"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n°20 suppl 1, 2010
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)
A.S.I. 5 Proceedings 5-7- November 2010

Étudier les différenciations des élèves au travers des pratiques de classes et des pratiques langagières des enseignants

Lahanier-Reuter Dominique
Equipe Théodile CIREL Université Lille 3, Villeneuve d'Ascq, France

E-mail: dominique.lahanier@univ-lille3.fr

Abstract. In this proposition we intend to present some treatments which may be required for a research we are about to begin. Understanding teacher's ways for students' categorization is our main goal. These categorizations may be discursive ones ("best", "worse"…) or practical ones ("allowed speaker", "not allowed speaker"…). Teachers use the former especially on institutional places, deliberating with their colleagues or meeting students' parents. The latter are described by observers, from teacher's behavior in the classroom. What we would like to study is the rules the teachers – and the students – read between these categorizations (the "best" students work "hard"). We propose to represent these rules by implicative links, such as "if a student is one of the "best", then he is one of those who works hard". In order to examine the rules whose applications the teachers claim for, we first observe classrooms in order to complete tables from these observations: tables cross discursive categorizations and practical ones, whenever they are linked by a rule we assume the teacher follows.By the way of Implicative Statistical Analyze treatments, we test the implications links these data provide. To improve our results, we try then to focus on "hidden" implicative statistical links. We mean that putting together some categories may get some new implicative links. We then show this operation is sometimes fruitful, for the measure of the intensity of the new implicative link may be better than the older ones. We suggest then that an algorithm based upon the calculus of the implicative links' entropy may provide new implicative links between new categories.So, it may occur that observing classrooms and studying practical categorizations, practical rules… leads to question both categorizations and rules, as they are discursively set and practically used.

Résumé. Nous proposons d'explorer certains traitements qu'une prochaine recherche va sans doute exiger. Nous avons l'intention d'explorer, pour mieux les comprendre, les façons dont les enseignants catégorisent leurs élèves. Ces catégorisations peuvent être discursives (les « meilleurs », les « faibles »…) ou au contraire être produites/produire des comportements observables (ceux qui sont sollicités, ceux qui ne le sont pas…). Les enseignants recourent plutôt aux premières lors de situations institutionnelles hors de l'espace de la classe (les conseils de classe, les rencontres parents/professeurs, ou lors de discussions avec leurs collègues…). Les secondes catégorisations sont davantage observées au contraire dans l'espace même de la classe, et sont plus ou moins lisibles au travers des comportements des enseignants. Mais ce qui nous préoccupe davantage est l'ensemble des règles de gestion de ces catégories que les enseignants énoncent : « je sollicite volontiers les élèves les plus faibles ». Nous avons choisi de modéliser ces énoncés par des liens implicatifs, ici « si un élève est faible, alors je le sollicite ». Afin de pouvoir comparer les règles que les enseignants énoncent et celles qu'ils mettent en pratique, nous devrons dans un premier temps observer les classes. Ceci nous permettra de former des tableaux qui croiseront des catégories discursives et des catégories pratiques, identifiées par ces observations. En particulier nous nous intéressons aux tableaux croisant des catégories évoquées dans les règles énoncées par les enseignants. Nous testerons ensuite, en appliquant les méthodes de l'Analyse Statistique Implicative, les liens démontrés par ces données recueillies. Afin d'affiner ces résultats, nous avons l'intention de nous pencher sur la mise en évidence de liens implicatifs « masqués ». Cela signifie pour nous que certains regroupements de catégories peuvent révéler des liens implicatifs dont la mesure de l'intensité est supérieure à celle des liens qu'ils permettent de remplacer. Nous réfléchissons ici à ces possibilités de regroupements et à leurs conséquences. En particulier, nous proposons de construire un algorithme de ces regroupements, basé sur le calcul de l'entropie des liens implicatifs entre catégories. Ainsi, les observations à mener et l'étude qui en découle des pratiques de catégorisations dans les classes sont susceptibles de nous permettre de mieux questionner les catégories décrites par les enseignants, les règles qu'ils défendent et les celles dont ils usent dans leurs gestions.

1 Différencier les élèves : une problématique didactique

Il est admis que les enseignants différencient leurs élèves, même si ces modes de différenciation peuvent prendre des formes diverses, comme par exemple, lors de situations d'évaluation, au travers de l'attribution de notes, l'écriture de commentaires et d'annotations sur les productions…, lors de situations d'étude, au travers de sollicitations particulières, d'aides apportées etc. Nous allons, au cours de cette présentation, nous intéresser à deux formes particulières de ces différenciations. La première est celle des catégorisations langagières auxquelles les enseignants ont recours dans et hors de la classe lorsqu'ils parlent de leurs élèves - les « bons », les « faibles », mais aussi les « plus doués », les « paresseux »… -. La seconde est celle des différenciations non explicitées, mais observables, construites au travers des gestes de ces mêmes enseignants, lorsqu'ils donnent la parole à certains, choisissent l'un d'entre eux pour corriger l'exercice etc.

