“Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)”, n. 20, 2010.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

PROBLEMES DE DIDACTIQUE DES QUATERNIONS, DU SAVOIR DE L’OBSERVATEUR.

Par Mohamed BAHRA[1]

En hommage à Guy BROUSSEAU.

Summary

Subject matter

In this article, the "Knowledge of the Observer") (*Savoir de l’Observateur*), one of the key concepts of the theory of didactic situations in mathematics (TSDM) which is used as an analysis tool priori of the relationship of the didactic systems in a specified knowledge, averages, arithmetic and geometrics of two points*, in their report within the construction of corps C and H, of complexes and quaternions. We show that this concept allows to stenography the questioning about the relation of these systems to two averages in terms of the following question: such a didactic system, does it make it or not at the monitor of the Observer about this knowledge in particular?

Framework

We give the concept of "Knowledge of the Observer" an interpretation which makes an epistemic to which a teaching system complies or failing to comply with standard. When this knowledge is specified, this standard takes the form of a performance scale and level of performance, less than or equal to the Observer, assignable is in this scale to the examined system. This latter is presented in the form of a hierarchy of epistemic postures, relating to the knowledge in question. These postures are coupled and produce bold statistical implication test procedures. The hierarchy derives from the examination of the contingency table related to the test and be conditional on the intensity of involvement and its calculation from such a table.

Thus, in terms of the assertion stating that "**C** and **H** corps construction is immanent within the confirmation the extensions to **IR²x IR²,** then **IR³ x IR³**, via **IR⁴ x IR⁴,** of averages, arithmetic and geometry, in their status of mathematics subject " considering validations, formal, semantic and pragmatic of this assertion.

These validations consist respectively:

- to exhibit the extensions in question on the basis of the consideration, formal properties a priori, its existence to then justify these same properties on this same basis;
- to exhibit a supposed model to refresh these properties to then demonstrate effective these properties by this model;
- and specify the possibility of a metamorphosis of this model into a mathematical model spent by common usage.

Bold involvement (p) ⇒ (q) focuses on the following postures: (p) (resp. ($\bar{p}$)) posture by

which arises in a subject qualifications (Coll. the inability) to be running formal and semantic,

[1] ENS et CPR de Casablanca (Maroc)

postings of the assertion, without being their schemas execution; (q) (rep. ($\bar{q}$)), posture in which declares the ability (Coll. the inability) to be designer and running the execution of its pragmatic validation schema.

Restricted to IR² x IR² and accompanied by its formal and semantic, postings run schemas, we were able to organize the confrontation of 100 student-teachers BA holders in es mathematical, and called on to perform in the Moroccan high schools with the assertion above. Obtained,

relating to the involvement (p) ⇒ (q) contingency tables have saved unfit results to assign a

level of confidence, even very small to the admissibility of this involvement. Of what, were we based take for almost certain the fact that the Moroccan mathematics education system does not yet make at the Observer of arithmetic and geometric averages. It is even very short of this level.

Scope of work

We have observed that a posteriori, that this positioning of the Moroccan system, as for the report to two averages, could not be specific to this system: Since HAMILTON, it is known as the number has a scalar component and a vector component. The latter is zero for the case of the real, but this does not mean that the actual the lack, that it does not exist for these numbers. This existence is a blind point of successive didactic contracts that educational systems build around the number and its geometric representation. We show that this representation must necessarily rely on the notion of oriented circle in IR^3, space and which, in these contracts, continues to be labeled 'imaginary part' of a complex, is in reality a vector component 'Argand-Cauchy plan point'. Everything happens as if these contracts build, exclusive way around of Chuquet-Cardan's numbers $a + b\sqrt{-1}$ and that they mobilize to do this, as implicit model of the construction proposed by Cauchy for these numbers in 1847. In this model, $\sqrt{-1}$, or i, returns a 'sort of scalar' rather than the $\vec{i}$ vector to which it should normally return.

To no longer confuse nullity and non-existence of the vector of the number component, do we have to then reconsider, once again, the design commonly admitted zero and with it, the name "imaginary part" of a complex? Should show the institutionalization in school, the set of all numbers Chuquet-Cardan was it built around this model by Cauchy, constitute barriers to the emergence of a unique geometric representation of the number it to place in a continuum backward construction number, ranging from the real to the quaternion passing through the complex?

This project is an attempt to provide answers to these questions.

*: here, the label 'arithmetic average 'denotes the application to two points that match their arithmetic average (respectively, "the whole of their geometric averages" where they exist...).

RESUME

Objet du travail

Dans cet article, le *'Savoir de l'Observateur'*, un des concepts clés de la Théorie des Situations Didactiques en Mathématiques (TSDM), est utilisé comme outil d'analyse a priori du rapport des systèmes didactiques à un savoir spécifié, les moyennes, arithmétique et géométrique, de deux points[2], dans leur rapport avec la construction des corps ***C*** et ***H***, des complexes et des quaternions. Nous montrons que ce concept permet de sténographier le faire question du rapport de ces systèmes aux deux moyennes, dans l'interrogation suivante : tel système didactique, s'érige-t-il ou non au niveau de l'Observateur, à propos de ce savoir en particulier ?

Canevas du travail

Nous donnons du concept de '*Savoir de l'Observateur'* une interprétation qui en fait une norme épistémique à laquelle un système didactique se conforme ou ne se conforme pas. Lorsque ce savoir est spécifié, cette norme prend la forme d'une échelle de performances et un niveau de performance, au plus égal à celui de l'Observateur, est affectable, dans cette échelle, au système examiné. Cette dernière se présente sous forme d'une hiérarchie de postures épistémiques, relatives au savoir en question. Ces postures sont accouplées et réalisent les modalités du test d'implication statistique de Gras. La hiérarchie dérive de l'examen du tableau de contingence relatif au test et d'une condition portant sur l'intensité d'implication et son calcul à partir d'un tel tableau.

Ainsi, à propos de l'Assertion affirmant que *« la construction des corps **C** et **H** est immanente à la confirmation des prolongements à* $\boldsymbol{IR^2 \times IR^2}$, *puis à* $\boldsymbol{IR^3 \times IR^3}$, *via* $\boldsymbol{IR^4 \times IR^4}$, *des moyennes, arithmétique et géométrique, dans leur statut d'objets mathématiques »* l'on considère les validations, formelle, sémantique et pragmatique, de cette assertion.

Ces validations consistent respectivement :

- à exhiber les propriétés formelles du prolongement en question, sur la base de la considération, a priori, de son existence, pour ensuite justifier ces mêmes propriétés sur cette même base ;
- exhiber un modèle empirique censé actualiser ces propriétés, pour ensuite démontrer l'actualisation effective de ces propriétés par ce modèle ;
- et spécifier la possibilité d'une métamorphose de ce modèle en le modèle mathématique consacré par l'usage courant.

L'implication de Gras (p) $\Rightarrow$ (q) porte alors sur les postures suivantes : (p) (resp. ($\overline{p}$)), la posture par laquelle se manifeste, chez un sujet, l'aptitude (resp. l'inaptitude) à être l'exécutant des validations, formelle et sémantique, de l'Assertion, sans être le concepteur de leurs schémas d'exécution ; (q) (rep. ($\overline{q}$), la posture par laquelle se manifeste l'aptitude (resp. l'inaptitude) à être concepteur et exécutant du schéma d'exécution de sa validation pragmatique.

Restreinte à $\boldsymbol{IR^2 \times IR^2}$ et accompagnée des schémas d'exécution de ses validations, formelle et sémantique, nous avons pu organiser la confrontation d'une centaine d'élève-professeurs, licenciés es mathématiques, et appelés à exercer dans les lycées marocains, avec l'Assertion ci-dessus. Les tableaux de contingence obtenus, relatifs à l'implication (p) $\Rightarrow$ (q), ont enregistré des résultats impropres à affecter un niveau de confiance, même très petit, à l'admissibilité de

[2] Ici, la dénomination 'moyenne arithmétique' (respectivement, 'moyenne géométrique') dénote l'application qui à deux points fait correspondre leur moyenne arithmétique (respectivement, « l'ensemble de leurs moyennes géométriques » lorsqu'elles existent…).

cette implication. En vertu de quoi, étions-nous fondés de tenir pour presque certain le fait que le système marocain d'enseignement des mathématiques ne s'érige pas encore au niveau de l'Observateur à propos des moyennes, arithmétique et géométrique. Il se situe même très en deçà de ce niveau.

Portée du travail

Nous avons constaté, a posteriori, que ce positionnement du système marocain, quant au rapport aux deux moyennes, ne saurait être spécifique à ce système : Depuis HAMILTON, on sait que le nombre possède une composante scalaire et une composante vectorielle. Cette dernière est nulle pour le cas des réels, mais cela ne veut pas dire que les réels ne la possèdent pas, qu'elle n'existe pas pour ces nombres. Cette existence est pourtant un point aveugle des contrats didactiques successifs que les systèmes didactiques nouent autour du nombre et de sa 'représentation géométrique'. Nous montrons que cette représentation doit nécessairement s'appuyer sur la notion de cercle orienté, dans l'espace IR^3, et ce qui, dans ces contrats, continue d'être étiquetée 'partie imaginaire' d'un complexe, est en réalité la composante vectorielle d'un 'point du plan d'Argand-Cauchy'. Tout se passe comme si ces contrats se nouent, de manière exclusive, autour des nombres $a + b\sqrt{-1}$ de Chuquet-Cardan et qu'ils mobilisent pour cela, comme modèle implicite, la construction qu'en donna, en 1847, CAUCHY (cette dernière se présente aujourd'hui comme étant le quotient $IR[X]/(1+X^2)$ de l'anneau des polynômes $IR[X]$ par l'idéal principal $(1+X^2)$**.** Dans ce modèle, $\sqrt{-1}$, ou i, renvoie à une 'sorte de scalaire' plutôt qu'au vecteur $\vec{i}$ auquel il doit normalement renvoyer.

Pour ne plus confondre nullité et non existence à propos de la composante vectorielle du nombre, faut-il alors reconsidérer, encore une fois, la conception communément admise du zéro et avec elle, la dénomination « partie imaginaire » d'un complexe ? Faut-il montrer que l'institutionnalisation, en milieu scolaire, de l'ensemble ***C*** des nombres de Chuquet-Cardan, fut-elle bâtie autour de ce modèle qu'en donna CAUCHY, se constitue en obstacle à l'émergence d'une représentation géométrique unique du nombre. Celle-ci placer dans un continuum la construction ascendante du nombre, allant du réel au quaternion en passant par le complexe ?

Ce travail est une tentative visant apporter des éléments de réponse à ces questions.

Position du problème et méthode d'approche

1.1. Le Savoir de l'Observateur[3] à propos des moyennes, arithmétique et géométrique, comme norme de franchissement d'obstacles épistémologiques et d'obstacles didactiques

Le contrat didactique que le système d'enseignement marocain des mathématiques noue autour des deux moyennes, arithmétique et géométrique, n'explicite pas le rapport de ces deux notions avec la construction du corps ***C*** des complexes, par clôture de ***IR,*** et encore moins avec la construction du corps ***H,*** des quaternions : la correspondance définie à partir de la conjonction des deux moyennes, qui, à deux points ***A*** et ***G*** du plan, fait correspondre les points du plan dont ***A*** est la moyenne arithmétique et ***G,*** la moyenne géométrique aurait été adopté par les pratiques didactiques comme cadre d'introduction de la construction de ***C,*** si cette correspondance avait évolué du stade de simple intuition, qu'elle semble occuper encore, au stade de concept, qu'elle occuperait dans le milieu scolaire si le rapport en question faisait l'objet d'une explicitation. Or ces constructions, procédant du prolongement des deux moyennes aux points du plan, puis au points de l'espace, met son auteur dans la position de l'Observateur relativement aux deux moyennes : une telle position étant parfaitement caractérisée par la spécification de la posture du sujet, réel ou fictif, qui l'occuperait, celle de l'Observateur peut s'énoncer en ces termes : évoquer devant celui-ci, comme virtualité mathématique, le prolongement à $IR^2 \times IR^2$ des deux moyennes suffirait pour qu'il :

1. y voie un objet consubstantiellement liée à la construction de ***C*** et clôture de ***IR ;***
2. enclenche et maintien jusqu'à son terme un processus d'authentification de ce prolongement en tant qu'objet mathématique;
3. donne de la construction de ***C*** par clôture de ***IR*** une interprétation la faisant inféodée à ce processus.
4. spécifie le métalangage et le système de réécriture, propres à engager l'élève et le professeur dans une dialectique intersubjective 'ancien/nouveau', à propos des deux moyennes et de leurs prolongements respectifs, laquelle dialectique doit avoir pour point d'achèvement le partage et la fixation symbolique du processus et de l'interprétation en question.

La démonstration qu'une telle posture est parfaitement concevable exige une double analyse : une analyse mathématique, voire épistémologique, et une analyse didactique du problème mathématique qui fonde la construction, en question, de ***C***. La première déroule la spécification formelle d'une construction de ***C*** déduite exclusivement des stipulations syntaxiques, sémantiques et pragmatiques du prolongement des deux moyennes aux points du plan. La seconde déroule, à partir de cette spécification formelle, la spécification rationnelle des modalités de dévolution à l'élève de cette construction. Ces modalités concernent surtout le métalangage et le système de réécriture idoines quant aux énoncés à même de favoriser, à la façon de *l'intrigue du sens* comme la conçoit J.-M. SALANSKIS (SALANSKIS J.-M . 2001) , *la réception, la com-*

---

[3] Selon Guy BROUSSEAU (BROUSSEAU G. 2005, p 65), en didactique, dans les situations, les connaissances apparaissent au moins avec deux fonctions et donc sous deux formes :

- Un moyen d'établir la décision, en particulier dans les situations d'action, mais aussi dans les autres : nous parlons alors de *connaissances*;
- Comme moyen de reconnaître et d'organiser des connaissances, nous parlons alors plutôt de *savoirs.*

A ce propos BROUSSEAU G. (BROUSSEAU G. 2002) : Pour l'observateur un savoir est un moyen de *reconnaître* et de *traiter* des connaissances et des rapports entre connaissances (lesquelles étaient des idées d'une réalité dans d'autres situations), ce qui se manifeste par des réécritures, du métalangage, etc.

préhension, l’atteinte - dont l’adresse serait l’élève*, par rapport à l’émission, la création, l’œuvre* - dont l’auteur serait le professeur.

Pour expliciter le problème de didactique sous-jacent à ces deux volets de cette démonstration, considérons la question suivante: « Le système didactique saura-t-il occuper la position de l’Observateur à propos des deux moyennes ? ». Cette question ne saurait être ni sensée ni légitime ni pertinente sans que le système admette un représentant et un produit spécifiques désignés de droit comme adresse de cette question. C’est bien le cas avec les futurs professeurs de mathématiques des lycées, ex-étudiants licenciés es mathématiques : ceux-ci sont à la fois le représentant et le produit du système didactique et ce dernier se définit par eux en tant qu’ils sont les destinataires attitrés de ce type de question.

C’est que le prolongement aux points du plan des deux moyennes, arithmétique et géométrique, offre l’opportunité de convenir avec l’élève d’essayer de passer outre les limites imposées au domaine de validité de ces notions par la conception qu’il en a et, pour ce faire, opérer la restructuration du plan le rendant système numérique. La manière avec laquelle le système didactique organise la rencontre des élèves des branches à grande teneur mathématique avec les deux moyennes, peut leur permettre, à la fin de leurs études, de reconnaître cette opportunité et de l’exploiter de manière optimale. Elle peut aussi s’y constituer en un obstacle. On peut donc observer la capacité à reconnaître cette opportunité et à proposer une stratégie optimale de son exploitation, chez une assez grande proportion des élèves-professeurs, et ce sous certaines conditions que nous spécifierons dans la suite. Il est possible que ce soit l’incapacité à reconnaître cette opportunité qui sera observée chez une grande proportion de ces mêmes élèves-professeurs. Dans ce dernier cas cette proportion d’étudiants ne saurait être désignée apte à épouser la posture propre à celui occupant la position de l’Observateur relativement aux moyennes arithmétiques et géométriques ; et quand c’est le cas, c’est le système didactique qui n’occupe pas cette position. Par contre, dans le premier cas on ne saurait dire du système ni qu’il occupe cette position, ni qu’il ne l’occupe pas. Quoi qu’il en soit, l’apparition ou non de la posture en question chez ces élèves-professeurs est la conséquence immédiate du type de contrat didactique que le système didactique noue autour de ces notions. Ce contrat dépend, entre autres choses, des stratégies que développent les pratiques scolaires face à des obstacles d’origine épistémologique spécifiques à l’algèbre. Ces stratégies peuvent elles-mêmes engendrer des obstacles didactiques.

