ÉTUDE DES SIGNIFICATIONS DONNÉES PAR DES ÉLÈVES DE TERMINALE S À LA MULTIPLICATION DES NOMBRES RÉELS ET COMPLEXES DANS UN CONTEXTE DE GÉOMÉTRISATION

Raquel BARRERA[1] et Alain KUZNIAK[2]

TITLE

What does it mean to multiply real and complex numbers in a geometric context for secondary school students?

RÉSUMÉ

Cet article présente l'étude des significations géométrique que des élèves de Terminale S ont pu associer au produit de nombres réels et complexes à l'issue d'une série d'exercices de constructions géométriques. L'analyse didactique s'appuie initialement sur la notion d'Espace de Travail Géométrique qui permet de décrire les parcours des élèves entre les divers cadres mathématiques et registres sémiotiques. L'analyse hiérarchique implicative associée à cette analyse confirme certains des résultats mais elle permet aussi de pointer la complexité des parcours des élèves.

Mots-clés : *Multiplication, nombres complexes, géometrisation, travail mathématique Keywords Multiplication, complex numbers, geometrisation, mathematic work.*

ABSTRACT

This paper presents the study of geometric meanings that secondary students (Terminale S) gave to the product of real and complex numbers after solving a serie of exercises on geometric constructions. Geometric Work Spaces have been used to describe the students' work and routes between various mathematics domains and semiotic registers. The statistical implicative analysis associated with the didactic analysis confirms some of the results but it also points the complexity of the students courses.

Keywords : *Multiplication, complex numbers, geometrisation, mathematic work.*

1 Problématique générale de l'étude

Notre étude s'inscrit dans la recherche de doctorat menée par Barrera sous la direction de Kuzniak et Vivier. Il s'agit de dégager l'importance et le rôle des aspects géométriques dans l'étude de la multiplication des nombres et plus particulièrement des nombres complexes. L'idée de calcul est intimement liée à la notion de multiplication et elle vient souvent occulter toute autre manière d'envisager le produit de deux nombres. Les nombres, entiers et réels, ont d'abord été associés à la notion de grandeur et un blocage important est survenu lorsqu'il s'est agi de représenter les nombres négatifs et de donner un sens au produit de deux nombres négatifs. Les nombres complexes ont cessé d'être imaginaires à partir du moment où il a été possible de leur donner une

[1] Université Paris-Diderot - Laboratoire de didactique André Revuz - quellita@gmail.com
[2] Université Paris-Diderot - Laboratoire de didactique André Revuz - kuzniak@math.jussieu.fr

représentation et une réalité dans le cadre de la géométrie, réalité que le signe $\sqrt{-1}$ ne suffisait pas à leur donner. Pour que les représentations géométriques soient adéquates, il faut qu'elles puissent donc rendre compte des opérations classiques comme l'addition et la multiplication. Dans ce cadre géométrique, la multiplication va apparaître comme une composition de transformations géométriques.

L'étude de la compréhension par les élèves de la géométrisation de la multiplication permet d'étudier en profondeur la maîtrise qu'ils manifestent ou au contraire les obstacles qu'ils rencontrent dans un travail mathématique qui nécessite à la fois des changements de cadres mathématiques et des changements de registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993) (Douady, 1986)

2 Support théorique et méthodologie de l'étude

Grâce à la notion d'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011), il est possible de rendre compte de la complexité du travail mathématique des élèves lorsqu'ils résolvent des problèmes. Cette notion qui généralise les Espace de Travail Géométrique, suppose une mise en réseau de deux niveaux, l'un cognitif et l'autre épistémologique. Cette mise en réseau s'appuie sur un certain nombre de genèses notamment sémiotique, instrumentale ou discursive (Rabardel, 1995) Le diagramme suivant rend compte de la façon dont nous envisageons dans cette étude l'activité mathématique :

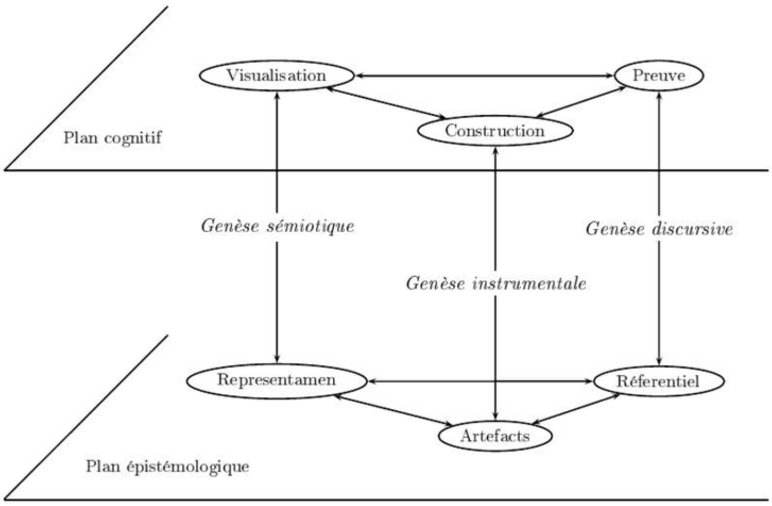


FIGURE 1 – *Une approche génétique de l'Espace de Travail Géométrique*

Pour décrire le rôle de la géométrisation dans l'approche de la multiplication chez les élèves, nous avons étudié leur manière de résoudre des problèmes de construction géométrique mettant en jeu la multiplication des nombres réels et des nombres complexes. En plaçant les activités dans le cadre géométrique, il était ainsi possible d'observer les interactions entre les processus de visualisation et de preuve autour de la construction géométrique du produit des nombres réels et complexes.

Des élèves de Terminale S ont eu à résoudre une suite de cinq problèmes proposant une approche géométrique de la multiplication de nombres réels puis de nombres complexes. Dans un premier temps, les élèves devaient effectuer la construction géométrique du produit de deux nombres réels dans le cadre proposé par Descartes dans sa *Géométrie* (1637). Puis, il leur était demandé de trouver une relation entre des points donnés dans le plan et la multiplication de nombres complexes.