Il est légitime de supposer des relations entre ces divers modes de différenciation, ou, du moins d'envisager de les étudier. En effet, nombre de discours professionnels (recueillis dans des revues syndicales par exemple ou dans des salles des enseignants…) font référence à des règles qui les relieraient : « donner la parole aux faibles », ou « faire participer les élèves muets » ou encore « je choisis toujours un bon élève pour la correction ».

Qu’en est-il vraiment ? Quelles règles surgissent dans le quotidien de la classe, entre qualifications/catégorisations des élèves et comportements, gestions de la classe ? C’est la question que nous traitons ci-dessous, en proposant une analyse de données de type analyse statistique implicative, et qui s’appuie sur un algorithme que nous avions développé (Lahanier-Reuter, 2001).

Cette question des différenciations entre élèves est une question vive en didactique des mathématiques. Non seulement parce que ce champ de recherche se donne pour objet l’étude des phénomènes d’enseignement et d’apprentissages des mathématiques, mais parce qu’il interroge aussi les pratiques des différents acteurs (les élèves, l’enseignant) dans l’espace de la classe de mathématiques. Les différenciations des élèves, telles qu’elles peuvent être prescrites (dans les Instructions Officielles en particulier), recommandées (par les associations de parents d’élèves par exemple) et enfin pratiquées, constituent un thème de recherche émergent dans cette didactique disciplinaire (Lahanier-Reuter, 2010, Coulanges, 2010). Cette question, en revanche, n’est pas nouvelle dans d’autres didactiques disciplinaires, où ces différences ont été analysées au contraire dans des courants de recherche conséquents (Privat, Reuter, Daunay, Delcambre… en didactique du français par exemple). Certes, ces différences ou ces distinctions entre élèves dans les classes de français, d’histoire-géographie… sont expliquées par des raisons qui ne sont peut-être pas pertinentes en ce qui concerne les classes de mathématiques : le milieu socio-culturel de l’élève (Lahire), la familiarité plus ou moins grande avec les pratiques langagières scolaires écrites, sont ainsi des facteurs avancés pour rendre compte de ces différences entre élèves. Or, nous manquons, pour l’heure, de travaux solides pour confirmer ou infirmer l’impact de ces caractéristiques sur les différenciations des élèves en mathématiques. Il s’agit par conséquent d’un problème très ouvert, dont les retombées sont larges : d’un point de vue théorique, les avancées devraient permettre de mieux comprendre et cerner la notion de discipline scolaire, ainsi que les modes de construction d’élèves en mathématiques. D’un point de vue plus praxéologique, déterminer les façons dont les élèves sont différenciés ou se sentent différenciés dans un tel espace est sans doute un pas important pour mieux prendre en compte l’adéquation aux apprentissages des formes de gestion de classe.

Notre présentation n’apporte pas encore de résultats didactiques à proprement parler, puisqu’elle se propose simplement de poser un cadre d’interrogations et de traitements. Les exemples que nous fournissons sont issus de données empruntées. Ils ne constituent donc pas des résultats mais des possibilités de mises en œuvre de ces méthodes.

2 . Des pratiques langagières qui différencient les élèves

Nous savons que la langue, « par le biais des dénominations des objets, des événements, des comportements, produit des catégories, des classements et des interprétations » (Bautier, 1995 : 199). L’usage des qualificatifs (bons, moyens, faibles) pour désigner certains élèves est un des exemples les plus évidents de ces catégorisations ou classements -nous revenons plus bas sur cette distinction-. Cependant, ces catégories ne sont pas stables. Leurs usages peuvent être soumis à la temporalité de l’enseignement : un élève peut être considéré comme « faible » au début de l’année scolaire puis « moyen » à la fin. Ils peuvent aussi être dépendants de la situation dans laquelle l’enseignant recourt à ces expressions : lors d’une réunion parents professeurs, le qualificatif « nul » peut être banni, pour des raisons évidentes de communication, tandis que celui-ci peut être prononcé dans la salle des enseignants. Dépendantes des lieux, des temps, des interlocuteurs, des enjeux de la situation, ces catégorisations qui différencient les élèves sont à envisager en tant qu’usages sociaux et situés du langage.

2.1 Des catégorisations scolaires peut-être didactiques

Ces catégorisations, telles qu’elles apparaissent dans les discours des enseignants, sont des catégorisations qui prennent un sens particulier dans l’espace scolaire. Comme le fait remarquer Bautier, « il faut distinguer le système de catégorisations inscrit dans la langue et qui est propre à une culture au sens ethnologique du terme de la construction sociale du sens (Boutet, 1994) » (Bautier, 1995). Il est relativement évident que le « il est très faible » n’a pas le même sens dans un conseil de classe et au chevet d’un malade. Catégorisations scolaires donc, mais peut-être aussi catégorisations didactiques : emploie-t-on les mêmes catégories, recourt-on aux mêmes dénominations lorsque l’on enseigne les mathématiques et l’EPS ? Pour l’instant, cette question est ouverte. Seules sans doute les études relatives à l’évaluation, ou encore aux annotations des productions d’élèves nous autorisent à supposer des spécificités disciplinaires quant aux sens et peut-être quant aux dénominations de ces catégories.

2.2 . Catégorisation ou classement?