Parmi ces obstacles épistémologiques, il en est un qui concerne directement notre sujet, et nous pensons convenable en donner cette description, voir à ce propos (ITARD J., 1997) : *Longtemps défini comme la science des quantités, les mathématiques s’en trouvent subdivisées en plusieurs branches, suivant la nature des grandeurs soumises au calcul. Ces branches se nommaient arithmétique, géométrie, mécanique, physique mathématique, calcul des probabilités*. Pour que l’algèbre prenne place parmi ces diverses branches il faut pouvoir spécifier la nature de la grandeur soumise au calcul algébrique. Or toutes les grandeurs associées à ces diverses branches sont soumises au calcul algébrique, puisque elles avaient l’algèbre comme lien commun. Ainsi, l’impossibilité d’associer à l’algèbre une grandeur spécifique, jointe à son caractère de lien commun aux diverses branches classiques des mathématiques, va se constituer en un obstacle à une conception de l’algèbre qui abandonnerait son inféodation tantôt à l’une tantôt à l’autre de ces branches. Cet obstacle épistémologique est constitutif de la nature même de l’algèbre et historiquement, c’est par HAMILTON [4] et sa théorie des quaternions que son franchissement a enfin pu être réalisé. Mais, la réédition en milieu scolaire de ce franchissement né-

[4] Voir à ce propos (Ruffieux C.2005).

cessite concevoir des situations adidactiques (BROUSSEAU, 1990a) faisant apparaître l’algèbre comme la branche des mathématiques qu’on définirait comme étant *le calcul des opérations.*

Or s’agissant des opérations, le choix du système didactique à leur sujet est un *choix malencontreux, donc un obstacle didactique* (BROUSSEAU, 1983a) : ce choix apparaît clairement dans la tendance manifeste des pratiques scolaires à présenter les opérations et opérateurs de tout genre comme données préalables à toute activité mathématique de l’élève, données que le professeur se doit de présenter *ostensiblement* (RATSIMPBA RAJHON, 1977) à son adresse. C’est notamment le cas quand le système présente directement à l’adresse de l’élève, comme à celle de l’étudiant, la structuration algébrique des nombres via le passage au quotient : les différentes structures algébriques des différents ensembles numériques s’y présentant sous la forme de systèmes d’ostensifs (BOSCH, CHEVALLARD, 1999) dotés d’une sorte de *clôture opérationnelle et d’une sorte d’autospécification* (STICHWEH, 1991) des éléments de chaque système grâce au système lui-même. En effet, par analogie à la description donnée du concept d’autonomie systémique par R. STICHWEH, nous pouvons donner de ces systèmes d’ostensifs, quant à leur formation et leurs structures, la description suivante :

- d’un coté : « … *ces structures apparaissent comme ne pouvant pas, en principe, être introduites de l’extérieur dans le système, et qu’ils sont toujours formées uniquement dans le système* – et l’ont tient là la signification même du concept de la tautologie[5] »;
- d’un autre coté : *« … le processus de formation du système spécifie lui-même ce qui doit faire fonction d’élément en lui, de sorte que, au niveau des éléments déjà, il existe une discontinuité de principe entre le système et l’environnement[6].»*

Ces propriétés de clôture opérationnelle et d’autospécification de ces systèmes d’ostensifs participent de la nature des objets mathématiques en tant que virtualités. Mais elles peuvent se constituer en obstacle à la participation active de l’élève au processus d’objectivation les engendrant et partant à l’appréhension par lui de cette nature même.

Par contre, pour contrecarrer cette tendance, nous estimons nécessaire rendre intelligible pour l’étudiant, voire pour l’élève, la décontextualisation (BROUSSEAU G., 1990c) qui est à la base de ces virtualités. Pour cela, il faut faire en sorte que l’élève puisse effectuer lui-même cette décontextualisation et ce, à partir de recontextualisations idoines des systèmes d’ostensifs considérés. Une recontextualisation est alors idoine quand elle permet au professeur de reconnaître les obstacles épistémologiques (BROUSSEAU G. 199Oc) inhérents à cette décontextualisation et ceux nés de choix didactiques faits à son endroit et d’organiser, en conséquence, leur franchissement (BROUSSEAU G., 1983a).

1.2. Les stipulations du franchissement des obstacles épistémologiques et didactiques à l’aune du Savoir de l’Observateur

1.2.1. Dévolution et Savoir de l’Observateur

La dévolution (BROUSSEAU G., 1990b) à l’élève de la redécontextualisation le menant à l’objectivation d’un concept mathématique nécessite, entre autres choses, disposer d’un problème mathématique spécifique : Il s’agit d’un problème dont la résolution engage cet élève dans

[5] A propos de tautologie, STICHWH, dans la référence précédente, parle de morphogenèse, dans le contexte qui est le nôtre, nous estimons qu’il s’agit plutôt de tautologie.

[6] L’environnement d’un système numérique comme l’ensemble ***C*** des nombres complexes est le système des nombres réels dont il est l’extension mais aussi et le système des quaternions qui en constituent une extension.

un processus observable d’objectivation dont le point d’achèvement est la constitution de l’objet mathématique visé. Le succès de la dévolution de ce problème se confond alors avec l’enclenchement de ce processus et son maintien par le professeur jusqu’à son terme.

L’énoncé de ce problème comporte nécessairement deux types de données : des données explicites : nombres, points, fonctions, règles de calcul… déterminés, et des données implicites : nombres, points, fonctions, règles de calcul… qui, pour le solutionneur du problème, sont indéterminés. Quand les données explicites sont constituées d’un système d’objets concrets et d’un système opératoire, le problème peut se nouer autour du débordement du second système par le premier ; le dénouer consiste alors à trouver le moyen de contenir ce débordement. Quand c’est le cas, le système opératoire constitutif des données explicites du problème s’offrent à l’Observateur sous la forme d’un système symbolique comportant les germes de son propre déploiement. Lequel déploiement permet de contenir son débordement par le système d’objets concrets, constitutif lui aussi des donnés explicites du problème. Ce déploiement se confond alors avec le dévoilement progressif des données implicites de ce dernier.

A coté de la reconnaissance immédiate du processus de déploiement d’un tel système opératoire, ce qui fait la spécificité du savoir de l’Observateur à ce propos c’est sa capacité à anticiper les modalités de l’engagement de l’activité mathématique de l’élève dans l’enclenchement et la conduite de ce même processus.

L’élaboration d’un problème de cette sorte étant contingente, cette élaboration ne saurait faire l’objet de dévolution au professeur[7]. Or le seul garant dont on dispose pour le succès de la dévolution d’un tel problème à l’élève par le professeur est que le problème soit pensée par ce dernier, non pas dans son contenu formel, stricto sensu, mais aussi dans son élaboration, dans sa gestation.

Que le problème se présente sous la forme d’un système opératoire dont le débordement par un système d’objets concrets en fait un système en attente d’un déploiement à même de contenir ce débordement, cela suffit pour que le problème soit pensé par le professeur et dans sa gestation, son élaboration et dans sa solution ; encore faut-il que le professeur s’érige au niveau de l’Observateur et prenne la posture fondamentale de ce dernier à propos des connaissances en jeu. Laquelle posture est à présent l’objet du chapitre suivant.

1.2.2. Posture fondamentale de l’Observateur relativement à un savoir et les postures dérivées.

Le Savoir de l’Observateur est nécessairement associé à la restructuration d’un système conceptuel ; et toute restructuration d’un système conceptuel peut être interprétée comme une manifestation du Savoir de l’Observateur. Aussi considérions-nous que le savoir de l’observateur s’actualise dans la restructuration d’un système conceptuel. Cette considération est fondée sur la communauté des points de vues, à propos de l’activité scientifique en général et mathématique en particulier, entre une épistémologie des sciences, notamment celle que représente Gilles-Gaston Granger, et la théorie des situations didactique en mathématiques : Ce point de vue commun stipule que *cette activité est portée par des dialectiques internes : mouvement de restructuration d’un système de concepts qui résout des contradictions et des tensions internes au système* (GRANGER G.-G., 1994) d’une part et de l’autre, *dialectique de l’action de la formulation et de la validation fondant le fonctionnement de la classe sur une mimésis de la communauté scientifique* (BROUSSEAU G, 1996).

De ce point de vue, nous dérivons quatre états successifs attribuables au Savoir de l’Observateur, qui sont autant d’étapes dans la restructuration du système de concepts :

[7] Voir à ce propos MARGOLINAS C (MARGOLINAS C 2005).

- (e1) : Le premier, la constatation, à propos de deux systèmes conceptuels, des faits suivants :
  - l'un des deux systèmes est plus développé que l'autre, en ce sens que le plus développé se démarque du moins développé par sa capacité, plus grande, à s'intégrer dans le mouvement global des recherches mathématiciennes, historiquement attesté, visant montrer *la variété des « calculs » possibles sur de nouveaux objets mathématiques « abstraits »* (DIEUDONNE, 1987) *;*
  - la conception commune qu'on a des deux systèmes les fait apparaître comme deux systèmes indépendants, liés par une relation de transition, en ce sens qu'ils permettent, chacun de son coté, d'obtenir, pour certains cas, par des voies considérées comme étant totalement différentes, les mêmes résultats ;
  - la plausibilité de l'engendrement du système le plus développé à partir d'une complexification et restructuration du système le moins développé : il s'agit alors d'opposer une relation d'engendrement à la relation de transition que la conception commune à propos des deux systèmes faisait valoir ;
- (e2) : le second, l'identification de contradictions et tensions internes qui apparaissent dans le système le moins développé dans le sillage de l'établissement de sa capacité à engendrer le système le plus développé ;
- (e3) : le troisième, l'explicitation d'un canevas de stipulations formelles portant sur la résolution de ces contradictions et tensions internes et proposition d'une actualisation empirique de ce canevas de stipulations ;
- (e4) : le quatrième, proposition d'un système formel qui englobe ces mêmes stipulations et qui met en perspective d'autres actualisations de ces dernières : c'est la nouvelle structure proprement dite.

L'étape (e1) se présente comme une assertion qui, motivée par l'hypothèse selon laquelle la relation d'engendrement liant les deux systèmes conceptuels est un point aveugle des contrats didactiques successifs que le système didactique noue autour d'eux, fonde sa recevabilité sur l'établissement de sa validité syntaxique, de sa validité sémantique et de sa validité pragmatique et ce, dans la perspective de provoquer une rupture (BROUSSEAU G. 1998) de ces contrats qui sera révélatrice de leur véritable nature.

L'étape (e2) se confond avec le processus de la validation formelle ou syntaxique de cette assertion, l'étape (e3), avec le processus de sa validation sémantique et l'étape (e4), avec le processus de sa validation pragmatique, ce dernier processus faisant référence à l'usage courant de l'assertion au sein de la communauté des mathématiciens.

C'est notamment le cas quand la relation d'engendrement est elle-même générée par l'essai de contenir le débordement constatée d'un système opératoire ancien par un système d'objets concrets en concevant pour cela un système opératoire nouveau, au domaine d'application étendu aux objets débordant l'ancien système. Nous considérons que ces cas sont loin d'être des cas isolés, et ce à la suite de Gilles-Gaston GRANGER (GRANGER G.-G., 2003) quand, invoquant BACHELARD, il écrit à ce propos :

> *« … on constate à l'évidence le constant débordement de l'opératoire par des contenus empiriques, les systèmes opératoires sont ici matériels autant que conceptuels, mais Gaston Bachelard a bien montré l'étroit enchevêtrement de ces deux aspects, en même temps qu'il décrivait le progrès de la science comme constitution toujours remise en chantier de types d'objets corrélatifs de systèmes opératoires. »*

Si l'étape (e1) consiste en la constatation du débordement, en l'occurrence celui des moyennes, arithmétique et géométrique, par les couples de points du plan, voire les couples de points de l’espace, qui se situent hors des axes, et l’affirmation de la possibilité de le contenir, l’étape (e2) consiste à donner du système opératoire à même de dissoudre le dit débordement une description formelle, voire syntactique. L’étape (e3) consiste en la proposition d’un système opératoire sous forme d’actions concrètes qui soit une actualisation du système proposé dans l’étape (e2), et l’étape (e4) en la spécification de la structure mathématique sous-jacente au nouveau système opératoire.

Dans la série de ces étapes, chaque section commençante définit, avec la section finissante correspondante, deux postures se rapportant à un sujet pensant et agissant dans la perspective de réaliser la structuration : une posture initiale et une posture finale. La première dénote la manifestation de l’aptitude du sujet à se conduire en tant qu’exécutant, sans en être le concepteur, de la section commençante et la seconde la manifestation de son aptitude à se conduire en tant que concepteur aussi bien qu’exécutant de la section finissante. Autrement dit, la section commençante aussi bien que la section finissante étant un problème dans l’acception que nous lui avons donné ci-dessus, la section commençante est formée de données explicites accessibles directement au sujet ; celui-ci doit par contre manifester l’aptitude ou l’inaptitude à expliciter les données implicites de la section. La section finissante est elle aussi formée de données explicites et de données implicites, mais les premières aussi bien que les secondes ne sont pas accessibles directement au sujet : il est dans la situation où il doit manifester son aptitude ou inaptitude à se poser puis résoudre le problème dans son entièreté. On obtient ainsi les trois couples de postures suivants :

Postures initiales		Postures finales	
Manifestation de l’aptitude à être exécutant de la section commençante suivante sans en être le concepteur :		Manifestation de l’aptitude à être exécutant de la section finissante suivante :	
p1	(e1).	q1	(e2) ; (e3) ; (e4).
p2	(e1) ; (e2).	q2	(e3) ; (e4).
p3	(e1) ; (e2) ; (e3).	q3	(e4).

A chaque posture (pi) correspond sa négation (non pi) exprimant l’inaptitude par rapport à l’aptitude qu’exprime (pi) et il en est de même pour chaque posture (qi) ; en vertu de quoi chaque couple ((pi) ; (qi)), avec i = 1, 2, 3, donne lieu à deux variables binaires observables sur un même échantillon et est alors candidat à l’analyse statistique implicative (GRAS R., 1995). Cette candidature admet deux issues: être admissible ou être non admissible à la soumission à l’analyse ; cela dépend de la forme sous laquelle se présente le tableau de contingence relatif au couple.

Nous ne saurons trop insister sur le fait que dans la première étape (e1), il est question de deux systèmes distincts de concepts liés, mais de manière latente, par une relation d’engendrement et que le déploiement de cette relation est le savoir de l’Observateur. La section finissante {(e1) ; (e2) ; (e3)} représente ce déploiement ; aussi, étions-nous fondé à présenter la posture q1 comme étant la posture fondamentale de l’Observateur relativement au savoir S représenté par ce système. De cette posture dérivent les postures q2 et q3 : ainsi présentions-nous la posture q2 comme étant la dérivée première de la posture fondamentale de l’Observateur relativement au savoir S et la posture q3 sa dérivée seconde.

Revenons en détail sur l’admissibilité ou l’inadmissibilité d’un couple (pi ; qi) à la soumission à l’analyse statistique implicative : Il est loisible, grâce à ces couples de postures à l’indice et l’intensité d’implication de GRAS (GRAS R., 1995) de définir une suite hiérarchisée d'implications statistiques, qu'en hommage à Régis GRAS nous dénommons : *échelle épistémique de Gras*.

1.2.3. Echelle épistémique de Gras

1.2.3.1. Principe d'une hiérarchisation de positions épistémiques

Soit un système S de concepts vérifiant la propriété suivante : S s'intègre dans un système Σ plus étendu et en s'y intégrant associe à Σ une genèse originale. Les postures q1, q2 et q3 permettent de caractériser le rapport d'un système didactique à tout système S de ce type : en effet, il se peut qu'au sein des professeurs, censés représenter ce système didactique, on ait l'implication p1 ⇒ q1, au sens de Gras, admissible à un niveau de confiance(GRAS R., 1995) de plus de 90% ; Or, toujours au sens de l'implication de Gras, q1, q2 et q3 sont telles que les implications q1 ⇒ q2 et q2 ⇒ q3 sont logiquement admissibles au niveau maximum de confiance. Aussi, si p1 ⇒ q1 est admissible à un certain niveau de confiance alors p1 ⇒ q2 l'est aussi et a fortiori p2 ⇒ q2 ; de même p1 ⇒ q3 l'est aussi et a fortiori p3 ⇒ q3. On a aussi : si p2 ⇒ q2 admissible à certain niveau de confiance alors p2 ⇒ q3 l'est aussi et, a fortiori, p3 ⇒ q3.

Considérons un couple (*pi ; qi*) : les données recueillies sur les professeurs à propos des postures *pi* et *qi* se regroupent dans un tableau à double entrée : Le tableau de contingence.

Posture q Posture p	qi	$\overline{qi}$	Marges
pi	n_{piqi}	$n_{pi\overline{qi}}$	n_{pi}
$\overline{pi}$	$n_{\overline{pi}qi}$	$n_{\overline{piqi}}$	$n - n_{pi}$
Marges	n_{qi}	$n - n_{qi}$	n

Dans lequel n_{piqi} est le nombre de professeurs à la fois *pi* et *qi*, $n_{pi\overline{qi}}$, le nombre de professeurs pi et $\overline{qi}$, n_{pi} le nombre de professeurs *pi*, etc.

Deux cas se présentent alors ;

- Cas où $n_{pi} > n_{qi}$ ou $n_{pi} = n_{qi} = n$.

  Nous considérons ce cas comme cas de non admission du couple (*pi ; qi*) à la soumission à l'analyse statistique implicative : En effet, dans ce cas l'intensité d'implication, qui est définie par GRAS comme étant la qualité d'admissibilité (GRAS R., 1995) de $pi \Rightarrow qi$ est non définie.

- Cas où $n_{pi} \leq n_{qi} < n$.

  Nous considérons ce cas comme celui de l'admission du couple (*pi ; qi*) à la soumission à l'analyse statistique implicative : En effet, dans ce cas l'intensité d'implication de $pi \Rightarrow qi$ est une quantité numérique $\varphi(pi, \overline{qi})$(GRAS R., 1995) comprise entre 0 et 1, appelé niveau de confiance d'admissibilité de $pi \Rightarrow qi$ et que l'on calcule à partir d'une statistique proposée par R. GRAS, que l'on nomme indice d'implication de Gras et qui s'exprime sous la forme d'un pourcentage.

En convenant que, dans le cas où il y a admission de l'implication $pi \Rightarrow qi$ à l'analyse statistique implicative, $pi \Rightarrow qi$ est rejetée (respectivement, retenue) quand le niveau de confiance de son admissibilité est inférieure (respectivement, supérieure ou égal) à la moyenne 50 %, on obtient l'arbre de décision ci-après, substrat de l'échelle épistémique de Gras.