En s'appuyant sur ces activités, notre but était de décrire et de caractériser des parcours d'élèves en précisant notamment comment ils reliaient cette approche géométrique à l'approche algébrique traditionnelle. Une des caractéristiques des études fines et originales en didactique des mathématiques est qu'elles supposent un temps long de mise en place dans une classe. Elles ne peuvent généralement pas donner lieu à des questionnaires que l'on pourrait administrer sans ambiguïtés et sur un temps court à des centaines d'élèves. De ce fait, les bases de données obtenues sont généralement faibles d'un point de vue statistique. Cependant, les réponses aux problèmes posés ne sont pas aléatoires et sont fortement structurées par les raisonnements mathématiques nécessaires à la résolution des problèmes. Nous faisons alors l'hypothèse que même sur un échantillon de petite taille, une analyse hiérarchique implicative permet de reconnaître les raisonnements utilisés. Elle permet aussi d'identifier des réponses types et de commencer l'étude des écarts à cette norme.

Dans la recherche que nous présentons dans cette communication, nous suivons et adaptons la méthodologie développée par Kuzniak et Rauscher (Kuzniak 2008, Kuzniak & Rauscher 2011) :

- Une première analyse qu'on pourra qualifier de didactique, permet de dégager une typologie des parcours d'élèves. (« classifications faites à la main », méthodologie d'analyse de l'ETM : type de genèse, première *visualisation* des parcours des individus, etc.) ;
- Une analyse hiérarchique et implicative permet d'affiner, de valider ou d'invalider certains des points obtenus dans l'analyse didactique. Elle permet aussi d'identifier les caractéristiques des différents parcours types d'élèves. (Les classements obtenus avec le logiciel de statistique, etc.) ;
- A partir de cette double analyse, il est alors possible de sélectionner certains items pour vérifier dans une expérimentation à plus large échelle les caractéristiques ainsi dégagées. (Croisement des données, *parcours définitifs*).

Dans cette présentation du travail en cours, nous n'aborderons que les deux premiers points. La situation globale proposée aux élèves était découpée en cinq activités dont nous donnons l'énoncé en annexe. Les deux premières visaient la construction géométrique du produit de deux nombres donnés par leur longueur sur deux axes. Cette construction est basée sur le théorème de Thalès et est décrite par Descartes dans sa *Géométrie* (1637), c'est pour cela que nous la repérons comme multiplication de Descartes (MD). L'activité 3 permet de poser la question de la multiplication de nombres négatifs, elle s'appuie sur la configuration de Thalès dite du papillon où le point d'intersection des axes est entre les droites parallèles. La quatrième activité aborde la somme et la multiplication des nombres complexes représentés dans le plan arguésien. L'ensemble de ces quatre activités permet de contrôler le rôle joué par la visualisation et la déduction. La dernière question sollicite un retour réflexif des élèves sur l'ensemble de l'activité. Elle est fondamentale dans le processus de recherche et son analyse doit permettre une première description des parcours effectués par les élèves dans le travail mathématique. La question était ainsi formulée :

Dernière question *: En vous appuyant sur le travail que vous avez fait dans cette séance et sur vos connaissances antérieures, quelle signification géométrique pouvez-vous donner à la multiplication ?*

3 Analyse de la dernière question

L'activité a été présentée par Barrera dans quatre classes de Terminale S avec la collaboration des professeurs de ces classes, et 34 binômes d'élèves ont effectué le travail demandé. Pour des raisons que nous n'étudierons pas ici, seuls 24 binômes ont répondu à cette question de synthèse. Nous ne pouvons donc attendre de notre analyse que la découverte qualitative de types de stratégies et non une étude quantitative.

Les individus faisant partie de notre expérimentation ont tout d'abord été classés *à la main* en fonction de leurs réponses à la dernière question. Il en est résulté un premier classement avec trois types de réponses possibles. Puis un traitement sur quinze variables binaires a été effectué avec le logiciel C.H.I.C dont l'arbre de similarité associé à l'analyse nous a permis d'identifier, avec quelques variations bien sûr, les trois groupes déjà trouvés *à la main* : Transformation (T), Proportionnalité et théorème de Thalès (PTTh), Complexe (C). Le traitement statistique fondé sur l'arbre de similarité permet de regrouper un certain nombre de variables autour de ces groupes initiaux :

- Transformation (T) avec réduction-grandissement (R-A) et déplacement (D). Ce premier groupe renvoie à un traitement figural du problème.
- Théorème de Thalès (TTh) avec la règle des signes (RS), la multiplication de Descartes (MD) et la multiplication de nombres complexes (MC). Ce deuxième groupe s'appuie davantage sur une genèse discursive (propriété de Thalès).
- Les nombres complexes avec les propriétés de la multiplication exprimées en langage naturel ou algébrique (PMC-LN ou PMC-LA) sans aucune référence explicite aux transformations géométriques.

Les dernières variables utilisées signalent l'usage de la multiplication de « vecteurs », [M« V »], l'usage de la rotation ou de l'homothétie, [RH], l'agrandissement d'une surface, [AS]

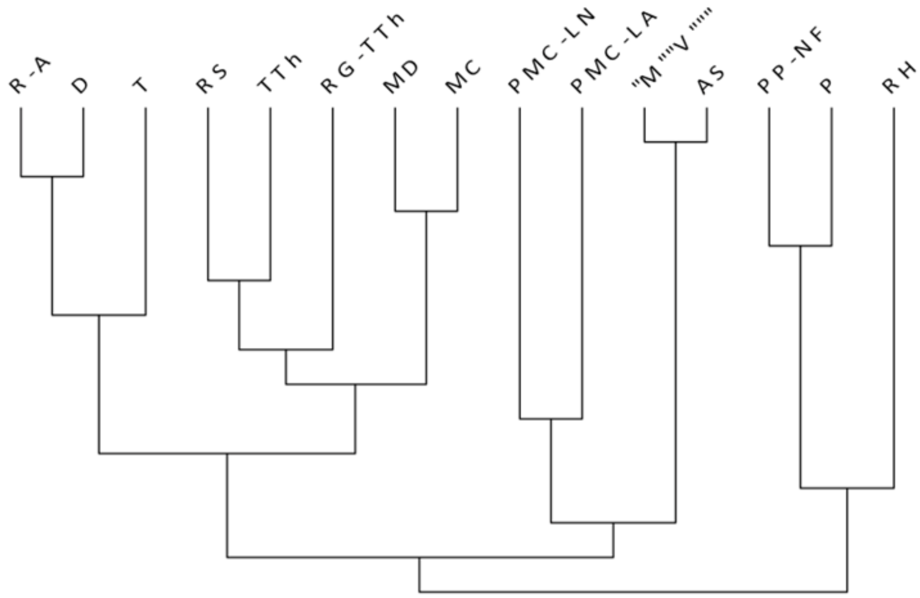


FIGURE 2 – *Arbre de similarité en fonction des éléments de réponses à la dernière question de la séquence*