Nous avons usé jusqu’ici du terme de catégorisation, qui éloigne toute idée de hiérarchisation des dénominations utilisées pour désigner des groupes d’élèves. Néanmoins, les dénominations utilisées l’évoquent très régulièrement. Les discours des enseignants construisent donc le plus souvent des hiérarchies entre élèves. Cependant, nous choisissons de ne pas les traiter comme telles. En effet, nous supposons que les catégorisations utilisées par les enseignants ne reposent pas sur des mesures précises d’indicateurs, mais sur une volonté de différencier des groupes d’élèves, volonté qui est engendrée semble-t-il par l’institution elle-même et par les exigences professionnelles relatives à l’évaluation qu’elle émet envers les professeurs. Il nous parait plus légitime de considérer que ces opérations de discernement ne reposent pas sur des « mesures » de distance entre élèves, mais sur des opérations de ségrégation. Les caractéristiques dont les enseignants disent se servir pour établir des catégorisations selon les niveaux des élèves par exemple, sont des caractéristiques plus binaires que continues : « avoir réussi tel devoir- ou non », « savoir que…- ou non », « comprendre tel concept- ou ne pas le comprendre ».

C’est pourquoi nous considérons que les opérations de regroupements d’élèves, d’après le discours des enseignants, relèvent davantage de catégorisation que de classement. C’est pourquoi aussi nous avons considéré qu’il était pertinent de rechercher d’éventuels regroupements entre ces catégories (les faibles et les forts par exemple) qui allaient contre toute mesure de distance entre celles-ci.

3 Des comportements, des interactions de l’enseignant et des élèves : d’autres différenciations ?

Dans l’espace de la classe, cette fois, les comportements de l’enseignant différencient parfois les élèves. Étudiant plus précisément certaines séquences, nous sommes parvenues (Lahanier-Reuter, 2010) à la conclusion que, selon les situations, l’enseignant construisait des élèves indifférenciés ou non : dans une classe « ordinaire » au cours de la construction par question/réponses du contenu à apprendre, l’enseignant préférait considérer les élèves comme indifférenciés. En revanche, dans les moments où les élèves travaillaient de façon individuelle, il les considérait dans leurs particularités (s’arrêtant ou se déplaçant non pas au hasard, mais pour jeter un œil à un élève en particulier, etc.). Même si dans d’autres classes de mathématiques, fonctionnant sous d’autres modes pédagogiques, nous avons pu décrire ou interpréter des choix contraires, il n’en reste pas moins que les modes de gestion des enseignants des classes de mathématiques observés supposaient des gestes différentiels. Par conséquent, nous nous intéressons aux catégorisations qui sont générées par le langage ou les gestes des enseignants. Plus particulièrement, dans le cadre de cette proposition, nous nous focalisons sur les liens qui peuvent exister entre ces catégories, qu’elles soient explicitées ou pratiquées.

4 .Une modélisation possible des règles énoncées, des règles pratiquées

Les catégorisations énoncées ou pratiquées par les enseignants dans des classes de mathématiques sont parfois reliées entre eux par les acteurs eux-mêmes « les élèves les plus faibles, je les aide vraiment beaucoup», « j’essaie de m’appuyer davantage sur les bons quand je fais cours » etc. Ce sont de telles « règles » que nous allons tenter d’étudier. Nous proposons tout d’abord de les modéliser, puis de travailler à partir de ces modélisations. Dans ce qui suit, nous différencions règles énoncées par les acteurs et règles pratiquées par ces derniers.

4.1 Règles énoncées

Les règles énoncées par les enseignants sont relevées lors d’entretiens, ou lors d’observations de situations institutionnelles (conseils de classe, visites d’inspecteurs, réunions pédagogiques…). Ces énoncés sont retranscrits en effaçant ce qui est trace de l’oral, comme les hésitations, les silences… et en adoptant au contraire les normes de l’écriture (ponctuation en particulier). Il est alors possible de les interpréter comme des « conditions suffisantes » et de les modéliser en termes d’implication entre énoncés : Si un élève est faible, alors c’est un élève que j’aide beaucoup, si un élève possède la caractéristique « être dans la catégorie la plus faible », alors il possède la caractéristique « être dans la catégorie qui reçoit une aide importante».

Ainsi faisant, nous encourrons le risque de surinterprétation, comme dans toute modélisation. En particulier, O. Ducrot (Ducrot, 1971) souligne que ce type d’énoncé, entendu comme élément de discours, ne fonctionne pas comme une implication, énoncé mathématique. En particulier, il pointe le fait que « lorsqu’une affirmation est limitée, on a tendance à la comprendre comme la limitation d’une affirmation » (p.63). L’enseignant qui dit, dans un conseil de classe « les élèves les plus faibles, je les aide vraiment beaucoup» peut être compris comme n’aidant beaucoup que les élèves les plus faibles, parce que dans son propos n’apparaissent pas d’informations sur les autres catégories d’élèves.

Ces stratégies discursives – Ducrot parle de « loi de discours »- qui font que nous ne donnions à notre interlocuteur que les informations principales, et donc que nos affirmations soient limitées, constituent par conséquent des obstacles à notre interprétation et à la validité de notre modélisation. Cependant, et c’est l’enjeu de notre travail, confronter les règles telles qu’elles sont énoncées et telles qu’elles sont pratiquées devrait nous permettre de limiter les risques de surinterprétation.

