*"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n°20 suppl 1, 2010*
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)
A.S.I. 5 Proceedings 5-7- November 2010

# Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce

**Kostas Nikolantonakis *, Laurent Vivier****
* Université de Macédoine Ouest, GRECE.
** IUFM Centre Val de Loire – Université d'Orléans
Laboratoire de Didactique André Revuz – Université Paris Diderot, FRANCE.

E-mail : nikolantonakis@noesis.edu.gr , laurent.vivier@univ-orleans.fr

**Résumé.** La numération de position en base quelconque pour les nombres entiers est un thème mathématique qui introduit de nouveaux registres de représentation. Naturellement, la question des traitements dans ces nouveaux registres se pose. Nous réinterprétons ce problème dans le langage des praxéologies : de nouvelles praxis sont à construire. L'analyse didactique articule donc les cadres de Chevallard et de Duval en distinguant notamment des techniques propres à un registre des techniques de conversion. L'enquête porte sur 334 étudiants, en France et en Grèce, qui se destine au professorat de l'enseignement primaire. Nous menons une étude statistique qui s'appuie sur l'Analyse Statistique Implicative et plus spécifiquement le logiciel CHIC. Outre une comparaison des populations française et grecque, l'étude statistique met en évidence deux difficultés cognitives sur l'introduction de la numération en base : 1- la base est différente de dix et 2- la base est supérieure à dix. En outre, il apparaît que l'écriture polynomiale, très souvent utilisée pour convertir un nombre d'une base *a* dans la base dix, soit un élément important pour la construction de techniques en base autre que dix.

**Abstract.** The numeration in any base for whole numbers is a mathematical topic which introduces new registers of representation. Naturally, the question for treatments in these new registers arises. We reinterpret this problem in the language of praxeologies: new praxis are to be built. The didactic analysis articulates Chevallard's and Duval's frameworks by distinguishing notably pure techniques for a register from conversion techniques. The inquiry was carried on 334 students, in France and Greece, who want to teach at Primary school and is based on the Statistical Implicative Analysis and more precisely the CHIC software. In addition to a comparison of the two populations, French and Greek, the statistical study shows two cognitive difficulties concerning the introduction of the numeration in any base: 1- the base is different from ten and 2- the base is greater than ten. Moreover, it appears that the polynomial writing, frequently used to convert a number from a base $\alpha$ to the base ten, is an important element for the construction of techniques in any base.

## 1 . Introduction

Cette étude se situe dans le prolongement d’une recherche initiée dans (Vivier, 2008) où nous proposions un cadre d’analyse articulant les notions de praxéologie (Chevallard, 1999) et de registre de représentation (Duval, 1993, 1996, 2006). Loin d’être opposés, ces deux cadres nous paraissent complémentaires malgré des sensibilités didactique et cognitive manifestement différentes. C’est sur le plan de l’activité mathématique que l’on trouve des sensibilités partagées. Ainsi, comme le signale Artigue (2009), la complémentarité et les sensibilités communes rendent possible, et surtout productif, une articulation entre ces deux cadres.

Cette articulation a été développée dans (Nikolantonakis & Vivier, 2009) au cours d’une étude prospective sur une population d’étudiants français et grecs qui se destinent au professorat de l’école élémentaire dans leur pays respectif. Notre cadre d’analyse semble bien adapté à l’étude de l’introduction d’un nouveau registre de représentation pour lequel de nouvelles techniques sont à élaborer. Aussi, nous leur avons proposé un test sur la numération de position en base quelconque qui est, restreinte à la base dix, un thème d’enseignement central à l’école élémentaire.

La numération en base autre que dix est absente du cursus primaire et secondaire[1] dans les deux pays et les étudiants de chaque nationalité se retrouvent dans la même situation face à ce savoir, totalement nouveau et déstabilisant pour la plupart d’entre eux. Les futurs enseignants n’auront à enseigner que la numération de position en base dix, ils n’ont donc pas une obligation de maîtriser ce nouveau savoir. Il s’agit plutôt de faire prendre conscience du caractère relatif de la base dix tout en faisant comprendre les mécanismes généraux de la numération de position.

Notre objectif est de répondre, par une étude statistique, à certaines interrogations qui ont émergé de notre première étude. Les types de tâches proposés sont plus nombreux et les variables didactiques sont ajustées pour les besoins de l’étude. Les données recueillies – 334 étudiants, 5 types de tâches – sont traitées à l’aide de l’Analyse Statistique Implicative.

Nous commençons par exposer la méthodologie utilisée et l’articulation des cadres de Chevallard et de Duval dont nous nous servons dans les analyses. Les résultats et interprétations font l’objet des sections 4, pour la population totale, et 5, pour une comparaison des deux populations.

1 Excepté, pour l’enseignement français, en classe de première littéraire – grade 11 – ainsi que le système sexagésimal, plus lié aux grandeurs qu’aux nombres.

## 2 Méthodologie

Le test (cf. Annexe 1) dont nous présentons l'étude suit un test prospectif qui s'est déroulé en 2009 sur les mêmes types de population (Nikolantonakis & Vivier, 2009).

Les étudiants grecs se destinant au professorat du premier degré doivent entrer dans une université pédagogique où ils préparent un diplôme en quatre ans. Ils peuvent ensuite passer un concours national de recrutement ou enseigner à l'école primaire comme contractuel. Le test faisait partie d'un examen de première année universitaire et a concerné les 139 étudiants de première année de la faculté pédagogique de Florina, université de Macédoine-Ouest. En France, après avoir obtenu une licence de leur choix, les étudiants de l'étude2 prépare en un an un concours pour enseigner à l'école primaire au sein des Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (IUFM). Le test s'est déroulé lors d'un entraînement au concours, dans des conditions très proches de ce dernier. Il constituait le premier exercice d'une composition de 3 heures. Les 195 étudiants du centre de formation de Tours, université d'Orléans, ont été concernés. Ces deux populations sont semblables quant au thème de la numération en base quelconque, que ce soit pour le contenu ainsi que le faible nombre d'heures d'enseignement sur ce thème.

Nous avons proposé différents types de tâches, élargissant le spectre de l'étude préliminaire, toutes en liaison avec les apprentissages de l'école primaire. Nous avons relevé plusieurs indicateurs (cf. annexe 2) relatifs aux registres de représentation, traitements, conversions, techniques et technologies. L'objectif principal est de valider les deux hypothèses suivantes :

- les différents systèmes de numération de position peuvent s'interpréter comme des registres différents ;
- le jeu sur les variables didactiques permet de faire émerger une utilisation de l'écriture polynomiale comme un registre à part entière, avec son potentiel technologique, et non plus comme simple écriture transitoire dans la conversion entre une base *a* et la base dix.

