“Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)”, n°20 suppl 1, 2010
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)
A.S.I. 5 Proceedings 5-7- November 2010

La apropiación de los criterios de optimización en Cálculo Diferencial de estudiantes de Carreras no matemáticas.

Ismenia Guzmán Retamal*, Lidia Ortega Silva**

Ximena Tapia Silva*, Neumarino Rodríguez Ventura******

Liliana Pérez Donoso*****

*Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
iguzmanr@ucv.cl
**Universidad Tecnológica Metropolitana
lortega@omega.utem.cl
***Universidad de Viña del Mar
xtapia@uvm.cl
****Universidad de Viña del Mar
nrodrig@uvm.cl
*****Universidad de Playa Ancha
lilianaperezd@gmail.com

Resumen: En Cálculo Diferencial uno de los problemas clásicos, consiste en determinar los eventuales valores extremos de una función de variable real según los criterios de la primera o segunda derivada de ella, este problema es fundamental al inicio de un curso de cálculo diferencial, especialmente por sus aplicaciones en diversos contextos. En este artículo analizamos los resultados que hemos obtenido a través de una pregunta seleccionada del Cuestionario presentado por Trigueros (2008), que aplicamos a 96 estudiantes de primer año y seleccionados de tres universidades chilenas. Nuestro interés no es contar cuántos estudiantes tienen éxito o no, sino estudiar la naturaleza de las dificultades que ellos presentan. La información fue codificada y procesada con el fin de utilizar el software CHIC. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes del estudio sólo aplican técnicas que resultan insuficientes para responder con éxito al problema, debido a que los estudiantes después de sus cálculos dan por terminado el trabajo sin analizar los resultados obtenidos, lo que interpretamos como una la debilidad en sus deducciones y además una falta de comprensión del significado de los criterios de optimización y por lo tanto la no apropiación de los criterios.

Summary: In Differential calculus, one of the problems is to identify any extreme values of a real variable function according to the usual criteria in this regard, it is essential especially for its applications in various contexts. We analyze the results obtained through a question selected from the questionnaire submitted by Trigueros (2008), we apply to 96 students not mathematics and selected from three chileans universities. Our interest is not to count how many students are successful or not, but to study the nature of the difficulties presented by the students. The information was coded and processed with software CHIC. The results show that most students study only apply techniques that are insufficient to successfully addressing the problem, because the students after their calculations are terminated work and not continue with the analysis of their results, which interpret as a lack of understanding of the meaning of the criteria and a debility in their reasoning to determinate the maximum and minimum and therefore the non-appropriation of them.

Résumé: En calcul différentiel, l'un des problèmes classiques est de déterminer les valeurs extrêmes d'une fonction de variable réelle selon les critères de la dérivée première ou de la seconde dérivée de la fonction dont il est question. Ce problème est essentiel dans la première année universitaire notamment par ses applications dans divers contextes. Dans cette étude nous analysons les résultats que nous avons obtenus après l´application d´une question sélectionnée dans le questionnaire de Trigueros (2008). Nous avons questionné 96 étudiants de première année non mathématiciens appartenant à trois universités chiliennes. Notre intérêt n'est pas compter le nombre d'étudiants qui réussissent ou non à la question, mais d'étudier la nature des difficultés présentées par eux . Les informations ont été codées et traitées avec le logiciel CHIC. Les résultats montrent que la plupart des étudiants participant à cette étude travaillent sur les techniques mais celles-ci sont insuffisantes pour réussir au problème, parce que les étudiants privilégient les calculs et ne réalisent aucune analyse de leurs résultats. Nous l´interprétons comme un manque de compréhension de la signification des critères mentionnés pour déterminer les valeurs extrêmes de la fonction et en plus une faiblesse de leurs déductions et donc la non-appropriation de ces critères.

1 Introducción

En un curso de cálculo diferencial, determinar los valores extremos de una función de una variable real es un tema central del programa, pues permite resolver problemas de optimización de diversa naturaleza, problemas en Economía, Física, Medicina, Biología entre otros. De allí la importancia del aprendizaje de los criterios para determinar valores extremos.

El criterio de la primera derivada establece que: Si c es un valor crítico de una función derivable f, entonces: i) Si la derivada de f, (f') cambia de positiva a negativa en un entorno de c, entonces f tiene un máximo local en c. ii) Si f' cambia de negativa a positiva en ese entorno de c, entonces f posee un mínimo local en c. iii) Si f' no cambia de signo en el entorno de c, entonces f carece de extremo local en c. En el registro gráfico este criterio está asociado con el crecimiento y decrecimiento de una función.