1.2.3.2. Arbre de décision substrat de l'échelle épistémique de Gras

1.2.3.2.1. Présentation de l'arbre

- *1ère étape. Amener les professeurs à manifester leur capacité à prendre les postures p1 et q1* :
  - (p1, q1) non admissible à l'analyse implicative → Aller à la 2ième étape en retenant : (p1,q1) inadmissible (**Branche B11**).
  - (p1, q1) admissible à l'analyse implicative :
    - p1 ⇒ q1 retenue → Conclure par la feuille suivante :
      <u>p1 ⇒ q1, p2 ⇒ q2 et p3 ⇒ q3 retenues (*Feuille F1*)</u>;
    - p1 ⇒ q1 rejetée → Aller à la 2ième étape en retenant [p1 ⇒ q1 rejetée](**B12**).
- *2ième étape. Amener les professeurs à manifester leur capacité à prendre les postures p2 et q2.*
  - (p2, q2) non admissible à l'analyse implicative → aller à la 3ième étape en retenant la sous branche qui s'impose dans l'alternative suivante :
    - [(p1,q1) & (p2,q2) non admissibles] (**B21**);
    - [p1 ⇒ q1 rejetée et (p2,q2) non admissible](**B22**) ;
  - (p2, q2) admissible à l'analyse implicative :
    - p2 ⇒ q2 retenue → Conclure avec la feuille qui s'impose dans la branche suivante :
      - [(p1, q1) non admissible et p2 ⇒ q2 & p3 ⇒ q3 retenues] (***F21***);
      - **<u>[p1 ⇒ q1 rejetée, p2 ⇒ q2 & p3 ⇒ q3 retenues] (*F22*)</u>**;
    - p2 ⇒ q2 rejetée → Aller à la 3ième étape en retenant la sous branche qui s'impose dans l'alternative suivante :
      - [(p1, q1) non admissible et p2⇒q2 rejetée] (**B23**);
      - [p1 ⇒ q1 & p2 ⇒ q2 rejetées](**B24**).
- *3ième étape : Amener les professeurs à manifester leur capacité à prendre les postures p3 et q3.*
  - (p3, q3) non admissible à l'analyse implicative → Conclure avec la feuille qui s'impose dans la branche suivante :
    - [(p1,q1), (p2,q2) et (p3, q3) non admissibles] (***F31***);
    - [p1 ⇒ q1 rejetée, (p2,q2) & (p3, q3) non admissibles] (***F32***);
    - [(p1, q1) non admissible, p2⇒q2 rejetée et (p3, q3) non admissibles] (***F33***);
    - [p1 ⇒ q1 & p2⇒q2 rejetées et (p3, q3) non admissible] (***F34***);
  - (p3, q3) admissible à l'analyse implicative :
    - p3 ⇒ q3 retenue → Conclure avec la feuille qui s'impose dans la branche suivante :
      - [(p1,q1) & (p2,q2) non admissibles et p3 ⇒ q3 retenue] (***F'31***);
      - [(p1,q1) non admissible, p2⇒q2 rejetée et p3 ⇒ q3 retenue] (***F'32***);
      - [p1 ⇒ q1 rejetée, (p2,q2) non admissible et p3 ⇒ q3 retenue] (***F'33***);
      - **<u>[p1⇒q1 & p2 ⇒ q2 rejetées et p3 ⇒ q3 retenue] (*F'34*)</u>**;
    - p3 ⇒ q3 rejetée → Conclure avec la feuille qui s'impose dans la branche suivante :
      - [(p1,q1) & (p2,q2) non admissibles et p3 ⇒ q3 rejetée] (***F''31***);
      - [(p1,q1) non admissible, p2 ⇒ q2 rejetée et p3 ⇒ q3 rejetée] (***F''32***);
      - [p1 ⇒ q1 rejetée, (p2,q2) non admissible et p3 ⇒ q3 rejetée] (***F''33***);
      - **<u>[p1 ⇒ q1, p2 ⇒ q2 et p3 ⇒ q3 rejetées] (*F''34*)</u>**.

1.2.3.2.2. Postures d’admissibilité et postures de non admissibilité du système didactique

L’arbre de décision est constitué :

- d’un tronc *:* il s’agit du projet consistant à *‘Amener les professeurs à manifester leur capacité quant à la prise des postures p1 et q1’*;
- de 2 branches : il s’agit de B11 et B12 ;
- de 4 sous branches : il s’agit de B21, B22, B23 et B24,
- et de 14 feuilles : il s’agit de **$F1$**, **$F21$**, **$F22$**, **$F31$**, **$F32$**, **$F33$**, **$F34$**, **$F'31$**, **$F'32$**, **$F'33$**, **$F'34$**, **$F''31$**, **$F''32$**, **$F''33$** et **$F''34$**.

Les 15 feuilles de l’arbre expriment les postures possibles du système didactique. Onze d’entre elles expriment des postures de contre-performance que sont les postures de non admissibilité : **$F21$**, **$F31$**, **$F32$**, **$F33$**, **$F34$**, **$F'31$**, **$F'32$**, **$F'33$**, **$F''31$**, **$F''32$** et **$F''33$**. Les quatre autres feuilles, **$F1$**, **$F22$**, **$F'34$** et **$F''34$**, sont les postures d’admissibilité : **$F1$** représente la posture érigeant le savoir en jeu au niveau du savoir de l’Observateur et, à ce titre, c’est une posture de haute performance ; **$F22$**, **$F'34$** et **$F''34$**, représentent alors des postures, respectivement, de performance moyenne, de faible performance et de très faible performance.

$F1$, **$F22$**, **$F'34$** et **$F''34$**, constituent une hiérarchie dans les implications épistémiques de Gras et donnent ainsi lieu à une échelle dans laquelle on peut positionner les postures d’admissibilité et qu’en hommage à Régis GRAS nous dénommons ‘Echelle épistémique de Gras’. Remarquons qu’on ne peut recourir à cette échelle que lorsque les postures du système didactique sont des postures d’admissibilité et celles-ci ne représentent qu’un peu plus de 26% des postures possibles.

1.3. Les niveaux de l’échelle épistémique de Gras

L’échelle possède 4 niveaux hiérarchisés qui se présentent comme suit :

- N0, le niveau le plus élevé de la hiérarchie : il exprime l’admissibilité, à un niveau de confiance élevé, de l’implication, au sein des professeurs, de « la réussite en tant que concepteur et exécutant du schéma d’exécution de chacune des validations, formelle, sémantique et pragmatique de l’Assertion » par « leur seul accès aux données communes aux trois validations » (chemin de l’arbre aboutissant à la feuille $F1$) ;
- N1, le niveau se situant immédiatement au dessous du niveau N0 : il exprime l’admissibilité, à un niveau de confiance élevé, de l’implication, au sein des professeurs, de « la réussite en tant que concepteur et exécutant du schéma d’exécution de chacune des validations, sémantique et pragmatique de l’Assertion » par « leur accès aux données communes aux trois validations et leur réussite en tant qu’exécutant, uniquement, du schéma d’exécution de sa validation formelle » (chemin de l’arbre aboutissant à la feuille $F22$);
- N2, le niveau se situant immédiatement au dessous du niveau N1 : il exprime l’admissibilité, à un niveau de confiance élevé, de l’implication, au sein des professeurs, de « la réussite en tant que concepteur et exécutant du schéma d’exécution de la validation pragmatique de l’Assertion » par « leur accès aux données communes aux trois validations et leur réussite en tant qu’exécutant, uniquement, du schéma d’exécution de chacune des 2 validations, formelle et sémantique de l’Assertion » (chemin de l’arbre aboutissant à la feuille $F'34$) ;
- N3, le niveau le plus bas de la hiérarchie dénote l’admissibilité, à un niveau de confiance trop bas, de l’implication, au sein des professeurs, de « la réussite en tant que concepteur et exécutant du schéma d’exécution de la validation pragmatique de l’Assertion » grâce à « leur accès aux données communes aux trois validations et leur réussite en tant

qu'exécutant, uniquement, du schéma d'exécution de chacune des 2 validations, formelle et sémantique de l'Assertion » (chemin de l'arbre aboutissant à la feuille $F''34$).

L'arbre de décision que nous avons dressé ci-dessus et qui pour nous constitue le substratum de l'échelle épistémique de Gras montre que les postures d'admissibilité au sens de Gras ne représentent qu'un peu plus de 26% des postures possibles. L'échelle épistémique de Gras ne saurait être applicable que dans des cas rares, voire précieux. Paradoxalement, ce qui fait la force de cette échelle c'est le fait qu'elle ne soit applicable que dans des cas très rares, voire précieux : on sait d'avance que la probabilité de voir un système didactique afficher une posture d'admissibilité est très faible devant la probabilité de le voir afficher une posture de non admissibilité. Et même en affichant une posture d'admissibilité, il est peu probable que la qualité d'admissibilité (GRAS R., 1995) atteigne 50%.

Ceci indique que l'important est la spécification rationnelle des obstacles didactiques et des obstacles épistémologiques dont la non conjuration par un système didactique peut amener ce dernier à afficher des postures de non admissibilité.

Ainsi, une assertion mathématique accompagnée des schémas d'exécution de ses validations, formelle, sémantique et pragmatique, doit être soumise à une analyse épistémologique avant de la confirmer dans son rôle d'outil de détermination des postures du système didactique et de leur caractère de non admissibilité ou d'admissibilité au sens de Gras.

Pour cela, il faut s'appuyer sur une grille d'analyse épistémologique qui prépare le recourt éventuel à l'échelle épistémique de Gras, via l'assertion et les schémas d'établissement de ses trois validations.

1.4. Grille d'analyse épistémologique associée à l'échelle épistémiques de Gras.

1.4.1. Obstacles à la constitution du sens de l'objet 'le corps C des complexes'.

Pour spécifier, le cas échéant, les obstacles à la prise par un système didactique des postures d'admissibilité relativement aux moyennes, arithmétique et géométrique, nous devons donner de cette admissibilité une interprétation épistémologique. Du point de vue épistémologique, l'Observateur incarne le sujet pour qui ces deux moyennes sont porteuses d'un faire question, il s'agit notamment de ce faire question s'exprimant dans les nécessités inhérentes au prolongement de chacune des deux moyennes à $\boldsymbol{IR^2}$x$\boldsymbol{IR^2}$, puis à $\boldsymbol{IR^3}$x$\boldsymbol{IR^3}$, via $\boldsymbol{IR^4}$x$\boldsymbol{IR^4}$, et trouvant sa réponse dans la construction des objets 'le Corps ***C*** des complexes' et ' le corps ***H*** des quaternions' comme processus d'authentification de ces prolongements en tant qu'objets mathématiques.

Or ceci nous rappelle à bien des égards ce par quoi J.-M. SALANSKIS (SALANSKIS J.-M., 2001) caractérise l'épistémologie interne portant sur la mathématique, il s'agit de ce qu'il appelle *version* :

> *« … La version est une décision de l'objet quant à son sens qui s'inscrit comme réponse au* (à un) *faire question, et qui, comme telle, se manifeste toujours comme contingente ».*

Les obstacles en question sont-ils des obstacles à la constitution du sens des objets 'le Corps ***C*** des complexes' et ' le corps ***H*** des quaternions', via les moyennes, arithmétique et géométrique, comme version salanskienne ? La réponse à cette question se trouve dans la signification à donner aux objets en question quant à leur sens. Cette signification nous la trouvons dans l'interprétation que donne SALANSKIS de l'*enveloppement* du sens :

> *« … Lorsque nous affrontons quelque chose comme faisant sens, nous voyons le sens comme surchargeant un support de sens, à grand peine contenu par lui, comme débordant naturellement pour s'exprimer, ce qui, néanmoins, ne se peu que si l'excès se desti-*

ne, c'est-à-dire s'il s'adresse. Le sens est donc dans l'attente d'une attestation de son excès à l'arrivée d'une destination : c'est ce que nous voulons faire entendre en affirmant qu'il est par principe enveloppé en lui-même ». (SALANSKIS J.-M., 2001)

En l'occurrence, le faire question relatif aux prolongements respectifs des deux moyennes est le support du sens. Le sens, proprement dit, concerne les objets 'les corps ***C*** et *H* des complexes et des quaternions' et est la construction de ces objets en tant que cette construction se confond avec le processus d'authentification de ces prolongements en tant qu'objets mathématiques. Les objets débordent naturellement le faire question pour exprimer l'authentification de la réponse à ce faire question. De par sa nature même, l'authentification se destine, elle est destinée à l'élève qui est l'adresse du sens, de l'authentification, quant au destinateur, c'est bien évidemment le système didactique.

Tout ceci nous amène à considérer que les obstacles en question sont obstacles à cet *enveloppement* du sens du corps ***C*** des complexes, et du corps *H* des quaternions.

1.4.2. Eléments de la grille

De notre point de vue, nous considérons que si le développement scientifique est porté par des dialectiques internes, comme le soutient G.-G. GRANGER (GRANGER G.-G. 1994), le déclanchement et le maintien de ces dernières requièrent la reconnaissance préalable de l'enveloppement tel que mentionné ci-dessus. En effet, comme le fait remarquer cet auteur, invoquant notamment Bachelard dans la citation évoquée plus haut, ce développement est toujours motivé par *le débordement de l'opératoire par des contenus empiriques…*

Aussi, pour la spécification des obstacles en question nous proposons s'appuyer sur ces dialectiques, comme conditions nécessaires à la reconnaissance du sens du corps ***C*** des complexes à travers son enveloppement. Or, ces dialectiques, notamment d'après GRANGER (GRANGER G.-G. 1994), se présentent comme suit :

Le passage de l'intuition au concept

« … Dans un état de la science, on constate souvent - a parte post - que d'insuffisantes neutralisations bloquaient la libre application des règles, et que la novation du génie a consisté d'abord à reconnaître - a parte ante – ces déterminations superflues, et par conséquent à conceptualiser plus avant le système » ;

Le passage du conditionné à la condition

« Dans un système conceptuel, certaines relations apparaissent, à un certain moment de son développement, comme dépendant de relations plus profondes : la possibilité de certaines opérations, comme pouvant découler d'une organisation conceptuelle sous-jacente laissée indéterminée par le système actuel. La novation consiste alors à prendre d'abord conscience claire de cette dépendance, puis construire un objet profond qui en rende le fonctionnement intelligible » ;

Le passage du local au global

« Il arrive qu'un état de la science fournisse un modèle adéquat de phénomène et de propriétés abstraites visées en eux-mêmes comme des objets isolés et dont on explore la structure interne. Mais des rapprochements avec d'autres objets, des analogies opératoires, peuvent préparer le passage à la considération de propriétés pour ainsi dire externes ou globales, qui font apparaître ces objets comme membres d'une famille plus vaste dont les éléments sont caractérisés de l'extérieur par des propriétés formelles éclairant la structure interne. »

A propos de ces trois passages, que les professeurs puissent opérer l'intégration d'un système de concepts à un système de niveau supérieur cela nécessite qu'ils puissent effectuer successivement ces passages. Cette intégration peut ne pas être conditionnée par l'organisation préalable à leur intention d'aucun de ces passages. Comme elle peut être conditionnée par l'organisation soit du premier passage seul, soit du premier et du second passage ensemble : dans le premier cas, les professeurs effectuent eux-mêmes le second et le troisième passage et dans le second ils effectuent seulement le troisième. Il est possible que l'organisation des deux premiers passages ne suffise pas pour les voir effectuer le troisième.

Tout ceci nous amène à considérer, via la situation didactique proposée aux élèves professeurs, la possibilité de fonder sur les trois passages ci-dessus, les processus respectifs des validations, formelle, sémantique et pragmatique de l'assertion portant sur le caractère prolongeable successivement à $IR^2 \mathrm{x} IR^2$ puis à $IR^3 \mathrm{x} IR^3$ des moyennes, arithmétiques et géométrique. Etablir une telle possibilité ferait de ces passages non seulement une grille d'analyse épistémologique de la situation didactique envisagée, mais aussi une assise épistémologique explicite pour l'échelle épistémique de Gras et pour la confrontation à la contingence de la situation en question. Encore faut-il que la soumission de cette dernière à cette grille de lecture aboutisse à la spécification rationnelle des obstacles, tant épistémologiques que didactiques, qui se dressent face à l'abord des corps ***C*** et ***H*** en tant qu'objets constructifs.

2. *Situation d'enseignement proposée aux élèves professeurs*

2.1. Objet de la Situation. (e1)[8]

Soit l'assertion ***(A)*** suivante :

Considérons l'application ***S*** définie par :

$$S : IR^2 \rightarrow P(IR)$$
$$(a, b) \ |\!\rightarrow \left\{x \in IR / \tfrac{1}{2} \times \left(x + \tfrac{b}{x}\right) = a\right\}.$$

L'application ***S*** admet un 'prolongement' à IR^2 qui substitue à $\emptyset$, comme image par ***S*** d'éléments de IR^2, des paires de points. Ce prolongement de ***S*** à IR^2, par soustraction de $\emptyset$ de l'ensemble d'arrivée de ***S,*** fait suite au prolongement à $IR^2 \times R^2$ des moyennes, arithmétique et géométrique ; lequel prolongement notifie doter IR^2 de deux lois internes, une loi additive **+** et une loi multiplicative $\times$ lui conférant la structure de corps, de sorte que : ***IR*** étant confondue avec $IR\mathrm{x}\{0\}$, à un isomorphisme près, et l'expression $\frac{b}{x}$ prise avec son renvoi à l'expression « $x \times \frac{b}{x} = b$ dans IR^2, l'application ***E[S]*** définie par : $E[S] : IR^2 \rightarrow P(IR^2)$

$$(a, b) \ |\!\rightarrow \{x \in IR^2 / \tfrac{1}{2} \times (x + \tfrac{b}{x}) = a\},$$

soit telle que les deux énoncés suivants soient des propositions vraies :

- $(\forall(a,b) \in IR^2)$ $(E[S](a,b)$ existe et est différent de $\emptyset)$;
- $(\forall(a,b) \in IR^2)$ $(S(a,b) \neq \emptyset \Leftrightarrow (E[S](a,b) = S(a,b)).$

L'objet de la situation est de reformuler l'assertion ***(A)*** afin qu'elle puisse être soumise à la triple validation à laquelle on soumet les énoncés mathématiques : la validation formelle ou syntaxique, la validation sémantique et la validation pragmatique. Il s'agit ensuite d'engager et de mener à leurs termes chacun des processus relatifs aux trois validations.

---

[8] Les [ei] correspondent aux étapes de restructuration de systèmes conceptuels ; lesquels étapes nous ont permis de définir la posture fondamentale de l'Observateur et les postures dérivées l'échelle épistémique de Gras et ses différents niveaux (voire les pages 5-9).

***2.2. Données communes aux trois processus de validation de l'assertion** (A)*

Le plan π est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$. M et M' deux points du plan. Posons $P_{ma}(\{M\,;\,M'\})$, leur milieu et $P_{mg}(\{M\,;M'\})$, l'intersection de la bissectrice de l'angle $([OM)\,;[OM'))$ et du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{OM.OM}$.

A tout point N du plan on associe les relations binaires σ_N et τ_N définies par : $(\forall(M,M')\in\pi^2)$,

- $M\,\sigma_N\,M' \Leftrightarrow P_{ma}(\{M\,;\,M'\}) \equiv \{N\}$;
- $M\,\tau_N\,M' \Leftrightarrow P_{mg}(\{M\,;\,M'\}) \ni N$.

Pour tout réel x on note I_x le point de coordonnées $(x,0)$ et J_x, le point de coordonnées $(0,x)$.