Notre étude utilise la statistique implicative et plus spécifiquement le logiciel CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) développé par Raphaël Couturier et Saddo Ag Almouloud à partir des travaux de Régis Gras. Le but est de relever des similarités entre variables afin de faire ressortir le caractère

2 Une réforme conséquente de la formation entrera en vigueur en septembre 2010.

différent des traitements et conversions ainsi que, par les arbres implicatifs, des quasi-implications entre variables, notamment les variables relatives à l’utilisation du registre de l’écriture polynomiale $R_{poly}$.

Nous avons procédé en deux temps : en premier lieu nous étudions la population totale pour valider les deux hypothèses puis nous faisons une étude comparative des deux populations qui révèle des contrastes et tempère les conclusions sur la population totale.

## 3 . Le cadre d’analyse

Nous exposons succinctement dans cette section l’articulation entre les praxis (Chevallard, 1999, 2002) et les registres de représentation (Duval, 1993, 1996, 2006) que nous utilisons dans notre étude et qui est exposé plus en détails dans (Nikolantonakis & Vivier, 2009).

En Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), c’est autour des types de tâches que s’élabore le travail en mathématiques (Chevallard, 1999). Généralement, pour effectuer un type de tâches T, on dispose d’au moins une technique $\tau$. Le bloc $[T,\tau]$ est nommé bloc des savoir-faire ou *praxis*. La production d’une technique, nécessaire lorsqu’aucune technique n’est à disposition pour tel type de tâches, et la justification d’une technique nécessitent un regard théorique que Chevallard nomme une technologie. Cette dernière est un élément du bloc des savoirs, ou *logos*. Praxis et logos forment une *praxéologie*.

Duval regroupe les signes utilisés dans le travail mathématique en registres de représentation sémiotique (Duval, 1993, 1996, 2006). Il distingue les traitements, une transformation sémiotique qui reste à l’intérieur d’un même registre de représentation R, et les conversions, une transformation sémiotique dont le résultat est exprimé dans un autre registre. Duval insiste particulièrement sur la différence cognitive entre traitements et conversions. Ces dernières sont bien plus complexes et problématiques pour les registres mono-fonctionnel, surtout lorsqu’elles ne sont pas congruentes.

En TAD[3,] un type de tâches n’est pas toujours énoncé en faisant référence au(x) registre(s) de représentation utilisé(s). Or, une tâche est toujours exprimée à l’aide de registres sémiotiques et ces derniers peuvent considérablement influencer

---

3 Bosch et Chevallard (1999) ont développé l’aspect sémiotique en TAD en introduisant les notions d’*ostensif* et de *non ostensif*. Mais, à nos yeux, les registres de représentation de Duval font mieux ressortir l’organisation des signes mathématiques en systèmes sémiotiques.

l’activité mathématique. Par exemple, les types de tâches proposés dans notre test (cf. Annexes 1 et 2) sont tous effectués correctement et très rapidement par les étudiants de l’étude lorsque le registre de représentation des entiers est la base dix. Il n’en est pas de même en base autre que dix.

Pour rendre compte de cette distinction, nous indexons les types de tâches et techniques par le(s) registre(s) dans le(s)quel(s) ils sont exprimés. Un type de tâches T relatif à un seul registre de représentation R est noté $T_R$ et une technique $\tau$ relatif au registre R est notée $\tau_R$. Nous obtenons ainsi une praxis relatif à un registre R, ce que nous notons $[T_R,\tau_R]$ ou plus simplement $[T,\tau]_R$ et que nous appelons R-praxis (cf. figure 1a). Afin de lier les points de vue de Chevallard et de Duval, nous distinguons :

- une technique $\tau_R$ qui est un traitement ;
- une technique $\tau_{R\rightarrow R'}$ qui est une conversion du registre R vers le registre R’.

Cette distinction permet de concilier les deux cadres sur un point crucial comme on peut le constater à la lecture de la critique suivante du cadre de Duval : « Or, dans ce qui est présenté comme un changement de registre qui ne dépendrait que du fonctionnement cognitif du sujet, nous voyons, quant à nous, la mise en œuvre d’une technique mathématique, […] » (Bosch & Chevallard, 1999, p. 117).

Deux techniques de conversion réciproques $\tau_{R\rightarrow R'}$ et $\tau_{R'\rightarrow R}$ permettent de coordonner non seulement les registres, nécessaire pour le fonctionnement cognitif de base des mathématiques (Duval, 1996), mais aussi des R-praxis (cf. figure 1b).

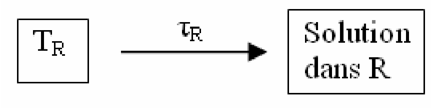



**Figure 1a**

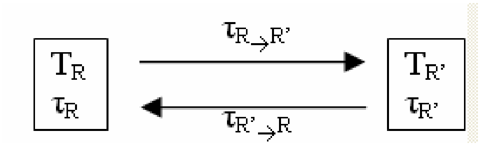



**Figure 1b**

Ces techniques de conversion peuvent bloquer la production de technique de traitement en produisant des techniques *hybrides* : si l’on dispose de $[T,\tau]_R$ et que l’on veuille résoudre $T_{R'}$ on peut alors procéder4 comme en figure 2. Du point de vue de la TAD, une technique de conversion est donc un élément technologique : $\tau_{R'\rightarrow R}$ permet en effet de produire et de justifier une technique pour résoudre $T_{R'}$ en s’appuyant sur la R-praxis $[T,\tau]_R$ pour effectuer un traitement. Nous distinguerons cependant deux types de technologies : les technologies du type suivant (figure 2)

4 La possibilité de reconversion dans le registre initial R’ peut s’interpréter à l’aide du contrat institutionnel de calcul (Bronner, 2005).

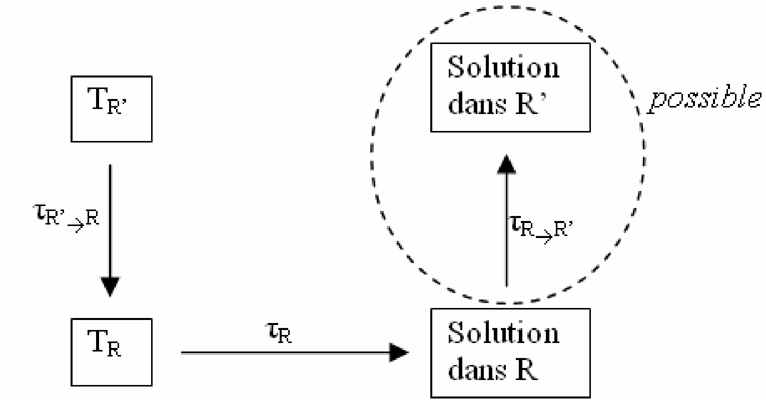



**Figure 2**

que nous jugeons un peu trop formelles et les technologies qui permettent de produire et justifier une technique interne à un registre, c'est-à-dire un traitement.