El criterio de la segunda derivada para determinar valores extremos establece que: Si la segunda derivada de f (f ") es continua en una vecindad de c, entonces:

i) Si f ’(c) = 0 y f ’’(c) > 0, f tiene un mínimo local en c.

ii) Si f ’(c) = 0 y f ’’(c) < 0, f posee un máximo local en c.

iii) Si f ’(c) = 0 y f ’’(c) = 0, el criterio no permite decidir directamente la existencia de extremos.

En el caso iii) es necesario coordinar con el registro gráfico para visualizar la concavidad de la representación gráfica de la función.

Frente a estos criterios surgen varias preguntas respecto al comportamiento de los estudiantes:

- ¿Cuánto dominio sobre estos criterios muestran para determinar los valores extremos de una función de variable real?
- ¿Qué estrategia eligen para decidir sobre los valores extremos cuando f ’’(c)=0?
- ¿Coordinan las representaciones del objeto matemático **valor extremo** en los registros algebraico-simbólico y registro gráfico?, es decir, ¿reconocen el significado en cada uno de los registros mencionados?
- ¿Qué formas de razonamiento emplean en sus deducciones?

Estas preguntas han motivado el estudio del problema planteado en nuestro equipo de investigación.

2 Problemática

Este estudio se inscribe en la problemática de la comprensión y dominio de objetos matemáticos claves en el aprendizaje a nivel de primer año universitario. El problema que presentamos tiene relación con la Derivada de una función y, particularmente con la aplicación de los criterios para determinar valores extremos de una función real.

Hemos seleccionado una pregunta del cuestionario utilizado por Trigueros (2008) y nos hemos planteado la siguiente interrogante: ¿cuál es el grado de dominio de estos criterios que presentan los estudiantes que han cursado la asignatura de Cálculo Diferencial? ¿Qué grado de comprensión y formas de razonamientos dejan en evidencia?

Nuestras interrogantes se fundamentan en el hecho que el capítulo dedicado a la derivada es central en cualquier programa de estudio de cálculo diferencial, y en particular los valores extremos tienen un rol importante en el desarrollo del curso; con frecuencia forman parte de las evaluaciones y son exigidos en los exámenes finales.

Por otra parte, el grado de comprensión de este tema, presenta una dificultad para los estudiantes puesto que la comprensión sobrepasa a la técnica y no basta hacer los cálculos de la primera o segunda derivada, para especificar el tipo de valor extremo, ya que se hace necesario un análisis sobre el crecimiento de la función contemplada o de la concavidad de la curva que representa la función antes de decidir. Es decir es necesaria una coordinación entre los dos registros de representación mencionados.

3 Marco teórico

Nuestro marco teórico es de carácter cognitivo, se refiere al proceso de comprensión del razonamiento deductivo, en especial al desarrollo de un paso de razonamiento deductivo directo (modus ponens). Es decir, si en una implicación del tipo: Si P entonces Q, donde P es una premisa (hipótesis) y Q la conclusión (tesis) entonces en general, se necesita recurrir a un tercer enunciado T para concluir Q. Este enunciado (implícito) permite conectar la hipótesis con la conclusión.

En un razonamiento deductivo complejo, se produce un encadenamiento de pasos de razonamiento donde las sucesivas conclusiones son premisas de los pasos de razonamientos siguientes. Por otra parte el razonamiento indirecto (modus tollens) se describe como sigue : si se tiene la implicación: Si P entonces Q, y además la conclusión Q es falsa, resulta que la hipótesis P es falsa.

Otro elemento del marco teórico y fundamental para el proceso de comprensión es la función semiótica de los registros involucrados, en este estudio el algebraico-simbólico y el registro gráfico cartesiano, ella permite principalmente analizar las operaciones cognitivas de tratamiento en cada registro y de conversión de uno al otro.

El proceso de comprensión de los objetos matemáticos según R. Duval tiene que ver con la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica.