C’est pour cela que nous cherchons, en reprenant les catégories discursives utilisées, les liens implicatifs (au sens statistique du terme) qui corroborent les règles énoncées, mais aussi ceux qui ne transparaissent pas dans le discours. Dévoiler des liens implicatifs implicites est donc un premier enjeu de notre recherche.

4.2 Règles pratiquées

Pour dégager des règles pratiquées, des observations sont nécessaires. Ainsi, nous avons l’intention d’observer dans des classes de la banlieue lilloise des séances d’enseignement de mathématiques. En particulier, observer les déplacements de l’enseignant(e) durant les moments de travail individuel (quels sont les élèves auprès desquels celui-ci s’arrête, échange…) relever les prises de parole accordées, sollicitées durant les moments de travail collectif etc. Tous les enseignants observés seront interviewés, et il leur sera demandé une classification des élèves en fonction de leurs niveaux en mathématiques (la dénomination est laissée à l’enseignant) et les gestions de la classe qu’ils mettent en œuvre, en tenant compte de ces classifications. Le relevé des observables conduira à des catégorisations d’élèves issues des comportements relevés. Il est envisagé d’étendre ces observations à des études des annotations (sur les productions d’élèves, ou sur les bulletins trimestriels).

Nous nous trouvons ainsi face à au moins deux catégorisations des élèves (selon leurs niveaux, selon les comportements à leur égard des enseignants), que ces mêmes enseignants relient, par des règles que nous interprétons en termes d’implications. Nous cherchons à éprouver la validité des règles énoncées par l’étude des implications statistiques entre les diverses catégories : dans un premier temps, il s’agit de vérifier, comme nous l’avons dit plus haut, l’apparition d’implications statistiques correspondant à la modélisation réalisée des règles énoncées, mais dans un second temps, il est intéressant d'interroger la notion même de catégorie effectuée, en en testant la stabilité : est-il possible que les règles pratiquées dépassent ces catégories ? Est-il possible qu'elles soient encore valides sur des regroupements plus importants de ces dernières ? En quelque sorte, les catégories dévoilées par les pratiques des enseignants dépassent-elles les catégories qu'ils utilisent dans leurs discours ?

5 Tester les conséquences du point de vue de l'implication statistique de la réunion d'ensembles disjoints

Par conséquent, nous nous intéressons désormais au problème suivant : étant donné trois énoncés, a_1, a_2 et b, nous étudions les mesures des implications statistiques entre ces énoncés et celle de l'implication qui éventuellement lie l'énoncé $a_1 \vee a_2$ à l'énoncé b. Pour rester dans le cadre de notre question didactique, nous supposerons de plus que les énoncés a_1 et a_2 sont incompatibles. a_1, a_2 et b désigneront aussi les variables binaires associées à ces énoncés (de valeur 1 si cet énoncé est vrai pour le sujet considéré, de valeur 0 sinon).

5.1 Relations entre les mesures des implications $a_1 \Rightarrow b$, $a_2 \Rightarrow b$, et celle de($a_1 \vee a_2$)$\Rightarrow b$

Soit E un ensemble de sujets de cardinal n. Soit a_{1i} (*resp.* a_{2i}, b_i), la valeur modale de vérité prise en a_1 (*resp.* en a_2, en b) par le sujet i.

Sur cet ensemble les trois sous-ensembles, A_1, A_2 et B, de cardinaux respectifs

$$n_1 = \sum_i a_{1i}\ ,\ n_2 = \sum_i a_{2i} \text{ et } n_b = \sum_i b_i$$

des sujets vérifiant respectivement les énoncés a_1, a_2 et b.

$\bar{B}$ désigne le complémentaire de B dans E de cardinal $n-n_b$.

$A_1 \cup A_2$ est l'ensemble des sujets vérifiant $a_1 \vee a_2$.

Puisque A_1 et A_2 sont disjoints :

- $(A_1 \cup A_2) \cap \bar{B} = (A_1 \cap \bar{B}) \cup (A_2 \cap \bar{B})$
- Card $(A_1 \cup A_2) = \sum_i a_{1i} + \sum_i a_{2i}$
- Card$(A_1 \cap \bar{B}) = \sum_i a_{1i}(1-b_i)$
- Card $(A_2 \cap \bar{B}) = \sum_i a_{2i}(1-b_i)$
- Card $(A_1 \cap \bar{B}) \cup (A_2 \cap \bar{B}) = \sum_i a_{1i}(1-b_i) + \sum_i a_{2i}(1-b_i) =$ Card$(A_1 \cap \bar{B})$ + Card $(A_2 \cap \bar{B})$

L'indice d'implication de a_1 sur b est :

$$q(a_{1,}\bar{b}) = \frac{n_{a1\wedge\bar{b}} - \frac{n_{a1}n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{a1}n_{\bar{b}}}{n}}}$$

Celui de a_2 sur b

$$q(a_2\,\bar{b}) = \frac{n_{a2\wedge\bar{b}} - \frac{n_{a2}n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{a2}n_{\bar{b}}}{n}}}$$

