*“Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)”, n°20 suppl 1, 2010*
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)
A.S.I. 5 Proceedings 5-7- November 2010

# Análisis de retos propuestos en la enseñanza a distancia de las Matemáticas

**Miguel Delgado Pineda, José Leandro de María González, Teresa Ulecia García**
Departamento de Matemáticas Fundamentales
Universidad Nacional de Educación a Distancia
c/ Senda del Rey, 9, 28040 Madrid, España

Miguel@mat.uned.es, jdemaria@mat.uned.es,
tulecia@mat.uned.es

**Abstract.** It is stated in the Universidad Nacional de Educacion a Distancia’s bylaws it’s duty to provide higher education to those who, for personal, work-related or geographical reasons, have difficulties attending university on-campus courses. An essential part of this higher education program is the University Access Course for Students over 25, which provides the students with both general and specific grounds for them to join one of the many careers UNED offers. The difficulties of teaching Mathematics come from: the heterogeneity of the student’s education previous to the course, the fear and insecurity with which the student faces the subject, the student isolation, most of the time having to combine work and family related responsibilities with their studies. The professors in charge of the subject designed, between 2007 and 2008, a still-evolving didactic project to improve the learning-teaching experience of the student, developing technological and method tools in a all-virtual context. This strategy consists in the posing, with a 2 week periodicity, of a series of standard problems and a series of goals that the student has to beat during that time to, in the end, solve them. It is here where the C.H.I.C. intervenes, because it’s implicative and coherent analysis has made possible to rank the different problems in order of their component difficulty, enabling the tutoring staff to find the key points where the student needs to be advised. The C.H.I.C. has demonstrated great efficiency at finding implications that, with a quantitative study of the answers provided, would be missed. This structured analysis has permitted a yearly improving of the problems posed, enabling better results in the learning experience.

**Résumé.** La Universidad Nacional de Educación a Distancia a dans ses Statuts pour but de fournir des études universitaires à ces personnes qui pour motifs personnels, de travail ou géographiques ont des difficultés pour suivre de manière conventionnelle une carrière. Un important type d'études est le Cours d'Accès de de plus grands de 25 années, avec lequel on fournit aux étudiants une base générale et spécifique pour pouvoir s'incorporer aux différentes carrières universitaires que l'UNED offre. Les difficultés de la matière de Mathématiques sont données par: l'hétérogénéité de la formation préalable au cours, cést une matière que l'étudiant aborde avec peur et insécurité, l'isolement des élèves qui doivent souvent rendre compatibles des responsabilités de travail et familiales avec l'étude. Les professeurs de la matière ont conçu depuis 2007-08 un projet didactique pour améliorer enseignement-l'apprentissage de l'élève en développant des outils technologiques et méthodologiques dans un contexte virtuel. La stratégie conçue consiste la donnée d'une série de problèmes sujets d´études toutes les deux semaines en remarquant les objectifs qui doivent être adquis dans ce délai et que l'élève doit de pouvoir résoudre. C´est ici où intervient le C. H.I.C. donc l'analyse d´implication et de cohesion a permis de faire une hiérarchisation des problèmes en fonction des difficultés dans ses composants et en pouvant localiser les points essentiels où l'élève doit être orienté. L´utilisation du Le C.H.I.C. a eté d´une grande efficacité dans la recherche d'implications qui passeraient inaperçues lors d'une étude quantitative des réponses des problèmes posés. L'analyse hiérarchique permet l'amélioration jour après jour des questions posées en obtenant une plus grande efficacité dans les résultats de l'apprentissage.

**Resumen.** La Universidad Nacional de Educación a Distancia tiene en sus Estatutos la finalidad de proporcionar estudios universitarios a aquellas personas que por motivos personales, laborales geográficas tienen dificultades para seguir de forma convencional una carrera. Un tipo de estudios importante es el Curso de Acceso de mayores de 25 años, con el cual se proporciona a los estudiantes una base general y específica para poder incorporarse a las distintas carreras universitarias que la UNED ofrece. Las dificultades de la asignatura de Matemáticas vienen dadas por: la heterogeneidad del alumnado en su formación previa al curso, la materia que el estudiante aborda con miedo e inseguridad, el aislamiento de los alumnos que muchas veces tienen que compatibilizar responsabilidades laborales y familiares con el estudio. Los profesores de la asignatura diseñaron en 2007-08 un proyecto didáctico, que sigue evolucionando, para mejorar la enseñanza-aprendizaje del alumno desarrollando unas herramientas tecnológicas y metodológicas dentro de un contexto virtual. La estrategia diseñada consiste en el planteamiento de una serie de problemas –tipo con una periodicidad de dos semanas en la que se marcan las metas que se deben conseguir en dicho plazo y que el alumno debe de poder resolver. Es aquí donde interviene el C. H.I.C. pues el análisis implicativo y cohesitivo ha permitido hacer una jerarquización de los problemas por dificultades en sus componentes y pudiendo localizar los puntos clave donde el alumno tenía que ser orientado. El C.H.I.C. ha demostrado una gran eficacia en la búsqueda de implicaciones que pasarían desapercibidas mediante un estudio cuantitativo de las respuestas de los problemas planteados. El análisis jerárquico ha permitido la mejora año tras año de las cuestiones planteadas logrando una mayor eficacia en los resultados del aprendizaje.

**Subject classification numbers:** 97UXX.

## 1 Introducción

Este estudio se realizó con alumnos que cursaban estudios para acceder a la enseñanza universitaria, y no todos tenían la posibilidad de usar Internet habitualmente.

### *1.1 La Universidad Nacional de Educación a Distancia española (UNED)*

Los alumnos de la Universidad Nacional de Educación a Distancia están distribuidos por todo el país, en algunos casos en el extranjero, los profesores de la llamada Sede Central están en Madrid y los profesores tutores están en los Centros Asociados repartidos por todas las provincias españolas, que pueden quedar a muchos kilómetros de los domicilios de los alumnos. El mayor reto de la U.N.E.D. es conseguir que, a pesar de esta dispersión, los alumnos concluyan con éxito sus estudios. Hasta hace unos años los medios de comunicación básicos eran el teléfono, las cartas, la Televisión y la Radio. Desde hace ya varios años se incorporó el uso de la Web y las diversas herramientas que el ordenador personal facilita. También hay un fuerte movimiento en lo que a comunicación se refiere habiendo aumentado la producción de material audiovisual y multimedia. Pero hay que seguir trabajando en la búsqueda de una relación en tiempo real con los alumnos para que la sensación de aislamiento que algunos alumnos y profesores padecen se vea minimizada o incluso que desaparezca.