> "…La actividad matemática se realiza necesariamente en un "contexto de representación… Pero los estudiantes también deberían ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos. Más adelante el autor agrega: La actividad matemática requiere que aunque los individuos empleen diversos sistemas de representación semiótica (registros de representación), sólo elijan una según el propósito de la actividad. En otras palabras la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de

> representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significaran dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos "contextos de representación" diferentes del mismo objeto".(Duval,2006)

4 Metodología

La metodología de investigación considerada es principalmente cualitativa sigue un modelo en cuatro etapas: Análisis a priori del problema, aplicación, Análisis de Resultados y Análisis Estadístico Implicativo.

4.1 Análisis a priori

El problema planteado a los estudiantes fue el siguiente:

"Considera la función $h(x) = x^3$, sabemos que $h'(x) = 0$ si $x = 0$, ¿podemos con esto asegurar que en $x = 0$ existe un máximo o un mínimo?"

Este problema está planteado en el registro algebraico simbólico y pretende poner a prueba la comprensión y la habilidad para realizar un pasaje al registro gráfico que permitiría la resolución inmediata al problema. En el caso de no realizar el pasaje al registro gráfico se pone a prueba la apropiación de los criterios de optimización por parte de los estudiantes. La pregunta les plantea un desafío que va más allá de la aplicación de la técnica, puesto que se necesita un pequeño análisis para responder con éxito.

El problema admite al menos tres estrategias de resolución:

- *Primera* : si conoce el grafico de la función $h(x) = x^3$ puede responder de inmediato que en x=0 no hay máximo ni mínimo, si no conoce a priori el gráfico, puede representar la función utilizando la técnica clásica tratada en el curso y a partir del gráfico obtenido deducir que no hay máximo ni mínimo.
- *Segunda estrategia*: se estudia el signo de la primera derivada, y se verifica que $h'(x) > 0$ para todo x distinto de cero, lo que implica que la función es creciente; en consecuencia no existe ni máximo ni mínimo en $x = 0$.
- *Tercera estrategia*: se analiza el signo de la segunda derivada de h para valores de x en una vecindad del cero y resulta que $h''(x) < 0$ para $x< 0$ y $h''(x) > 0$ para $x > 0$, lo que significa que la gráfica de h es cóncava hacia abajo para valores de x menores que cero y es cóncava hacia arriba para valores de x mayores que cero, luego el punto $(0, h(0)) = (0 , 0)$ es un

punto de inflexión de la gráfica de la función h y por lo tanto en x = 0 no hay máximo ni mínimo.

En las tres estrategias anteriores está presente un razonamiento deductivo no complejo, en la primera estrategia se deduce por visualización, en la segunda es un paso de razonamiento (modus ponens) y en la tercera pueden identificarse dos pasos de razonamiento.

Respuestas posibles y dificultades eventuales de los estudiantes:

Rp1 Que calculen la primera derivada, comprueben que en x = 0, h’(x) = 0; después calculan la segunda derivada de h y aplican el criterio de la segunda

derivada, obteniendo h’’(x) = 0 para x = 0. De aquí deducen que no hay máximo ni mínimo.

Esta respuesta del punto de vista matemático es insuficiente, ya que debiera deducirse que no hay información: falta análisis para saber lo que ocurre en x = 0.

Desde el punto de vista cognitivo esta respuesta pone en juego sólo conocimientos operatorios, pues no da cuenta de la comprensión del criterio.

Rp2 Que calculen la primera derivada y estudien el signo de ella.

Las dificultades desde el punto de vista matemático podrían ser:

- no relacionar el cambio o no de signo de la primera derivada.
- no recurrir a la relación entre el signo de la función derivada y el crecimiento de la función.

La actividad cognitiva exigida es más compleja ya que exige análisis respecto al cambio de signo antes de decidir. Y en relación con el crecimiento, hay que distinguir necesariamente entre la función derivada y la función de partida para concluir.

Rp3 Que calculen y grafiquen la primera derivada de h, como les resultará una parábola, concluirán que existe un mínimo en x = 0.

En esta respuesta desde el punto de vista matemático habría una confusión, ya que deduce del grafico de la derivada que hay un mínimo para x =0. Sin embargo, si hubiera estudiado el signo de la derivada a partir de ese gráfico habría deducido que el signo de h’ no cambia de signo.

Desde el punto de vista cognitivo observamos que la atención del estudiante se centro en la función $h'(x) = 3x^2$, la que reconoce como la expresión de una parábola centrada en el origen, por lo tanto deduce que para $x = 0$ la función tiene un mínimo, razonando sobre h' en lugar de h.

