el problema más fácil el que tiene razones enteras y cantidades discretas.

La Figura 2 muestra el diagrama implicativo correspondiente al 2º curso de educación secundaria. La cadena que relaciona los problemas aditivos evidencia que si los estudiantes tienen éxito con relaciones multiplicativas entre las cantidades enteras (A-C-I y A-D-I), entonces también tienen éxito en los problemas aditivos con relaciones no enteras (A-D-N y A-C-N). Luego las relaciones enteras aumenta la dificultad de los problemas aditivos en los estudiantes de 2º curso de

secundaria. Por otra parte, la naturaleza de las cantidades parece no influir en la formación de las relaciones implicativas.

En los problemas proporcionales, el problema más difícil para los estudiantes de 2º curso de educación secundaria fue el problema con razones no enteras y cantidades discretas y el problema más fácil fue el que tiene razones enteras y cantidades discretas. El análisis implicativo muestra que si el estudiante tiene éxito en el problema con razones no enteras y cantidades discretas (P-D-N), entonces también tendrá éxito en el problema con razones no enteras y cantidades continuas (P-C-N). Por otra parte, los estudiantes que tuvieron éxito en este último, tuvieron éxito en el problema con razones enteras y cantidades continuas (P-C-I). Y los estudiantes que tuvieron éxito en P-C-I entonces tuvieron éxito en el problema con razones enteras y cantidades discretas (P-D-I).

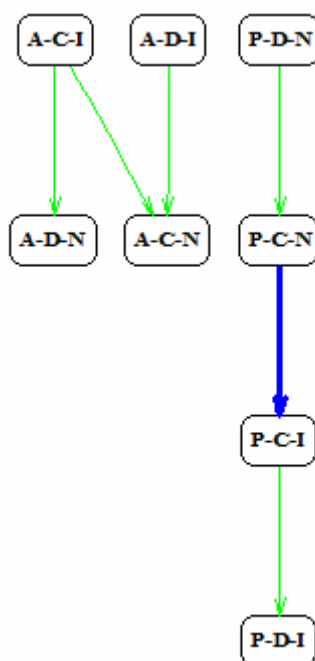


Figura 2. Diagrama implicativo 2º ESO

La estructura implicativa para los estudiantes de 2º curso, presenta dos diferencias con respecto a la de 1º ESO. En primer lugar, la naturaleza de las cantidades no parece influir en el nivel de éxito de los estudiantes cuando resuelven problemas aditivos (no aparece la implicación que relaciona A-D-I con A-C-I) lo que muestra que los problemas A-C-I y A-D-I tuvieron la misma dificultad para los estudiantes de 2º curso. En segundo lugar, aparece una nueva implicación en los

niveles de éxito de los problemas proporcionales que relaciona P-D-N y P-C-N mostrando que la naturaleza de las cantidades influye: los estudiantes que resuelven con éxito el problema con cantidades discretas, resolverán con éxito el problema con cantidades continuas. Por lo tanto, el problema P-D-N fue más difícil que el P-C-N para los estudiantes de 2º curso.

La Figura 3 muestra el diagrama implicativo correspondiente al 3^{er} curso de educación secundaria. La cadena que relaciona los problemas aditivos subraya que si los estudiantes tienen éxito en el problema con relaciones multiplicativas entre las cantidades enteras y cantidades continuas (A-C-I), entonces también tendrá éxito en el problema con relaciones enteras y cantidades discretas (A-D-I) y en el problema con relaciones no enteras y cantidades discretas (A-D-N). Por otra parte, si el estudiante resuelve con éxito estos últimos problemas entonces tendrá éxito en el problema con relaciones no enteras y cantidades continuas (A-C-N). Por tanto, el problema aditivo más difícil para los estudiantes de 3º de educación secundaria fue el problema con relaciones enteras y cantidades continuas y el problema más fácil el que contiene relaciones no enteras y cantidades continuas.

El problema proporcional más difícil para los estudiantes de 3º de educación secundaria fue el problema con razones no enteras y cantidades continuas y el problema más fácil el que tenía razones enteras y cantidades continuas. El diagrama implicativo muestra que en los problemas proporcionales, si el estudiante tiene éxito en los problemas con razones no enteras y cantidades continuas (P-C-N) también tendrá éxito en los problemas con razones no enteras y cantidades discretas (P-D-N). Además si el estudiante tiene éxito en este último problema también tendrá éxito en el problema con razones enteras y cantidades discretas (P-D-I). Y el estudiante que tiene éxito en el problema P-D-I también tendrá éxito en los problemas con razones enteras y cantidades continuas.