### *1.2 1.2 El curso de acceso para mayores de 25 años (CAD.)*

El Curso de Acceso para Mayores de 25 Años es, desde su creación en 1975, una parte importante de la U.N.E.D. En primer lugar porque cumple con uno de los mandatos que tiene encomendados esta Universidad: facilitar la incorporación a los estudios universitarios a las personas que teniendo capacidad para ello por diversas razones – biográficas, laborales o de ubicación geográfica. La importancia que la U.N.E.D. concede al Curso de Acceso queda reflejada en el hecho de que tiene asignados en torno a los 100 profesores de la Sede Central y a los 1800 tutores (el mayor número dentro de los estudios que la U.N.E.D. ofrece). Desde el punto de vista de la aceptación social de este curso puede decirse que ha sido notable puesto que se han matriculado en él cerca de medio millón de alumnos desde su implantación en 1975. En concreto, en el curso actual, el número de alumnos es alrededor de 13000 alumnos de los cuales más de 2000 son de Matemáticas Especiales.En este curso además de las pruebas que el alumno debe superar para acceder a los estudios universitarios, se le ofrece un curso que no sólo tiene la función de facilitar al alumno la superación de dichas pruebas, sino que también tiene el objetivo de facilitar la adquisición de las habilidades y técnicas necesarias para afrontar con garantías dichos estudios, así como familiarizarse con el sistema de la enseñanza a distancia.

### *1.3 1.3 Tipo de alumnado*

El equipo docente de la asignatura, queriendo conocer el prototipo de alumno, elaboró una encuesta que fue contestada por 39 alumnos del curso 2007/08. Los resultados de la misma están resumidos en los gráficos siguientes:


**Figura 1 Sexo de los alumnos del CAD**

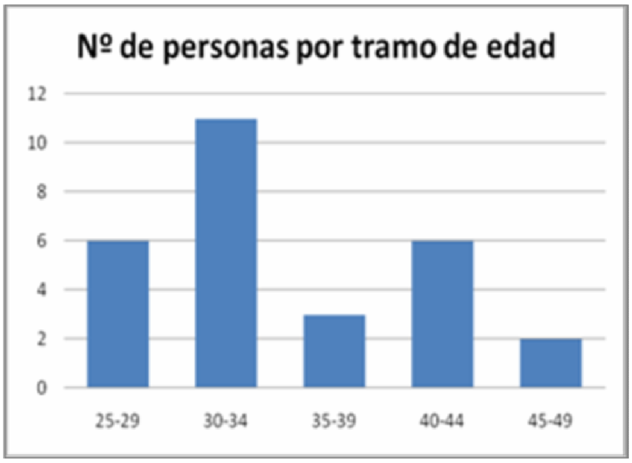


**Figura 2 Edad de los alumnos del CAD**


**Figura 3 Situación laboral de los alumnos del CAD**

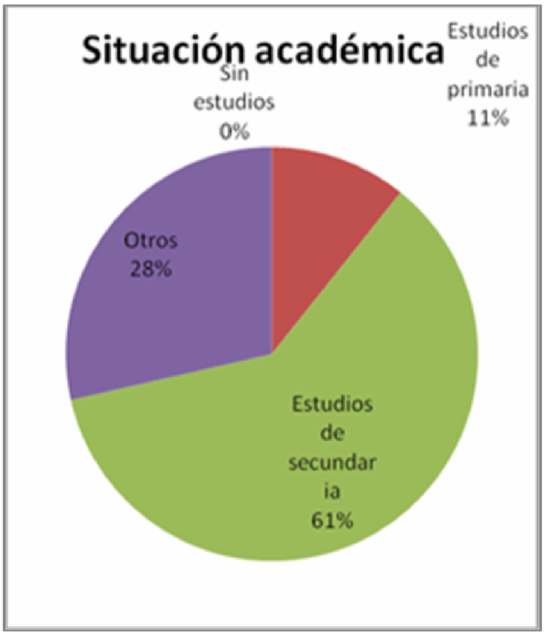


**Figura 4 Situación académica de los alumnos del CAD**


**Figura 5 Situación familiar de los alumnos del CAD**

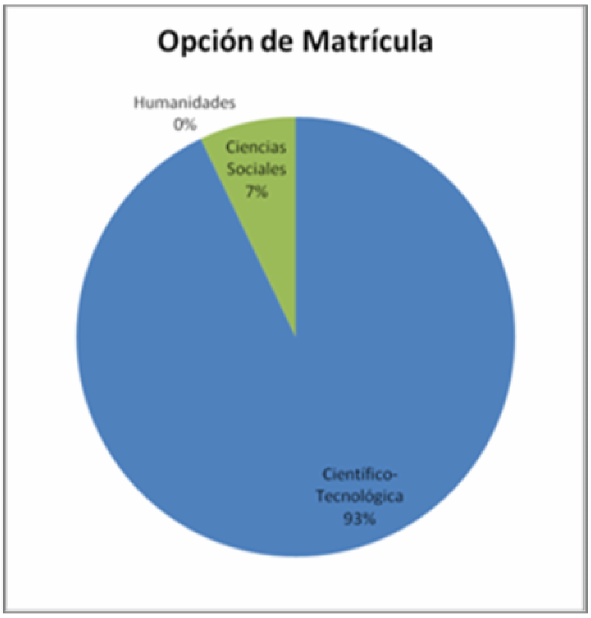


**Figura 6 Elección de carrera de los alumnos del CAD**

Según estos datos, la media de edad de estos alumnos es de 34,4 años. La mayoría de ellos trabajan a jornada completa, a lo sumo poseen algunos estudios de Secundaria, tienen obligaciones familiares y piensan estudiar una carrera Científico-Tecnológica.

### *1.4 Contexto*

Las observaciones, realizadas por el equipo docente de la asignatura en los últimos años dentro del marco del CAD, evidencian que el conjunto de alumnos que acceden a la asignatura "Matemáticas Especiales" de dicho curso, lo hacen con bastantes deficiencias en esta materia. Partimos de la base de que los comienzos en el CAD no son nada fáciles, pues los alumnos de este curso son de un prototipo especial: Su acreditación para matricularse en él es tener 25 años. Generalmente se trata de personas que, por distintos motivos, han tenido que dejar sus estudios y, en determinado momento, deciden continuarlos. Si a esta situación además añadimos que, en particular, la asignatura de Matemáticas depende en gran medida de lo que anteriormente haya aprendido el alumno, nos encontramos con un estado de la cuestión bastante lamentable.

En concreto, en el curso 2005/6 de los 2103 alumnos matriculados sólo se presentaron (entre las dos convocatorias de Junio y Septiembre) un total de 1176. Estas cifras nos hablan de que un 44,07% de alumnos que han abandonado la asignatura. Por otra parte, de los alumnos que se presentaron, en alguna de las dos convocatorias, aprobaron solamente un 15,98%. En el curso siguiente, curso 2006/7, la situación siguió la misma tónica. En dicho curso, de los 1915 alumnos matriculados, se presentaron a examen 1111. Ello supone que abandonaron un 42%. Análogamente, los resultados de los presentados no mejoraron, llegando a aprobar sólo un 15,39 % de los alumnos presentados.