4.2 *Aplicación*

La pregunta se aplicó a finales del año 2008 simultáneamente a 96 estudiantes pertenecientes a dos Universidades de la región de Valparaíso y una de la región Metropolitana de las carreras de Tecnología Médica, Bioquímica y de Ingeniería en Transporte y Tránsito, que cursaban la asignatura de Cálculo Diferencial. Los respectivos profesores de los curso aplicaron la encuesta en horario de clases. Los estudiantes respondieron individualmente y sin intervención del académico. Los académicos y estudiantes participaron voluntariamente en esta investigación. De los 96 estudiantes encuestados, 83 respondieron la pregunta y el resto omitió.

4.3 Análisis de Resultados

4.3.1 Procesamiento de los datos

Para el tratamiento de las respuestas al problema, hemos realizado un análisis cualitativo de contenido de las respuestas, luego una codificación de los estudiantes y de las variables consideradas, con el objeto de utilizar el software CHIC que nos proporciona mediante el análisis estadístico implicativo una categorización de las respuestas.

Hemos codificado los 96 estudiantes por: **E1, E2,..., E96.** Del análisis a priori identificamos 4 indicadores y para cada indicador determinamos las siguientes variables, a saber:

1. *Respuesta a la pregunta*
    - 1.1.- Responde explícitamente la pregunta: RS
    - 1.2.- No da respuesta a la pregunta: RN
2. *Uso de criterios*
    - 2.1.- No utiliza los criterios de la primera o segunda derivada: CO
    - 2.2.- Utiliza el criterio de la primera derivada: C1
    - 2.3.-Utiliza el criterio de la segunda derivada: C2
3. *Deducción*
    - 3.1.- Sin justificación: DO
    - 3.2.- Existe un mínimo: Dm

3.3.- La función h es creciente: DC

3.4.- La gráfica de h' corresponde a una parábola: DP

3.5.- Hay un punto de inflexión de abscisa $x = 0$: DI

3.6.- Infiere del gráfico de h por visualización: DG

3.7.- No existe máximo ni mínimo: DN

3.8.- No se puede asegurar: Dn

3.9.- Incompleta: Di

3.10.- Errónea: DE

4. *Evaluación del desarrollo de la respuesta global*

4.1.- Bueno: EB

4.2.- Aceptable: EA

4.3.- Insuficiente: Ei

4.4.- Inaceptable: EI

Con estas codificaciones aplicamos software CHIC, se obtiene una matriz binaria en formato excel que luego se convierte al formato csv y se obtiene entre otros el grafo implicativo y los árboles de similaridad y de cohesión.

4.3.2 Análisis de las frecuencias de las respuestas

La tabla 1 muestra las frecuencias respecto de la pregunta del enunciado. La tabla 2 muestra las frecuencias respecto al uso de criterios. La tabla 3 muestra las frecuencias respecto a la deducción. La tabla 4 muestra las frecuencias respecto a la evaluación del desarrollo.

Tabla 1

Indicadores	**Variables**	**Frecuencia**
Respuesta a	RS	75
la pregunta	RN	08

Tabla 2

Indicadores	**Variables**	**Frecuencia**
Uso de	CO	37
criterios	C1	14
	C2	32

Tabla 3

Indicadores	**Variables**	**Frecuencia**
Deducción	DO	02
	Dm	03
	DC	10
	DP	02
	DI	09
	DG	04
	DN	13
	Dn	19
	Di	05
	DE	16

Tabla 4

Indicadores	**Variables**	**Frecuencia**
Evaluación	EB	02
del	EA	09
desarrollo	Ei	40
	El	32

La tabla 1 muestra que 75 estudiantes de 83 respondieron explícitamente la pregunta en forma correcta o equivocada; los restantes no la responden, no obstante tratan de dar una solución al problema.

La tabla 2 muestra que 37 estudiantes responden sin recurrir a los criterios (ni de la primera ni de la segunda derivada); 32 responden usando el criterio de la segunda derivada y 14 utilizan el criterio de la primera derivada. En todos los casos anteriores se ha identificado la aplicación de criterios aunque ella no ha sido la correcta.