$\mathcal{P}$ désigne l'application qui à chaque couple de réels (a,b) fait correspondre l'ensemble :

$$(a,b) = \left\{ \{M\,;\,M'\}\in P(\pi) / \left\{ \begin{array}{c} M\sigma_{I_a}M'\,; \\ M\tau_{J_{\sqrt{b}}}M',\, si\ b\geq 0 \\ M\tau_{J_{\sqrt{-b}}}M',\, si\ b<0 \end{array} \right. \right\}.$$

En outre, a et b étant deux nombres réels, on considère les droites et les courbes d_a, δ_a, Δ_b et $\Delta_{b,a}$ d'équations :

- $d_a : x = a\,;$
- $\delta_a : y = a\,;$
- $\Delta_b : y = \frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{x}\right);$
- $\Delta_{b,a} : y = \frac{1}{2}\left(x+\frac{2a^2-b}{x}\right).$

Pr étant la projection orthogonale sur l'axe (OI), P un point de π et $C(I_a\,;P)$ désignant le cercle de centre I_a passant par P ; l'on considère la famille F de cercles suivante :

$$F_a^b = \{C(I_a;P)\}_{P\in Pr((\Delta_b\cup\Delta_{b,a})\cap\delta_a)}$$

On considère, en outre, les applications suivantes :

- $P_i : IR^2 \to P(\pi)$, $(a,b) \mapsto (\bigcup_{C\in F_a^b} C)\cap(OI)$
- $P_d : IR^2 \to P(\pi)$, $(a,b) \mapsto (\bigcup_{C\in F_a^b} C)\cap d_a$

Les stipulations des validations, formelle, sémantique et pragmatique, de l'Assertion découlent de ces données. Expliciter-les puis montrer leur réalisabilité.

***2.3. Validation formelle de l'assertion** (A). (e2)*

2.3.1. Données spécifiques à la validation formelle de l'Assertion

Etudier la véracité des propositions suivantes (on convient de confondre le réel x est le point I_x) :

- **(p1) :** $(\forall(a,b)\in IR^2)\left[\left(\mathcal{P}(a,b) = P_i(a,b)\right) \text{ ou bien } \left(\mathcal{P}(a,b) = P_d(a,b)\right)\right];$
- **(p2):** $(\forall(a,b)\in IR^2)(\mathcal{P}(a,b) = P_i(a,b) \Leftrightarrow S(a,b) = P_i(a,b));$
- **(p3):** $(\forall(a,b)\in IR^2)(\mathcal{P}(a,b) = P_d(a,b) \Leftrightarrow S(a,b) = \emptyset);$

- **(p4):** $(\forall(a,b)\in IR^2)\left\{\begin{array}{l}(P_i(a,b)=\mathcal{P}(a,b)\\ \{M,M'\}\in\mathcal{P}(a,b)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}M+M'=2\times I_a\\ M\times M'=I_b\end{array}\right.;$
- (p5)*: Le double de la moyenne arithmétique de deux nombres réels a et b est leur somme a + b*;
- (p6) : *Le carré de la moyenne géométrique de deux nombres réels a et b est leur produit ab*;

2.3.2. Processus de validation formelle de l'Assertion

En s'appuyant sur les propositions **(pi)**$_{1\le i\le 6}$ et en supposant que l'Assertion est vraie, montrer que les énoncés **(ei)** $_{1\le i\le 6}$ sont des expressions bien formées :

- **(e1) :** $(\forall(a,b)\in IR^2)[(\mathcal{P}(a,b)=P_i(a,b))$ ou bien $(\mathcal{P}(a,b)=P_d(a,b))]$;
- **(e2):** $(\forall(a;b)\in IR^2)(\mathcal{P}(a,b)=P_i(a,b)\Leftrightarrow E[S](a,b)=P_i(a,b))$;
- **(e3):** $(\forall(a,b)\in IR^2)(\mathcal{P}(a,b)=P_d(a,b)\Leftrightarrow E[S](a,b)=P_d(a,b))$;
- **(e4):** $(\forall(a,b)\in IR^2)(\{M,M'\}\in\mathcal{P}(a,b)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}M+M'=2\times I_a\\ M\times M'=I_b\end{array}\right.)$;
- (e5): *Le double $2\times N$ du point N, moyenne arithmétique de deux points M et M' du plan, est le point somme $M+M'$ des deux points M et M'*;
- (e6) : *Le carré N² du point N, moyenne géométrique de deux points M et M' du plan, est le point produit $M\times M'$ des deux points M et M'.*

2.4. Validation sémantique de l'assertion (A). (e3)

2.4.1. Données spécifiques à la validation sémantique de l'Assertion

2.4.1.1. On considère les propositions *(p'1)* et *(p'2)* suivantes *:*

- *(p'1) : Tout point M du plan est complètement déterminé par ces cordonnées polaires : le couple $(\rho\,;\,\theta)$, avec ρ = OM et $\theta=([\vec{OI});[\vec{OM}))$, θ devant être prise avec son renvoi à r_θ la rotation autour de O d'angle θ.*
- *(p'2) : Le carrée $(r_\theta)^2$ de la rotation r_θ autour de O d'angle θ est la rotation $r_{2\theta}$ autour de O d'angle 2θ;*

2.4.1.2. On considère aussi les définitions (di)$_{1\le i\le 4}$ suivantes :

- (d1) : *La moyenne arithmétique de deux points M et M' est le point d'abscisse la moyenne arithmétique des abscisses des points M et M' et d'ordonnée la moyenne arithmétique des ordonnées des points M et M' ;*
- (d2) : *La moyenne géométrique de deux points M et M' est le point dont les coordonnées polaires sont : pour le rayon, la moyenne géométriques des rayons des points M et M' et pour l'angle, l'angle de la rotation « moyenne géométrique » des rotations d'angles respectives les angles des points M et M' déterminés par leurs coordonnées polaires. Nous entendons par rotation « moyenne géométrique » de deux rotations, la rotation dont la composée par elle-même est identique à la composée de ces deux rotations.*
- (d3) : *Le double $2\times N$ d'un point N est le point d'abscisse le double de l'abscisse de N et d'ordonnée le double de l'ordonnée de N ;*

- (d4) : *Le carré N^2 d’un point N est le point dont les coordonnées polaires sont : pour le rayon, le carré du rayon du point N et pour l’angle polaire, l’angle du carré de la rotation à laquelle renvoie l’angle du point N.*

2.4.2. Processus de validation sémantique de l’Assertion

2.4.2.1. En s’appuyant sur les propositions **(p’1)** et **(p’2)** et sur les définitions $(\mathbf{d_i})_{1\le i\le 4}$, expliciter les relations entre les points du plan dont rendent compte les énoncés suivants :

- **(e’1)** : $M\ \sigma_N\ M' \Leftrightarrow M+M'=2\times N$;
- **(e’2)** : $M\ \tau_N\ M' \Leftrightarrow M\times M'=N^2$ (on peut aussi écrire $M'=\frac{N^2}{M}$);
- **(e’3)** : $\frac{1}{2}\left(M+\frac{I_b}{M}\right)=I_a$ avec $I_b=B^2$ et $B=\begin{cases} I_{\sqrt{b}} \text{ si } b\ge 0 \\ J_{\sqrt{-b}} \text{ si } b<0 \end{cases}$, M un point du plan π, a et b, 2 réels données.

2.4.2.2. En déduire que l’application S' définie de IR^2 dans le plan π par :

$S'(a\,;b)=\left\{M\in\pi/\ \frac{1}{2}\left(M+\frac{I_b}{M}\right)=I_a\right\}$ avec $I_b=B^2$ et $B=\begin{cases} I_{\sqrt{b}} \text{ si } b\ge 0 \\ J_{\sqrt{-b}} \text{ si } b<0 \end{cases}$, a un sens.

2.4.2.3. Montrer que :

- $(\forall(a;b)\in IR^2)(\mathcal{P}(a,b)=P_i(a,b)\Leftrightarrow S'(a,b)=P_i(a,b))$;
- $(\forall(a,b)\in IR^2)(\mathcal{P}(a,b)=P_d(a,b)\Leftrightarrow S'(a,b)=P_d(a,b))$;

2.4.2.4. En déduire que S' est une réalisation de l’application ***E[S]*** et que les relations entre les points du plan dont rendent compte les énoncés **(e’1)** et **(e’2)** sont aussi des réalisations des énoncés $(\mathbf{ei})_{4\le i\le 6}$.

2.5. Processus de validation pragmatique de l’assertion (A).(e4).

1. Déduire des énoncés **(e’1)** et **(e’2)** la loi additive + et la loi multiplicative[9] $\times$, internes à IR^2, qui fassent des énoncés $(\mathbf{ei})_{1\le i\le 6}$, des propositions vraies.
2. Montrer que $(IR^2\ ;+\ ;\times)$ a une structure de corps.

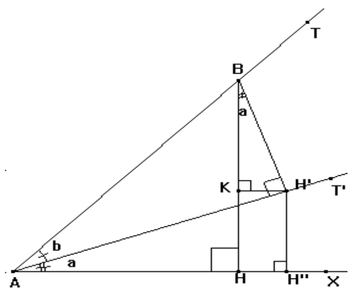
---

[9] Pour cette loi, commencer par :

1. expliciter l’introduction, pour tout réel $\theta\in[0\ ;\pi/2])$, de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ (ce dernier, via le théorème de Pythagore), se fondant sur l’établissement, via le théorème de Thalès, de la proposition (p) suivante : T_θ, désignant l’ensemble des triangles rectangles dont l’un des angles est de mesure θ :
$(\forall\theta\in[0\ ;\pi/2])(\exists\ !C_\theta\in[0\ ;1])(\forall(t)\in T_\theta\ )(C_\theta=\frac{\text{le coté adjacent à l'angle de mesure } \theta \text{ dans } (t)}{\text{l'hypoténuse de } (t)})$;
2. a) généraliser à IR $\cos\theta$ et $\sin\theta$ et établir les formules de passage des coordonnées polaires d’un point du plan à ses coordonnées rectangulaires, en admettant la proposition (q) suivante :

$$(\forall\alpha\in IR)\left(\begin{cases}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha\\ \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha\end{cases}\right)$$

b) Etablir les formules d’addition de trigonométrie à partir de la configuration ci-contre et les configurations similaires, en utilisant la proposition (q).



3. Justifier, par ce qui précède, l'expression 'moyennes géométriques des nombres -1 et 1' et designer ces moyennes.

4. Déduire de ce qui précède la construction géométrique des solutions, dans $(IR^2 ;+ ; \times)$, de l'équation : $\lambda x^2 + \alpha x + \beta = 0$ avec $(\lambda ;\ \alpha ;\beta) \in IR^* \times IR \times IR^*$.

5. L'intersection des courbes Δ_b et δ_a, respectivement, d'équations :

$$y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{b}{x}\right) \text{ et } y = a,$$

peut être vide. Ainsi l'intersection de ce type de courbes ne couvre pas tous les types de solutions de l'équation $\frac{1}{2}\left(x + \frac{b}{x}\right) = a$. Pour les couvrir tous, et en s'appuyant sur ce qui précède, introduisez un nouvel objet mathématique que vous dénommerez ***C-intersection*** et qui soit une extension de l'intersection de ce genre de courbes.

6. Considérer les courbes Δ_a^+ et δ_b d'équations :

- Δ_a^+ : $y = x(2a - x)$;
- δ_b : $y = b$.

Etudier la ***C***-intersection de ces deux courbes.

3. Analyse épistémologique a posteriori de la Situation

3.1. STIPULATIONS DE L'ANALYSE EPISTEMOLOGIQUE DE LA SITUATION

Comme opérationnalisation de la grille d'analyse épistémologique adoptée nous considérons que :

- les trois passages de G.-G. GRANGER, cités ci-dessus, ponctuent tout processus de conceptualisation, y compris celui préconisée par la Situation, objet de l'analyse;
- à chacun des trois passages correspond un type spécifique d'obstacle au processus de conceptualisation, parmi les obstacles didactique et/ou épistémologique étudiés en didactique théorique des mathématiques et notamment en théorie des situations didactiques ;
- concernant la conceptualisation préconisée par la Situation, au premier passage correspond des obstacles à la conceptualisation dans son versant formel, au second, des obstacles à la conceptualisation dans son versant sémantique et au troisième, des obstacles à la conceptualisation dans son versant pragmatique ;
- la situation est d'autant apte à modéliser, à propos des moyennes, arithmétique et géométrique, chacun des passages de G.-G. GRANGER que la reconnaissance d'obstacles spécifiques à la conceptualisation préconisée par elle se précise dans chacun de ses versants.

3.2. OBSTACLES A LA CONCEPTUALISATION DANS SON VERSANT FORMEL

3.2.1. Obstacle 'coordonnées cartésiennes versus coordonnées polaires'.

3.2.1.1. *Dominance des coordonnées cartésiennes comme mode de repérage des points et ses conséquences*

Dans la perspective de définir une « addition » et une « multiplication » entre « couples » de réels, on peut chercher à anticiper ce que sera, pour deux points du plan, leur « moyenne arithmétique », et leur « moyennes géométriques » et pour un point ce que sera son « double » et son carré, et ce pour en faire des définitions par lesquelles accéder de manière naturelle à cette « addition » et cette « multiplication ». Les points dont il s'agit sont les points du plan $(z = 0)$, l'espace (E) étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Concernant le « double » d'un point P, c'et bien sûr le point dont les coordonnées rectangulaires sont, pour l'abscisse, le double de l'abscisse de P et pour l'ordonnée, le double de l'ordonnée de P. concernant le point moyenne arithmétique de deux points M et N, c'est le point dont l'abscisse est la moyenne arithmétique des abscisses respectives de M et de N et pour ordonnée la moyennes arithmétique des ordonnées respectives de ces de ces deux points. Ces deux définitions peuvent constituer un point d’accès à une définition justifiée d’une loi interne additive dans le plan. Mais, cette justification ne saurait être complète que si on peut définir, de la même manière, pour deux points quelconques ce qu’est leur ‘moyennes géométriques’, et pour un point ce qu’est son ‘carré’. IL est clair que les coordonnées cartésiennes ne conviennent pas pour ces définitions puisque, si les abscisses ou les ordonnées respectives de deux points sont de signes contraires ces abscisses ou ces ordonnées n’admettent pas de moyenne géométrique. Par contre, on peut contourner ce problème si on réserve les coordonnées cartésiennes pour la définition du « double » d’un point et de la « moyenne arithmétique » de deux points, et réserver les coordonnées polaires pour la définition du « carré » d’un point et les moyennes géométriques de deux points. Pour cela, pour deux réels θ et θ' quelconques, il faut, s’agissant de l’expression

$$G\left(\sqrt{\rho\rho'};\frac{\theta+\theta'}{2}+k\pi\right), pour\ k\in Z, \rho,\rho'\in IR_+^*$$

prendre $\frac{\theta+\theta'}{2}$ avec son renvoi à une rotation dont la composée avec elle-même, composée qu’il faut voir comme étant le « carré » de cette rotation, donne la composée de deux rotations $\boldsymbol{r_\theta}$ et $\boldsymbol{r_{\theta'}}$, d’angles respectives θ et θ', composée qu’il faut voir comme étant le produit des deux rotations. Ainsi, comme $\sqrt{\rho\rho'}$ pour les rayons ρ et ρ', $\frac{\theta+\theta'}{2}$ représente une des moyennes géométrique des deux rotations $\boldsymbol{r_\theta}$ et $\boldsymbol{r_{\theta'}}$. Et, comme pour la « moyenne arithmétique » de deux points M et N du plan, la « moyenne géométrique » de deux points M et N, définis par leurs coordonnées polaires respectifs, est tout point dont les coordonnées polaires sont, pour le rayon, la moyenne géométrique des rayons respectifs de M et de N, et pour angle, l’angle de la moyenne géométrique des rotations associées aux angles respectifs de M et de N. Comme pour le « double d’un point », les coordonnées polaires du « carrée » d’un point P, du plan, défini par ses coordonnées polaires, sont, pour le rayon, le carré du rayon du point P, et pour angle, l’angle du carré de la rotation associée à l’angle du point P. Il faut laisser présent à l’esprit que les rotations dont il s’agit ici ont même axe, l’espace (E) étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\ \vec{u},\vec{v},\vec{w})$, il s’agit de l’axe des cotes, $D(O,\vec{w})$.

Ces considérations font apparaître des connaissances à l’apparition desquelles la décision d’adopter, comme seul langage, les coordonnées cartésiennes ou les coordonnées polaires, peut se constituer en un obstacle à l’émergence de la question du prolongement à $\boldsymbol{IR^2}$ des moyennes, arithmétique et géométrique, de deux points. La grande importance donnée aux premiers au détriment des seconds par le système didactique va dans le sens de cette décision.

Il est vrai qu’il est possible de définir directement une addition et une multiplication entre couples de nombres, sans faire référence à quelque propriété déjà connu des nombres, comme ici, le double de la moyenne arithmétique de deux nombres est leur somme, le carré de la moyenne géométrique de deux nombres est leur produit, ni voir en ces couples les coordonnées de points qu’ils soient des coordonnées cartésiennes ou des coordonnées polaires. Mais les tâtonnements qu’il faut consentir pour motiver, établir et justifier une telle approche peuvent être trop couteux, comme on va le voir en revenant sur les tâtonnements consentis par HAMILTON (voir à ce propos (DIEUDONNE J. 1987)) dans sa quête acharnée d’une « multiplication » entre triplets de réels, qui serait analogue à celle entre les couples, qu’est la multiplication des nombres complexes.

Rapporter les couples de nombres aux points dont ils sont les coordonnées et amalgamer, comme nous le suggérons ici, les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires, loin d'être un mélange des genres c'est plutôt un exemple d'approche faisant coopérer diverses connaissances pour résoudre des problèmes qui débordent chacune de ces dernières prise séparément. Pour illustrer l'importance de cette dernière approche, revenons sur ces tâtonnements de Hamilton.

3.2.1.2. *Le repérage en coordonnées sphériques et l'impossibilité d'une « multiplication » entre triplets de réels*

Dans sa quête d'une possible multiplication entre triplets de réels, HAMILTON s'est gardé d'identifier ces triplets aux points de coordonnées rectangulaires ces mêmes triplets. Cette identification lui aurait permis d'envisager leur traduction en les coordonnées cylindriques ou en coordonnées sphériques de ces points. Cela ne l'a pas empêché d'aboutir à sa théorie des quaternions. Mais il a du consentir pour cela une longue série d'essais-erreurs. Voyons comment la représentation de ces triplets par des points de l'espace, la représentation de ces points par leurs coordonnées sphériques et la recherche d'une possible moyenne géométrique, généralisée aux couples de ces points, auraient pu faire éviter à HAMILTON ses tentatives répétées.