## 2 Proyecto DECAME (Diseño de Estrategias Colaborativas en el Aprendizaje de Matemáticas Especiales).

Con este estado de la cuestión, el equipo docente de la asignatura Matemáticas Especiales, del Curso de Acceso Directo para mayores de 25 años, en el curso 2007/08, diseñó un proyecto para mejorar la enseñanza y, cómo no, el aprendizaje de la misma, centrando su atención en aportar a los alumnos de esta disciplina complementos esenciales en su formación matemática, así como, mayor agilidad, destreza y entrenamiento en la resolución de problemas básicos de Matemáticas. Se trata de estudiar, conjuntamente entre los miembros del equipo, el profesor tutor de apoyo a la red (TAR) y algunos tutores, distintas estrategias metodológicas que permitan la adquisición o afianzamiento de los conocimientos matemáticos esenciales, que son necesarios para un correcto seguimiento de los primeros cursos de carreras de índole científico, por otra parte, objetivo primordial de esta asignatura. Además el proyecto aspira a que los alumnos adquieran un hábito de estudio adecuado a esta disciplina. En particular, se pretende que se familiaricen con el lenguaje formal, los materiales, los textos científicos, etc. En este sentido, el enfoque es fundamentalmente práctico, por una parte, se centrará en la resolución de problemas así como en la participación activa del alumno, deseando que éste pueda desenvolverse con un rendimiento óptimo a lo largo de todo el curso.

### *2.1 . Objetivos*

El objetivo principal consiste en desarrollar unas herramientas tecnológicas y metodológicas que faciliten la optimización del binomio Enseñanza-Aprendizaje dentro del marco de la actual asignatura Matemáticas Especiales del CAD. El objetivo básico es accesible a través de la consecución de los siguientes objetivos específicos:

- *Elaborar un programa de nivelación*. Si es posible minimizar el primer impacto que experimentan los alumnos que cursan por primera vez Matemáticas Especiales, entonces todo proyecto de mejora debe tener en cuenta dicho efecto pernicioso. Una de las principales dificultades se centra en la falta de homogeneidad en los conocimientos del los distintos alumnos y en particular, las diferencias en el nivel de familiaridad de los distintos contenidos. Este proyecto comenzó con el diseño de un protocolo inicial de aprendizaje cuyo primer exponente es un programa que contribuya a homogeneizar estos conocimientos previos con una prueba de puesta en común de elementos básicos.
- *Utilizar un entorno virtual en el apoyo al alumno, y diseñar recursos multimedia de acceso rápido.* El proyecto ha puesto a disposición de los alumnos, a través de la red, distintos materiales multimedia que impiden los efectos perniciosos de la búsqueda aleatoria de recursos, facilitando el acceso del alumno de información significativa en distintos formatos digitales. La red y los servidores de la UNED sirven de entorno virtual en el que presentan las herramientas informáticas que constituyen el cuerpo de almacenamiento de la información. El diseño se hizo con el propósito de que los estudiantes que accediesen a dichos recursos se les dotase de una formación complementaria, a través un triple enfoque: de una parte la adquisición de los conocimientos esenciales para conseguir un buen rendimiento académico en el primer curso de estudios universitarios; de otra, para actualizar, afianzar y completar algunos conceptos básicos ya estudiados, y por último, proporcionar bases metodológicas que faciliten su aprendizaje en esta disciplina.
- *Disminuir la sensación del fracaso inicial a la hora de adquirir los conocimientos básicos.* Al inicio del estudio este efecto puede desencadenar un posterior abandono de la autoregulación del estudio y suele llevar al abandono total entre muchos alumnos. Esta circunstancia es patente en aquellos los alumnos que no eligen la especialidad del CAD más acorde con sus aptitudes y sus propias condiciones.

### *2.2 . Material didáctico elaborado*

Se utilizaron los siguientes materiales:

- *Curso de Nivelación*. Se realizó, dentro del curso de nivelación de la asignatura, una Prueba de Autoevaluación de 1h y 45 minutos, con un repaso de los conocimientos mínimos que los alumnos deben tener para afrontar con éxito el estudio de la asignatura de Matemáticas Especiales.

- *Vídeo de Presentación*. Se incluyó en la virtualización de la asignatura un video de presentación, elaborado durante el curso 2006-7, en el que se recogen algunas orientaciones generales para abordar el estudio de la misma.
- *Hojas de Problemas*. Ya que la estrategia, que principalmente se va a seguir durante la experimentación, es la resolución de problemas, se generó un conjunto de retos constituidos principalmente por problemas-tipo, cuya resolución aporta el oportuno conocimiento del aprendizaje adquirido por el alumno. Dichos problemas, que se han puesto en el foro cada dos semanas durante los dos últimos cursos, constituyen una serie de ejercicios básicos y concretos que se corresponden con el tema que en cada momento el alumno debe estar estudiando, si sigue una programación adecuada para afrontar con éxito la Prueba Presencial.

De esta forma se fomenta que los alumnos se agrupen para discutir estos problemas entre ellos, pues el entorno virtual permite agruparse y trabajar en colaboración ante distintos problemas sin necesidad de estar físicamente juntos, es decir, crear grupos de trabajo colaborativo. El aprendizaje colaborativo y el uso de tecnologías de la información crea lo que se conoce como grupos colaborativos virtuales. Existen diversas concepciones sobre qué son. P. Baeza (1999), define el aprendizaje colaborativo a través del ordenador como: "*una estrategia de enseñanza-aprendizaje por la cual interactúan dos o más sujetos para construir el conocimiento a través de discusión, reflexión y toma de decisión, proceso en el cual los recursos informáticos actúan como mediadores*." La transmisión de información persona a persona y grupo a grupo se realiza — mediante los servicios de Internet— a velocidades exponencialmente mayores en relación a otros medios—como correo postal—, dependiendo ahora no de la mediación humana directa sino de la propia tecnología, lo que implica un rompimiento de la relación tiempo-espacio de escala humana a una dimensión tiempo-espacio de escala tecnológica. Baeza señala como elemento central de la dinámica educativa de los grupos en red la interacción que se genera entre sus miembros y los vínculos que se establecen a partir de tal interacción. Así, se puede definir a los grupos en red como el conjunto de sujetos que se organizan en pequeños equipos de trabajo para llevar a cabo un aprendizaje de tipo colaborativo, fomentando procesos de formación social e intelectual entre todos sus miembros, a través de la comunicación interactiva a través de Internet, orientados y motivados, en forma permanente, por un cuerpo institucional de profesores tutores. De esta forma, utilizando los distintos foros existentes en el entorno virtual de la asignatura, se fomentará que los alumnos se agrupen para discutir estos problemas entre ellos. Aunque el entorno virtual permite agruparse ante distintos problemas sin necesidad de estar visualmente juntos, al haber suficientes alumnos en un determinado Centro Asociado se han formado grupos locales donde el tutor presencial coordina las actuaciones del grupo.