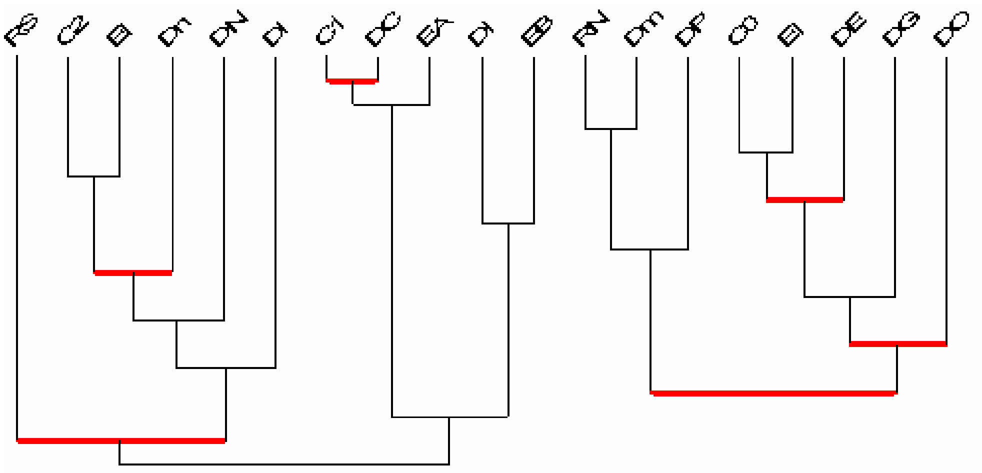
La tabla 3, referida al razonamiento deductivo, muestra que 19 deducen que no se puede asegurar la existencia de un valor extremo, 16 deducciones contienen errores, 13 concluyen que no existe máximo ni mínimo, 10 deducen que la función h es creciente y 9 concluyen que existe un punto de inflexión.

La tabla 4 referida a la evaluación del desarrollo muestra que hay 40 deducciones insuficientes y 32 deducciones inaceptables. Solo 2 correctas y 9 aceptables.

4.4 Análisis estadístico Implicativo

Nos entrega una organización de las respuestas en categorías, a través del árbol de similaridad y del grafo implicativo.

4.4.1 Árbol de Similaridad



GRÀFICO 1. Árbol de similaridad

Podemos observar en este árbol que las respuestas se ordenan en tres grupos según el uso de los criterios: En la primera rama (de izquierda derecha) están las respuestas que utilizan el criterio de la segunda derivada, en la segunda rama están las respuestas que utilizan el criterio de la primera derivada y en la tercera rama están aquellas que no utilizan criterio alguno.

El primer nivel de similaridad con índice 1 conecta C1 con DC, es decir la aplicación del criterio de la primera derivada (C1) con el crecimiento de la función (DC). Esto significa que podría haber una coordinación entre los registros algebraico- simbólico con el registro gráfico.

Es decir, considerando el signo de la función derivada en el registro algebraico-simbólico, se realiza un pasaje al registro gráfico para visualizar el crecimiento de la función en su curva representativa. Por otra parte del punto de vista cognitivo se necesita un paso de razonamiento que va de la **hipótesis**: *el valor del signo de la primera derivada en torno del punto crítico* hacia la **conclusión** que dice *existe un máximo o un mínimo*, para lo cual se necesita **un tercer enunciado** que establezca la relación entre *el signo de la primera derivada y el crecimiento de la función*. Ver esquema más abajo

El segundo nivel significativo de similaridad de índice 1 conecta C0 con DE muestra que las respuestas que no utilizan criterios son erróneas (40 de 83).

Significaría esto que los criterios no fueron aprendidos o significativos en cuanto a conocimientos matemáticos para estos estudiantes, no obstante ellos operan con las derivadas pero la falta de análisis de sus resultados no les permitió concluir, en el registro algebraico simbólico. Partiendo de las hipótesis para concluir se necesita aplicar una proposición, tercer enunciado, para concluir. Este paso de razonamiento se conoce como Modus ponens. La forma de razonamiento, Modus Ponens establece que el pasaje de la Hipótesis a la Conclusión necesita de un Tercer enunciado que las conecte. Los estudiantes consideran la siguiente proposición

Si h´(x) =0 **entonces** h no admite valores extremos (máximo ni mínimo).

La cual carece de validez. Puesto que no hacen intervenir el Tercer enunciado, es decir una proposición que relacione el signo de $h'(x) = 3x^2$ y valores extremos. Para luego aplicar el criterio de la primera derivada y concluir que h no tiene máximo ni mínimo. Por otra parte, el tercer nivel de similaridad de índice 1 conecta C0 con DE y DO, esto significa que en las respuestas que aplican el criterio de la segunda derivada en unas se deduce que “no se puede asegurar” y otras que deducen “no existe máximo ni mínimo”.