L'espace ***(E)*** étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v};\vec{w})$, Repérer un point P de ***(E)*** par ses coordonnées sphériques (ρ,θ,φ) met en jeu deux rotations interdépendantes : si l'on fixe l'axe autour duquel s'effectue une des deux rotations, l'axe autour duquel s'effectue l'autre rotation varie avec le mesure de l'angle associée à la première. On ne peut donc pas invoquer le produit de deux rotations, c'est-dire leur composée, pour envisager introduire les points 'moyennes géométriques' de deux points de ***(E)*** comme nous l'avions fait concernant les seuls points du plan $(z=0)$: en effet, K, I, I' et I'' étant les points de ***(E)*** tels que $\overrightarrow{OK}=\vec{w}$, $\overrightarrow{OI}=\vec{u}$, $I'=r_\theta(I)$ et $I''=r_{2\theta}(I)$, dans $P(\rho,\theta,\varphi)$, le réel θ renvoie à la rotation r_θ d'angle θ autour de l'axe (0z), et φ à la rotation d'angle φ et d'axe la perpendiculaire en ***O*** au plan (OKI'). Tandis que dans $P'(\rho^2,2\theta,2\varphi)$, 2θ renvoie à la rotation d'angle 2θ et d'axe (Oz), 2φ à la rotation d'angle 2φ et d'axe la perpendiculaire en ***O*** au plan (OKI''). Ainsi, dans le passage de $P(\rho,\theta,\varphi)$ à $P'(\rho^2,2\theta,2\varphi)$, si 2θ est prise avec son renvoi au 'carré' d'une rotation, il ne saurait être de même pour le réel 2φ : la rotation associée à φ et celle associée à 2φ n'ont pas le même axe, dans $P'(\rho^2,2\theta,2\varphi)$, 2φ devant être prise avec son renvoi à la composée (ou produit) de deux rotations r'_φ et r''_φ différentes par leurs axes **:** l'axe de r'_φ étant la perpendiculaire en O au plan (OKI'), tandis que l'axe de r''_φ est la perpendiculaire en O au plan (OKI''). Le point $P'(\rho^2,2\theta,2\varphi)$ ne saurait donc représenter le carré du point $P(\rho,\theta,\varphi)$, de même le points $G\left(\sqrt{\rho\rho'};\frac{\theta+\theta'}{2};\frac{\varphi+\varphi'}{2}\right)$ ne saurait représenter un des points 'moyenne géométrique' des deux points $P(\rho,\theta,\varphi)$ et $P(\rho',\theta',\varphi')$.

Ce résultat négatif, quant à l'existence d'une « multiplication » entre triplets de réels, suggéré par les coordonnées sphériques, devrait être confirmé avec les coordonnées rectangulaires, si l'on convient que, nécessairement, le rayon du point 'moyen géométrique', au cas où un tel point est concevable, doit être égal à la moyenne géométrique des rayons des deux points.

Pour les couples de réels, cette convention ouvre la voie de l'identification d'une « multiplication » entre couples de nombres, qui soit associative, commutative et distributive par rapport à l'addition, grâce surtout à l'identité algébrique :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

identité qui, selon J. DIEUDONNE (DIEUDONNE J. 1987), remontrait à l'Antiquité et n'est qu'un cas particulier de l'identité plus générale

$$(x^2+Dy^2)(u^2+Dv^2)=(xu-yvD)^2+D(xv+yu)^2$$

cette dernière remonte, quant à elle, au mathématicien hindou Brahmagupta (VII^e siècle). Lagrange l'utilisait déjà dans ses calculs des classes de formes quadratiques.

L'identité qui en découle :

$$\sqrt{\sqrt{(x^2+y^2)}\sqrt{(x'^2+y'^2)}} = \sqrt{\sqrt{(xx'-yy')^2+(xy'+yx')^2}}$$

suggère, via la conservation, pour le cas des points, de la propriété, vérifiée pour les nombres, selon laquelle le carré de la moyenne géométrique de deux nombres est égale au produit de ces deux nombres, faire du couple $\left((xx'-yy'),(xy'+yx')\right)$ le résultat de la 'multiplication', cherchée, du couple (x,y) par le couple (x',y').

Mais, si on garde le principe d'identification de la moyenne géométrique des rayons de deux points avec le rayon du point 'moyenne géométrique de ces deux points', cette voie, qui aboutit à cette 'multiplication' pour les couples de réels, montre, en même temps, qu'une telle 'multiplication' ne saurait exister concernant les triplets.

En effet, si cette « multiplication » existait, le principe en question rendrait vraie la proposition (P) suivante :

$$\left(\forall\left((x,y,z)(x',y',z')\right) \in (IR^3)^2\right)$$
$$(\exists A,B,C \text{ linéaires en } a,b,c \text{ et en } x,y,z \text{ et ont des coefficients rationnels})$$
$$\left((x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2) = A^2+B^2+C^2\right).$$

Or il faut se référer à un travail précieux de Diophante et à une remarque tout aussi précieuse de Legendre pour trouver un contre exemple établissant la fausseté de cette proposition. Il s'agit d'une remarque de Legendre montrant qu'une identité

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = A^2+B^2+C^2$$

où A,B,C sont linéaires en a,b,c et en x,y,z, et ont des coefficients rationnels, ne peut pas exister : car, si l'on prend $a=b=c=1, x=4, y=2, z=1$, le nombre $63 = 3\times 21$ devrait être somme de carrés de 3 nombres rationnels ; mais comme 63 est de la forme $8n+7$, on sait depuis Diophante que cela est impossible.

Par contre, on sait, à travers des travaux d'EULER, que la proposition (P') formellement analogue à l'énoncé (E) et relative aux quadruplets de réels est vraie : cela provient de l'identité suivante, trouvé par Euler :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2) = (ax-by-cz-dt)^2+(ay+bx+ct-dz)^2+(az-bt+cx+dy)^2+(at+bz-cy+dt)^2$$

.

C'est cette identité que Hamilton a redécouverte, après moult tâtonnements dédiés à la recherche d'une « multiplication » possible entre triplets de réels. Cette découverte lui a fait abandonner cette recherche pour la proposition d'une « multiplication »[10] entre quadruplets, annonçant sa théorie des quaternions. Si donc Hamilton cherchait un contre exemple infirmant la véracité de la proposition (P), comme le suggère le langage des coordonnées sphériques, extension à l'espace des coordonnées polaires, il l'aurait trouvé dans la remarque de LEGENDRE, dans des livres d'histoire des mathématiques.

En fait, les coordonnes sphérique ne suggère pas que la recherche du contre exemple en question, elles suggèrent abandonner la recherche d'une « multiplication » impossible entre triplets

[10] Les quaternions $a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$ sont tels que :
$(a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k})(x + y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}) = (ax-by-cz-dt) + (ay+bx+ct-dz)\boldsymbol{i} + (az-bt+cx+dy)\boldsymbol{j} + (at+bz-cy+dx)\boldsymbol{k}.$

de réels pour une « multiplication » parfaitement concevable entre quadruplets de réels : en effet, en supposant a priori que les modes de repérage sont équivalents, et sachant que les coordonnées sphériques d'un point mettent en jeu des rotations dont les axes ne peuvent être fixés simultanément, et que de ce fait on ne peut pas faire des points de l'espace, sous forme de triplets des nombres, des opérateurs sur ces même points, via la composition des rotations en question, l'impossibilité d'une « multiplication » entre triplets de nombre est alors prévisible. Mais si on peut remplacer ce mode de repérage par un mode convoquant deux rotations dont les axes sont indépendants, une multiplication dans les points de l'espace serait concevable et calculable, à partir de la composition de ces rotations.

Or, la formule d'Olinde RODRIGUES[11] nous informe de la possibilité de ce type de repérage : l'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, un point ***M*** de l'espace étant tel que :

$OM = \rho$ et $\rho \neq 0$. ***M*** est complètement déterminé par le vecteur $\vec{V}$, image de $\rho\vec{u}$, par la composée des rotations de vecteurs respectifs $\vec{w}$ et $\vec{v}$ et d'angles respectifs θ et ψ, deux réels déterminés.

Ce mode de repérage met en jeu 4 variables indépendantes, à savoir : d'une part, l'angle de la rotation composée et de l'autre les 3 coordonnées de son vecteur.

Plus précisément, considérons les points U et M' tels que : $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OM'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$; la sphère (s_M) de centre le milieu de $[OU]$ et passant par O, et la sphère (s_U) de centre le milieu de $[OM']$ et passant par O. Les sections respectives de (s_M) et de (s_U) par le plan médiateur du segment $[UM']$ sont deux cercles qui se coupent en O et en un point Ω_M. Le plan $(UM'\Omega_M)$ est perpendiculaire à $(O\Omega_M)$ en Ω_M. M' est l'image de U par la rotation de vecteur $\vec{\mu}_M = \frac{\overrightarrow{O\Omega_M}}{O\Omega_M}$ et d'angle $\varphi = \left(\overrightarrow{\Omega_M U}, \overrightarrow{\Omega_M M'}\right)$. Ainsi, existe-t-il un réel unique a tel que :

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2+z^2+t^2}}, \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{y^2+z^2+t^2}}{\sqrt{a^2+y^2+z^2+t^2}}.$$

avec $\begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ les coordonnées cartésinnes de $\rho\vec{\mu}_M$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Aussi, pouvions-nous repérer le point M, par le couple $\left(a ; \begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right)$ formé d'une composante scalaire, la première projection du couple, et d'une composante vectorielle, la 2$^{\text{ième}}$ projection du même couple, avec la possibilité de sténographier ce couple par le schéma suivant que nous étudierons plus loin comme représentation géométrique possible de nombres:

Le schéma consiste en la considération du cercle orienté de rayon $|a|$, de centre le point N de coordonnées cartésiennes (y, z, t) et de plan, le plan perpendiculaire à (ON) au point N, lequel plan étant orienté par le vecteur $\overrightarrow{ON}$, on convient d'orienter le cercle dans le sens direct si $a > 0$ et dans le sens indirect dans le cas où $a < 0$.

Remarquons que cette représentation donne lieu à un cône de révolution dont le sommet est O, l'axe, (ON) et dont l'angle au sommet est ϑ telle que :

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+y^2+z^2+t^2}}, \cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{\sqrt{y^2+z^2+t^2}}{\sqrt{a^2+y^2+z^2+t^2}}.$$

[11] Voir à ce propos : http://fr.wikipedia.org/wiki/Rotation_vectorielle.

Tout ceci suggère la recherche d’une multiplication entre quadruplets de réels, pour faire des points de E des opérateurs comme l’a fait des points du plan, la construction du corps ***C*** des complexes. Pour ce faire, l’identité d’EULER indique parfaitement le chemin à suivre.

A ce niveau, il est intéressant de poursuivre l’analyse en vue de chercher à spécifier davantage l’obstacle épistémologique générateur des tentatives répétées de HAMILTON et qui l’avait empêché de poser directement sa multiplication.

3.2.1.3. *Quaternions ou « théorie des toupies arithmétiques » ?*

Rétrospectivement, on peut interpréter les tentatives de HAMILTON entrain de chercher une « multiplication » entre triplets de nombres, comme autant de tentatives à chercher quelque prolongement aux points de l’espace de la moyenne géométrique de deux points, dont la restriction aux couples de points du plan d’équation $(t = 0)$ serait confondue avec l’interprétation que nous venons de proposer pour les moyennes géométriques de deux points du plan…

Or, la représentation géométrique des quaternions, que nous proposons ci-dessus, montre, a posteriori, que si prolongement et restriction convenables de la moyenne géométrique il y a, ça ne saurait concerner les points de l’espaces, mais une classes de ses cercles orientés.

3.2.1.3.1. Déploiement des points de l’espace usuel en sous-systèmes d’un système numérique, Espace de HAMILTON.

Comme entrevue ci-dessus, il est loisible de faire correspondre à tout quadruplet de réels $\left(a\,;\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right)$ un cercle orienté $C\left(a\,;\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right)$ qu’en hommage à Hamilton nous proposons de dénommer ‘cercle hamiltonien. $C\left(a\,;\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right)$ est défini par :

- Cas où $b \neq 0$ ou $c \neq 0$ ou $d \neq 0$.
  - Cas où $a \neq 0$.

    M, le point de (E) tel que $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, ($P_M$), le plan perpendiculaire à (OM) en M et orienté par $\overrightarrow{OM}$ $C\left(a\,;\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right)$ est le cercle de (P_M) de centre M, de rayon $|a|$ orienté dans le sens direct si $a > 0$, dans le sens indirect si $a < 0$.
  - Cas où $a = 0$.

    $C\left(0\,;\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right)$ est le point M de (E) tel que $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.
- Cas où $b = c = d = 0$.
  - Cas où $a \neq 0$.

Nous convenons que $C\left(a\,;\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ est le cercle, de centre *O,* de rayon $|a|$, contenu dans le plan d'équation $(x=0)$. Ce plan étant orienté par $\vec{u}$, $C\left(a\,;\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ est orienté dans le sens direct si $a>0$, dans le sens indirect si $a<0$.

- Cas où $a=0$.

  Nous convenons que $C\left(0\,;\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)\equiv O(0{,}0{,}0)$.

L'ensemble EH des cercles $C\left(a\,;\begin{pmatrix}b\\c\\d\end{pmatrix}\right)$, (a,b,c,d) parcourant IR^4, est un corps non commutatif, EH étant doté de deux lois internes, une loi additive + et une loi multiplicative ×, définies par :

$$(\forall(x,y,z,t)\in IR^4)(\forall(x',y',z',t')\in IR^4)$$

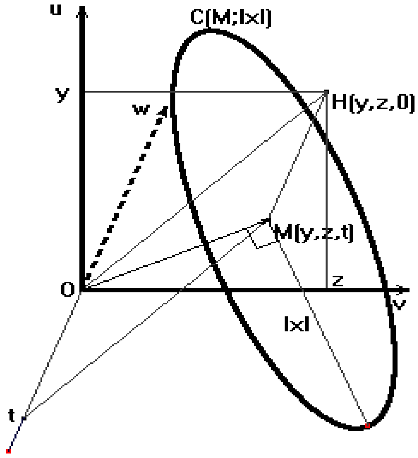
$$\begin{cases} C\left(x\,;\begin{pmatrix}y\\z\\t\end{pmatrix}\right)+C\left(x'\,;\begin{pmatrix}y'\\z'\\t'\end{pmatrix}\right)=C\left(x+x'\,;\begin{pmatrix}y+y'\\z+z'\\t+t'\end{pmatrix}\right)\\ C\left(x\,;\begin{pmatrix}y\\z\\t\end{pmatrix}\right)\times C\left(x'\,;\begin{pmatrix}y'\\z'\\t'\end{pmatrix}\right)=C\left(x''\,;\begin{pmatrix}y''\\z''\\t''\end{pmatrix}\right):\\ \text{avec}\begin{cases} x''=xx'-\begin{pmatrix}y\\z\\t\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}y'\\z'\\t'\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}y''\\z''\\t''\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}y'\\z'\\t'\end{pmatrix}+x'\begin{pmatrix}y\\z\\t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y\\z\\t\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}y'\\z'\\t'\end{pmatrix}\end{cases}\end{cases}$$

Ainsi, M étant un point de *(E)* tel que : $\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}y\\z\\t\end{pmatrix}$, chaque point M de (E), différent de *O,* se déploie en deux familles F_M^+ et F_M^- de cercles orientés : ce sont les cercles de centre M, contenus dans le plan P_M, perpendiculaire à (OM)en M. Et, P_M étant orienté par $\overrightarrow{OM}$, F_M^+ est la famille de ces cercles orientés dans le sens direct, F_M^-, la famille de ces mêmes cercles, orientés dans le sens indirect.. Ainsi, chaque quaternion $\left(x,\begin{pmatrix}y\\z\\t\end{pmatrix}\right)$ est représentable par un cercle orienté ou par un point : le réel x exprime à la fois le rayon et le sens du cercle, le triplets de réels (y,z,t)

exprime à la fois le plan contenant ce cercle et l’orientation de ce plan, ainsi que le centre du cercle. De même chaque cercle orienté C de centre un point $M \neq O$, de rayon r, contenu dans le plan P_M, P_M, le plan perpendiculaire à (OM)en M et orienté par $\overrightarrow{OM}$, représente le quaternion $\left(x, \begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right)$ avec :

$$\begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM} \text{ et } \begin{cases} x = r, \text{ si C est orienté dans le sens direct,} \\ x = -r \text{ si C est orienté dans le sens indirect} \end{cases}.$$

De sorte que tout cercle hamiltonien admet deux composantes : une composante scalaire (rayon et sens de parcours) et une composante vectorielle (le centre du cercle, le plan contenant ce cercle, et l’orientation de ce plan).



Ceci est un schéma représentant deux éléments de l’espace d’Hamilton, eux-mêmes représentant deux quaternions : il s’agit des quaternions $\left(|x|; \begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right)$ et $\left(-|x|; \begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right)$, le parcours positif du cercle $C(M, |x|)$ participe de la représentation du premier, et son parcours négatif de la représentation du second.

Dans la suite, nous aurons à décrire le plan d’Argand-Cauchy à l’aune de l’Ensemble EH, aussi proposions-nous d’appeler Espace EH de HAMILTON, l’ensemble EH.

3.2.1.3.2. Remarques fondamentales

- On montre que, pour chaque quadruplet de réels (x, y, z, t) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$:
  $\left(x, \begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right)$ représente une rotation dans (E), de vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et d’angle α telle que : $\alpha = 2\cos^{-1} x = 2\sin^{-1}\sqrt{y^2 + z^2 + t^2}$, en ce sens que :
  $(\forall (y, z, t) \in IR^3)$, le produit de quaternions :
  $\left(x, \begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) \times \left(0, \begin{pmatrix} y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}\right) \times \left(x, \begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right)^{-1}$, renvoie le vecteur $\begin{pmatrix} y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$ tourné de l’angle α autour du vecteur $\begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, le vecteur $\begin{pmatrix} y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$ étant alors assimilable au quaternion $\left(0, \begin{pmatrix} y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}\right)$.