Celui de $a_1 \vee a_2$ sur b

$$q(a_1 \vee a_2, \bar{b}) = \frac{n_{a_1 \vee a_2 \wedge \bar{b}} - \frac{n_{a_1 \vee a_2} n_{\bar{b}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{a_1 \vee a_2} n_{\bar{b}}}{n}}} = \frac{\sum a_{1i}\,(1-b_i) + \sum a_{2i}\,(1-b_i) - \frac{(\sum a_{1i} + \sum a_{2i}) \sum(1-b_i)}{n}}{\sqrt{\frac{(\sum a_{1i} + \sum a_{2i}) \sum(1-b_i)}{n}}}$$

Soit

$$q(a_1 \vee a_2, \bar{b}) = \frac{q(a_1\,\bar{b})\sqrt{\frac{n_{a1}n_{\bar{b}}}{n}} + q(a_2\,\bar{b})\sqrt{\frac{n_{a2}n_{\bar{b}}}{n}}}{\sqrt{\frac{n_{a_1 \vee a_2} n_{\bar{b}}}{n}}} = q(a_{1,}\bar{b})\sqrt{\frac{n_{a1}}{n_{a_1 \vee a_2}}} + q(a_{2,}\bar{b})\sqrt{\frac{n_{a2}}{n_{a_1 \vee a_2}}}$$

Puisque $n_{a_1 \vee a_2} = n_{a_1} + n_{a_2}$, $q(a_1 \vee a_2, \bar{b})$ est la somme de deux réels inférieurs en valeur absolue à celles de $q(a_{1,}\bar{b})$ et $q(a_{2,}\bar{b})$.

5.1.1 Premier cas :

Donc, si les implications de a_1 sur b **et** de a_2 sur b sont significatives, les indices $q(a_{1,}\bar{b})$ et $q(a_{2,}\bar{b})$sont négatifs, et celui de $a_1 \vee a_2$ sur b aussi :

Si ($a_1 \Rightarrow$ b) et ($a_2 \Rightarrow$ b) au sens statistique, alors, $a_1 \vee a_2 \Rightarrow$ b au sens statistique.

Puisque les nombres $\sqrt{\frac{n_{a1}}{n_{a_1 \vee a_2}}}$ et $\sqrt{\frac{n_{a2}}{n_{a_1 \vee a_2}}}$ sont inférieurs ou égaux à 1, l’indice $q(a_1 \vee a_2, \bar{b})$ est supérieur à $q(a_{1,}\bar{b}) + q(a_{2,}\bar{b})$, mais peut être inférieur à $q(a_{1,}\bar{b})$ ou à $q(a_{2,}\bar{b})$.

L’intensité de l’implication statistique $a_1 \vee a_2 \Rightarrow$b doit être comparée à celle de a_1 sur b et celle de a_2 sur b.

5.1.2 Deuxième cas

Si les implications de a_1 sur b **et** de a_2 sur b ne sont pas significatives, alors les indices $q(a_{1,}\bar{b})$ et $q(a_{2,}\bar{b})$sont positifs, et celui de $a_1 \vee a_2$ sur b aussi.

En conséquence :

L’implication $a_1 \vee a_2 \Rightarrow b$ n’a de signification statistique que si l’une des deux, ou les deux implications de a_1 sur b et de a_2 sur b le sont.

Il peut se faire en effet que l’une des deux implications soit statistiquement significative et pas l’autre et que $a_1 \vee a_2 \Rightarrow b$ soit statistiquement significatif. En voici un exemple

En voici un exemple

Tableau 1. $a_1 \Rightarrow b$ admissible au seuil 96,5%[1]

		b		
		1	0	Totaux
a_1	1	5	1	6
	0	10	84	94
	Totaux	15	85	100

Tableau 2. a_2 est contradictoire avec a_1 et $a_2 \Rightarrow b$ n’est pas statistiquement admissible

		b		
		1	0	Totaux
a_2	1	1	9	10
	0	14	76	90
	Totaux	15	85	100

$q(a_2, \bar{b}) = 8{,}5$, est donc positif et l’implication de a_2 sur b n’est pas intéressante.

Tableau 3. $a_1 \vee a_2$ sur b

		b		
		1	0	Totaux
a_2	1	6	10	16
	0	9	75	84
	Totaux	15	85	100

Et ici $q(a_1 \vee a_2, \bar{b}) = -0{,}976$

1 Nous reprenons ici l’exemple de Régis Gras, (Gras, 1996:33) pour assurer une continuité à l’étude.

Par conséquent, $a_1 \vee a_2 \Rightarrow b$ est admissible au seuil 83%. Il peut donc se faire que nous découvrions des implications statistiques en explorant systématiquement les regroupements possibles (voir annexe).