Interpretamos que estas respuestas de los estudiantes están relacionadas con el resultado que obtienen al evaluar la segunda derivada de h en 0. Como les resulta cero concluyen que no se puede asegurar, pero no analizan los signos de la segunda derivada para concluir que no existe ni máximo ni mínimo (en el registro algebraico simbólico). Pero también hubieran podido coordinar con el registro gráfico visualizando la concavidad de la curva

Como el criterio de la segunda derivada de algún modo es algorítmico, los estudiantes lo privilegian ya que si el signo es positivo se obtiene un mínimo y cuando es negativo se obtiene un máximo, pero cuando resulta cero ellos terminan su desarrollo.

Cognitivamente, las formas de razonamiento en la aplicación del segundo criterio son de la misma naturaleza que en la aplicación del primer criterio, hay un doble modus ponen.

4.4.2 Grafo Implicativo

El gráfico 2 muestra la implicación entre las variables

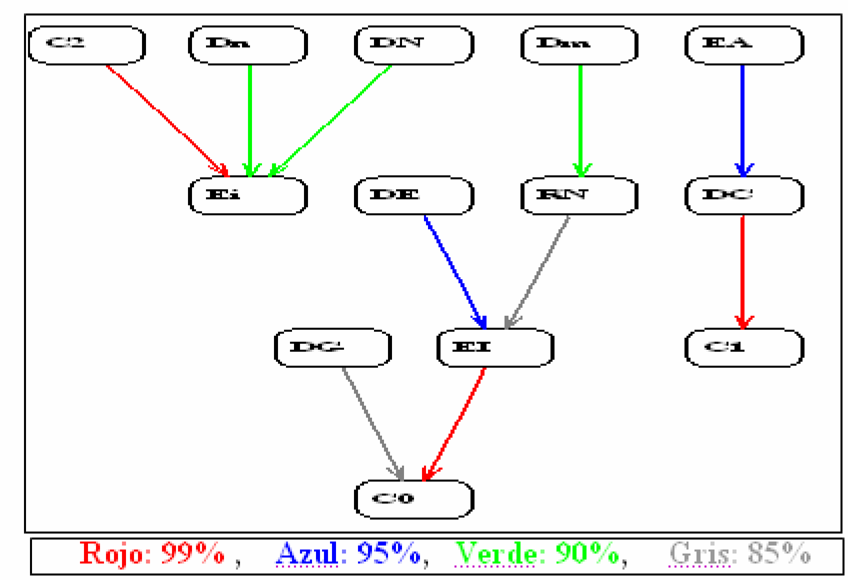


FIGURA 2. Grafo implicativo

Las implicaciones más significativas con un 99% de certeza son las siguientes representadas por :

- La flecha de C2 a Ei, que significa que la mayoría que aplica el criterio de la segunda derivada (C2) obtienen una evaluación insuficiente (Ei).
- La flecha de DC a C1 significa que las respuestas que deducen que h es creciente aplican el criterio de la primera derivada,
- La flecha de EI a C0 significa que las respuestas que obtienen una evaluación inaceptable (EI) no consideran criterio alguno (C0).

Con un 95% de certeza se encuentran las siguientes implicaciones representadas por:

- La flecha de DE a EI significa que las respuestas que presentan errores en su desarrollo (DE) obtuvieron evaluación inaceptable (EI).
- La flecha de EA a DC significa que las respuestas con evaluación aceptable en (EA) afirman que la función es creciente (DC).
- La flecha de DM a Ei significa que las respuestas que deducen no se puede asegurar la existencia de máximo o mínimo (Dm) tienen una evaluación insuficiente (Ei).

Las respuestas que tienen un mayor índice de cohesión (1) son aquellas que afirman el crecimiento de la función (DC) con la aplicación del criterio C1; también hay conexión, con un índice 0.996, entre las respuestas con evaluación aceptable y este bloque. Las respuestas con deducción erróneas (DE) están relacionadas con el bloque que conecta las respuestas de evaluación inaceptable (EI) y aquellas que ignoran los criterios (C0), lo anterior con índice de cohesión 0,877.