  La remarque ci-dessus est certes un argument en faveur de notre représentation géométrique des quaternions, mais nous tenons à renforcer cet argument en reprenons, à l’aune de cette représentation, le problème du prolongement aux couples de points de l'espace de la notion de moyenne géométrique.

- le « produit » de deux cercles, éléments de l'Espace EH de Hamilton dont les composantes scalaires respectives sont nulles et dont les composantes vectorielles respectives sont non nulles, est un cercle de EH dont les deux composantes, scalaire et vectorielle, sont non nulles. Le carré d'un cercle de EH dont la composante scalaire est nulle et la composante vectorielle non nulle, est un cercle de EH dont la composante vectorielle est nulle. Aussi, aucune des « moyenne géométriques » de deux points de (E) ne sauraient avoir pour représentation géométrique un point, mais un cercle de EH de rayon non nul !

3.2.1.3.3. Question fondamentale

Comment se fait-il alors que chacune des « moyennes géométriques » de deux points du plan est un point, alors qu'aucune d'elle ne saurait l'être quand il s'agit de deux points de l'espace ? Le principe de permanence[12] serait-il inapplicable lors du passage du plan à l'espace, ou doit-on réinterpréter le plan d'Argand-Cauchy à l'aune de l'Espace de Hamilton afin, notamment, de conserver le principe de permanence ? C'est à présent l'objet de ce paragraphe.

3.2.1.3.4. Le plan « véritablement imaginaire » d'Argand-Cauchy

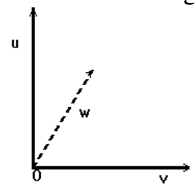
Depuis la découverte par HAMILTON des quaternions, les points $M(a,b,0)$, a et b deux réels quelconques, en tant qu'il sont associés aux vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, ces points sont conventionnellement associés aux quaternions $\left(0\,;\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Or, si nous voulions rejeter sur le plan $(z=0)$ le plan Argand-Cauchy afin que celui-ci puisse s'intégrer directement dans l'espace de Hamilton, les points $M(a,b,0)$ devraient représenter, en plus des quaternions $\left(0\,;\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, les quaternions $\left(a\,;\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Ces points doivent donc présenter une ambiguïté que seule une interprétation adéquate du plan d'Argand-Cauchy peut résoudre. C'est cette interprétation que nous tentons dans les paragraphes suivants.

Quand l'étude porte exclusivement sur les cercles de l'espace de Hamilton qui sont images de la restriction $\tilde{f}$ à $R^2\times\{(0,0)\}$ de la correspondance f qui associe à tout élément (x,y,z,t) de R^4, le cercle $C\left(x\,;\begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right)$, il serait tentant de suivre successivement les modalités suivantes :

---

[12] *Le fait que les propriétés de l'addition et de la multiplication où n'intervient pas l'ordre de* ***IR*** *et son « extension »* ***C,*** *était considéré par les mathématiciens anglais contemporains de Hamilton comme une nécessité, qu'ils appelaient « principe de permanence »* (DIEUDONNE J, 1987 p. 140).

- Pour mieux visualiser les choses, pivoter la schématisation habituelle du repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de 90° autour de l'axe $D(O, \vec{v})$, dans le sens des aiguilles d'une montre. On obtient la configuration ci-dessus, où :



L'axe $D(O, \vec{u})$, garde sa qualité d'axe (Oy) des abscisses, $D(O, \vec{v})$ sa qualité d'axe (Oz) des ordonnées et $D(O, \vec{w})$, sa qualité d'axe (Ot) des cotes.

- Dans ce nouveau schéma, rejeter sur l'axe des ordonnées $D(O, \vec{v})$, un « axe des scalaires » pour la représentation des cercles de centre *O* contenus dans le plan $(y = 0)$.

De notre point de vue, cet axe des scalaires, jouant uniquement le rôle d'échelle pour la mesure des longueurs des segments, rayons des cercles en question, et que l'on rejette sur l'axe (Oz) des ordonnées, est un « axe véritablement imaginaire ». Avec cet axe, à la place de l'axe $D(O, \vec{v})$, on travaille sur un « plan véritablement imaginaire », le plan 'véritablement' imaginaire d'Argand-Cauchy : Dans $D(O, \vec{v})$, tout point $P(0; z_P; 0)$, se confond avec le quaternion, imaginaire pur, $\left(0\,;\begin{pmatrix}0\\z_P\\0\end{pmatrix}\right)$ et représente aussi, le réel ou, par abus de langage nous dirions 'le scalaire pur' $\left(z_P;\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ Ainsi, l'axe $D(O, \vec{v})$ est à la fois axe des imaginaires purs $\left(0\,;\begin{pmatrix}0\\z_P\\0\end{pmatrix}\right)$ et axe pour la représentation des 'scalaire purs' $\left(z_P;\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$. Notons qu'en terme des cercles de l'Espace de HAMILTON, $\left(z_P;\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ admet comme représentation géométrique le cercle orienté de centre 0, de rayon $|z_P|$ et de sens de parcours le sens direct si $z_P > 0$ et de sens indirect $z_P < 0$;

- Un réel a et un réel b étant donnés, l'on considère dans l'axe des scalaires, rejeté sur l'axe des ordonnées, le point A tel que $OA = |a|$. Le cercle C', de centre *O*, passant par A contenu dans le plan $(y = 0)$, subit une translation de vecteur $b\vec{u}$, on obtient alors un cercle C de centre Ω(b,0,0), contenu dans le plan $(y = b)$, ce plan étant orienté par $b\vec{u}$, on dote C du sens direct si $a > 0$, et du sens indirect si $a < 0$.
- C coupe le plan d'équation $(t = 0)$ en les points $S(b, a, 0)$ et $S'(b, -a, 0)$, l'on convient alors de représenter C par le point $S(b, a, 0)$. Le point $S(b, a, 0)$ qui alors devient porteur d'une ambiguïté : il est le représentant de deux éléments de l'espace de Hamilton : $C\left(a\,;\begin{pmatrix}b\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ et $C\left(0\,;\begin{pmatrix}b\\a\\0\end{pmatrix}\right)$, voit cette ambiguïté disparaître pour ne représenter que

$C\left(a\,;\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, grâce aux deux conditions : 1) ne considérer que les éléments de l’ensemble image de $\tilde{\tilde{f}}$, 2) suivre les modalités i), ii) et iii).

C’est sous ces conditions, et seulement sous ces conditions, qu’on peut faire correspondre à tout point $P(a,b)$ du plan d’Argand-Cauchy le cercle $C\left(a\,;\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, élément de l’espace de Hamilton, et faire correspondre à tout cercle $C\left(a\,;\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, élément de l’espace de Hamilton, le point $P(a,b)$ du plan d’Argand-Cauchy.

Ainsi, contrairement à la conception commune, relative au plan d’Argand-Cauchy, la représentation du complexe $a+bi$ par le point de coordonnées (a,b) n’est ni directe ni spécifique aux complexes : l’observance du « principe de permanence » voulant que les points de l’espace (E) forment un système numérique si les points du plan en forme un, exige reconsidérer cette conception : le point de coordonnées (a,b) dans le plan d’Argand-Cauchy représente un cercle orienté qui, lui, représente un nombre : la première projection du couple est un scalaire, synthèse de deux données, $|a|$, le rayon du cercle, et $\mathrm{signe}(a)$, le sens de parcours de ce cercle ; la deuxième projection désigne le vecteur $b\vec{u}$, synthétisant trois données : le plan d’équation $(y=b)$ du cercle en question, le centre Ω(b,0,0) de ce cercle, l’orientation de ce plan. Ainsi, les nombres complexes deviennent associés à des cercles, sous-ensembles de l’espace de Hamilton.

3.2.2. Obstacle ‘angle versus rotation’

Concernant les pratiques didactiques actuelles, aux différents niveaux de l’Enseignement Secondaire, il apparaît qu’au cas même où celles-ci optent pour les coordonnées polaires pour définir la moyenne géométrique étendue aux points du plan, exactement comme on l’a fait pour la moyenne arithmétique, un autre obstacle survient : on conçoit bien la somme de deux angles, mais on ne peut pas définir le produit de deux angles. C’est là un obstacle épistémologique dont il faut être conscient : l’obstacle qui consiste en la considération de l’angle polaire sans son renvoi à la rotation autour de $\boldsymbol{O}$, qu’elle ne fait pourtant que représenter. Le système d’objets empiriques que sont les angles, en tant que quantification de portions de l’espace, s’oppose au système opératoire que constituent les rotations autour de $\boldsymbol{O}$. Une fois cet obstacle franchis, la somme de deux angles polaires ne saurait être considérée que comme exprimant le produit de deux rotations, et la ‘racine carré’ de la rotation d’angle $\boldsymbol{\theta}$, la rotation d’angle $\boldsymbol{\theta/2}$: la voie est alors toute tracée pour affecter à tout couple de points du plan ce qui sera ses « moyennes géométriques ».

En fait, le problème proviendrait d’une conception du repérage d’un point dans le plan (respectivement, dans l’espace). Cette conception peut avoir comme interprétation la considération du repérage comme la bijection de $\boldsymbol{IR}^2$ (respectivement, de $\boldsymbol{IR}^3$) sur les points du plan (respectivement, sur les points de l’espace) qui à un couple de réels (respectivement, un triplets de réels) fait correspondre un point. Or, en se bornant, dans un premier temps, à la sphère d’équation $y^2+z^2=1$ (respectivement, $y^2+z^2+t^2=1$), une conception plus efficace consiste à considérer le repérage comme la bijection de l’ensemble des rotations sur la sphère, qui à toute rotation $\boldsymbol{r}$ fait correspondre $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{U})$, avec $\boldsymbol{U}$, le point tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{OU}}=\vec{\boldsymbol{u}}$.

On sait, maintenant que la représentation polaire est le lieu d'une complexité cachée : cette complexité se déploie dans l'espace en un cône de révolution dont l'angle au sommet est un angle de $\pi - \theta$; et qu'il s'agit de moyennes géométriques et non de la moyenne géométrique est que celles-ci ont comme représentants des cercles….

Mais, même en laissant de côté le lien des complexes avec les quaternions et en restant au niveau de l'enseignement secondaire, il est des obstacles dont on ne peut pas, a priori, dire qu'ils sont spécifiques à un niveau d'enseignement plutôt qu'à un autre. Ces obstacles constituent l'objet des paragraphes qui suivent

3.2.3. OBSTACLE 'OBJET CORRELATIF VERSUS OBJET CONSTRUCTIF'

D'aucun diront qu'on peut définir, à la suite de HAMILTON, directement et simplement et la somme et le produit de deux points munis de leurs coordonnées cartésiennes, sans passer par la considération ni de la moyenne arithmétique, ni de la moyenne géométrique. C'est, généralement, ce qui se fait actuellement et, semble-t-il, cela ne soulève aucune difficulté ni d'enseignement, ni d'apprentissage. A cela, nous opposons le fait suivant : donner la définition de la somme et une des deux définitions ou les deux à la fois du produit de deux points du plan, sans passer par les deux moyennes, c'est s'engager, sans l'annoncer explicitement, dans la validation pragmatique d'une assertion. Mais étant implicite, la validation formelle et la validation sémantique de cette dernière ne s'impose pas avec clarté. En effet, la validation pragmatique consiste à montrer qu'un système est syntaxiquement régulé comme le serait un système formel et ce, en montrant que les théorèmes du système sont immanents à des définitions et à des règles de calcul admises dans la communauté mathématicienne et qu'ils sont pour cela admissibles en tant que tels dans cette communauté : la validation pragmatique, ainsi entendue, fait pendant à l'institutionnalisation, c'est aussi une validation syntaxique voire formelle, mais pas au sens de la validation formelle d'une assertion telle qu'elle se présente dans le texte de la Situation, objet de cette analyse : pour cette dernière, l'Assertion est reformulée sous forme d'une liste d'énoncés indépendants, il s'agit alors, pour chacun des énoncés pris individuellement, de montrer que, de par sa composition, il admet une certaine signification qu'il tire directement de l'Assertion, pour peu que celle-ci soit admise. Or, cette signification étant assujettie à la véracité de l'assertion, c'est donc d'une signification potentielle qu'il s'agit. Et, avant que cette signification passe de la virtualité à l'effectivité par le biais de la validation sémantique et de la validation pragmatique de l'Assertion, l'énoncé reste au stade 'd'expression bien formée' et porte bien ce qualificatif. En fait, cette validation formelle s'apparente à la solution d'une situation de formulation qui ne s'appuie pas sur une situation d'action qui lui serait antérieure, comme de coutume, mais sur une situation d'action qui lui sera postérieure et qu'elle doit anticiper. C'est cette situation d'action que formalise le processus sémantique de l'Assertion.

Or si, comme nous le pensions[13], l'objet mathématique est constitué de deux entités exhaustives, concomitantes et disjointes, et que la validation formelle et la validation sémantique, ainsi

[13] Nous pensons à la dichotomie 'objet constructif/objet corrélatif' introduite par SAlANSKIS J.-M. (SAlANSKIS J.-M., 2001), p. 200-221) : Pour caractériser et classifier les objets mathématiques et partant, l'objectivité mathématique : SAlANSKIS présente les mathématiques : *« … comme discours attaché à deux styles d'objets, selon deux règles de pensée et de vérité, et tenu d'accomplir l'intégration problématique de ces deux couches intentionnelles. De la lecture da la mathématique comme partagée entre l'objectivité constructive et l'objectivité corrélative : la première fixe comme mode d'accès à l'objet la « fabrication » de cet objet suivant une clause récursive, dont un arbre de construction est susceptible de*

entendues, représentent ensemble une de ces entités, tandis que la validation pragmatique l’autre, alors, se contenter, dans la présentation de l’objet, de la validation pragmatique seule serait un choix didactique malencontreux, un véritable obstacle didactique et d’obstruction à la conceptualisation.

Dans la mesure où la Situation pointe cet obstacle et propose une ébauche des moyens de son franchissement, elle fait du prolongement aux points du plan des deux moyennes, ce genre de conceptualisation par laquelle s’effectue, sans encombre, le passage de l’intuition au concept comme la décrit G.-G. Granger (GRANGER, G.-G. 1994).

Illustrons et cet obstacle et les stipulations de son franchissement, à travers ce que nous présenterons, dans la suite, comme étant la matière même de la Situation objet de cette analyse : Il s’agit d’une méthode d’établissement de ce qu’on appelle communément en trigonométrie, ‘formules d’addition’. Ces formules participent de la construction de la loi interne multiplicative dans IR^2, et donc si l’algèbre est ‘calcul des opérations’, la méthode en question participe de ce calcul.

En effet, via les connaissances officiellement exigibles des élèves de 4[ième] (13-14 ans) à propos du théorème de Thalès et du théorème de Pythagore, il est tout à fait concevable de faire établir par ces élèves, sinon compter parmi ces connaissances, la proposition **(p)** suivante :

Désignant par T_θ, l’ensemble des triangles rectangles dont l’un des angle est de mesure le nombre réel θ. Pour tout réel θ, compris entre 0 et $\pi/2$, il existe un seul réel, compris entre 0 et 1, appelé ‘cosinus θ’ et noté $cos\theta$, tel que pour tout triangle *(t)* appartenant à T_θ, on a : $cos\theta = \frac{\text{coté de } (t) \text{ adjacent à l'angle de mesure } \theta}{\text{l'hypoténuse de} (t)}$,
$\sqrt{1-cos^2\theta} = \frac{\text{coté de } (t) \text{ opposé à l'angle de mesure } \theta}{\text{l'hypoténuse de } (t)}$.

Ce dernier rapport est appelé ‘sinus θ’ et est noté $sin\theta$.

Dans la classe de Seconde (14-15 ans) et au-delà, s’agissant de généraliser le cosinus et le sinus à IR, les pratiques didactiques abandonnent vite la proposition **(p)** et passent, sans transition, à la considération de ces deux notions, respectivement, comme abscisse et ordonnée d’un point du cercle trigonométrique, instituant ainsi une relation de transition entre deux systèmes conceptuels : les relations trigonométriques dans le triangle rectangle d’une part, et les relations trigonométriques dans le cercle trigonométrique de l’autre.

De notre point de vue, cela illustre le fait que, s’agissant de l’objectivité mathématique, ces pratiques ont tendance à opter exclusivement pour l’objectivité corrélative là où l’objectivité constructive serait indiquée. L’exemple le plus patent en est cet abord scolaire dont fait l’objet « la périodicité des deux fonctions, cosinus et sinus » : les pratiques se limitent à l’ostension comme moyen d’établissement de cette dernière, tout en faisant apparaître, sous forme de théorème, la relation formelle **(f)** suivante :

$$(\forall \alpha \in IR_+)\left(\begin{cases} cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -sin\alpha \\ sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = cos\alpha \end{cases}\right).$$

Or, la considération, dans ce cas précis, de l’objectivité mathématique constructive incite à garder la définition de cosinus et de sinus s’appuyant sur la proposition **(p)** et présenter la relation **(f)** comme clause récursive, règle de calcul du cosinus et du sinus d’un angle de mesure su-

---

porter témoignage ; la deuxième fixe comme mode d’appréhension originaire de l’objet mathématique l’acte de l’apercevoir au sein d’une multiplicité satisfaisant une liste d’axiome ».

périeure à $\frac{\pi}{2}$ à partir du cosinus et du sinus d'un angle de mesure comprise entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, quitte à justifier a posteriori cette même règle. Cela permet de généraliser à ***IR***, récursivement, le cosinus et le sinus dans leur forme de rapports de cotés de triangles rectangles, qui toutefois seront précédés ou non du signe $-$ et ce, tout en établissant la périodicité des deux fonctions :

En effet, considérant la relation **(f)** ci-dessus, en tant que règle de construction des cosinus et des sinus des nombres réels, et la proposition **(q)** suivante :

$(q):(\forall n \in IN)(\exists!(q_n,r_n) \in IN^2 : n = 4q_n + r_n, avec\ 0 \leq r \leq 3)$.