5.2 Quelques principes pour des algorithmes de regroupements d’énoncés issus de catégorisations

Nous avons déjà écrit un tel algorithme dont le but était la réunion d’intervalles disjoints de $\mathbb{R}$, en en respectant la connexité : deux intervalles pour être réunis devaient avoir une borne supérieure/inférieure commune. Le problème ici s’avère quelque peu différent, même s’il repose sur des principes voisins. Nous considérons une catégorisation sur un ensemble E de n sujets, soit m énoncés disjoints : a_1, a_2…., a_m, auxquels correspond une partition de E : A_1, A_2, ….A_m, où A_k est le sous-ensemble de E des sujets pour lesquels l’énoncé a_k est vrai. Sur cet ensemble E, soit un sous ensemble B, non vide. On considère les m réels $q\left(a_{i,}\bar{b}\right)$, pour $1 \leq i \leq m$.

Remarquons tout d’abord qu’il est impossible que tous les $q\left(a_{i,}\bar{b}\right)$ soient négatifs. Sinon, il y aurait implication statistique de la réunion des A_i, soit E, sur B.

Le premier cas est relativement facile à traiter, c’est celui où tous les $q\left(a_{i,}\bar{b}\right)$ sont positifs, c’est-à-dire le cas où aucune des implications n’est satisfaisante. (Il faut alors transposer le problème aux implications de b sur les a_i et considérer les q(b, $\bar{a_i}$)).

Le second cas est celui où l’un au moins des $q\left(a_{i,}\bar{b}\right)$ est négatif. Dans ce cas, considérons les k $q\left(a_{i,}\bar{b}\right)$ de signe négatif et les k sous-ensembles A_i correspondants. Seules les réunions de ces k sous-ensembles avec les m-k autres peuvent faire surgir des liens « masqués », seules les réunions de ces k sous-ensembles entre eux peuvent faire apparaître des implications sur B de sous-ensembles plus larges que précédemment.

Le choix du chercheur est alors le suivant : faire apparaître *tous* les liens implicatifs intéressants, c’est-à-dire autoriser l’apparition éventuelle de réunions concurrentes des sous ensembles A_i, ou souhaite-t-il préserver une liste d’énoncés catégorisants, c’est-à-dire imposer aux réunions éventuelles de sous-ensembles la contrainte d’être disjointes deux à deux ? Il se peut en effet que deux concaténations d’énoncés présentent un énoncé commun et soient toutes deux, d’un point de vue statistique, l’objet d’implications intéressantes sur b.

Faire apparaître *tous* les liens implicatifs intéressants suppose de définir ce qu'est un lien implicatif intéressant, c'est-à-dire de se fixer un seuil de mesure α qui garantisse cet intérêt. Dans ce cas, il suffit de considérer l'ensemble des mesures de l'intensité des k(m-k) implications de $a_i \vee a_j$ sur b , où $q(a_{i,} \bar{b}) \leq 0$ et où $q(a_{j,} \bar{b}) \geq 0$ et de les comparer au seuil fixé.

Préserver une liste d'énoncés catégorisants suppose des décisions, guidées par l'intérêt statistique. Nous proposons de guider ces décisions par la valeur de l'*entropie* calculée par les mesures des intensités des implications.

L'entropie en effet représente en quelque sorte le défaut d'information : une liste d'énoncés à laquelle nous attribuons une forte entropie est une liste dont les énoncés sont peu informatifs. Plus l'entropie diminue et plus la liste d'énoncés apparait comme informative. Notre préoccupation est en conséquence d'aboutir à une liste d'énoncés dont l'entropie soit plus faible que celle de la liste de départ.

Considérons la liste L_0 des énoncés : {($a_1 \Rightarrow b$) est recevable au sens statistique ; ($a_2 \Rightarrow b$) est recevable….. ; ($a_m \Rightarrow b$) est recevable au sens statistique}. Nous proposons de définir E_0 comme l'entropie associée à cette liste [2]:

$$E_0 = -\sum \varphi(a_i, \bar{b}) \log_2 (\varphi(a_i, \bar{b})) \text{ où } \varphi(a_i, \bar{b}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q(a_i, \bar{b})}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

Notre but est d'examiner les réunions des A_i et des A_j « intéressantes », c'est-à-dire qui permettent de diminuer l'entropie.

Soit $X_{i,j}$ (avec $i \neq j$) l'ensemble des m-2 implications $a_r \Rightarrow b$, où $r \neq i$ et $r \neq j$.

On considère les k (m-k) implications de $a_i \vee a_j$ sur b , où $q(a_{i,} \bar{b}) \leq 0$ et où $q(a_{j,} \bar{b}) \geq 0$ et les k(k-1) de $a_i \vee a_j$ sur b , où $q(a_{i,} \bar{b})$ et $q(a_{j,} \bar{b})$ sont négatifs et $i \neq j$, soit un ensemble de k(m-1) implications. On considère les k(m-1) systèmes de m-1 implications $X_{i,j}' = X_{i,j} \cup \{ a_i \vee a_j \Rightarrow b\}$.

Pour chacun des systèmes, calculons

[2] Dans la théorie de l'A.S.I., il est fait également appel à ce type d'entropie pour designer la cohésion de classes de variables. Mais le développement qui suit n'y fera pas référence car il est étranger à cette notion.