Un aspect très intéressant qui résulte de cette première classification est l'isolement du groupe associé aux « propriétés de la multiplication de nombres complexes » (PMC-LN ou PMC-LA) par rapport aux deux autres groupes (Transformations et Théorème de Thalès). Ce point est important dans notre étude didactique, car il nous est nécessaire de connaître le type de travail géométrique accompli par les élèves qui ont repéré les propriétés géométriques de la multiplication des nombres complexes. Cette première analyse ne montre pas que l'énonciation des propriétés de la multiplication de nombres complexes est plus directement liée à un travail de type figural qu'à un travail de type discursif. Nous ne connaissons pas vraiment les raisons pour lesquelles certains élèves ont juste répondu à notre dernière question en faisant seulement une référence aux propriétés de la multiplication de nombres complexes. La possibilité d'une mauvaise compréhension de l'énoncé est toujours présente, mais nous trouvons intéressant de faire l'hypothèse que ce choix aurait pu, éventuellement, correspondre à une synthèse en soi-même, c'est-à-dire à une prise de conscience du fait que la multiplication de nombres complexes serait une généralisation de toutes les autres représentations géométriques de la multiplication travaillées pendant la séance.

L'arbre cohésitif va confirmer cette non-dépendance *a posteriori* mais aussi confirmer l'organisation du pôle discursif autour de la règle des signes et de la multiplication de Descartes. Ce point montre que l'argumentation privilégiée ici s'appuie bien sur un passage au numérique initié par le Théorème de Thalès. La complexité des parcours des élèves résulte de la situation même qui, pour établir un lien entre multiplication et géométrie, joue sur les changements de cadres (Douady, 1986) avec des mises en relation entre le cadre géométrique et les cadres numérique et algébrique. Un regard approfondi sur chacune des réponses a permis d'identifier un autre facteur à prendre en compte et qui pourrait intervenir d'une façon très intéressante dans l'étude des interactions entre différents cadres mathématiques : il s'agit de l'existence ou non, d'une référence explicite ou implicite à la règle de signes (RS) dans les réponses à la dernière question.

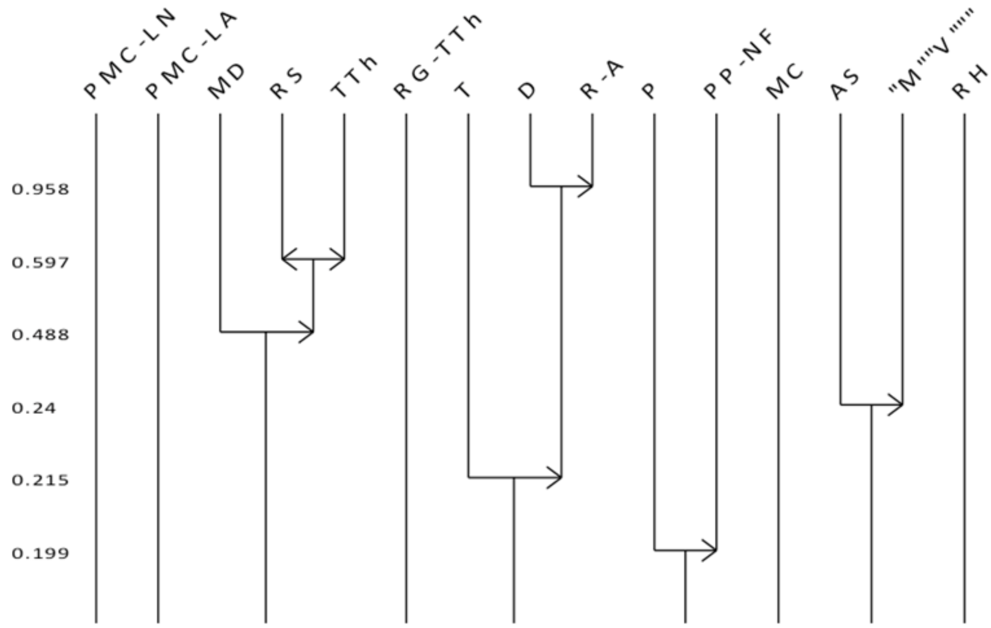


FIGURE 3 – *Arbre de la classification hiérarchique orientée des éléments de réponses à la dernière question de la séquence*

4 Description de parcours individuels

Pour avancer dans l'identification de parcours individuels caractéristiques, nous avons fait une analyse complète de toutes les questions en effectuant le même type de codage que précédemment mais seulement sur les quatre premières questions. Notre objectif précis était d'apporter une réponse aux deux interrogations suivantes apparues à l'issue de l'analyse de la question de synthèse :

- Comment s'explique l'existence d'un groupe d'élèves qui ne concluent que sur les propriétés algébriques des complexes sans mettre en relation ce résultat avec le travail géométrique effectué pendant la séance ?
- Quelle influence a pu exercer le signe iconique (théorème de Thalès) sur la suite du processus d'élaboration de la multiplication ?

La première question permet de traiter la manière dont s'organise chez les élèves l'articulation entre les deux plans épistémologique et cognitif. Quant à la seconde, elle se préoccupe davantage du type de genèse sémiotique à l'œuvre dans le travail mathématique.

Les traitements réalisés avec le logiciel C.H.I.C nous ont permis de regrouper de manière plus fine les individus en tenant compte de toutes les questions et pas seulement de la dernière. Nous ne donnerons ici que quatre exemples de parcours rencontrés de manière à illustrer notre méthode de recherche et quelques uns des résultats obtenus.

4.1 Comparaison de deux binômes de la classe « C » avec une synthèse portant uniquement sur les propriétés des nombres complexes.