Notons que ce point de vue soulève quelques questions théoriques. En particulier, pour Duval un traitement est une transformation qui reste à l'intérieur d'un registre. Ainsi, ce que nous notons $\tau_R$ recouvre, outre les traitements de Duval, un autre type de technique. Par exemple, pour déterminer la parité d'un nombre en base *a*, il n'y a pas forcément de transformation et le résultat n'est pas exprimé dans le registre initial – il ne s'agit donc pas d'un traitement au sens de Duval. De même, pour pouvoir considérer une conversion comme une technique, il faut pouvoir clairement définir les règles de conversion ce qui n'est pas toujours possible (Duval, 1995, page 42). Toutefois, ce dernier point est sans conteste rempli pour les registres en jeu dans cette étude.

## 4 . La population globale

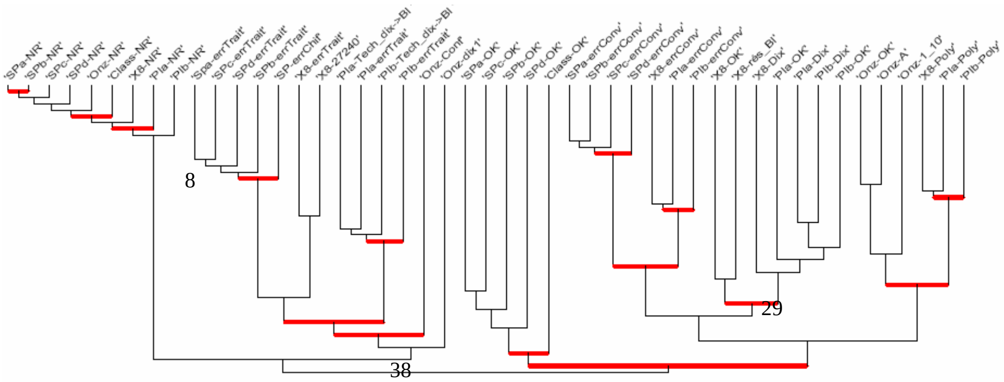
Dans cette section nous validons, pour la population totale, les deux hypothèses citées en section 2. Nous utilisons également les arbres implicatifs pour dresser une hiérarchie des types de tâches du test.

### *4.1 . Les registres de représentation des nombres en base a*

Nous notons $R_a$ le registre de représentation des nombres entiers en base *a* dans le système de numération de position. Ces registres ont des modes de fonctionnement très proches. Citons par exemple les techniques opératoires qui fonctionnent de la même manière – au paramètre « base » près – et l'ordre qui est défini de manière identique.

Mais plusieurs points montrent qu'il s'agit bien de registres différents. D'une part, il est clair que les signes relatifs à chaque registre diffèrent puisque les chiffres ne sont pas les mêmes, même si, lorsque $a>b$ tout chiffre de $R_b$ peut s’interpréter comme un chiffre de $R_a$. Certains traitements sont également différents. Par exemple, le critère de parité dans $R_a$ est un traitement qui dépend essentiellement de la parité de $a$.

Enfin, l’arbre des similarités sur la population totale (figure 3) montre que les traitements et les conversions sont bien distincts. Les 7 variables d’erreurs de conversion[5] (cf. annexe 6, G32) se regroupent au niveau significatif 29 (indice 0,999) et les 11 variables d’erreurs de traitements se regroupent au niveau significatif 38 (indice 0,964). On retrouve ainsi la distinction cognitive entre traitement et conversion faite par Duval lorsque l’on a affaire à des registres distincts. Il est à noter que c’est seulement l’analyse statistique qui permet de retrouver cette distinction. En effet, lors de notre étude prospective, nous nous étions contentés d’une analyse en terme de pourcentage d’erreur ce qui ne permettait pas de distinguer traitement et conversion.




18

**Figure 3 – Arbre des similarités pour la population totale (Fr+Gr)**

Ainsi, si l’on peut toujours discuter des ressemblances ou des différences entre les registres $R_a$ et $R_b$, nous validons statistiquement notre première hypothèse, du moins pour $R_a$ et $R_{dix}$.

Dans cet arbre un autre bloc se distingue nettement : les Non Réponses aux 8 items constituent des variables très similaires qui se regroupent toutes au niveau 8 (indice de similarité 1). Elles concernent environ 20% des étudiants avec toutefois des disparités entre les items (cf. Annexe 3). Ces étudiants se répartissent en deux groupes : ceux qui sont rebutés par les registres $R_a$ lorsque $a\neq dix$ (même si, parfois, ils essayent de résoudre quelques questions) et ceux qui sont gênés par le type de tâches dans le registre $R_a$, c’est-à-dire une $R_a$-praxis (ces étudiants peuvent réussir

[5] Elles ne sont pas toutes de même nature. Citons par exemple une erreur comme $4^0=4$ ou une inversion des deux techniques usuelles de conversions de la base dix ou vers la base dix.

certains types de tâches dans $R_a$). Ainsi, les registres ne constituent pas le seul élément d'interprétation puisqu'il est conjugué avec les praxis. C'est pour cette raison que nous utilisons l'articulation développée en section 3.

### *4.2 . Une hiérarchie des R-praxis*

Le test propose 5 types de tâches qui sont détaillés en annexe 2. L'annexe 3 montre, par les taux de réussite (OK) et de non réponse (NR), qu'il s'agit bien de types de tâches distincts[6]. De plus, que ce soit dans les blocs « errTrait », « errConv », « OK » ou même « NR » de la figure 3, on reconnaît des sous-blocs associés aux types de tâches SP et PI.

Le graphe implicatif pour la population totale donne une hiérarchie de l'ordre de difficulté des items (cf. Annexe 5, figure 4). Les quasi-implications des « OK » et des « NR » proposent une hiérarchie identique à l'inversion SPa/SPc – qui correspond au même type de tâches – et au cas particulier7 de SPd près.

Le type de tâches le plus simple est Class (6% de NR et 82% de OK) ce qui n'est pas surprenant puisqu'il constitue, avec SPd, du seul item qui peut être effectué de manière correct en appliquant les seules connaissances de la base dix. Les plus difficiles sont PI, notamment en base impaire, (PIb : 19% de NR et 51% de OK) et le codage en base onze (Onz : 17% de NR et 39% de OK). La difficulté de l'item PIb peut s'expliquer par le nombre proposé, qui a un grand nombre de chiffres, ainsi que par la parité de la base qui met en défaut la technique usuelle de $R_{dix}$. La difficulté du second type de tâches, Onz, est beaucoup plus surprenant dans la mesure où le codage des nombres dans des bases autres que dix a été travaillé, même s'il est clair que l'essentiel de la difficulté réside dans le fait que la base est strictement supérieure à dix et qu'il faut coder[8] ce nombre dix.