### *2.3 . Análisis realizados*

Para proceder a la captación de datos de los alumnos tratados en el proyecto se realizaron:

- *Encuesta con un Cuestionario inicial*: Se elaboró una encuesta con 30 preguntas, para valorar la efectividad de la Prueba de Autoevaluación del Curso de Nivelación. En ella se pidió a los alumnos su opinión sobre las herramientas y contenidos desarrollados.

- *Encuesta con un Cuestionario final*: Se diseñó también una segunda encuesta para valorar el tiempo, el esfuerzo y la satisfacción que los alumnos tienen de las herramientas y contenidos desarrollados, en especial las hojas de problemas
- *Estadísticas de las pruebas presenciales:* Este estudio se hizo para detectar las preguntas en las que los alumnos habían tenido más dificultad, con vistas al diseño de las hojas de problemas del curso siguiente.
- *Análisis cuantitativo de las Hojas de Problemas-Tipo:* Se cuantificó el número de intervenciones en los foros relacionadas con la resolución de las hojas de problemas, así como el número de personas distintas que intervinieron en ellos.
- *Análisis cualitativo de las Hojas de Problemas-Tipo:* Utilizado el programa de clasificación tipológica CHIC (Clasificación Jerárquica Implicativa y Cohesitiva), que realiza una clasificación jerárquica e implicativa, se realizó un análisis cualitativo de las resoluciones de algunas hojas de los problemas-tipo.

## 3 Metodología

El diseño metodológico que hemos adoptado se apoya en las respuestas de los alumnos que intervinieron en la resolución de las Hojas de Problemas.

### *3.1 Participantes*

Como hemos comentado anteriormente, estas Hojas de Problemas estaban en uno de los foros del curso virtual, A él tenían acceso, aproximadamente, 700 alumnos. El equipo docente de la asignatura, en diversos medios como: la guía didáctica, los programas de radio, etc., animó a los alumnos a participar. A pesar de ello, la participación fue moderada, como muestran los datos expuestos en las tablas siguientes:

**Tabla 1:** Respuestas de los alumnos a la Hoja de Sistemas de Ecuaciones Lineales

| HOJA 1 Problemas | Nº total de mensajes sin incluir los del Equipo Docente | Nº de alumnos distintos |
|---|---|---|
| 1 | 6 | 4 |
| 2 | 5 | 3 |
| 3 | 8 | 5 |
| 4 | 6 | 3 |
| 5 | 2 | 2 |
| 6 | 6 | 4 |
| 7 | 2 | 2 |
| 8 | 2 | 2 |
| 9 | 4 | 3 |
| 10 | 11 | 5 |
| Otros | 7 | 3 |
| Totales | 59 | 11 |

**Tabla 2:** Respuestas de los alumnos a la 2ª Hoja de Geometría del plano

| HOJA 2 Problemas | Nº total de mensajes sin incluir los del Equipo Docente | Nº de alumnos distintos |
|---|---|---|
| 1 | 7 | 6 |
| 2 | 4 | 3 |
| 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 2 |
| 5 | 3 | 3 |
| 6 | 3 | 3 |
| 7 | 6 | 4 |
| 8 | 5 | 3 |
| 9 | 4 | 4 |
| 10 | 3 | 2 |
| Otros | 3 | 2 |
| Totales | 45 | 7 |

A pesar de que el número de alumnos participantes fue bajo, desde nuestro punto de vista, la actividad se ha desarrollado muy satisfactoriamente. Han existido discusiones muy constructivas, con diferentes planteamientos del mismo problema en muchas ocasiones, y muchas veces los mismos alumnos se explicaban sus soluciones entre sí. La participación ha sido moderada. Además nos consta que muchos alumnos leen las discusiones sin participar y esto siempre les sirve de ayuda, sobre todo en el caso de los alumnos de la UNED que, como hemos comentado anteriormente, se sienten muy aislados.

### *3.2 Aplicación del CHIC a las soluciones de los alumnos a las Hojas de Problemas*

En el marco de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, el tratamiento de la información, mediante el análisis cualitativo, suscita gran interés, por la posibilidad de incorporar la utilización de nuevos métodos a los estadísticos cuantitativos habituales, una novedosa dimensión de las Matemáticas que abre el abanico de posibilidades en el campo de la enseñanza. El marco teórico de esta investigación contempla aspectos informáticos basados en el análisis implicativo con los diferentes tratamientos de la información que permite el software estadístico multidimensional de Clasificación Jerárquica Implicativa y Cohesitiva (CHIC) a través del grafo y complementado por los árboles de similaridad y jerárquico. Para el análisis, con el programa CHIC, de los apartados de las colecciones de problemas, se caracterizan cada uno de estos apartados a partir de ciertas variables. Este análisis sigue la misma línea de trabajo iniciada por Orús, P. (2002), quien con el mismo instrumento didáctico modeliza el razonamiento de los alumnos. Es decir, se utiliza el análisis tipológico (Chandon, J.L. y Pinson, S., 1981), en el que, por medio de una matriz booleana de doble entrada, se caracterizan distintos tipos de cuestionarios para lograr un mejor aprovechamiento de ellos. El procedimiento seguido para este análisis consta de varias fases:

*a) Caracterización de las hojas de Problemas-Tipo:*

Los apartados de los distintos ejercicios se han caracterizado mediante las siguientes variables:

- CR: Representa la variable “Contestación al reto propuesto en el ejercicio”.
- SA: Representa la variable “Se solicita ayuda para resolver el ejercicio”.
- CA: Representa la variable “Contestación a alguno de los otros alumnos”.
- PS: Representa la variable “Se propone una situación análoga en el ejercicio”.
- ITA: Representa la variable “Intervención previa del tutor ”.
- ITD: Representa la variable “Intervención posterior del tutor”.
- IA: Representa la variable “Nº de intervenciones de alumnos mayor que 3”

### *3.3 Diseño de las matrices booleanas:*

Las respuestas se introducen en una hoja de cálculo Excel, utilizando el dígito 1 para el caso afirmativo y 0 para el negativo, resultando una matriz que para el caso del tema 1 designaremos por MT1, para el tema 2 será MT2, y así sucesivamente. Por ejemplo, si en el primer apartado del problema 1 del tema 1, un alumno ha propuesto una situación análoga, la variable PS en ese apartado toma el valor 1. En cambio, si ningún alumno ha hecho esta propuesta, la variable PS toma el valor 0.