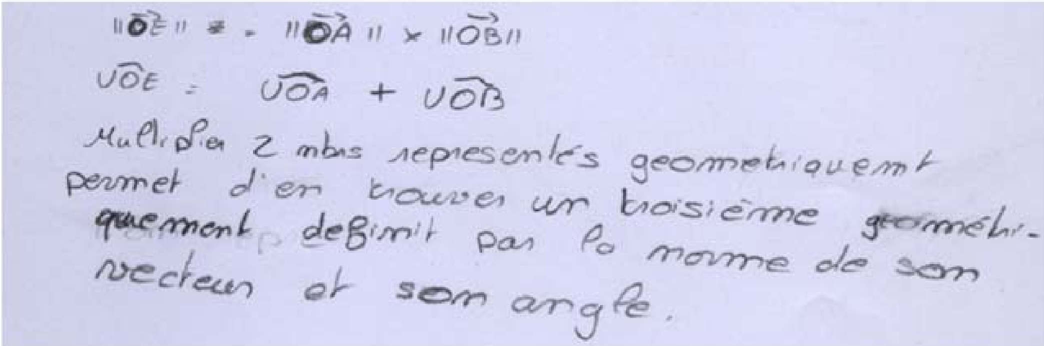


FIGURE 4 – *Synthèse du binôme C2-I7*

Il utilise le formalisme des vecteurs.

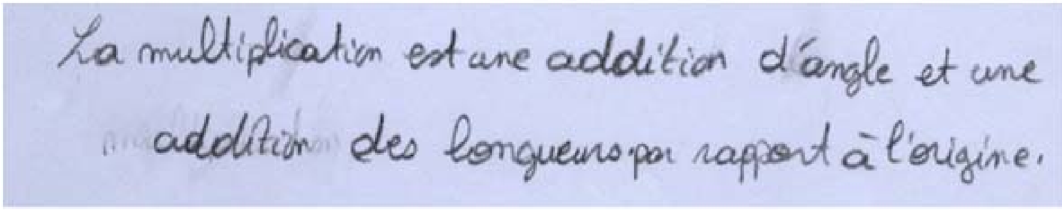


FIGURE 5 – *Synthèse du binôme C1-I4*

Ces deux binômes ne font aucune allusion au reste de la séance, et leur réponse ne fait apparaître aucune mise en relation avec les aspects figuraux de l'activité. Lorsqu'on examine leurs productions sur les questions antérieures, on constate un travail de construction très précis avec les mesures effectuées sur les figures. Le binôme C2-I7 s'appuie sur sa construction et sur l'usage des normes comme des longueurs. Il reste attaché à ses connaissances théoriques antérieures à la séance et ne s'appuie que de manière superficielle sur la situation donnée en classe et se contente d'effectuer la tâche sans mettre en relation avec le but recherché. Quant au second binôme, il ne parvient pas à faire la construction du produit des mesures pour le produit des affixes et effectue une addition. On peut observer qu'il utilise deux triangles et deux droites qui semblent être des droites parallèles dans la construction de ce produit. Ces éléments, seraient-ils un indice d'une influence du signe iconique (théorème de Thalès) qui commence à devenir un représentant de la multiplication en géométrie ? Les réponses à la dernière question donnée par les deux binômes ne permettent pas de répondre positivement à cette question.