Nous déduisons la hiérarchie des R-praxis suivante où, en indice des types de tâches, nous mettons les caractéristiques de la base *a* du registre $R_a$ :

$$\text{Onz}_{a>dix} - \text{PI}_{a\ impair} - \times 8_{a\neq dix} - \text{PI}_{a\ pair} - \text{PS}_{a\neq dix} - \text{Class}_{a\neq dix}.$$

---

6 Il semble qu'il faille distinguer, dans SP, le type de tâches S (trouver le successeur d'un nombre) de P (trouver le prédécesseur d'un nombre). Les différences entre PIa et PIb semblent relever à la fois de la différence de parité de la base, donc de $R_a$, et de la différence des tailles des nombres proposés.
7 À cause de sa simplicité, une seule non réponse sur les trois réponses attendues en SPd entraîne un 1 pour la variable NR.
8 Les étudiants codent principalement le nombre dix par une lettre, comme A, X ou α, ou bien par son codage en base dix, comme dans $(1(10))_{onze}$, $(1\ 10)_{onze}$ ou $(110)_{onze}$ ; tous considérés comme « OK » même si $(110)_{onze}$ n'est pas tout à fait correct.

*4.3 . Le potentiel technologique du registre de l’écriture polynomiale*

L’arbre des similarités sur l’ensemble de la population (figure 3) montre un regroupement au niveau significatif 18 (indice de similarité 1) des trois variables « poly » des trois items concernés. Ce n’est pas étonnant puisque l’écriture polynomiale constitue un registre très efficace pour traiter les types de tâches pour lesquels on ne dispose pas de technique institutionnelle[9]. Bien entendu, la procédure qui consiste à faire d’abord une conversion dans $R_{dix}$ est toujours possible, mais la taille du nombre joue, pour PI, comme une variable didactique qui rend coûteux cette conversion. Ainsi, on peut penser que certains étudiants, sans doute sur le chemin d’une conversion, s’attardent sur l’écriture polynomiale en se demandant s’il est raisonnable de calculer cette *grosse* expression et se rendent comptent que, pour PIa, tous les termes de la somme sont pairs (à cause des puissances de 8 et du chiffre des unités). Ils sont alors à même de conclure, plus ou moins adroitement, sur la parité du nombre en procédant à un traitement dans $R_{poly}$. Certains vont même jusqu’à énoncer et justifier de manière correcte les techniques, c’est-à-dire les critères de parité, en fonction de la parité de la base (cf. Annexe 6, F66, F74). Nous ne pensions pas que le potentiel technologique de $R_{poly}$ serait réalisé avec autant de force.

Notre deuxième hypothèse est donc validée pour la population totale malgré le faible pourcentage d’étudiants qui utilisent $R_{poly}$ comme élément technologique (4% pour ×8, 11% pour PIa et 8% pour PIb). Cet élément technologique n’est pas anecdotique comme on peut s’en rendre compte sur le graphe implicatif pour la population totale (cf. Annexe 5, figure 5). Les trois variables « poly » se trouvent en tête du sous graphe contenant les variables « OK » ce qui semble indiquer une variable importante pour la réussite aux types de tâches.

## 5 . Comparaison des deux populations

Les deux populations ont des profils qui sont globalement proches de ceux évoqués dans la section précédente. Ainsi, la plupart de nos conclusions semblent résister à l’épreuve d’un changement de système éducatif et de culture. C’est le cas de notre première hypothèse dont la validation semble même meilleure dans chacune des deux sous-populations à partir des arbres de similarités (cf. Annexe 4) : les variables d’erreur de traitements se regroupent avec les variables « NR », mais le

---

9 Ceci n’est que partiellement vrai pour « ×8 » puisque l’on rencontre assez fréquemment la technique qui consiste à « ajouter un zéro » (cf. annexe 6, G61).

bloc ainsi formé ne se regroupe pas avec les autres variables et notamment avec les variables d’erreur de conversions, contrairement au cas de la population totale. Plusieurs différences sont toutefois à noter.

La première concerne notre deuxième hypothèse et les variables « poly ». Aucun étudiant grec n’a utilisé le registre $R_{poly}$ autrement que comme registre transitoire entre $R_a$ et $R_{dix}$ ; le registre $R_{poly}$ n’est considéré que comme une étape de conversion. Pourtant, l’enseignement suivi par les étudiants grecs fait état d’une utilisation du registre $R_{poly}$ pour justifier des résultats et notamment pour le type de tâches PI. Ainsi, notre deuxième hypothèse n’est finalement validée que pour la population française.

La deuxième différence concerne les types de tâches. L’arbre des similarités de la population française montre un regroupement de toutes les variables « OK » au niveau significatif 45 (indice 0,358 ; cf. Annexe 4). Il est remarquable que l’arbre des similarités pour la population grecque (Annexe 4) montre, pour les mêmes variables, deux blocs distincts : le type de tâches SP d’une part et les autres d’autre part. SP est le seul type de tâches du test qui est effectivement travaillé par la population grecque dans les registres $R_a$ alors que les autres types de tâches sont travaillés à l’aide d’une conversion en base dix. Ceci permet d’expliquer le fait que le type de tâches SP forme un bloc séparé des autres types de tâches pour la population grecque.

Les étudiants réussissent très bien ce type de tâches SP – un peu mieux en Grèce qu’en France, et avec une différence entre S et P –, sans doute parce qu’il est beaucoup travaillé dans les deux institutions d’enseignement. En revanche, les réussites sont faibles pour le type de tâches Onz car il s’agit d’un type de tâches qui n’est pas, ou peu, travaillé. Les étudiants grecs présentent plus de difficultés avec ce type de tâches (Gr : 20% NR et 22% OK ; Fr : 15% NR et 50% OK). Ceci est sans doute un effet d’enseignement : si, dans les deux institutions, plusieurs types de tâches sont travaillés dans $R_a$, avec l’élaboration de techniques de traitement, il est notable qu’en Grèce ces types de tâches soient aussi effectués, avec à peu près la même fréquence, par un traitement en base dix après une conversion. En outre, certains types de tâches sont travaillés en Grèce exclusivement à l’aide d’une conversion en base dix[10]. Ainsi, les étudiants grecs sont entraînés à effectuer une

10 Comme la comparaison et la multiplication. Notons que les types de tâches proposés à la population grecque sont souvent exprimés sur deux registres différents ce qui explique un recours fréquent à la base dix.

conversion en base dix pour résoudre un type de tâches. Or, cela n’est d’aucune utilité pour Onz qui est une conversion $R_{dix} \rightarrow R_{onze}$.
La tableau (Tableau 1) précise l’utilisation de la base dix dans les deux institutions d’enseignement :

**Tableau 1**

| | Grèce | ×8 | PIa | PIb |
|---|---|---|---|---|
| Grèce | « dix » | 77% | 78% | 76% |
| | « NR » | 16% | 15% | 18% |
| France | « dix » | 42% | 43% | 42% |
| | « NR » | 17% | 15% | 19% |

Le recours à la base *dix* est quasi-systématique pour les étudiants grecs puisque la somme des pourcentages « dix » et « NR » est proche de 100%. On retrouve des traces de ces rôles différents des variables « dix » dans les graphes implicatifs pour les deux populations (cf. Annexe 5, figures 6a et 6b). Alors que les variables « dix » sont en tête de graphe, aux côtés des variables « poly », « A » et « 1_10 », pour la population française, elles se retrouvent en queue de graphe pour la population grecque. Pour cette dernière, c’est la réussite à un type de tâches – pour PI et ×8 – qui implique un traitement en base dix alors que pour les étudiants français, c’est l’utilisation de la base dix comme base pour les traitements qui implique la réussite aux types de tâches. Pour les types de tâches proposés, l’activité mathématique des étudiants grecs semble moins souple que celle des étudiants français. Mais bien entendu, il ne serait être ici question d’étendre nos conclusions à l’ensemble des systèmes éducatifs.