## 4 Resultados

Para efectuar los análisis de los datos recogidos, hemos aplicado el análisis de similaridades de Lerman (Lerman, 1981) y el análisis estadístico de Gras (versión 1.5 del CHIC) (Bodin, Couturier y Gras, 2000; Gras, 1996) para cada una de las Hojas de Problemas y hemos obtenido las tablas y diagramas de árbol siguientes.

### *4.1 Análisis de similaridades*

Realizamos la codificación y procesamos los datos con el CHIC y obtuvimos los distintos árboles que proporciona el programa. Para cada una de las Hojas de Problemas, estudiaremos primero el árbol de similaridad y, a continuación, el jerárquico.

#### *4.1.1 Hoja de problemas de Sistemas de Ecuaciones Lineales.*

Esta primera hoja de problemas (ver *Anexo 1*) contiene 10 preguntas, que a su vez, contienen diversos apartados, obteniéndose en total 20 cuestiones. Para este primer tema resulta entonces la matriz:

**Tabla 3a:** Matriz MT1

| **Problemas** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | | **6** | | **7** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cuestiones** | 11 | 21 | 31 | 41 | 51 | 52 | 61 | 62 | 71 | 72 | 73 |
| **CR** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **SA** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **CA** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **PS** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **ITA** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **ITD** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **IA** | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

**Tabla 3b** Matriz MT1

| **Problemas** | | **8** | | | **9** | | | **10** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cuestiones** | 81 | 82 | 83 | 91 | 92 | 93 | 101 | 102 | 103 |
| **CR** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **SA** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **CA** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **PS** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **ITA** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **ITD** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **IA** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Al aplicar el programa CHIC a la matriz así obtenida, se consigue una clasificación de los apartados según las variables definidas, plasmando la relación de proximidad estadística que existe entre ellas. Esta información viene representada a partir del árbol de Similaridad y del Implicativo. Estos árboles traducen la clasificación que se ha ido formando en los distintos niveles de agregación de datos, por su proximidad, con los resultados numéricos, obtenidos al tratar los datos con el programa CHIC. El programa informático CHIC va enlazando los distintos apartados según su proximidad en diferentes niveles, de tal manera que el primer nivel es la primera agrupación que aparece en la parte superior del grafo, y en orden descendente se van representando los sucesivos niveles. Señala además en rojo aquellas agrupaciones que son más significativas estadísticamente en cada nivel de agrupación. Se aplica el programa CHIC sobre esta matriz MT1 para obtener entre las 20 cuestiones del tema Sistemas de Ecuaciones Lineales el árbol de Proximidades.

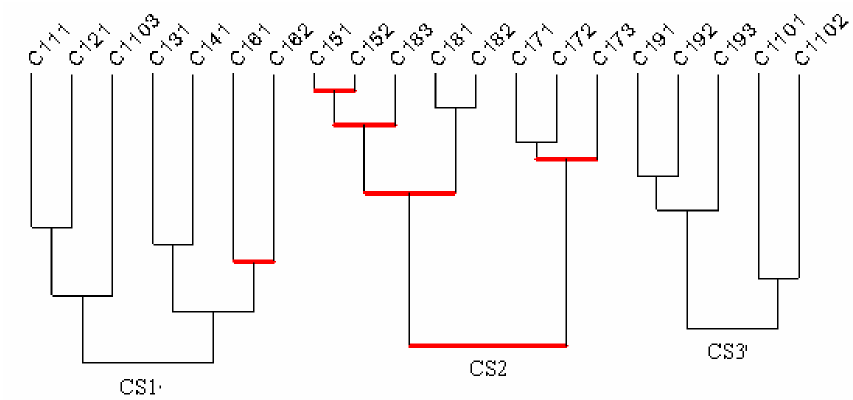


**Figura 7 : Árbol 1 de similaridad entre las cuestiones de Sistemas de Ecuaciones Lineales**

El nudo más significativo está en el nivel 1.

*Nudos significativos*

En los niveles: 1, 3, 5, 7, 11 y 16

Se obtienen tres clases de cuasi-equivalencia. La más interesante es la segunda, CS2, que contiene el mayor número de nudos significativos: 4 nudos.

Esta clase contiene las preguntas 5, 7 y 8. En las tres deben contestar la pregunta sin resolver el sistema correspondiente.

El primero nudo, el más significativo, agrupa las dos cuestiones del ejercicio 5. Se puede comprobar que ambas son iguales, tanto en el enunciado como en la solución por lo que alguno de estos apartado se debería cambiar. Sería más conveniente para el curso próximo considerar que alguna de las soluciones ofrecidas sea correcta.

Nos ocupamos entonces del nudo siguiente: agrupa estas cuestiones con la 3 del ejercicio 8.En este ejercicio hay que determinar, sin resolver el sistema, que se trata de un sistema compatible determinado. Efectivamente, se puede encontrar la solución sin utilizar el teorema de Rouché-Frobenius (como pretendía el Equipo Docente que se hiciera) basta con ir probando soluciones de manera análoga al ejercicio 5. Por tanto es recomendable cambiar este apartado por otro en el que aparezca un sistema incompatible.

El tercer nudo significativo une las cuestiones del ejercicio 7. Se destaca que la unión entre las dos primeras está a un nivel superior que la unión con la tercera. Aquí nos encontramos, de nuevo, con el tema de los sistemas incompatibles. Esto significa que el que el sistema no tenga solución añade dificultad al ejercicio. Cosa que si lo resolvieran por el teorema no tendría razón de ser. De cara al curo siguiente sería interesante *cambiar* el apartado 1 (se trata de *un sistema compatible determinado*) por otro en el que aparezca un *sistema incompatible.* El siguiente nudo ya está en un nivel suficientemente inferior (nivel 11, similaridad 0,77) como para que no aporte mucha información.

### *4.1.2 . Hoja de problemas de Geometría del plano.*

Esta segunda hoja de problemas (ver *Anexo 2*) contiene también 10 preguntas, a su vez con diversos apartados, obteniéndose en total 29 cuestiones. Para el segundo tema se obtiene la matriz Matriz MT2, que (por motivos de formato) se ha dividido en dos tablas: Tabla 2 y Tabla 3.