On a:

$$(\forall \alpha \in IR_+)(\forall n \in IN)\left(\begin{cases} cos\left(\alpha + n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \cos\alpha, & si\ r_n = 0 \\ -\sin\alpha, & si\ r_n = 1 \\ -\cos\alpha, & si\ r_n = 2 \\ \sin\alpha, & si\ r_n = 3 \end{cases} \\ sin\left(\alpha + n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin\alpha, si\ r_n = 0 \\ \cos\alpha, si\ r_n = 1 \\ -\sin\alpha, si\ r_n = 2 \\ -\cos\alpha, si\ r_n = 3 \end{cases} \end{cases}\right).$$

En outre, considérant, pour tout $\alpha \in IR_+$, le plus grand entier naturel n_α tel que $n_\alpha\frac{\pi}{2} \leq \alpha$, on a la proposition **(p')** suivantes :

$$(\forall \alpha \in IR_+)\left(\exists! \alpha' \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] : \alpha = \alpha' + n_\alpha\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left(cos\,\alpha = \begin{cases} \cos\alpha',\ si\ r_{n_\alpha} = 0 \\ -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right), si\ r_{n_\alpha} = 1 \\ -\cos\alpha',\ si\ r_{n_\alpha} = 2 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right),\ si\ r_{n_\alpha} = 3 \end{cases} \text{ et } sin\,\alpha = \begin{cases} \sin\alpha', si\ r_{n_\alpha} = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right), si\ r_{n_\alpha} = 1 \\ -\sin\alpha', si\ r_{n_\alpha} = 2 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right), si\ r_{n_\alpha} = 3 \end{cases}\right);$$

$cos\,\alpha', cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right), sin\,\alpha'$ et $sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)$ sont alors tels que :

- $cos\,\alpha' = \frac{coté\ de\ (t')\ adjacent\ à\ l'angle\ de\ mesure\ \alpha'}{l'hypothénuse\ de\ (t')}$,
- $cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) = \frac{coté\ de\ (t'')\ adjacent\ à\ l'angle\ de\ mesure\ (\frac{\pi}{2} - \alpha')}{l'hypoténuse\ de\ (t'')}$,
- $\sin\alpha' = \frac{coté\ de\ (t')\ opposé\ à\ l'angle\ de\ mesure\ \alpha'}{l'hypothénuse\ de\ (t')}$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) = \frac{coté\ de\ (t'')\ opposé\ à\ l'angle\ de\ mesure\ (\frac{\pi}{2} - \alpha')}{l'hypoténuse\ de\ (t'')}$,

avec $(t') \in T_{\alpha'}$ et $(t'') \in T_{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right)}$.

Ce n'est qu'après ces calculs, au demeurant actualisables par une forme de récursivité, que le lien du cosinus et du sinus avec les coordonnées rectangulaires de points peut être avancé. Car, en prévision de l'introduction, mentionnée ci-dessus, de la loi interne multiplicative dans ***IR²***, ces calculs et la proposition **(p')** apparaissent comme une étape essentielle dans le « calcul » de cette loi : celui-ci se déroulant via l'établissement des relations (R1) et (R2) suivantes :

$(R1) : (\forall(a,b) \in IR^2)\ (\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$

$(R2) : (\forall(a,b) \in IR^2)(\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b).$

Relations pour l'établissement desquelles on envisagera, pour trois demi-droites [AX), [AT') et [AT) du plan, en plus de la configuration représentée par la Figure **(F)** ci-dessous, les 15 configurations similaires, éventail représentant pour les réels ***a'*** et ***b'*** tels que : $0 \leq a' \leq 2\pi, 0 \leq b' \leq 2\pi$ *et* $a' + b' \leq 2\pi$, les triangles rectangles avec lesquelles les 'rapports' $\cos(a' + b')$, $\sin(a' + b')$, $\cos a'$, $\cos b'$, $\sin a'$ *et* $\sin b'$ s'actualisent. Il s'agit de ces rapports auxquels la proposition **(p')** ramène les calculs relatifs à l'établissement de (R1) et (R2).

Par applications successives de cette proposition, qui amène à distinguer les 16 cas, on établit alors la relation (R1) (puis (R2)), en déroulant, pour chacun de ces cas, un calcul similaire au calcul accompagnant la Figure **(F)**, ci-dessous, et ce, tout en tenant compte, chaque fois, des signes respectifs des cosinus et des sinus représentés dans la figure considérée, comme le prévoit **(p')** :

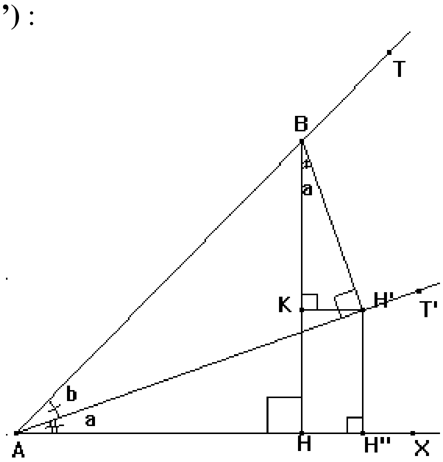


Figure (F)

On a :
$AH = AB\cos(a + b)$.
Comme : $AH = AH'' - HH'' = AH'' - KH'$,
et $AH'' = AH'\cos a = AB\cos b\cos a$ et
$KH' = BH'\sin a = AB\sin b\sin a$,
alors :
$AH = AB(\cos b\cos a - \sin b\sin a)$ et donc :
$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$.
Et dans le cas, par exemple, où l'on a :
$\frac{\pi}{2} < a + b < \pi$, alors :
le calcul commence par : $-AH = AB\cos(a + b)$...

A cette méthode, les pratiques scolaires préfèrent des méthodes, certainement plus rapides et plus élégantes, mais qui ne sauraient être idoines quant à l'obtention, visée ici, de la loi multiplicative interne à ***IR²***, par un 'calcul' dont la particularité est de devoir, obligatoirement, garder sauve la généalogie des connaissances, comme seul garant de la constitution d'une mémoire homogène et évolutive du système enseigné, l'élève. Un tel calcul, pensions-nous, doit alors mobiliser nécessairement, et de manière explicite, la proposition (p'), car, si ces méthodes préférées des pratiques scolaires offrent la possibilité d'obtenir rapidement des théorèmes généraux, sans devoir distinguer plusieurs cas, il arrive qu'elles poussent à substituer à un système conceptuel, paraissant trop étroit pour leur propre déploiement, un système plus étendu et, se faisant, poussent alors à instituer, entre les deux systèmes, une relation de transition, un passage sans transition du système étroit au système étendu, plutôt qu'une relation d'engendrement : le passage du système réputé étroit au système étendu s'effectuant alors par la construction du second grâce à quelque aménagement opéré sur le premier.

L'histoire des mathématiques regorge de ces moments d'institution de relations de transitions, opérées par les mathématiciens qui passent directement d'un premier système à un second sans que celui-ci soit complètement dégagé pour ce qu'il est véritablement. Et même, quand enfin ce système est spécifié, cette spécification peut consacrer définitivement la relation de transition entre les deux systèmes ignorant la relation d'engendrement qui pourrait les lier. C'est notamment le cas dans la transition du système des nombres réels au système des nombres complexes, telle qu'elle fut opérée par les algébristes italiens et leurs successeurs, pour les besoins de la résolution de l'équation de troisième degré et puis pour le théorème fondamental de l'algèbre, avec A. GIRARD plus tard.

GAUSS, WESSEL, ARGAND et HAMILTON, par qui le second système a enfin acquis ces titres de noblesse, ne se sont pas arrêtés sur la relation d'engendrement qui liait ***C*** à ***IR,*** comme nous tentons de le faire ici avec ce prolongement à ***IR²*** des moyennes, arithmétique et géométrique, et surtout les limitations, révélées par les quaternions, relatives à ce prolongement et au « principe de permanence » évoquées ci-dessus.

3.3. OBSTACLE A LA CONCEPTUALISATION DANS SON VERSANT SEMANTIQUE

3.3.1. Obstacle 'orthodoxie versus rationalité' dans l'exposition des mathématiques

Le processus de conceptualisation préconisée par la Situation donne les définitions de la notion de double et de la notion de carré d'un point avant celles de la somme et du produit de deux points dans le plan. C'est là une inversion dans l'exposition des mathématiques, inversion par rapport au modèle habituel des leçons, transposé de l'organisation orthodoxe des mathématiques. Cette inversion traduit la possibilité, évoquée par G.-G. GRANGER (GRANGER G.-G. 1994), de certaines opérations *« comme pouvant découler d'une organisation conceptuelle sous-jacente laissée indéterminée par le système actuel »*. C'est cette organisation conceptuelle que synthétise l'affirmation stipulant que : « le double du point, moyenne arithmétique de deux points, est la somme de ces deux points et le carré du point, moyenne géométrique de deux points, est le produit de ces deux points » : dans le processus de validation sémantique de l'Assertion, cette affirmation est considérée, par anticipation, comme devant être un théorème ; et pour qu'elle le soit une condition préalable doit être remplie : il fallait disposer d'abord des définitions des moyennes, arithmétique et géométrique, de deux points quelconques du plan ainsi que du double et du carré d'un point quelconque du plan.

Ainsi, s'agissant du problème d'existence d'un système opératoire actualisant celui formellement posé au terme du processus de la validation formelle de l'Assertion, la résolution de ce problème, passe nécessairement par cette inversion ; mais celle-ci est laissée indéterminée par la conception commune à propos du trinôme de second degré et des deux moyennes. Cette inversion étant la condition grâce à laquelle le processus de validation sémantique de l'assertion prend forme, nous sommes alors fondés à dire que ce processus modélise ce passage du conditionné à la condition énoncé par G.-G. GRANGER.

3.4. OBSTACLES A LA CONCEPTUALISATION DANS SON VERSANT PRAGMATIQUE

3.4.1. Obstacle 'syntaxe versus sémantique'

La démonstration de la clôture algébrique du Corps ***C*** des complexes concerne toute les équations algébriques à coefficients dans ***C***. Le processus de validation pragmatique de l'Assertion concerne seulement les équations de second degré et à coefficient réels. Mais la construction géométrique des solutions des équations de second degré à coefficient réels que ce processus préconise, notamment en introduisant la notion de ***C***-intersection d'une droite et d'une courbe, prépare à la démonstration de la clôture algébrique de ***C***, quoique restreinte aux équations algébriques à coefficient réels : en effet la construction de ces solutions à partir de l'intersection de droites et d'hyperboles ou à partir de droites et de paraboles, entrevoit la considération d'intersection de droites et de courbes de fonctions polynomiale de troisième degré et plus. Mais il y a fort à parier que l'analyse écologique de la démonstration en question ferait apparaître le caractère hégémonique de cadres purement syntaxiques pour l'établissement de cette dernière, jusqu'à rendre non viable l'adoption d'un cadre analytique-géométrique comme celui que nous proposons à travers la ***C***-intersection.

3.4.2. Obstacle 'global versus local'

Ainsi, si la construction préconisée des solutions des équations de second degré semble, en tant que propriété abstraite, être isolée et visée ici en elle-même, le passage des hyperboles aux paraboles puis des paraboles aux courbes des fonctions polynomiales de degrés supérieurs consacre le passage du local au global. Ce passage est basé sur des analogies opératoires analogues à celles mentionnées par G.-G. Granger quand il annonce son principe sur la question. Notons que ce passage nécessite aussi bien la maîtrise que l'intelligibilité du local et c'est le sens des dernières questions relatives au processus proposé pour la validation pragmatique de l'Assertion. Les pratiques didactiques, par contre, semblent privilégier l'abord du problème de la clôture algébrique de ***C*** directement dans sa globalité.

4. Analyse didactique a priori de la situation à l'aune du métalangage et des systèmes de réécritures de l'Observateur

4.1. A propos du métalangage et du système de réécriture de l'Observateur

Le savoir de l'Observateur se manifeste par des réécritures et du métalangage spécifiques ; et ce qui fait de ces derniers une manifestation de ce savoir c'est leur capacité à faire coopérer des connaissances, a priori indépendantes, pour la résolution de problèmes qui débordent chacune d'elles prise séparément.

L'analyse didactique a priori de la situation doit d'abord désigner, dans le texte de la situation, ce qui est constitutif de ces réécritures et de ce métalangage, pour ensuite montrer ce qui en eux est spécifique au savoir de l'Observateur.

Si le texte de la Situation peut être considéré métalangage organisant une exposition du corps ***C*** des complexes et donc analysable directement sur la base de ses capacités structurantes, la question prend une tournure nouvelle quand l'analyse porte sur la capacité du texte à intégrer des connaissances apparemment concurrentes pour les faire coopérer en vue de cette exposition : dans ce cas il est plus juste de montrer en quoi ce texte est métalangage d'un système de réécriture, et en quoi ce métalangage et ce système sont qualifiables de savoir de l'Observateur.

En effet, considérons à la suite de René GUITART (GUITART R. 2003) qu'un système de réécriture est la donnée de : un ensemble R de lettres, **r, s, t,** … qui sont des noms de règles de réécriture ; un ensemble **M** de mots, notés **m, n**, etc. ; un système P de possibilité de réécritures, c'es-à-dire de symboles $\mathbf{m} \rightarrow_{\mathbf{r}} \mathbf{n}$, que l'on lit : « en vertu de la règle **r** le mot **m** peut être remplacé par le mot **n** ; le mot **n** est dit être une réécriture de **m** ».

Le texte de la Situation mobilise un système de réécriture que l'on peut qualifier de savoir de l'Observateur s'il présente :

- des expressions qui, tout en sténographiant des connaissances, suggèrent les règles de calcul les transformant en d'autres expressions sténographiant d'autres connaissances ;
- Les connaissances sténographiées par les expressions du texte, celles sténographiées par les expressions obtenues via les règles de calcul, que les premières doivent suggérer, et ces mêmes règles, toutes doivent faire partie des connaissances officiellement exigibles des élèves de l'Enseignement Secondaire au plus;

Ces conditions expriment le fait que le texte de la Situation doit être tel que s'y gît, de manière latente, un système de réécriture en attente de déploiement et que ce déploiement doit aller de pair avec celui de la solution de la situation : Les règles de calcul que les expressions constitutives des données explicites de la situation sont censées suggérer sont assimilables aux règles de réécriture. Les expressions obtenues par la transformation de ces expressions originelles, grâce notamment à ces règles, sont des expressions par lesquelles on peut remplacer ces dernières en vertu de ces mêmes règles. Elles sont donc assimilables à des réécritures des expressions originelles. Ces deux types d'expressions sont les mots du système.

Ce qui fait la spécificité d’une possibilité de réécriture **m** $\rightarrow_r$ **n** attribuable à l’Observateur c’est que cette relation unissant la connaissance que sténographie le mot, ou l’expression originelle, **m** à celle que sténographie le mot **n** est une relation laissée dans l’implicite par les systèmes de réécritures anciens traitant ou des moyennes, arithmétique et géométrique, ou de la construction du corps ***C*** des complexes ou de sa clôture algébrique. C’est que, par définition, les moyennes, arithmétiques et géométriques, en tant que savoir de l’Observateur doivent procéder d’une problématisation les réunissant dans un même cadre d’introduction avec le corps ***C*** des complexes et sa clôture algébrique ; mais l’histoire des mathématiques peut fort bien laisser ce cadre dans l’implicite.

Les propos de J.-M. SALANSKIS sur les règles comme fondement de toute intersubjectivité trouve dans les deux moyennes, prises avec leur renvoi au cadre en question, une nette réalisation, il s’agit des propos selon lesquels :

> *« Les règles sont par nature « entre » la consignation écrite et le partage implicite. Il faut toujours qu’il y ait un partage de règles déjà données, non instaurées, non écrites par personne, pour qu’une intersubjectivité soit : la disponibilité d’une langue vernaculaire, on peut le reconnaître, garantit ordinairement une telle donne. Mais la règle ajoute à la règle, et ne le peut que par le biais d’une invention explicite, donnant matière à proposition symbolique dans le cercle social concerné. Le « vie » de la règle entre les hommes suppose donc à la fois son partage précompréhensif, inconscient, et sa fixation symbolique inventive, ouverte sur le futur de l’état de règle.»* (J.-M. SALANSKIS, 2001, p 151-152)

La construction de ***C,*** et de *H,* dans le cadre de la problématisation ayant pour objet le prolongement des deux moyennes à IR^2xIR^2, *puis* IR^3xR^3 sera « *cette invention, ou plutôt réinvention, explicite, donnant matière à proposition symbolique dans le cercle …*de la classe », celle-ci faite communauté scientifique : *la règle ajoute à la règle* est une sentence qui trouve ici une de ses réalisations dans le fait d’expliciter les propriétés formelles communes des deux moyennes pour ensuite les utiliser afin d’établir et justifier le prolongement de chacune d’elles.

L’analyse du texte de la Situation à l’aune des systèmes de réécriture de l’Observateur va consister à montrer que grâce à ce texte un système de réécriture attribuable à l’Observateur (proposition symbolique dans la citation) va nécessairement se déployer, dans le sens décrit ci-dessus, en même temps que se déploie la solution de la situation. Un lexique spécifique permet de ponctuer chacun de ces déploiements, c’est ce lexique qui joue le rôle de métalangage.

4.2. Analyse du texte de la Situation à l’aune du métalangage de l’Observateur

Concernant la situation proposée, parmi les expressions susceptibles de jouer le rôle du métalangage de l’Observateur nous désignons les expressions suivantes : *Assertion, validation formelle, sémantique et pragmatique de l’Assertion, données communes aux trois validations, données spécifiques à chacune des trois validations, processus de validation formelle, sémantique ou pragmatique, définition, énoncé mathématique, proposition mathématique et* ***C****-intersection*, désignant une notion ici introduite pour la circonstance.

Les raisons qui nous font dire que ces expressions représentent le métalangage de l’Observateur sont les suivantes :

- La moyenne arithmétique seule et la moyenne géométrique seule ne permettent pas de dérouler la démonstration de la clôture algébrique de ***C***, même restreinte aux équations de second degré à coefficients réels. Le rôle de l’Assertion est de suggérer aux professeurs faire coopérer ces deux moyennes pour dérouler les linéaments de cette démonstration.

- Ces linéaments, quoique restreignant la démonstration en question aux équations de second degré à coefficients réels, trouvent en la notion de ***C***-intersection le moyen pour les professeurs d'entrevoir la généralisation de la démonstration, notamment en opérant par extensions successives de cette notion aux courbes représentatives de fonctions polynomiales de degré supérieur à 2.
- Les données communes aux validations, formelle, sémantique et pragmatique, les données spécifiques à chacune d'elles et les processus de validation sont censés les amener à dérouler effectivement les linéaments en question de la démonstration.

La question est maintenant de savoir pour quel système de réécriture ce lexique est métalangage.