## 6 . Discussion sur le développement les R-praxis

Dans cette section et à partir de notre étude, nous mettons en évidence les liens profonds qu’entretiennent les registres de représentations et les praxis. Nous concluons alors sur l’importance de prendre en compte ces deux aspects dans l’enseignement des mathématiques.Il semble que le type de tâches Onz touche à un élément cognitif de première importance pour le thème de cette étude : les pourcentages donnés ci-dessus de « NR » et de « OK » tranchent avec les autres types de tâches ; les confusions relevées – variable « Onz-Conf » –, confusions parfois profondes, sont très similaires aux erreurs de traitements des autres items tout comme l’inversion entre 1 et 10 pour coder vingt-et-un en base onze[11] ; les variables « Onz-A » et « Onz-1_10 » ont des rôles identiques dans les graphes implicatifs (cf. Annexe 5, figures 5, 6a et 6b) où ils sont en tête des arbres contenant les variables OK. La compréhension du codage en général, notamment les chiffres et leur ordre, semble être une des clés pour résoudre les problèmes de traitements en base autre que dix. Cela n’est pas très étonnant car comment une technique $\tau_R$ pourrait-elle être fiable si l’on ne maîtrise pas le registre R dans lequel elle s’applique ? Par ailleurs, on comprend mieux ce qu’est un chiffre quand la base est supérieure à dix car des signes supplémentaires sont nécessaires.

Duval (1993, 1996) précise qu’il est important d’avoir plusieurs registres de représentation afin de ne pas confondre un objet mathématique avec une de ses représentations. Ceci est bien mis en évidence par le type de tâches Onz où le nombre dix est très souvent confondu avec son codage 10 en base dix. Mais cela va beaucoup plus loin. Chez certains étudiants, on sent une tension entre la technique en base dix (le critère de parité) et le codage d’un nombre. Certains en restent au stade de l’étonnement mais d’autres écrivent clairement qu’un nombre est impair en base sept et pair en base dix (cf. annexe 6, F122). Ce problème provient d’une R-praxis élaborée sur un registre R naturalisé ($R_{dix}$) : le type de tâche « trouver la parité d’un nombre » est associé quelle que soit la base à la technique en base dix. Nous avions déjà rencontré ce problème avec des étudiants préparant le concours pour enseigner les mathématiques dans le secondaire en France. Une bonne étudiante demanda sérieusement si treize était aussi premier dans une base autre que dix. On peut lier ces problèmes à un manque de praxis dans les registres en base autre que dix.

Duval (1993, 1996) précise également qu’il est important de pouvoir choisir un registre plutôt qu’un autre pour effectuer les traitements. Mais pour qu’il y ait un choix, il ne faut pas que ce soit un choix par défaut. Ainsi, il nous semble que la possibilité de ce choix énoncé par Duval masque une difficulté. En effet, et la population grecque l’atteste, la possibilité de faire systématiquement un traitement en base dix ne permet pas de développer les R-praxis dans les bases autres que dix. Dans cette population grecque, $R_{poly}$ reste un registre transitoire pour effectuer une conversion en base dix : les registres $R_a$ et $R_{dix}$ ne jouent pas des rôles identiques. Dans $R_{dix}$, PI donne lieu à une véritable R-praxis, avec des techniques internes au

11 L’inversion entre 1 et 10, réponse $(101)_{onze}$, ne suffit pas pour être compté dans les « Conf ».

registre $R_{dix}$, contrairement à $R_a$. Et si l'on ne peut que convertir sans possibilité de traitement, comment peut-on reconnaître la même *valeur mathématique* à $(19)_{onze}$ et 20 pour coder le nombre vingt ?

Il nous semble ainsi que non seulement il est important de travailler dans des bases autres que dix, mais qu'il est aussi nécessaire de développer les R-praxis associées, sans quoi les nouveaux registres risquent de ne pas remplir pleinement le rôle cognitif que leur prête Duval. Pour ce faire, et comme nous l'avons exposé en section 4.3, le rôle technologique joué par le registre $R_{poly}$ dans la construction des R-praxis numériques semble particulièrement important.

Enfin, plus spécifiquement pour les conversions entre les registres $R_a$ et $R_{dix}$, cela lèverait une dissymétrie qui n'a aucun fondement mathématique :

- pour $R_a \rightarrow R_{dix}$ on calcule un polynôme en *a* en effectuant, dans le registre $R_{dix}$, les opérations, essentiellement des multiplications et des sommes ;
- pour $R_{dix} \rightarrow R_a$ on effectue, dans le registre $R_{dix}$, des divisions euclidiennes successives par *a*.

Les étudiants ont parfois du mal à choisir la bonne technique (cf. la production G36 en annexe 6) puisque rien ne justifie à leurs yeux cette dissymétrie : il ne leur reste qu'à apprendre par cœur. L'explication est pourtant simple : on choisit la technique en référence au registre où les techniques sont les plus efficaces. Et si l'on dispose des techniques opératoires dans le registre $R_a$, les deux techniques de conversions se retrouve sur un pied d'égalité du point de vue mathématique. Finalement ont dispose d'un vrai choix : pour effectuer une conversion $R_a \rightarrow R_b$, on peut choisir de calculer un polynôme en *a* en effectuant les calculs dans $R_b$ ou bien effectuer des divisions euclidiennes par *b* dans $R_a$ (ces techniques sont toutes deux justifiées par le registre $R_{poly}$).

## 7. Conclusion

Notre analyse s'appuie sur une articulation originale de deux cadres théoriques de la didactique des mathématiques : les cadres de Chevallard et de Duval. Cela nous permet de prendre en compte simultanément les registres et les praxis, deux dimensions qui sont au cœur de l'activité mathématique. Mais cette seule analyse didactique croisée ne suffit pas pour certains points et l'analyse statistique implicative s'est révélée être un outil précieux.

Notre premier objectif était de retrouver la distinction cognitive entre traitement et conversion faite par Duval pour les registres de numération en base autre que dix.

En effet, lors de notre première expérimentation (Nikolantonakis & Vivier, 2009) nous n’avions pas pu mettre en évidence ce fait. L’ASI s’est révélée être un outil indispensable en montrant les similarités entre les différentes variables de traitement d’une part et de conversion d’autre part. L’ASI a ainsi permis de valider notre hypothèse en la précisant puisque c’est la distinction entre la base dix et les autres bases de numération que nous mettons en évidence. Plus précisément, on relève deux difficultés cognitives particulièrement importantes pour le codage des nombres dans la numération de position :

- l’introduction de registres de représentation $R_a$ avec $a \neq dix$ ;
- l’introduction des registre de représentation $R_a$ avec $a > dix$.