**Tabla 4a:** Matriz MT2 (columnas 1-5)

| **Problemas** | **1** | **2** | | **3** | | | | **4** | | | | **5** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cuestiones** | 11 | 21 | 22 | 31 | 32 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 51 | 52 | 53 |
| **CR** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **SA** | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **CA** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **PS** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **ITA** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **ITD** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **IA** | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

**Tabla 4b:** Matriz MT2 (columnas 6-10)

| **Problemas** | **6** | | | | | | **7** | | **8** | | | | **9** | | **10** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cuestiones** | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 71 | 72 | 81 | 82 | 83 | 84 | 91 | 92 | 101 | 102 |
| **CR** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **SA** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **CA** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **PS** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **ITA** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **ITD** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **IA** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Se aplica de nuevo el programa CHIC, ahora sobre la matriz MT2, para obtener, entre las 10 preguntas de esta hoja de problemas, el árbol de proximidades. Éste árbol nos proporciona tres clases de similaridad que se dividen a su vez en dos subclases:

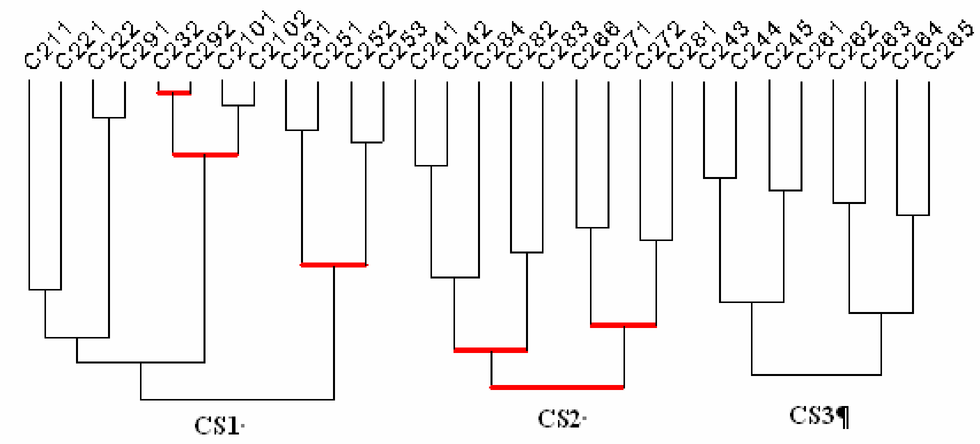


**Figura 8 : Árbol 2 Análisis de similaridad entre las cuestiones de Geometría del plano**

El nudo más significativo está en el nivel 1.

<u>Nudos significativos</u>**:** En los niveles: 1, 6, 15, 20, 22 y 25.

La clase que más interesa estudiar es la primera CS1, ya que contiene los tres primeros nudos significativos en los niveles: 1, 6 y 15. Las otras dos clases no tienen tanto interés porque contienen, generalmente, apartados del mismo problema unidos por nudos significativos de un nivel muy inferior (Clase CS2) o por nudos no significativos (caso de la clase CS3).

El primero de los nudos significativos (nivel 1) agrupa la cuestión 2 del ejercicio 3 y la 2 del ejercicio 9. Su similaridad es muy alta 0,97. En ambas cuestiones se parte de un punto y la ecuación implícita de una recta, sin embargo, lo que se pide y la manera de resolverlo es muy diferente en las dos. Para resolver el ejercicio número 3 basta con averiguar si el punto pertenece a la recta; en cambio, en la del 9, hay que hallar la recta perpendicular a la dada por dicho punto, lo que encierra mucha más dificultad.

El siguiente nudo significativo asocia estas preguntas con la número 10 (nivel 6, índice de similaridad 0,88) en la que volvemos a encontrar la ecuación implícita de la recta. En ambos apartados de este ejercicio se pide hallar la distancia, entre un punto y una recta (dada en la forma implícita) o entre dos rectas (de nuevo expresadas con la ecuación implícita).

Finalmente, en el nivel 15 (índice de similaridad 0,76) se encuentra el último nudo significativo de esta clase que une los apartados del ejercicio 5 con el apartado 1 de la pregunta 3. Las rectas de estos apartados están expresadas en forma general o paramétrica. En este caso nos encontramos también una pregunta muy sencilla (la 3), en la que se cuestiona si un punto pertenece a una recta, unida a otras mucho más complejas, donde se pide hallar una recta paralela a otra por dicho punto.

Esta información da pie a suponer que todo se supedita a la *forma en qué esté expresada la recta*, independientemente de lo que se cuestione o pida. Cuando en realidad ello no debería importar pues se debería de pasar indistintamente de una forma a otra de la recta sin mayor dificultad.

### *4.2 Análisis cohesitivo*

#### *4.2.1 Hoja de problemas: “Sistemas de Ecuaciones Lineales”.*

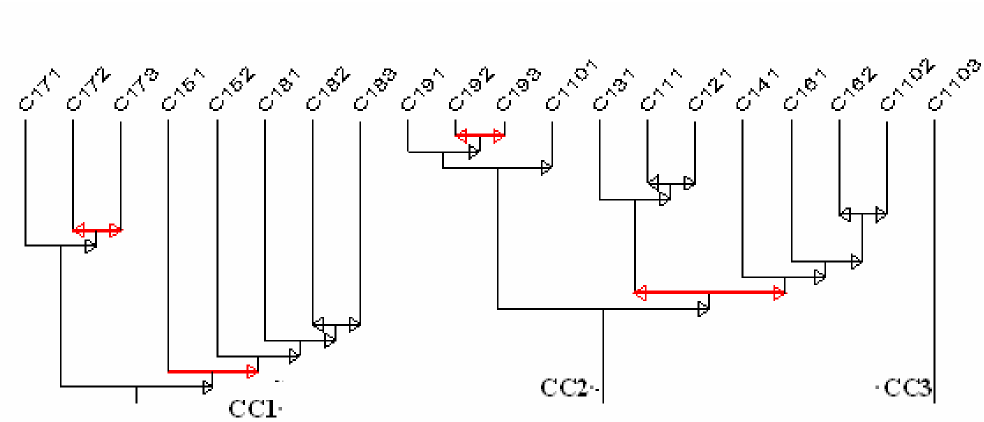


**Figura 9 : Árbol 3 Árbol jerárquico entre las cuestiones del tema “Sistemas de Ecuaciones Lineales”**

El nudo más significativo está en el nivel 11.

<u>Nudos significativos:</u> En los niveles: 1, 7, 11 y 16.

El árbol jerárquico correspondiente a la matriz MT1 (Árbol 2) confirma los resultados del árbol de similaridad ya que en aquel aparecen cohesionadas apartados que en éste ya estaban cercanos con significación relevante.

La clase CS2 del árbol de similaridad corresponde a la clase CC1 del árbol jerárquico. En ella los apartados 2 y 3 de la pregunta 7 están unidos por un nudo significativo (nivel 7, cohesión 0,6). Nos reafirmamos en cambiar el apartado 1 de dicha pregunta.

Además de confirmar los datos aportados por el árbol de similaridad, este nuevo árbol nos indica una gran cohesión entre los apartados 2 y 3 del ejercicio 9. Estos apartados están unidos con una cohesión simétrica en el primer nivel (cohesión 0,73). En el árbol de similaridad forman junto con los apartados de la pregunta 10 la clase CS3, que contiene los ejercicios en los que aparecen sistemas de ecuaciones en función de un parámetro. En los dos apartados *el sistema es compatible determinado* para cualquier valor del parámetro, aunque se diferencian en el número de ecuaciones. Por tanto uno se podría suprimir o cambiar. Como, por otro lado, en el tercer nivel están unidos al apartado 1 de la pregunta 10 (cohesión 0,6) en el que aparece otro sistema compatible determinado para un cierto valor del parámetro, es mejor suprimirlo y así optimizar el tiempo.