$E_{i,j} = \sum\varphi(a_r, \bar{b})\, log_2\left(\varphi\left(a_i, \bar{b}\right)\right) - \varphi\,(a_i \vee a_j, \bar{b})\, log_2\,(\varphi\,(a_i \vee a_j, \bar{b})$[3]

$E_{i,j} =$

$E_0 + \varphi\left(a_i, \bar{b}\right) log_2\left(\varphi\left(a_i, \bar{b}\right)\right) + \varphi\left(a_j, \bar{b}\right) log_2\left(\varphi\left(a_j, \bar{b}\right)\right) - \varphi\,(a_i \vee a_j, \bar{b})\, log_2\,(\varphi(a_i \vee a_j, \bar{b})$

Du fait de la concavité tournée vers le haut de la courbe représentant $x\log_2 x$ sur]0,1] et de sa décroissance entre 0 et ½ puis de sa croissance entre ½ et 1, nous utilisons les résultats précédents : si les indices $q\left(a_i, \bar{b}\right)$ et $q\left(a_j, \bar{b}\right)$sont négatifs, les $\varphi\left(a_i, \bar{b}\right)$et $\varphi\left(a_j, \bar{b}\right)$sont compris entre 0 et ½ et donc la différence $E_{i,j}$ et E_0 est intéressante etc.

En classant les $E_{i,j}$ selon les valeurs décroissantes, nous établissons une liste E des priorités des regroupements à effectuer, dont nous supprimons tous les éléments pour lesquels :

- Tant que les (i,j) de la liste E ont tous leurs éléments distincts, les remplacements de a_i et a_j par $a_1 \mathrm{v} a_2$ sont à effectuer.

- Dès qu'un tel remplacement est effectué, les éléments de la liste E non encore pris en compte, dont l'un des éléments du couple est soit égal à i, soit à j, sont supprimés de E.

- Lorsque la liste est épuisée, E_0 est remplacé par la nouvelle entropie, l'opération recommence avec les nouveaux regroupements.

6 Un exemple virtuel

Comme nous l'avons dit au début de cette proposition, les exemples ne sont pas issus de travaux d'observation.

6.1 Un exemple de regroupements de catégories

Voici un exemple où trois énoncés « faibles », « moyens » et « forts » sont utilisés pour la première catégorisation, et où la seconde catégorisation, issue des « observations » n'en comprend que deux : « sollicités », « non sollicités ». Une règle commune est la suivante : « les «élèves faibles sont parmi les plus sollicités ».

Les liens implicatifs apparents sont les suivants : « être un élève faible »$\Rightarrow$ « être un élève sollicité », avec une mesure supérieure à 95%. De même, « être un élève fort » ⇒ « être un élève sollicité », avec la même intensité de mesure, ce qui n'est pas un résultat mettant en cause la règle énoncée sur le plan mathématique, mais qui l'interroge sur le plan de la compréhension « ordinaire », comme nous l'avions souligné dans le paragraphe 4. La catégorie « élève moyen » n'intervient pas de façon significative.

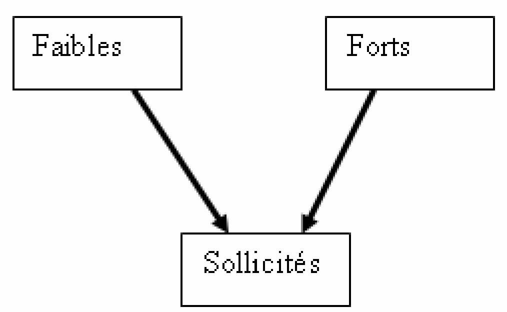

Figure 1. Implications entre les catégories

Ce qui est intéressant dans cet exemple *ad hoc*, est que la réunion des deux groupes d'élèves « faibles » et « forts » est à retenir, car l'implication statistique est encore d'intensité comparable.

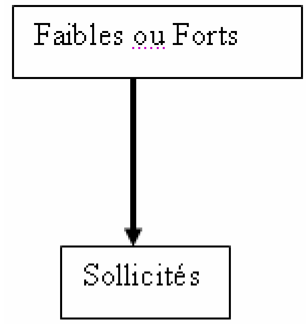

Figure 2 Implications entre les catégories réunies

Ce qui finalement, nous donne comme règle « pratiquée » : « être un élève faible ou fort » ⇒ « être un élève sollicité ». Cette règle met en lumière le fait que l'enseignant sollicite des élèves qu'elle juge faibles ou forts, mais que cette particularité de gestion de séances de mathématiques n'est pas apparente dans son discours.

6.2 Un exemple de mise en œuvre de l'algorithme

Nous empruntons ici un exemple tiré de Maxwell (1977), exemple qui est issu de données non didactiques, mais qui nous semble cependant pertinent pour interroger la mise en œuvre de l'algorithme présenté. En effet, nous avons souvent utilisé ce tableau de données (voir ci-dessous) pour montrer le bénéfice de la réduction du nombre de colonnes et/ou de lignes pour augmenter la valeur du chi² et ainsi faire apparaître des lignes de force. Nous supposons donc que ces données devraient se prêter aussi à l'algorithme.

Le contexte est le suivant : 650 enfants ont été suivis en consultation psychiatrique. On observe d'une part le rang dans la fratrie et d'autre part le diagnostic porté sur l'enfant : réaction de type dépressif (d), anxieux (a), schizophrénique (s).