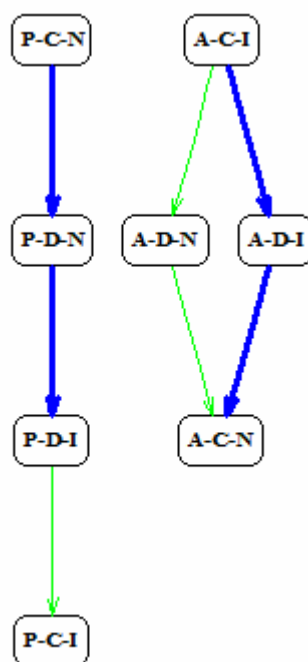


Figura 3. Diagrama implicativo 3º ESO

Las diferencias de esta estructura implicativa con la de 2º curso se basan de nuevo en la influencia de la naturaleza de las cantidades. En este caso, parece influir de nuevo esta variable en el éxito de los estudiantes en los problemas aditivos pues aparecen las implicaciones que relacionan A-C-I y A-D-I y, por otro lado, A-D-N y A-C-N. Luego en los problemas aditivos con relaciones no enteras fue más difícil la versión continua y en los problemas con relaciones no enteras fue más difícil la versión discreta. Además, en los problemas proporcionales parece influir esta variable de modo diferente: en los problemas con razones no enteras, el éxito en las cantidades continuas implica el éxito en las cantidades discretas y, en los problemas con razones enteras, el éxito en las cantidades discretas implica el éxito en las cantidades continuas.

Para los estudiantes de 4º de educación secundaria, los problemas aditivos más difíciles fueron los que tienen relaciones multiplicativas enteras y los más fáciles los que tienen relaciones multiplicativas no enteras. La Figura 4 muestra el diagrama implicativo correspondiente al 4º curso de educación secundaria. En este caso, la cadena que relaciona los problemas aditivos evidencia que si los estudiantes tienen éxito con relaciones multiplicativas entre las cantidades enteras (A-C-I y A-D-I), entonces también tiene éxito en los problemas aditivos con relaciones no enteras (A-D-N y A-C-N). Por otra parte, la naturaleza de las cantidades parece no influir en la formación de las relaciones implicativas.

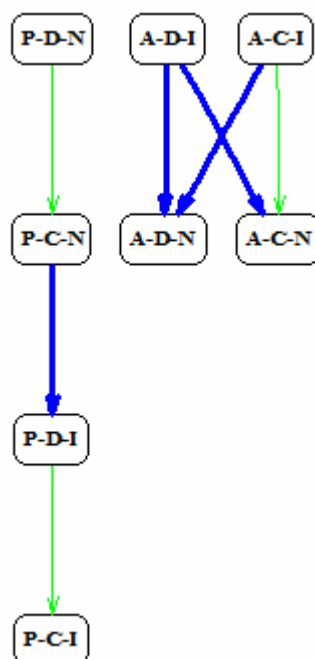


Figura 4. Diagrama implicativo 4º ESO

El problema proporcional más difícil para los estudiantes de 4º curso fue el que tiene razones no enteras y cantidades discretas y el más fácil el que tiene razones enteras y cantidades continuas. En relación a las relaciones implicativas, si el estudiante tiene éxito en los problemas con razones no enteras y cantidades discretas (P-D-N), entonces también tendrán éxito en los problemas con razones no enteras y cantidades continuas (P-C-N). Por otra parte, si el estudiante tiene éxito en este último también tendrá éxito en los problemas con razones enteras y cantidades discretas (P-D-I). Y los estudiantes que tienen éxito en el problema P-D-I tendrán éxito en el problema con razones enteras y cantidades continuas (P-C-I). La diferencia de esta estructura implicativa con la de 3º ESO estaría de nuevo en la influencia de la naturaleza de las cantidades: en este caso parece que esta variable no influye en los niveles de éxito de los problemas aditivos y cambia una de las relaciones implicativas entre los niveles de éxito de los problemas proporcionales, la que relaciona P-D-N y P-C-N. En este caso, si el estudiante tiene éxito con las cantidades discretas, tendrá éxito con las cantidades continuas.