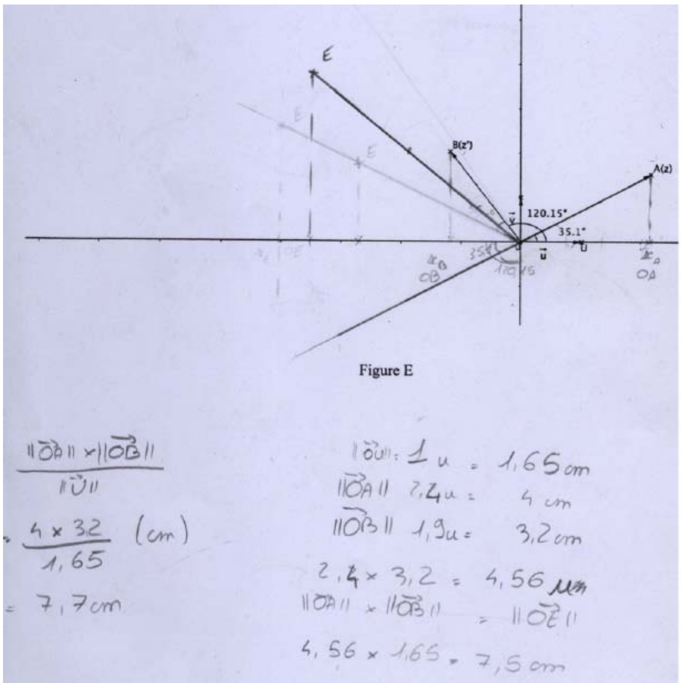


FIGURE 6 – *Réponse 4.b pour C2-I7 (C)*

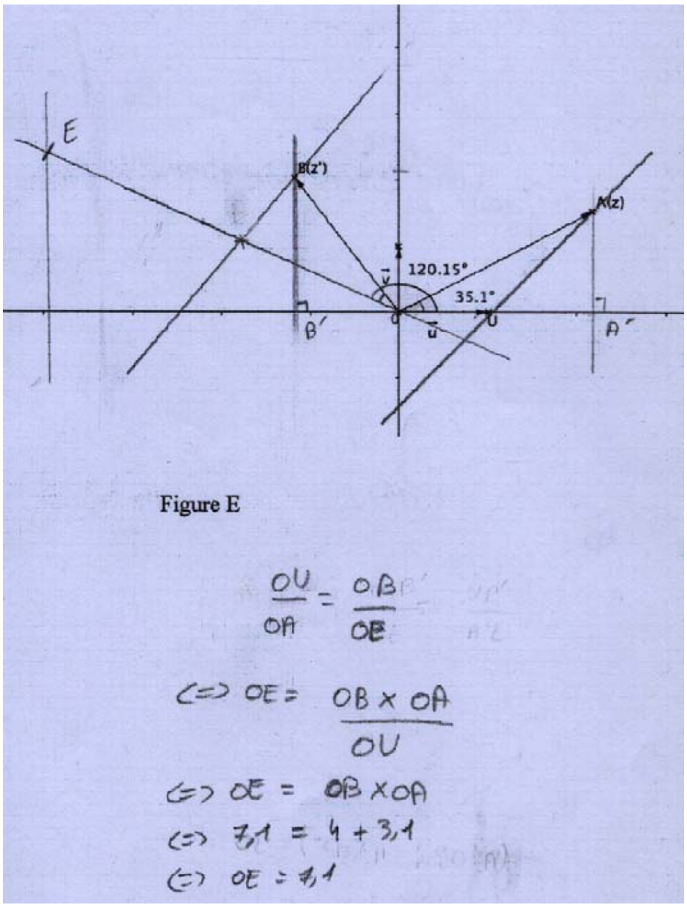
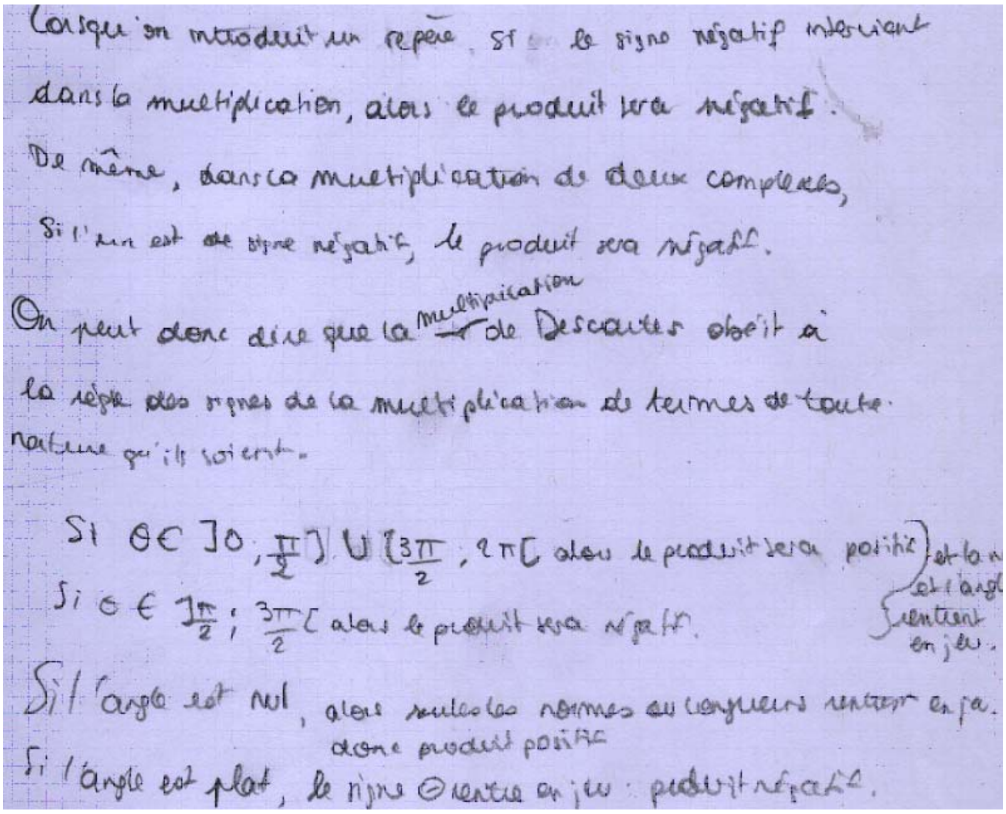


Figure 7 – *Réponse 4.b pour C1-I4 (C)*

De fait les conclusions élaborées dans la synthèse semblent s'appuyer sur une genèse instrumentale privilégiant la construction qui vient même faire obstacle à la genèse discursive articulée avec la visualisation. De ce fait, il n'y a pas enrichissement des propriétés et du raisonnement argumentatif purement déductif. Les élèves ont donné une solution qui est bien de type constructif et permet de réaliser le produit de deux nombres complexes dans le plan.

4.2 Comparaison entre deux binômes se rattachant à deux synthèses différentes, Thalès (PTTh) et Transformation (T).


Lorsqu'on introduit un repère, si le signe négatif intervient dans la multiplication, alors le produit sera négatif.
De même, dans la multiplication de deux complexes, si l'un est de signe négatif, le produit sera négatif.
On peut donc dire que la ~~+~~ multiplication de Descartes obéit à la règle des signes de la multiplication de termes de toute nature qu'ils soient.

Si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2} ; 2\pi[$ alors le produit sera positif
Si $\theta \in]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}[$ alors le produit sera négatif.
et la n... et l'angle rentrent en jeu.

Si l'angle est nul, alors seules les normes ou longueurs rentrent en jeu. donc produit positif
Si l'angle est plat, le signe ⊖ rentre en jeu : produit négatif.

Figure 8 – *Synthèse du binôme C1-I9 (T)*

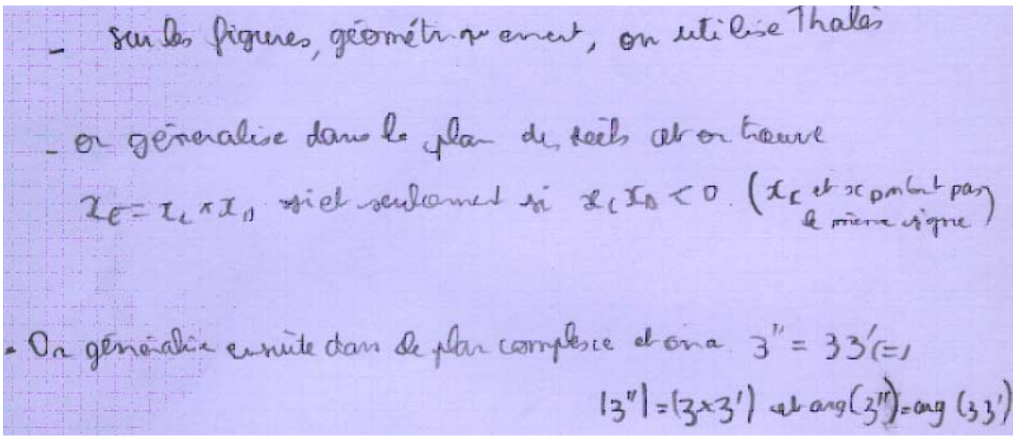

- sur les figures, géométriquement, on utilise Thalès
- on généralise dans le plan des réels et on trouve
$x_C = x_{C'} \times x_D$ si et seulement si $x_C x_D < 0$ (x_C et x_D ont pas le même signe)
- On généralise ensuite dans le plan complexe et on a $z'' = zz'$ (=) $|z''| = (z \times z')$ et $\arg(z'') = \arg(zz')$