5 Conclusiones

Frente a nuestra interrogante de investigación: “¿Se apropian los estudiantes de los criterios establecidos para determinar los valores extremos de una función de variable real?”, obtenemos que la mayoría de los encuestados no se han apropiado de estos criterios.

El análisis de las respuestas deja en evidencia que más de un tercio de los estudiantes no utilizan criterio alguno en sus estrategias de solución del problema. Los que aplican los criterios lo hacen de manera incompleta dejando en evidencia el desconocimiento del criterio mismo en el registro algebraico-simbólico y tampoco realizan un pasaje al

registro gráfico para coordinar el crecimiento de la función con la visualización de la curva representativa de la función. En el caso de la aplicación del criterio de la segunda derivada ellos derivan dos veces pero desconocen el criterio en los dos registros en juego.

El razonamiento que realizan los estudiantes en sus resoluciones presenta serias falencias en el razonamiento directo (modus ponens), tienen dificultades en encontrar una relación (proposición) que permita conectar la hipótesis y la conclusión. En el problema en estudio la dificultad concreta ha sido el desconocimiento de los criterios y la no coordinación con el registro gráfico. Esta situación queda en evidencia cuando al reconocer correctamente las condiciones del criterio, se equivocan en el proceso de deducción llegando a conclusiones erradas.

Con respecto a la pregunta: “¿Comprenden el objeto matemático valor extremo en los registros algebraico y gráfico?”, los estudiantes operan bien las derivadas en el registro algebraico, pero falta el análisis de los signos y concluir, y en general no recurren al registro gráfico, obteniendo conclusiones incompletas o erradas. La no coordinación de los registros algebraico-simbólicos con el registro gráfico explica a nuestro juicio la falta de dominio de los criterios y la debilidad en la comprensión.

Los estudiantes recurren con mayor frecuencia al criterio de la segunda derivada que el criterio de la primera derivada (32 versus 14). Sin embargo cuando el criterio de la segunda derivada no entrega información, ellos ignoran el punto iii) del criterio de la segunda derivada y no pueden continuar o concluir correctamente.

Con respecto a la pregunta: “¿Qué estrategia eligen para decidir sobre los valores extremos cuando f’’(c)=0?”, pensamos que el criterio de la segunda derivada lo interpretan equivocadamente cuando al anularse la segunda derivada en el valor crítico, concluyen “no hay información”, lo que significa para los estudiantes el término del proceso. Esto posiblemente se refuerza debido a que los problemas presentados en clase no consideran esta problemática. En general no se proponen problemas donde sucede este caso.

Este sencillo problema deja en evidencia serias dificultades de los estudiantes y también de la enseñanza recibida. Enseñar los criterios para determinar valores extremos mediante ejemplos ilustrativos, es pertinente, pero también lo sería el mostrar casos de funciones que tienen valores extremos en puntos donde los criterios no aportan información.

Cuando el criterio de la segunda derivada no entrega información, es decir, cuando $h'(x_0) = 0$ y $h''(x_0) = 0$, se debe analizar si la función tiene valores extremos pasando al registro gráfico y analizando la concavidad o el crecimiento de la función. En estos casos es necesario que el profesor de cálculo plantee situaciones de este tipo con los fines didácticos que señalamos

Referencias

Couturier, R. ; Boddin, A. ; Gras, R. (1991). *Clasificación Jerárquica, Implicativa y Cohesitiva.* Manual del programa estadístico C.H.I.C.

Duval, R (2004). *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Universidad del Valle.

Duval, R(2006). *LA GACETA DE LA RSME*, Vol. 9.1 (2006), (143–168)

Gras, R. (1995). L’Analyse Statisque Implicative. Methodes D’Analyses Statistiques Multidimensionnelles en Didactique des Mathematiques, Conferencia del 27 al 29 de enero de 1995. Caen.

Guzmán, I. et all. (2007) ¿Cómo se enseña en la Universidad? El caso de los Números Reales. IV Encuentro internacional de Análisis Estadístico Implicativo. Universitat Jaime I. España.

Ortega, L. et all. (2007) ¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?. IV Encuentro internacional de Análisis Estadístico Implicativo. Universitat Jaime I. España.

Orús, P. (2002). *Tratamiento de Datos, Grafos y Didáctica de las Matemáticas*, Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Trigueros, M. y Escandón, C. (2008). Los conceptos relevantes en el Aprendizaje de la Graficación. *RMIE*, VOL. 13, NÚM. 36, pp. 59-85.