4. Discusión

El objetivo de este estudio es analizar la influencia del esquema aditivo en el desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes de educación secundaria

puesto de manifiesto por el cambio en las relaciones existentes en los niveles de éxito en la resolución de problemas proporcionales y problemas con estructura aditiva a lo largo de la educación secundaria. Dos ideas emergen de los resultados obtenidos que proporcionan información sobre la constitución del significado de la idea de razón como idea clave para entender la manera en la que los estudiantes de educación secundaria construyen la relación entre el esquema aditivo y multiplicativo.

Una primera idea derivada de los resultados obtenidos es la independencia del nivel de éxito entre los problemas proporcionales y aditivos a lo largo de todos los cursos de secundaria puesto de manifiesto por el hecho de que aparezca dos estructuras implicativas independientes en todos los grupos de edad, una estructura implicativa que hace referencia a los problemas aditivos y otra estructura que hace referencia a los problemas proporcionales. Este resultado muestra que la capacidad del estudiante de identificar relaciones proporcionales de manera correcta entre las cantidades en los problemas proporcionales no implica necesariamente que sea capaz de identificar correctamente las relaciones aditivas en los problemas aditivos y viceversa. Este hecho aporta evidencias empíricas a la necesidad de incorporar a la caracterización del desarrollo del razonamiento proporcional no sólo la competencia en la resolución de problemas proporcionales con un dato desconocido, sino también la capacidad de reconocer cuándo las relaciones entre las cantidades no son proporcionales (Modestou & Gagatsis, 2010). Por otra parte, la aparición de dos estructuras implicativas independientes, una relacionando los niveles de éxito en los problemas aditivos y otra relacionando los niveles de éxito en los problemas proporcionales pone de manifiesto los vínculos entre la estructura semántica de los problemas y el desarrollo hipotético del razonamiento proporcional. De esta manera, la relación entre dos componentes del razonamiento proporcional como son el pensamiento relativo y la capacidad de construir una razón para ser considerada como unidad (proceso de “unitizing”) (Lamon, 1993) y la dificultad de los estudiantes en generar dicha relación puede estar relacionado con su dificultad en diferenciar las relaciones aditivas de las multiplicativas dadas por la estructura semántica de los problemas propuestos.

La segunda idea generada por nuestros resultados es la influencia del tipo de relación multiplicativa entre las cantidades (entera o no entera) en el nivel de éxito en la resolución de los problemas proporcionales y aditivos. Los problemas aditivos con relaciones multiplicativas no enteras fueron más fáciles, en general,

para todos los estudiantes de secundaria. Además, las razones no enteras entre las cantidades en las situaciones proporcionales llevaban a los estudiantes a usar de manera errónea relaciones aditivas lo que implicaba que los estudiantes tuvieran más éxito en los problemas proporcionales con razones enteras. Por otra parte, en los problemas aditivos la relación multiplicativa entera entre los números llevaba a los estudiantes a usar estrategias proporcionales no apropiadas lo que implicaba que los estudiantes tuvieran más éxito en los problemas aditivos con relaciones no enteras. Estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de usar diferentes tipos de razones al introducir la idea de razón a finales de la educación primaria (Clark, Berenson & Carey, 2003) con el objetivo de desarrollar la comprensión de la idea de razón. Posiblemente, las relaciones dobles/mitad, triple/tercios, etc. puedan ser usadas inicialmente para que los estudiantes de educación primaria empiecen a identificar las razones en los problemas proporcionales.

Las dos ideas generadas por nuestros resultados generan dos focos de atención relevantes para la enseñanza. Por una parte, un foco sobre la estructura semántica de la situación (creadas modificando las frases en los problemas propuestos para describir la relación proporcional y la aditiva). Por otra, un segundo foco sobre el tipo de relaciones enteras o no enteras entre los números. La consideración por parte del profesor de manera conjunta de estos dos focos de atención durante la transición desde la educación primaria a la educación secundaria puede ser necesario para que los estudiantes lleguen a manejar la relación entre el esquema aditivo y el desarrollo de los aspectos del esquema multiplicativo no derivados de las situaciones aditivas (Nabors, 2003). Una implicación de los resultados obtenidos va en la dirección del conocimiento del profesor de estos fenómenos y de las posibles guías de actuación. Pero también hay que considerar cómo los estudiantes para profesores de matemáticas pueden llegar a desarrollar sus competencias docentes en relación a la identificación e interpretación de las características del razonamiento proporcional de los estudiantes (Hines & McMahon, 2005).