Ces difficultés cognitives relatives aux registres $R_a$, avec $a \neq dix$ d’une part et $a > dix$ d’autre part, sont évidemment liées et semblent, d’après notre étude, stables d’une institution à une autre et d’un enseignement à un autre.

Toutefois, l’interprétation nécessite d’aller plus loin car les registres et les types de tâches influencent conjointement l’activité mathématique. On le voit particulièrement bien dans le deuxième item difficile, PIb, qui met en jeu un registre $R_a$, $a < dix$, mais où aucune technique interne à $R_a$ n’est disponible. C’est dans ce sens que nous avons proposé une hiérarchie des R-praxis en section 4.2.

Il est à noter que si les pourcentages de réussite donnent quelques indications sur cette hiérarchie, il n’en reste pas moins que ce sont les arbres implicatifs qui ont été décisifs pour l’élaboration de ce classement des R-praxis. Ce point nous semble particulièrement riche du point de vue méthodologique. Le cadre théorique articulant registres et praxis permet d’étudier certains indicateurs-clés qui, en utilisant l’ASI, permet de montrer certains liens et donc, par retour, de justifier la validité et l’intérêt de notre cadre d’analyse didactique.

L’analyse *a priori* avait montré l’importance du registre de l’écriture polynomiale qui constitue un registre très efficace pour traiter les types de tâches pour lesquels on ne dispose pas de technique institutionnelle. Malheureusement, peu d’étudiants utilisent le potentiel technologique de ce registre. Il est majoritairement utilisé comme un registre transitoire lors d’une étape de conversion entre une base *a* et la base dix. Nous avons néanmoins validé notre deuxième hypothèse formulée à partir de nos analyses préalables sur le potentiel technologique de l’écriture polynomiale, notamment avec les similarités concernant deux types de tâches différents. L’ASI permet d’aller plus loin en montrant, par les quasi-implications, que ce registre $R_{poly}$ est important pour la réussite aux types de tâches.

Les deux populations, française et grecque, ne montrent pas de grandes différences concernant les points évoqués ci-dessus si ce n’est qu’aucun étudiant grec n’a utilisé le potentiel technologique du registre de l’écriture polynomiale. Néanmoins, une différence de structure apparaît dans les arbres de similarités. Cette différence s’explique essentiellement par une différence dans les enseignements. En Grèce, le type de tâches « trouver le successeur et le prédécesseur » est bien travaillé dans le registre $R_a$ alors que pour les autres, bien qu’également travaillés, les techniques font apparaître systématiquement une conversion. Cela a pour conséquence une distinction forte du premier type de tâches avec les autres. Une autre conséquence concerne plus globalement l’activité mathématique qui semble moins souple pour les étudiants grecs que pour les étudiants français.

## Références

Artigue, M. (2009). Rapports et articulations entre cadre théoriques : le cas de la théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 29.3, 305-334.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). Sensibilité de l’activité mathématique aux ostensifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19.1, 77-123.

Bronner, A. (2005). La question du numérique dans l’enseignement du secondaire au travers des évolutions curriculaires, *Actes de la XIIIème école d’été de didactique des mathématiques*, Ste Livrade, 18-26 août 2005.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l’étude 1. Structures et fonctions, *Actes de la 11e École d’Été de didactique des mathématiques, Corps, 21-30 Août 2001*, 3-22, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19.2, 222-265.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16.3, 349-382.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang, Berne.

Duval, R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactiques et de sciences cognitives*, 5, IREM de Strasbourg.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2009). La numération en base quelconque pour la formation des enseignants du premier degré en France et en Grèce. Une étude articulant registres et praxéologies, in *Chypre et France, Recherche en didactique des mathématiques*, Gagatsis, A., Kuzniak, A. Deliyianni, E. & Vivier, L. éditeurs. Lefkosia, Chypre 2009.

Vivier, L. (2008). De la synthèse sur les nombres à la doxa ensembliste, *Annales de Didactiques et de sciences cognitives*, 13, IREM de Strasbourg.

**Annexe 1 : le test proposé aux étudiants français**

Pour écrire un nombre dans une base de numération, on convient dans cet exercice d’écrire les chiffres qui le composent entre parenthèses et de mettre la base en indice. (*Par exemple* $(405)_{neuf}$.)

**A)** Sans justifier votre réponse :

**1)** Trouver le successeur et le prédécesseur de

**a.** $(66)_{sept}$ **b.** $(10100)_{deux}$ **c.** $(504302155)_{six}$

**2)** Écrire les nombres de vingt à trente en base onze.

**3)** Ranger dans l’ordre croissant les nombres suivants :

$(303)_{quatre}$ ; $(203)_{quatre}$ ; $(1003)_{quatre}$ ; $(33)_{quatre}$ ; $(100)_{quatre}$

**B)** En justifiant succinctement votre réponse :

**1)** Écrire le résultat de la multiplication de $(3405)_{huit}$ par huit.

**2)** Pour les nombres suivants, dire s’ils sont pairs ou impairs :

**a.** $(65474)_{huit}$ **b.** $(623004261)_{sept}$

**Annexe 2 : Le codage**

*A1 - Successeurs et prédécesseurs : type de tâches « SP »*

- **SPa**, le successeur de l’item a $(66)_{sept}$ ; **SPb**, prédécesseur de l’item b $(10100)_{deux}$ ; **SPc**, successeur de l’item c $(504302155)_{six}$ ; **SPd** désigne les 3 autres items qui ne sont pas problématiques et sont donc traités ensemble. Pour chacun de ces 4 types :

**NR** : Non Réponse

**OK** : Solution correcte (quelque soit la base)

**rés BI** : résultat dans la Base Initiale (quelle que soit la procédure)

**Dix** : conversion en Base Dix (visible ou décelée par une analyse d’erreur) pour un traitement en Base Dix

**errConv** : au moins une erreur dans une conversion (autre qu’une simple erreur de calcul)

**errTrait** : au moins une erreur dans un traitement (autre qu’une simple erreur de calcul)

- Un indicateur global, **SP-errChif** : au moins une erreur de chiffre qui n’existe pas dans la base de numération dans les items sur successeur/prédécesseur (comme 67 ou 70 pour SPa, 10099 pour SPb ou encore 504302156 ou 504302160 pour SPc, aussi comptés dans « errTrait »).

***A2 – Codage en base onze : type de tâches « Onz »***

**NR**, **OK**.

**Conf** : confusion nombre/codage d’un nombre

**« A »** : utilisation d’une lettre (ou n’importe quel signe).

**« 1_10 »** : utilisation du codage 10 pour le nombre dix (hormis la réponse $(110)_{onze}$).

Cet item fait intervenir un registre verbal que nous jugeons non problématique pour la population étudiée.