El siguiente nudo es ya muy inferior (nivel 11) y no aporta más información.

*4.2.2 Hoja de problemas: "Geometría del plano".*

En el árbol jerárquico correspondiente a la matriz MT2 (Árbol 4), preguntas que en el árbol de similaridad (Árbol 3) ya estaban próximas con nivel significativo importante, vuelven a estar implicadas.

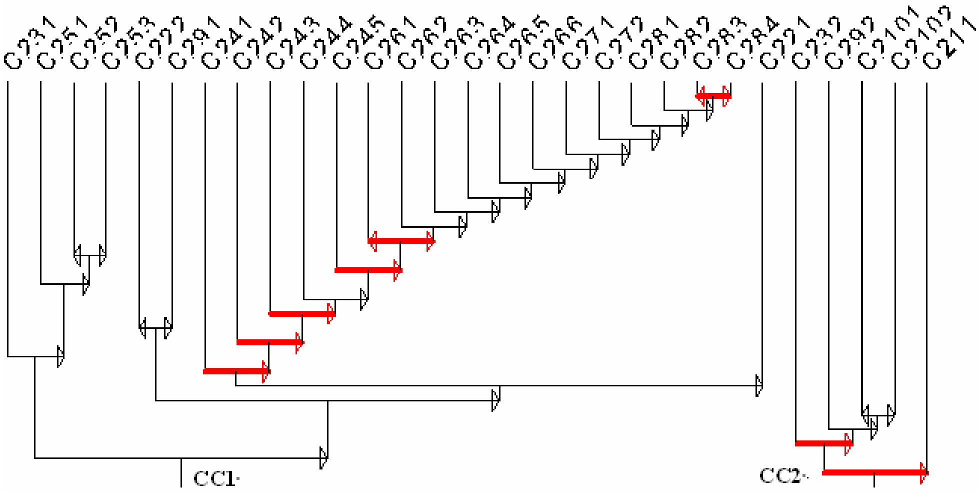


**Figure 10 Árbol 4: Árbol jerárquico entre las cuestiones del tema "Geometría del plano"**

El nudo más significativo está en el nivel: 11

Nudos significativos: En los niveles: 1, 11, 13, 16, 18, 20, 25 y 27.

Las preguntas, comentadas en el apartado anterior, C232, C292, C2101 y C2102, que forman parte de la clase CS1 del árbol de similaridad (Árbol 3) siguen estando agrupadas en el árbol jerárquico de cohesión (Árbol 4) en la clase CC2.

Este nuevo árbol, aparte de confirmar los datos analizados en el árbol de similaridad, no aporta nada nuevo pues, en la otra clase, CC1, aparecen agrupadas las cuestiones de un mismo ejercicio y en el orden lógico de implicación, de acuerdo a su dificultad.

## 5 Conclusión.

Al diseñar retos que el alumno de la enseñanza a distancia pueda resolver, bien individualmente o bien en colaboración a través de la red, resulta que los problemas o cuestiones de estudio pueden ser analizados según la respuesta de aceptación de los alumnos como un colectivo autorregulado. El análisis de dichos retos, empleando C.H.I.C., permite establecer pautas de modificación de este conjunto de cuestiones con la finalidad de que se adapte mejor a los objetivos que se desean abordar con la resolución de los problemas. Este estudio permite declarar el conjunto de retos de forma dinámica curso tras curso, adaptándose al cambio constante las características de alumno en el supuesto de que los alumnos del próximo curso serán los más parecidos a los alumnos del curso actual.

Además, la investigación ha conducido a un aumento del aprendizaje activo del alumno:

1. Más planificación y más optimización del tiempo de estudio.

Aumentaron las intervenciones en la resolución de las Hojas de Problemas:

- Hoja 1(De 58 a 166)
- Hoja 2(De 45 a 83)

2. Mejoras en el aprendizaje y en el rendimiento.

En el segundo curso de nuestro proyecto, la situación mejoró levemente: de los 2698 alumnos matriculados, se presentaron a examen 1619. Ello supone que abandonaron un 40%. Sin embargo, los resultados de los presentados mejoraron, llegando a aprobar un 17% de los alumnos presentados.

En otro sentido, gracias al C.H.I.C., el quipo docente de la asignatura de Matemáticas Especiales del curso de acceso ha podido comprobar, de nuevo, que ciertos aprendizajes que, en principio, al profesor le parecen fáciles, para el alumno encierran bastante dificultad. Una afirmación que, aún siendo tan obvia, lamentablemente a los profesores se nos olvida a menudo.

**Bibliografía.**

Ballvé, M.E.& Delgado, M.&Porto, A.M.& Ulecia,T. (1995). *Problemas de Matemáticas Especiales*. Ed. Sanz y Torres. Madrid.

Barros, B. & Verdejo, M.F., (2001). Entornos para la realización de actividades de aprendizaje colaborativo a distancia. *Inteligencia Artificial, Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial*. Nº 12, pp 39-49.

Bodin, A. & Couturier, R. y Gras, R. (2000): Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive. Version sous Windows – CHIC 1.2. Rennes: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Chandon, J.L. y Pinson,S.(1981). *Analyse Tpologique. Théories ey applications*. Massionson. París.

Dillon, J.T. (1994). *Using discusión in Classrooms*. Open University Press.

Gras, R., (1996). Nouvelle méthode exploratoire de donnés. La Penseé Sauvage. Grenoble.

Gras, R. y Kuntz, P., (2008). El análisis Estadístico Implicativo (ASI) en respuesta a problemas que le dieron origen. En *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana*. Eds. P. Orús, L. Zamora y P. Gregori.Departamento de Matemáticas, Universitat Jaume I de Castellón y Facultad de Matemática y Computación, Universidad de Oriente de Santiago de Cuba, 2009.

Gómez Chacón, I.Mª. & Figueiras, L. & Marín, M. (2001). *Matemáticas en la red. Internet en el aula de Secundaria*. Narcea S.A. de Ediciones. Madrid.

Jonassen, D., Mayes, T. & McAleese, R. (1992). A Manifiesto for a Constructivist Approach to Uses of Technology in Higer Education, en Duffy, T.M., Lowyck, J. & Jonassen, D. 1992, pp 231-247, *Designing Environments for Constructive Learning*, Springer-Verlag.

Lerman, I.C. (1981). Classification *et analyse ordinale des données*. Paris. Dunod.