Referencias

- Behr, M., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 296-333). New York: Macmillan.
- Christou, C. & Philippou, G. (2002). Mapping and development of intuitive proportional thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 321-336.
- Clark, M., Berenson, S. & Cavey, L. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(3), 297-317.
- Cramer, K. & Post, T. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, 86(5), 404-407.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. New York: Springer.
- Fernández, C. & Llinares, S. (2010). Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón. *Horizontes educacionales*, 15(1), 11-22.
- Fernández, C. & Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa. Efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje*, 34(1).
- Fernandez, C., Llinares, S., Modestou, M. & Gagatsis, A. (2010). Proportional reasoning: How task variables influence the development of students' strategies from primary to secondary school. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics - ADUC*, 10, 1-18.
- Fernández, C., Llinares, S. & Valls, J. (2008). Implicative analysis of strategies in solving proportional and non-proportional problems. In O. Figueras & A. Sepúlveda (Eds), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the XXX North American* (vol. 3. pp. 1-8) Morelia, México: PME.
- Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D. & Verschaffel, L. (2009). Effect of the number structure and the quality nature on secondary school students' proportional reasoning. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 3, pp. 25-32). Thessaloniki, Greece: PME.

- Fernández, C., Llinares, S., Van dooren, W., De Bock, D. & Verschaffel, L. (2010). How do proportional and additive methods develop along Primary and Secondary school?. In Pinto, M.M. & Kawasaki, T.F. (Eds.) *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics education* (vol. 2, pp. 353- 360). Belo Horizonte, Brazil: PME.
- Gras, R. (1995). L'analyse statistique implicative. Introduction. *Methodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en Didactique des Mathematiques*. Association pour la Recherche en Didactique des Mathematiques. I.U.F.M. Caen.
- Gras, R. & Knutz, P. (2007). L'analyse statistique implicative (A.S.I.) en response a des problemes fondateurs. In *Nouveaux Apports Théoriques à l'Analyse Statistique Implicative et Applications* (pp. 15-40). Castellón, España: Innovacio Digital Castello.
- Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F. & Spagnolo, F. (F.) (eds.) (2008). *Statistical Implicative analysis. Theory and Applications*. London: Springer.
- Greer, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and division. In G. Harel & J. Confrey (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 61-85). New York: State University press.
- Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In Hiebert, J. & Behr, M. (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 198-219). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Erlbaum.
- Hines, E. & Macmahon, M.T. (2005). Interpreting middle school students' proportional reasoning strategies: Observations from preservice Teachers. *School Science and Mathematics*, 105(2), 88-106.
- Karplus, R., Pulos, S. & Stage, E. (1983). Proportional Reasoning of Early Adolescents. In R. Lesh & M. Landau (eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. (pp.45-90). San Diego, OR: Academic Press, Inc.
- Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(1), 41-61.

- Misailidou, C. & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 335-368.
- Modestou, M. & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, 27(1), 75-92.
- Modestou, M. & Gagatsis, A. (2009). Proportional reasoning reformed. In A. Gagatsis, A. Kuzniak, Deliyanni & L. Vivier (Eds.), *First French-Cypriot Conference of Mathematics Education* (pp. 19-34). University of Cyprus – University Paris Diderot: Nicosia-Paris.
- Modestou, M. & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Teaching and Learning*, 12(1), 36-53.
- Nabors, W. (2003). From fractions to proportional reasoning: a cognitive schemes of operational approach. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(2), 133-179.
- Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 1 - Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 217-253.
- Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 2 - Problem-structure at successive stages; Problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 331-363.
- Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 181-204.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. & Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 187-211.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57-86.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 311-342.

“Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)”, n°20 suppl 1, 2010
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)
A.S.I. 5 Proceedings 5-7- November 2010

Nota. Una primera versión de este informe de investigación fue presentada en el Congreso ASI-5 celebrado en Palermo, Italia, del 5-7 de noviembre de 2010.