***A3 – Classement : type de tâches « Class »***

**NR**, **OK**, **Dix**.

B1 – Multiplication par huit : type de tâches « ×8 »

**NR**, **OK**, **rés BI**, **Dix**, **errConv**, **errTrait**.

**Poly** : écriture polynomiale sans calcul et traitement sur cette écriture (aspect technologique du registre $R_{poly}$)

« **27240** » : utilisation de la technique de multiplication de la base dix en base huit.

B2 – Pair/Impair : type de tâches « PI »

**NR**, **OK**, **Dix**, **errConv**, **errTrait**, **Poly**.

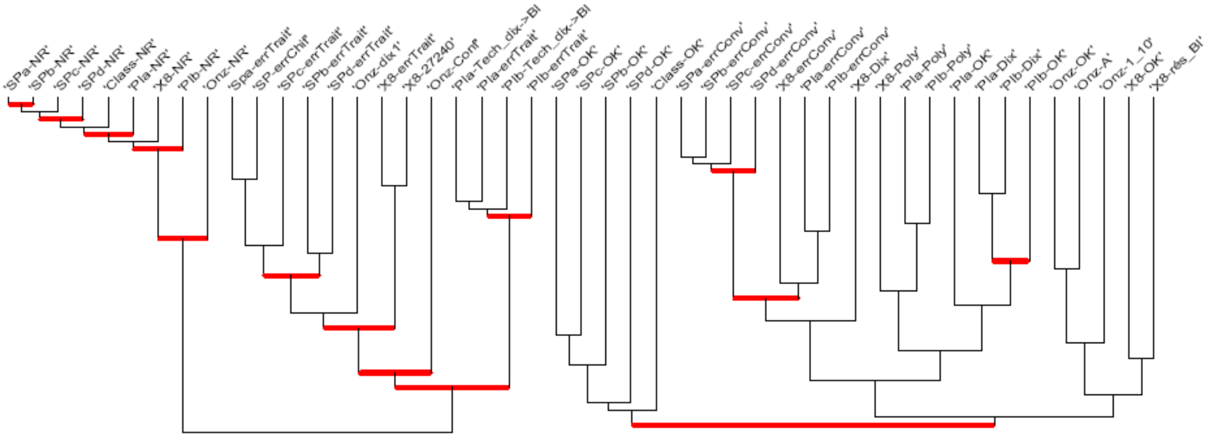
**Tech dix->BI** : utilisation illicite de la technique valable en base dix en Base Initiale

Note : afin d’éviter de surcharger les graphiques, nous n’avons conservé les **Rés_BI** et **Dix** que pour les tâches non routinières (×8 et PI) car cela ne donnait pas d’indication particulière et. Par exemple, pour les successeurs/prédécesseurs, les étudiants ont pratiquement donnent pratiquement tous le résultat en base initiale sans que l’on puisse savoir si le traitement a été effectué en base dix (il aurait fallu avoir accès aux brouillons pour cela).

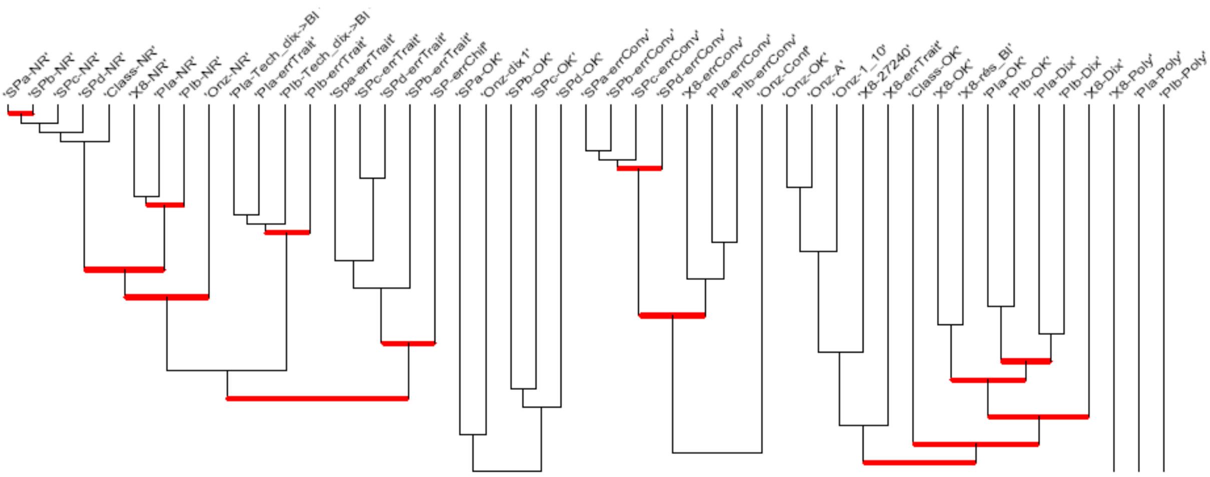
**Annexe 3 : Non Réponses (NR) et réussites (OK) dans la population totale**

| | Class | SPa | SPd | SPc | SPb | PIa | ×8 | Onz | PIb |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NR | 6% | 7% | 10% | 10% | 10% | 15% | 16% | 17% | 19% |
| OK | 82% | 75% | 85% | 76% | 67% | 66% | 61% | 39% | 51% |