Figure 9 – *Synthèse du binôme C3-I1(PTTh)*

Les deux binômes ont été classés par le logiciel dans deux classes différentes et nous allons comprendre leur différence au-delà de certaines similitudes sur la dernière question. Le binôme C1-I9 (T) base sa synthèse sur un lien immédiat entre la multiplication et la règle de signes obtenu dans un repère. Puis, il élargit cette relation à la multiplication de Descartes ainsi qu'à toute multiplication où interviennent des facteurs de *toute nature*. L'observation la plus frappante que nous pouvons faire par rapport à sa réponse et qui montre des relations étroites entre les genèses figurale et discursive, est la mise en relation de la règle de signes avec les angles des affixes. Le jeu de cadres qui apparaît autour de la règle des signes est vraiment la conséquence de notre activité car cette règle des signes n'est pas traitée géométriquement dans l'enseignement obligatoire. Pour renforcer cette idée, il faut noter la précision de son étude en fonction de la nature des angles et notamment l'étude de l'angle nul et de l'angle plat qui permet d'articuler nombre réels et nombre complexe dans le cadre de la configuration géométrique étudiée.

Le binôme C3-I1 (PTTh) donne une synthèse qui suit les différents moments de la séance. Il donne les propriétés de la multiplication des nombres réels et des nombres complexes en les justifiant par le Théorème de Thalès. Il présente son interprétation géométrique de la multiplication sur les nombres réels et les nombres complexes comme une *généralisation* de Thalès dans le plan usuel puis dans le plan complexe. Peut-on dire que le mot *généralisation* rend clairement compte d'une mise en relation entre les différents moments de la séance ? D'une certaine manière, oui puisqu'il s'agissait d'étendre les ensembles de nombres, mais pas réellement d'un point de vue géométrique puisque les règles en jeu sont différentes. Pour compléter notre interprétation par rapport à cette dernière question, voici les réponses apportées par ces binômes à la question 4b.

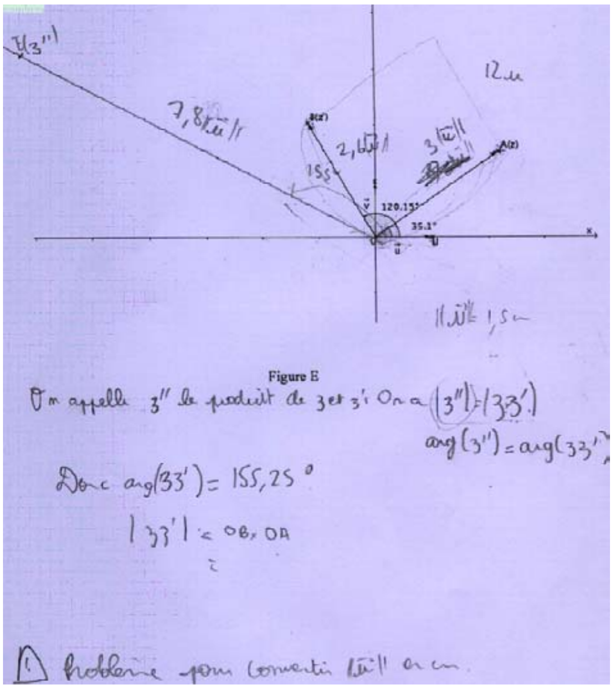


Figure 10 – *Réponse 4.b pour C3-I1(PTTh)*

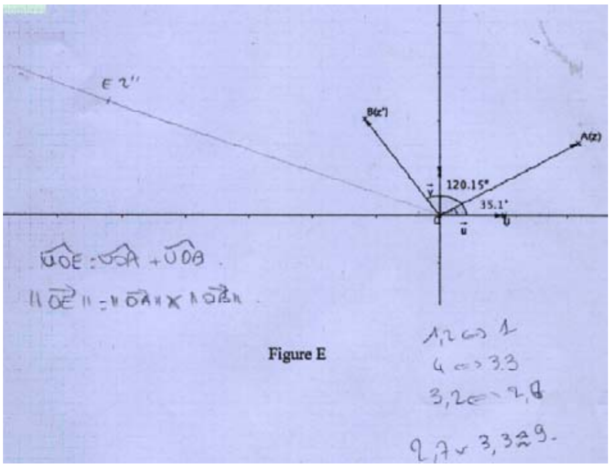


Figure 11 – *Réponse 4.b pour C1-I9 (T)*

Il apparaît clairement que les connaissances algébriques sur les nombres complexes ont guidé la construction géométrique qui ne s'appuie par sur les autres constructions de la séance. Les propriétés algébriques de la multiplication des nombres complexes font déjà partie du référentiel théorique et elles ont orienté la prise en main des instruments pour les conduire à une construction correcte mais presque isolée du travail de la séance. Dans leurs réponses, nous n'avons aucun élément qui permette de rendre compte d'une façon explicite, de la visualisation et de la compréhension géométrique de la multiplication de nombres complexes comme une transformation dans le plan. L'entrée dans l'ETM pour cette question est donc épistémologique avec pour résultat une *construction* à la règle graduée permettant de visualiser dans le plan, le placement du produit de la multiplication de deux nombres complexes. Dans cette séance, les deux binômes ont eu une approche différente de la question 2b