Tableau 3. Diagnostic et rang dans la fratrie

	Dépressif	**Anxieux**	**Schizophrénique**	**Totaux**
Rang 1	98	70	57	225
Rang 2	108	75	61	244
Rang 3	61	68	52	181
Totaux	**267**	**213**	**170**	**650**

Commençons par le calcul de E_0, soit l'entropie associée à la liste d'événements : {(d) $\Rightarrow$ Rang 1, (d) $\Rightarrow$ Rang 2…..(s) $\Rightarrow$ Rang 3}.

Tableau 4. Indices d'implication et probabilités

	Dépressif	**Anxieux**	**Schizophrénique**
Rang 1	(d) $\Rightarrow$ Rang 1 -0.422 0.66	(a) $\Rightarrow$ Rang 1 0.316 0.37	(s) $\Rightarrow$Rang 1 0.175 0.43
Rang 2	(d) $\Rightarrow$ Rang 2 -0.602 0.73	(a) $\Rightarrow$ Rang 2 0.430 0.33	(s) $\Rightarrow$Rang 2 0.273 0.39
Rang 3	(d) $\Rightarrow$ Rang 3 0.962 0.17	(a) $\Rightarrow$ Rang 3 -0.701 0.76	(s) $\Rightarrow$Rang 3 -0.421 0.66

La valeur de l'entropie E_0 est égale à 3,97

Nous calculons ensuite les entropies correspondant aux différents regroupements

- (Dépressif ou Anxieux, Schizophrène) : Entropie 2,804
- (Dépressif ou Schizophrène, Anxieux) : Entropie 2, 457
- (Dépressif, Anxieux ou Schizophrène) Entropie : 2, 101

En conséquence, le dernier regroupement, d'entropie moins élevée, représente une incertitude plus faible : celle-ci peut s'énoncer sous la forme : « relever d'un diagnostic anxieux ou schizophrénique implique d'être de rang 3 dans la fratrie », au seuil 94%, (l'indice d'implication vaut -1.55) ou encore « les enfants anxieux ou schizophréniques sont, statistiquement, des enfants qui ont au moins deux aînés ».

Ce premier résultat conforte notre calcul, et permet aussi d’interroger le lien à construire entre le calcul de cette entropie et la significativité du chi². En effet, pour les trois tableaux correspondants aux trois regroupements testés, nous trouvons des chi² n.s. pour les deux premiers et significatifs à .06 pour le dernier. Il y a donc convergence des résultats.

Il est bien sûr légitime de transposer le tableau et d’étudier la liste des implications : {« rang1 » $\Rightarrow$ (d),… « rang 3 » $\Rightarrow$ (s)}. Dans ce cas, l’entropie initiale est de 3, 81.

Comme précédemment, nous testons les regroupements :

- (Rang 1 ou Rang 2, Rang 3) Entropie : 2, 09
- (Rang 1 ou Rang 3, Rang 2) Entropie : 2, 63
- (Rang 1, Rang 2 ou Rang 3) Entropie : 2, 80

Par conséquent, nous trouvons la contraposée de la première proposition : être de rang 1 ou rang 2 implique d’être dépressif, au seuil 94%. Les remarques précédentes sur les valeurs du chi² restent bien sûr valides.

En conclusion, nous espérons que ce type d’étude, basée sur des regroupements de catégories, nous permettra de faire apparaître des phénomènes didactiques, en particulier ceux qui sont non discernés par les acteurs eux-mêmes.

Références

Bautier E. (1995). *Pratiques langagières, pratiques sociales, de la Sociolinguistique à la Sociologie du langage*. Paris : L’Harmattan.

Boutet J. (1994). *Construire le sens. Berlin* : Peter Lang

Coulange L. (2010). *Pratiques enseignantes et différenciations dans les apprentissages mathématiques à l’école primaire*. Actes du IIè congrès International de didactiques. Girona.

Daunay B., Delcambre I., Reuter Y. (2009). *Didactique du français, le socioculturel en question.* Villeneuve d’Ascq : Presses Universitaires du Septentrion.

Ducrot O. (1971). L’expression, en français, de la notion de condition suffisante. *Langue française. Linguistique et mathématiques*, 12, 60-67.

Gras R. (1996). *L’implication statistique, nouvelle méthode exploratoire de données*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Lahanier-Reuter D. (2001). Un algorithme de regroupements de modalités de variables en analyse implicative de données. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 47-59.

Lahanier-Reuter D. (2010). *Différences affichées et différences masquées entre élèves dans une classe de mathématiques: l’apport de l’analyse didactique*. Actes du IIè congrès International de didactiques. Girona.

Lahire, B. (1993). *Culture écrite et inégalités scolaires. Sociologie de l’école primaire*. Lyon : Presses Universitaires de Lyon.

Maxwell A.E. (1977). *Multivariate Analysis in Behavorial Research*. London: Chapman and Hall.

Privat J-M. (2005). Socio-logiques des didactiques de la lecture. In J-L. Chiss, J. David, Y. Reuter (dir.), *Didactique du français, fondements d’une discipline* (pp.119-134). Bruxelles :De Boeck.