**Annexe 4 : arbres de similarités des sous-populations**




Population française




Population grecque

Annexe 5 : Extraits de graphes implicatifs

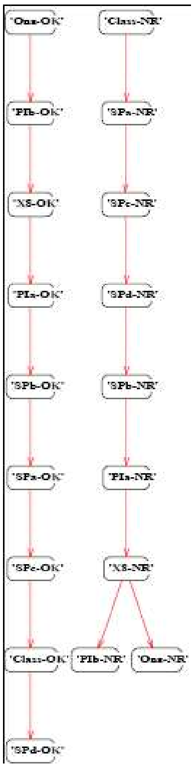



Figure 4
Population totale

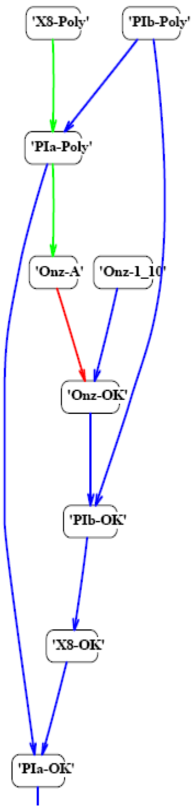



Figure 5
Population totale

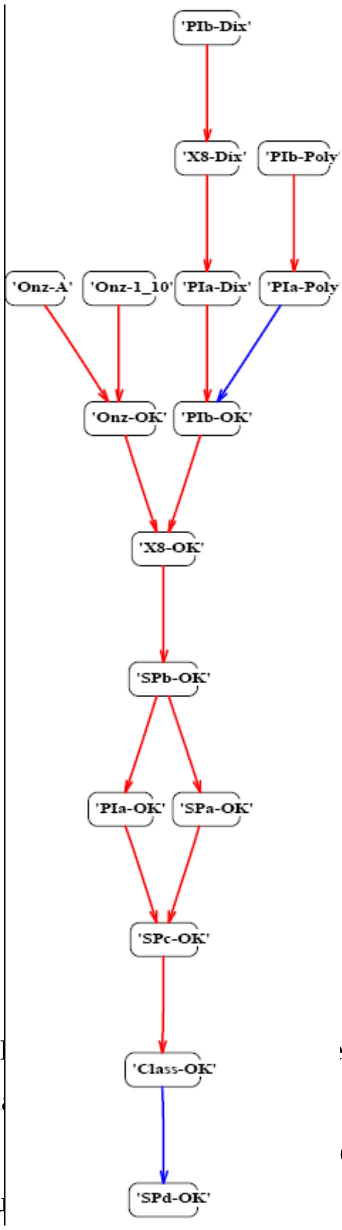



Figure 6a
Sous-population Fr

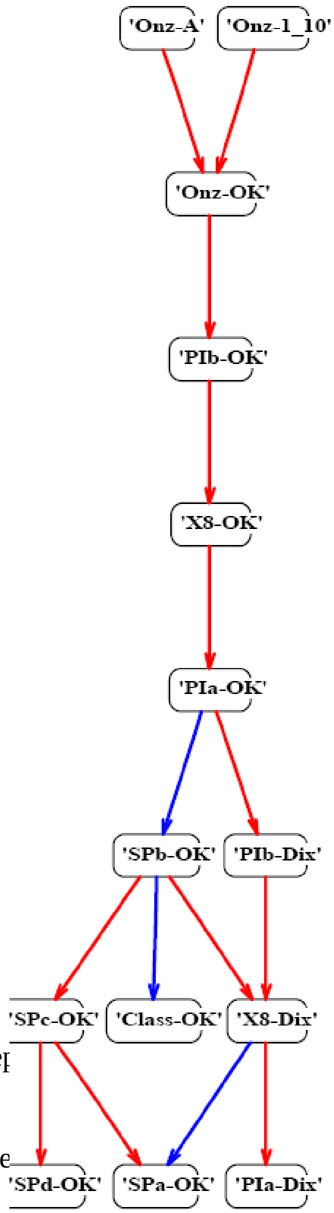



Figure 6b
Sous-population Gr

Figure 4 : Extraits du graphe au niveau 99 ; les NI
graphe contenant les OK fait apparaître d’autres vari
Figure 5 : niveaux 100 en rouge, 99 en bleu et 98 en
Figures 6a et 6b : niveaux : 99 en rouge et 98 en bleu

**Annexe 6 : extraits de productions d'étudiants**

F66 : production du critère de parité dans R$_{huit}$.

Cherchons dans quel cas un nombre à 5 chiffres en base 8 est pair.

$$(abcde)_8 = e + d8 + 64c + 512b + 4096a$$
$$= e + \underbrace{2[4d + 32c + 256b + 2048a]}_{\text{multiple de deux.}}$$

On constate que pour qu'un nombre à 5 chiffres en base huit soit pair, il faut que e soit un multiple de deux.

F74 : production du critère de parité dans R$_{sept}$.

On prend ici $(abcdefghi)_7$ pour trouver le critère.

$$a\times 7^8 + b\times 7^7 + c\times 7^6 + d\times 7^5 + e\times 7^4 + f\times 7^3 + g\times 7^2 + h\times 7 + i$$
$$= 2(2882400a + 411771b + 58824c + 8403d + 1200e + 171f + 24g + 3h)$$
$$+ a + b + c + d + e + f + g + h + i$$

Donc le nombre sera pair si la somme de ses chiffres est pair : $6+2+3+0+0+4+2+6+1 = 24$

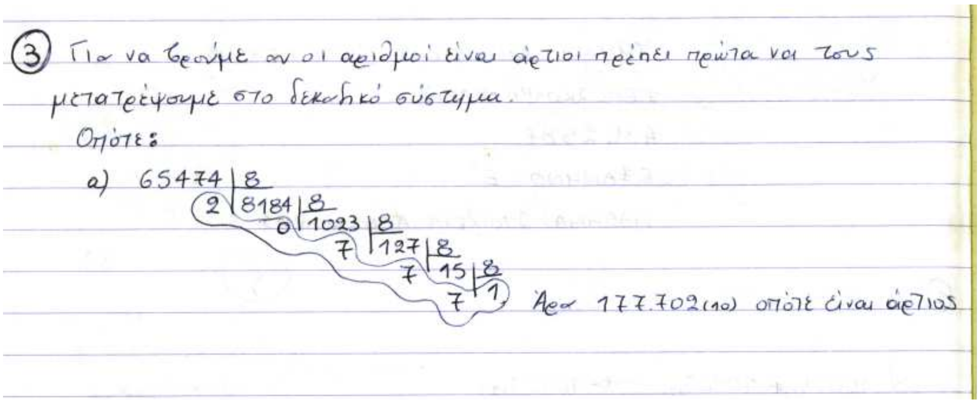
F122 : la parité d'un nombre dépend de la base pour le coder**.**

- 62 300 1261 (sept), c'est le dernier chiffre qui compte. Ici 1 est un nombre impair donc 62 300 1261 (sept) est impair en base (sept)

En base dix : $1 + 6\times 7 + 2\times 7^2 + 1\times 7^3 + 3\times 7^6 + 2\times 7^7 + 6\times 7^8 = 36590352$

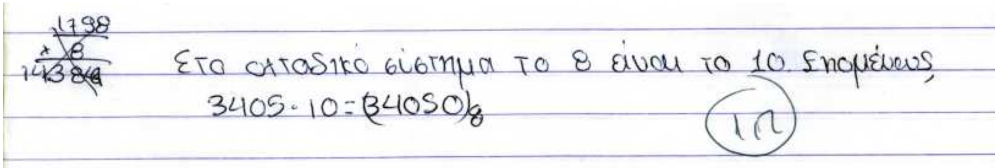
Le nombre est pair en base dix.

G32 : erreur fréquente de conversion (inversion des deux conversions).


3 Για να βρούμε αν οι αριθμοί είναι άρτιοι πρέπει πρώτα να τους μετατρέψουμε στο δεκαδικό σύστημα.
Οπότε:
a) 65474 | 8
2 | 8184 | 8
0 | 1023 | 8
7 | 127 | 8
7 | 15 | 8
7 | 1
Άρα 177.702(10) οπότε είναι άρτιος

Pour trouver si les nombres sont pairs il faut d'abord les convertir dans le système décimal.
[…]
Donc $177702_{(10)}$ est pair.

G61 : Traitement en base huit pour ×8.


1798
× 8
14384
Στο οκταδικό σύστημα το 8 είναι το 10. Επομένως
3405 · 10 = (34050)8
12

Dans le système octal 8 est 10. Par suite, 3405×10 = $(34050)_8$