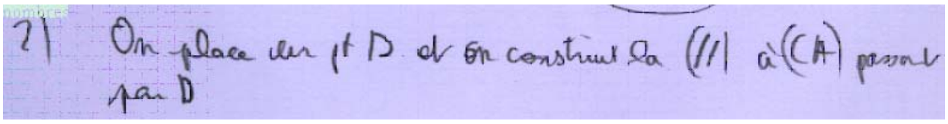

2) On place un pt D et on construit la (//) à (CA) passant par D

Figure 12 – *Réponse 2.b pour C3-I1*

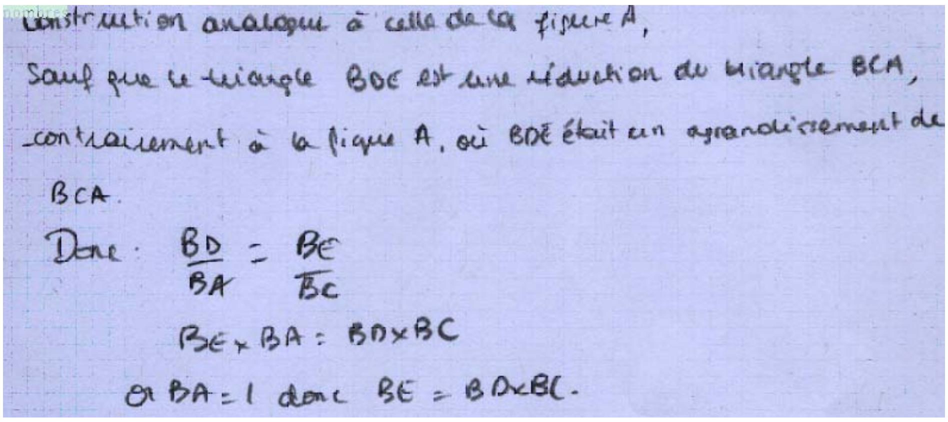

construction analogue à celle de la figure A,
Sauf que le triangle BDE est une réduction du triangle BCA,
contrairement à la figure A, où BDE était un agrandissement de
BCA.
Donc : $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$
$BE \times BA = BD \times BC$
or $BA = 1$ donc $BE = BD \times BC$.

Figure 13 – *Réponse 2.b pour C1-I9*

Cette fois, seul le binôme C1-I9 (T) a utilisé les transformations dans sa réponse à une des premières questions de la séquence. Ce qui est très intéressant dans l'analyse de cette réponse est le fait de parler d'une réduction et d'un agrandissement du triangle BCA. La relation de proportionnalité sous-jacente au théorème de Thalès ainsi qu'à la représentation géométrique de la multiplication de Descartes n'a pas été traitée en fonction des segments-facteurs et segment-produit représentant la proportionnalité. La visualisation de triangles semblables favorise l'usage immédiat du théorème de Thalès car les élèves interprètent cette réduction-grandissement grâce à leur référentiel disponible.

Ces parcours présentent des caractéristiques propres. Le binôme rattaché à « T » parle de transformations dès la deuxième question et sa synthèse (dernière réponse) est très riche mettant en relation règle de signes et géométrie. Le binôme rattaché à Thalès produit un discours qui décrit la multiplication pour différents ensembles de nombres mais il n'arrive pas à mettre « explicitement » en relation l'icône de Thalès avec une représentation géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres.

5 Conclusion

Les résultats partiels dont nous rendons compte dans cet article permettent de montrer la pertinence de notre méthodologie exploratoire d'analyse mixte. Nous avons pu valider les classements faits à la main en différenciant des parcours des élèves en fonction de leur réponse à la dernière question de la séquence. L'analyse didactique initiale puis complémentaire de notre analyse quantitative, nous permet de constater un point en commun entre les différentes trajectoires : la puissance du discours (propriétés de la multiplication de nombres complexes) qui a conduit la plupart des binômes à favoriser une genèse instrumentale dans la question 4.b sans prendre en compte le travail développé pendant la séance.

Nous avons aussi essayé de comprendre les binômes qui ne concluent que sur les propriétés algébriques des complexes sans mettre en relation ce résultat avec le travail géométrique effectué pendant la séance. Leurs motivations restent inconnues, par contre, l'analyse didactique du reste de leur parcours donne déjà quelques éléments de réponse. Une explication possible pourrait venir d'un blocage lié au passage à l'interaction entre l'instrumental et le discursif lorsque les éléments de preuves ne sont pas congrus aux instruments utilisés, ici par exemple l'homothétie. Ce point ne doit pas occulter le fait qu'auparavant une compréhension de la dynamique entre Thalès, multiplication, facteurs, opérateurs et transformations.

Compte tenu de ce qui précède des nouveaux questionnements émergent grâce à la diversité de synthèses ainsi qu'aux ressemblances et différences entre les parcours étudiés. Les réponses obtenues rendent compte de leur engagement au travail tout au long de la séance. Elles montrent aussi la difficulté à gérer les différentes genèses propres aux ETG et ETM. Nous sommes conscients de la complexité cognitive de cette activité puisqu'il n'y a pas de conversion directe entre un registre de représentation et un autre. Ceci nous amène à situer l'activité des élèves à l'intérieur d'un espace de travail mathématique où la signification des objets mathématiques doit émerger grâce à l'action d'une genèse cognitive. Cette genèse suppose des enjeux sémiotiques complexes tels que ceux qui ont été décrits par D'Amore et Fandino (2007) pour rendre compte des difficultés de passage entre différentes représentations :

> The process of meanings endowment moves at the same time within various semiotic systems activated; we are not dealing with a pure classical dichotomy: treatment/conversion, that leaves the meaning prisoner of the internal semiotic structure, but with something much more complex.

> Ideally, from a structural point of view the meaning should come from within the semiotic system we are immersed in. (D'Amore et Fandino, 2007, p. 2).

De ce fait, la richesse de l'ETM proposé ainsi que la diversité d'ETM personnels, nous conduisent à souligner l'importance de la médiation introduite par l'enseignant et nécessaire pour progresser vers une institutionnalisation intégrant toute la richesse de l'activité proposée. En plus de la médiation liée au signe mathématique (ici le signe Théorème de Thalès), il reste une deuxième médiation culturelle (Radford 2004) portée dans notre cas par l'enseignant dans la classe. Dans cette médiation culturelle, l'enseignant acquiert un rôle fondamental de guide à l'intérieur de la diversité des Espaces de Travail Mathématiques résultant d'une seule proposition didactique.

Références

[1] D'Amore, B., et Fandiño Pinilla, M.I. (2007). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. *Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI.* Springer.

[2] Descartes, R. (1637). *La géométrie*. Oeuvres complètes tome 3/ Gallimard (2009).

[3] Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 35-65.

[4] Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7.2. 5-31.

[5] Kuzniak, A. (2008). Personal Geometrical Working Space: a Didactic and Statistical Approach in GRAS, R. SUZUKI E., (*EDS.) Statistical Implicative Analysis: Theory and Applications - Studies in Computational Intelligence, Vol. 127., Springer 185-204.*

[6] Kuzniak, A., and J.C. Rauscher. (2011). How do teachers' aproaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties? *Educational Studies in Mathematics* 77, n°1: *129-147*

[7] Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses, *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24.

[8] Rabardel, (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

[9] Radford L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In: Arrigo G. (ed.) (2004). Proceedings of the Ticino Mathematics Education Conference. *Quaderni Alta Scuola Pedagogica*. Bellinzona (Switzerland): Centro didattico cantonale. 11-27.