Ordinas, C. & de Benito, B. & Martí, C. & Salinas, J. (1999). Modelos de estructuración de material didáctico multimedia utilizados en Campus Extens. Comunicación Edutec´99, Sevilla. ISBN: 84 [http://www.uib.es/depart/gte/edutec99/modelos.html]

Orús, P. (2002). *Tratamiento de datos, grafos y Didáctica de las Matemáticas*. Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales, nº 26. Departamento de Matemáticas Fundamentales. UNED.

P. Orús, L. Zamora y P. Gregori. *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana*. Eds. P. Orús, L. Zamora y P. Gregori. Departamento de Matemáticas, Universitat Jaume I de Castellón y Facultad de Matemática y Computación, Universidad de Oriente de Santiago de Cuba, 2009.

Scardamalia, M. & Bereiter, C. (1991). Higher Levels of Agency for Children in Knowledge Building. *The Journal of the Learning Sciences*, Vol. 1, N, pp 37-68.

Slavin, R. (1983). *Collaborative learning*. Logman.

Valverde, J. (2001). *Manual práctico de Internet para profesores*. Ed. Moralea. Albacete.

Vygotsky, L.S: (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge MA: Harvard University Press.

Ulecia García, T. (2008). Design and virtualización multimedia resources across the network: a support for the distance learning mathematics. *Proceedings ED-MEDIA 2008 (World Conference)*

**Anexo 1: Hoja de problemas de Sistemas de Ecuaciones Lineales**

1.- Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

2.-Calcula el número de páginas de un libro, sabiendo que es un número mayor que 200 y menor que 300, la cifra de las decenas es la tercera parte de la cifra de las unidades y la suma de las tres cifras es 14.

3.- Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y - z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

4.- España en las Olimpiadas de Sydney del año 2000 obtuvo en total 11 medallas. Consiguió los mismos oros que platas y obtuvo dos más de bronce que de plata. ¿Cuántas medallas obtuvo de cada tipo?.

5.- Comprueba si los valores que se dan son solución del sistema:

a) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 10 \\ x - 2y - z = 5 \\ x + 4y + z = -2 \end{cases}$ Solución: $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = -5$

b) $\begin{cases} x - 3y + 2z = -2 \\ 3x + 6y - 4z = 4 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ Solución: $x = 0, y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}$

6.- Di si los siguientes sistemas son equivalentes o no y razona la respuesta.

a) $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ equivalente a $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 7x = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ x - 2y + 3z = -3 \\ 2x + 4y + z = 10 \end{cases}$ equivalente a $\begin{cases} 3x - 3y + 3z = -3 \\ 3x + 2y + 4z = 7 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

7.- Sin resolverlos, clasifica estos sistemas según su solución:

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ -x - 3y = 2 \end{cases}$

1

8.- Sin tener que resolver los siguientes sistemas, determinar si son compatibles determinados, compatibles indeterminados o incompatibles:

a) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 7 \\ 5x - 3y - 2z = 1 \\ x + 4y + 7z = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3y - 5z = 7 \\ -x + 2y + 2z = 1 \\ 2x - y - 9z = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y - z = 2 \\ 2x + y + 5z = 1 \\ 6x - 7y - 11z = 4 \end{cases}$

9.- Averigua para qué valor del parámetro 'a' el sistema se puede resolver y calcular la solución:

a) $\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 7x - 3y = a \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y + 2z = 2 \\ x - 3y + z = 3a \\ 2x - 7y - z = a \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ x - 3y = 1 \\ 2x - 7y = a \end{cases}$

10.- Averigua para qué valor del parámetro 'a' el sistema se puede resolver y calcular la solución:

a) $\begin{cases} -ax + 4y = 4 \\ 9x - ay = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2ax + 5y + z = 2 \\ 6x + 4y + z = 3 \\ -ax - 5y - z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y + az = 2 \\ ax - 3y + 3z = 1 \end{cases}$

2

**Anexo 2: Hoja de problemas de Geometría del plano**

1. Dados los puntos $A(1,2), B(4,3)$ y $C(0,1)$,¿Qué vector une $A$ con $B$? ¿y $A$ con $C$?.

2. Con los puntos $P(1,3), Q(-2,5)$ y $R(\frac{1}{2},2)$,se pide calcular:

   a) La ecuación paramétrica de la recta que pasa por $P$ y $Q$.

   b) La ecuación implícita de la recta que pasa por $P$ y $R$.

3. a) ¿Pertenece el punto $P(2,3)$ a la recta con ecuación paramétrica $\left\{\begin{array}{l} x=-4+t \\ y=2t \end{array}\right.$ ?.

   b) ¿Pertenece $P(1,-2)$ a la recta con ecuación implícita $x-2y=5$?.

4. Calcula un vector director de las siguientes rectas:

   a) $3x+2=0$

   b) $5y-2=0$

   c) $3x+2y-4=0$

   d) $x+y+1=0$

   e) $3x+y=0$

5. En los soguientes casos, calcula la recta paralela a la recta $r$ que pasa por el punto $P$

   a) $r: -3x+5y-2=0$; $P(1,2)$

   b) $r: -x+5y-\frac{1}{2}=0$; $P(1,1)$

   c) $r: \left\{\begin{array}{l} x=2-t \\ y=-1+2t \end{array}\right.$ ; $P(1,3)$

6. Halla los posibles puntos comunes de cada par de rectas

   a) $\left\{\begin{array}{l} x+y+3=0 \\ x-y-5=0 \end{array}\right.$

   b) $\left\{\begin{array}{l} x+2y+3=0 \\ 2x+4y-5=0 \end{array}\right.$

   c) $\left\{\begin{array}{l} 3x+2y+3=0 \\ x+\frac{2}{3}y+1=0 \end{array}\right.$

1

d) $\begin{cases} 5x + y + 1 = 0 \\ -10x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x + 2y + 3 = 0 \\ -10x - 4y = 6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -x + 3y + 3 = 0 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$

7. Calcula la distancia entre los puntos $P$ y $Q$:
   a) $P(1,5)$ y $Q(2,3)$
   b) $P(2,-3)$ y $Q(-1,5)$
8. Calcula el ángulo formado por:
   a) Los vectores $u = (2,-1)$ y $v = (1,2)$
   b) Los vectores $u = (1,-1)$ y $v = (0,2)$
   c) Las rectas $r : 3x - 5y = 2$, $s : 2x - y = 0$
   d) Las rectas $r : x - y = 2$, $s : x + y = 0$
9. a) Calcula un vector perpendicular al vector $u = (2,-3)$
   b) Calcula una recta perpendicular a $r : 3x - 2y = 5$, que pasa por el punto $P(1, -\frac{1}{2})$
10. Calcula la distancia entre
    a) El punto $P(2,1)$ y la recta $r : x - 3y = 5$
    b) Las rectas $r : x - 3y = 5$ y $s : x - 3y = 2$

2