Annexes

Travail avec annexe 1

La configuration « Figure A » correspond à ce que Descartes (mathématicien et philosophe, 1596-1650) a considéré comme une représentation géométrique de la multiplication. Nous vous présentons aussi son texte historique la décrivant.

I. Lire le texte de Descartes (annexe 1), puis observer la configuration « Figure A » pour répondre à la question suivante :

a. Nous proposons *AB = 1 cm. BE,* est-il bien le produit annoncé par Descartes ? Qu'en pensez-vous ?

Soit par exemple AB l'unité et qu'il faille multiplier BD par BC ; je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer la parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication (Descartes, 1637).

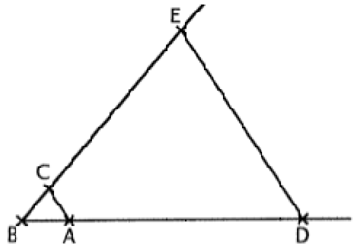


Figure A

Travail avec annexe 2

II. Observer la configuration « Figure B » pour répondre aux questions suivantes :

a. Nous voudrions construire la représentation géométrique d'un produit ayant les caractéristiques de la multiplication de Descartes :

- Sachant que $BA = 1cm$ placer D entre B et A.
- Construire E pour que BE donne le produit de la multiplication de BD par BC.

b. Décrire votre construction et expliquer pour quoi elle peut être considérée comme analogue à la multiplication de Descartes.

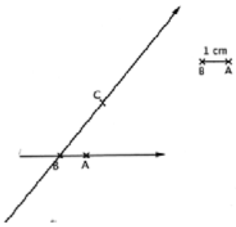


Figure B

Travail avec annexe 3

III. Observer la configuration « Figure C » où nous avons repéré sur la droite numérique certains nombres. Du côté positif nous avons placé le point *A* d'abscisse +1 et du côté négatif le point *D* d'abscisse -2. *(AC)* et *(DE)* sont parallèles.

a. Projeter orthogonalement les points *C* et *E* sur l'axe des abscisses. Pouvez-vous justifier que l'abscisse du point E est le produit des abscisses des points *D* et *C* ? Comment ?

b. Si de manière plus générale, l'abscisse du point *C* est $x_C > 0$ et l'abscisse du point *D* est $x_D < 0$, décrire la représentation géométrique du point *E* sur *(BC)* d'abscisse $x_C x_D$.

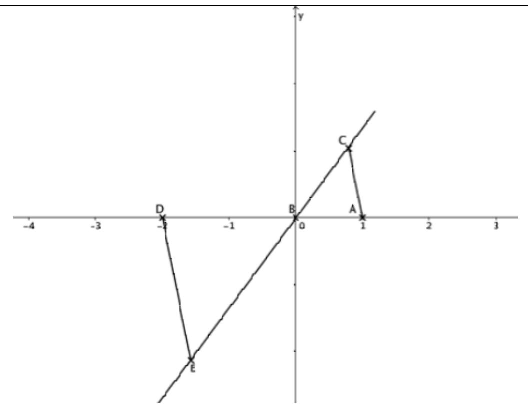


Figure C

Travail avec annexe 4

IV. Nous allons étudier une nouvelle configuration, similaire à la configuration précédente, mais celle-ci est située dans le plan complexe avec certains éléments complémentaires.

a. Soit $(O,\vec{u},\vec{v})$, un repère orthonormal direct du plan appelé plan complexe. Nous vous rappelons qu'un nombre complexe est appelé affixe d'un point *M* et d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$. Utiliser les informations données sur la configuration « Figure D » pour répondre aux questions suivantes :

- Pouvez-vous affirmer que dans cette représentation géométrique, la multiplication de *z* et *z'* donne toujours le produit z'' (affixe du point *E* et du vecteur $\overrightarrow{BE}$) ? Expliquez votre réponse.

- Dans votre réponse à la question précédente, avez-vous établi des liens entre $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{BD}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{BE}\right\|$? Lesquels ? Et entre AOC, AOD (les angles associés aux facteurs) et

AOE (l'angle associé au produit) ? Si vous ne les avez pas encore considérés, quels liens établiriez-vous entre ces éléments pour expliquer la représentation géométrique du produit de deux nombres complexes ?

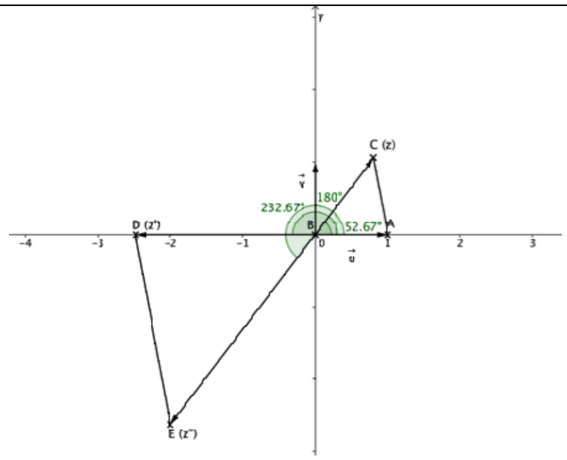


Figure D

Travail avec annexe 5

b. Observez les représentations géométriques de deux nombres complexes dans la configuration « Figure E ».

- En prenant en compte tes réponses dans les questions précédentes construire la représentation géométrique du produit de z et z'.
- Décrire votre construction.
- Quel lien pouvez-vous établir entre le produit de Descartes et le produit que vous venez de construire ?

V. En vous appuyant sur le travail que vous avez fait dans cette séance et sur vos connaissances antérieures, quelle **signification géométrique** pouvez-vous donner à la multiplication ?

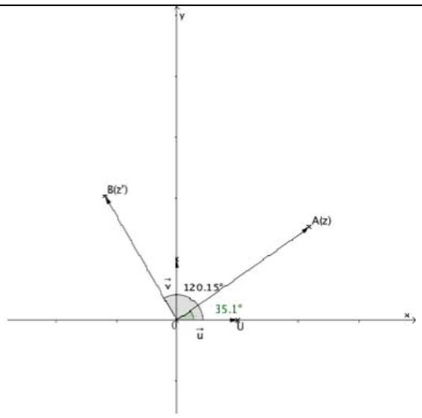


Figure E