4.3. Analyse du texte de la situation à l'aune du système de réécriture de l'Observateur

Les deux familles de relations binaires $(\sigma_N)_{N\in\pi}$et $(\tau_N)_{N\in\pi}$sont analogues à des système de réécriture selon la définition mentionnée ci-dessus.

En outre, considérons les propositions analogues à la proposition suivante : $(\forall(a,b)\in IR^2)[(\mathcal{P}(a,b)=P_i(a,b))\ ou\ bien\ (\mathcal{P}(a,b)=P_d(a,b))]$.

Demander à établir la véracité de ces propositions c'est demander à démontrer qu'elles constituent un système de réécriture dont les mots sont les membres des égalités contenues dans les propositions et dont les règles de réécritures, en vertu desquelles le mot de chaque égalité peut être remplacé par le second mot de la même égalité, se réduisent à la règle suivante : '***avoir la même expression analytique en a et b***'.

Or le calcul de l'expression analytique de ***S(a,b)*** se confond avec la résolution de l'équation (E) de second degré suivante : $x^2 - 2ax + b = 0$; le même calcul doit alors valoir pour les expressions analytiques de $\mathcal{P}(a,b)$, $P_i(a,b)$ et $P_d(a,b)$**.** Ceci est une stratégie, du moins une tactique, que le système de réécriture adopté dans la situation doit suggérer aux professeurs, et on peut, à juste titre, la qualifier de stratégie de l'Observateur, vu qu'elle fusionne des connaissances anciennement sans lien apparent.

Cette dimension épistémique de cette stratégie apparaît clairement à propos du calcul de l'expression analytique de $\mathcal{P}(a,b)$**.** En effet, la définition de $\mathcal{P}(a,b)$ met en scène deux points ***M*** et ***M'*** ; désignant par **(*x,y*)** et **(*x',y'*)** les coordonnées cartésiennes, respectivement, de ***M*** et ***M',*** il s'agit alors de calculer ***x, x', y*** et ***y',*** chacun en fonction de ***a*** et ***b.*** Or, entre ce calcul et le discriminant $4a^2 - 4b$ de l'équation (E), le lien n'est pas, a priori, évident ; pourtant, pour peu que l'on convienne de s'interdire dans l'effectuation de ce calcul de procéder par disjonction des cas, articulée autour de ***x*** et ***x'*** et de ***y*** et ***y',*** ce calcul devient presque impossible à effectuer sans passer par l'expression $4a^2 - 4b$ comme calcul auxiliaire.

Pour s'en convaincre, déroulons le calcul de l'expression analytique de $\mathcal{P}(a,b)$ en respectant la contrainte imposée à l'effectuation de ce calcul :

Soient donc deux points ***M*** et ***M'*** du plan. Désignons par **(*x,y*)** et **(*x',y'*)** les coordonnées cartésiennes respectives de ces points. Soient ***a*** et ***b*** deux réels. On a :

$$\begin{cases} M\,\sigma_{I_a}M'; \\ M\,\tau_{I\sqrt{b}}M', si\ b\geq 0 \\ M\,\tau_{J\sqrt{-b}}M', si\ b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+x'=2a \\ y+y'=0 \\ xy'+yx'=0 \\ b \text{ et } xx'-yy' \text{ ont même signe} \\ (x^2+y^2)(x'^2+y'^2)=b^2 \end{cases}$$

Comme on a l'identité remarquable suivante : ***(x²+y²)(x'²+y'²)= (xx'-yy')²+(xy'+yx')²,*** il vient : $\begin{cases} M\,\sigma_{I\alpha}M'; \\ M\,\tau_{J\sqrt{b}}M', si\ b \geq 0 \\ M\,\tau_{J\sqrt{-b}}M', si\ b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + x' = 2a \\ y + y' = 0 \\ xy' + yx' = 0 \\ xx' - yy' = b \end{cases}$

Or $\begin{cases} x + x' = 2a \\ y + y' = 0 \\ xy' + yx' = 0 \\ xx' - yy' = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + x' = 2a \\ y + y' = 0 \\ y(x - x') = 0 \\ xx' + y^2 = b \end{cases} (\Sigma).$

Du système (Σ) on tire l'égalité (e) suivante :
$4a^2 - 4b = (x - x')^2 - 4y^2$ (e)

Deux cas se présentent alors :

- Cas où $a^2 - b < 0$: Dans ce cas, $(x - x')^2 < 4y^2$, or d'après le système (Σ) on a : $(x - x')^2 = 0$ ou $4y^2 = 0$, par suite $y \neq 0$ et $x - x' = 0$.

  On en déduit que $\begin{cases} x = x' = a \\ y = \sqrt{b - a^2} \\ y' = -\sqrt{b - a^2} \end{cases}$

  Ainsi, dans ce cas on a : $\mathcal{P}(a,b) = \{M(a, \sqrt{b - a^2}); M'(a, -\sqrt{b - a^2})\}$

- Cas où $a^2 - b \geq 0$: Dans ce cas, on a : $(x - x')^2 \geq 4y^2$, comme $(x - x')^2 = 0$ ou $4y^2 = 0$, il vient **y=0,** d'où : $\begin{cases} y = y' = 0 \\ x + x' = 2a, \\ xx' = b \end{cases}$ soit : $\begin{cases} x = a + \sqrt{a^2 - b} \\ x = a - \sqrt{a^2 - b}. \\ y = y' = 0 \end{cases}$

  Ainsi dans ce cas, on a : $\mathcal{P}(a,b) = \{M(a + \sqrt{a^2 - b}; 0); M'(a - \sqrt{a^2 - b}; 0)\}$

  D'où : $\mathcal{P}(a,b) = \begin{cases} \{M(a; \sqrt{b - a^2}); M'(a; -\sqrt{b - a^2})\} \text{ si } a^2 - b < 0 \\ \{M(a + \sqrt{a^2 - b}; 0); M'(a - \sqrt{a^2 - b}; 0)\} \text{ si } a^2 - b \geq 0 \end{cases}.$

Le rôle joué par l'égalité (e), et donc par son premier membre, dans le calcul déroulé ci-dessus est capital ; or ce membre est l'expression du discriminant de l'équation de second degré que sténographie l'expression ***S(a,b).*** Ce lien inattendu, du moins non exploré dans les anciens systèmes, est le genre de connaissance qualifiable de savoir de l'Observateur.

Le calcul des expressions analytiques de $P_i(a,b)$ et de $P_d(a,b)$ doit suggérer aux professeurs considérer les couples d'expressions suivantes :

$(M \in (\Delta_b \cup \Delta_{b,a}) \cap \delta a\,;\ M(f(a;b); g(a,b))\,), f$ et g deux fonctions numériques à deux variables qu'il s'agit alors d'expliciter **.** La première et la deuxième projection de ce couple sont deux mots du système de réécriture dont le déploiement, avions-nous dit, va de pair avec la solution de la Situation. La deuxième projection est une réécriture de la seconde. La nature de l'ensemble $(\Delta_b \cup \Delta_{b,a}) \cap \delta a$ doit suggérer à ces professeurs que la règle de réécriture correspondante s’apparente avec la résolution de l’équation de second degré, en vertu de quoi ils auront à dérouler un calcul analogue au calcul suivant :

$$M(x,y)\in(\Delta_b\cup\Delta_{b,a})\cap\delta a\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y=a\\ y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{x}\right)\end{cases}\text{ou}\begin{cases}y=a\\ y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2a^2-b}{x}\right)\end{cases}\right)$$

Ainsi, on a : x est tel que $\left(a=\frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{x}\right)\text{ ou } a=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2a^2-b}{x}\right)\right)$; soit :

$$(\Delta_b\cup\Delta_{b,a})\cap\delta a=\begin{cases}\left\{M\left(a+\sqrt{a^2-b};a\right);M'\left(a-\sqrt{a^2-b};a\right)\right\},\text{si } a^2-b\geq 0\\ \left\{M\left(a+\sqrt{b-a^2};a\right);M'\left(a-\sqrt{b-a^2};a\right)\right\},\text{si } b-a^2\geq 0\end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases}P_i(a,b)=\begin{cases}\left\{M\left(a+\sqrt{a^2-b};0\right);M'\left(a-\sqrt{a^2-b};0\right)\right\},\text{si } a^2-b\geq 0\\ \left\{M\left(a+\sqrt{b-a^2};0\right);M'\left(a-\sqrt{b-a^2};0\right)\right\},\text{si } a^2-b<0\end{cases}\\ P_d(a,b)=\begin{cases}\left\{N\left(a;\sqrt{a^2-b}\right);N'\left(a;-\sqrt{a^2-b}\right)\right\},\text{si } a^2-b\geq 0\\ \left\{N\left(a;\sqrt{b-a^2}\right);N'\left(a;-\sqrt{b-a^2}\right)\right\},\text{si } a^2-b<0\end{cases}\end{cases};$$

Il vient :

$$\begin{cases}\begin{cases}P_i(a,b)=\left\{M\left(a+\sqrt{a^2-b};0\right);M'\left(a-\sqrt{a^2-b};0\right)\right\}\\ P_d(a,b)=\left\{N\left(a;\sqrt{a^2-b}\right);N'\left(a;-\sqrt{a^2-b}\right)\right\}\end{cases},\ si\ a^2-b\geq 0\\ \begin{cases}P_i(a,b)=\left\{R\left(a+\sqrt{b-a^2};0\right);R'\left(a-\sqrt{b-a^2};0\right)\right\}\\ P_d(a,b)=\left\{T\left(a;\sqrt{b-a^2}\right);T'\left(a;-\sqrt{b-a^2}\right)\right\}\end{cases},\ \text{si } a^2-b<0\end{cases}.$$

Or, dans le cas où $a^2-b\geq 0$, **on a :** $ON.ON'\neq|b|$ et dans le cas où $a^2-b<0$, *on a:* $OR.OR'\neq|b|$, il vient :

$$\begin{cases}\begin{cases}P_i(a,b)=\mathcal{P}(a,b)\\ P_d(a,b)\neq\mathcal{P}(a,b)\end{cases},\ si\ a^2-b\geq 0\\ \begin{cases}P_i(a,b)\neq\mathcal{P}(a,b)\\ P_d(a,b)=\mathcal{P}(a,b)\end{cases},\ \text{si } a^2-b<0\end{cases}.$$

On a donc : $(\forall(a,b)\in IR^2)\left[\left(\mathcal{P}(a,b)=P_i(a,b)\right)\ ou\ bien\ \left(\mathcal{P}(a,b)=P_d(a,b)\right)\right]$.

Le calcul déroulé ci-dessus est en adéquation avec le type de connaissances considérées comme étant savoir de l’Observateur : en effet, ce calcul montre que le système de réécriture sous-jacent à la Situation se déploie en intégrant, entre autres choses : moyenne arithmétique, moyenne géométrique, résolution de l’équation de second degré et étude de familles de courbes et leurs intersections avec une famille de droites etc... En fait, les deux moyennes ne font que sténographier le système opératoire ***(IR ;+ ;×)***, or on sait que ce dernier se déploie lui-même en le système ***(IR² ;+ ;×)***, donnant lieu au corps ***C*** des complexes. Les deux moyennes contiennent donc une complexité latente en attente de déploiement, il s’agit de leur propre transfert à ***IR²***, lequel transfert s’accompagne, de manière nécessaire, du dévoilement du système opératoire ***(IR² ;+ ;×)***. Pour provoquer le déploiement de cette complexité, il fallait disposer d’un système de réécriture qui puisse faire intervenir de manière concomitante les deux moyennes et ce, pour son propre déploiement. Le texte de la Situation tente de rendre disponible un tel système de réécriture. Cette façon de faire intervenir les deux moyennes, bien que banale en elle-même, est absente des objets d’enseignements. C’est pour cette raison qu’elle est, en tant que connaissance, qualifiable de savoir de l’Observateur. pour s’en convaincre observons la à l’œuvre dans le déploiement de la solution de la Situation : parmi les expressions du texte de cette situation qui doivent suggérer aux professeurs faire intervenir les deux moyennes de manière concomitante, sinon de manière dialectique, pour le déploiement de la solution de la Situation, il y a les définitions **(di)**$_{1\leq i\leq 4}$, pour une part, et les énoncés **(e'1)** et **(e'2)** suivants pour une autre :

- **(e'1) :** $M\ \sigma_N\ M' \Leftrightarrow M+M'=2\times N$;
- **(e'2) :** $M\ \tau_N\ M' \Leftrightarrow M\times M'=N^2$.

En effet, comme dans la droite réelle, les définitions des moyennes, arithmétique et géométrique, dans le plan sont analogues : pour la première, on considère les moyennes arithmétiques des coordonnées cartésiennes respectives de la première et de la deuxièmes projection du couple de points concernés, et pour la seconde, les moyennes géométriques des coordonnées polaires respectives de ces mêmes projections ; sauf que, pour la seconde, la moyenne géométrique des deuxièmes projections ne concerne pas les angles polaires, mais les rotations autour de O auxquelles ces angles renvoient : la composition de ces rotations étant une loi interne multiplicative…. Il se pourrait d'ailleurs que la prégnance des angles polaires a fait qu'on voit la moyenne arithmétique (celle de ces angles) voire même la somme (celle encore de ces angles) là où il faut voir la moyenne géométrique ou le produit.

La même analogie est mobilisée dans les définitions du double d'un point et du carré d'un point, suggérées notamment par celles des deux moyennes.

Ces deux dernières définitions étant dûment formulées et sachant qu'à tout couple $(M\,;\,M')$ de points du plan on peut faire correspondre de manière univoque l'ensemble des points N et l'ensemble des point P tels que $M\ \sigma_N\ M'$ et $M\ \tau_P\ M'$, des énoncés **(e'1)** et **(e'2)** on tire successivement les deux lois internes dont il faut doter IR^2 pour que les deux moyennes soit prolongeables aux points du plan.

Effectuons le calcul pour la loi multiplicative $\times$: Posons $\tau(M;M') = \{P\in\pi/\ M\tau_P M'\}$. Par définition de τ_P on a :

$$\left(\forall(M\,;\,M')\in\pi^2\right)\left(\tau(M;M') = \left\{P\left(\sqrt{\rho.\rho'};\ \tfrac{\theta+\theta'}{2}\right);\ P'\left(\sqrt{\rho.\rho'};\ \tfrac{\theta+\theta'}{2}+\pi\right)\right\}\right);$$

$(\rho\,;\,\theta)$ et $(\rho'\,;\theta')$ étant les coordonnées polaires respectivement de M et M'. Or d'après **(d4)**, $P^2 = P'^2 = K(\rho.\rho';\ \theta+\theta')$, par suite , d'après **(e'2)** : $M\times M' = K(\rho.\rho';\ \theta+\theta')$.

Supposons que M et M' aient pour coordonnées cartésiennes, respectivement, $(x;y)$ et $(x';y')$ l'on considère alors les relations suivantes :

$x = \rho cos\theta, y = \rho sin\theta, x' = \rho' cos\theta'$ et $y' = \rho' sin\theta'$,

comme $x_K = \rho\rho'\cos(\theta+\theta')$ et $\cos(\theta+\theta') = cos\theta cos\theta' - sin\theta sin\theta'$,

alors $x_K = \rho\rho'(cos\theta cos\theta' - sin\theta sin\theta')$, soit : $x_K = \rho cos\theta.\rho' cos\theta' - \rho sin\theta.\rho' sin\theta'$.

Il vient : $x_K = xx' - yy'$ et, de manière analogue, $y_K = xy' + yx'$.

Par la suite on pose : $(x;y)\times(x';y') = (xx'-yy';\ xy'+yx')$.

Remarquons que par définition de τ et du carré d'un point on avait déjà :

$\left(P\left(1;\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = \left(P'\left(1;\frac{3\pi}{2}\right)\right)^2 = I_1\times I_{-1}$, ainsi $(J_1)^2 = (J_{-1})^2 = I_{-1}$.

Dans le même ordre d'idée, considérons l'expression :

$S'(a,b) = \left\{M\in\pi/\frac{1}{2}\left(M+\frac{I_b}{M}\right) = I_a\right\}$.

Le texte de la Situation doit suggérer aux professeurs de montrer que $S'(a,b)$ est une réécriture de $\mathcal{P}(a,b)$, la règle de réécriture les liant étant la relation 'avoir la même expression analytique'. L'expression $\frac{1}{2}\left(M+\frac{I_b}{M}\right) = I_a$ doit ensuite leur suggérer anticiper les propriétés de l'addition et de la multiplication signalées dans cette dernière expression, telle que la multiplication est distributive par rapport à l’addition etc., et mobiliser un calcul analogue à celui avec lequel on traite habituellement le trinôme de second degré. Aussi, devant cette expression, doit-on utiliser les définitions **(di)**$_{1\leq i\leq 4}$ et les énoncés **(e’1)** et **(e’2)** pour dérouler un calcul établissant successivement les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{2}\left(M+\frac{I_b}{M}\right)=I_a \Leftrightarrow M^2-2MI_a+I_b=0$$

$$M^2-2MI_a+I_b=0 \Leftrightarrow (M-I_a)^2=I_{a^2-b}$$

$$(M-I_a)^2=I_{a^2-b} \Leftrightarrow (M-I_a)^2=\begin{cases}(I_{\sqrt{a^2-b}})^2\; si\; a^2-b\geq 0\\ \left(J_{\sqrt{b-a^{22}}}\right)^2\; si\; a^2-b<0\end{cases}$$

$$(M-I_a)^2=\begin{cases}(I_{\sqrt{a^{22}-b}})^2\; si\; a^2-b\geq 0\\ \left(J_{\sqrt{b-a^{22}}}\right)^2\; si\; a^2-b<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M=\begin{cases}I_a+I_{\sqrt{a^2-b}}\; ou\; I_a+I_{-\sqrt{a^2-b}},\; si\; a^2-b\geq 0\\ I_a+J_{\sqrt{b-a^{22}}}\; ou\; I_a+J_{-\sqrt{b-a^{22}}},\; si\; a^2-b<0\end{cases}.$$

D’où :

$$S'(a,b)=\begin{cases}\{M(a+\sqrt{a^2-b}\,;0);M'(a-\sqrt{a^2-b}\,;0)'\},'si\; a^2-b\geq 0\\ \{M(a\,;\sqrt{b-a^2});M'(a\,;-\sqrt{b-a^2}\,)''\},si\; a^2-b<0\end{cases}.$$

Il vient : $(\forall(a,b)\in IR^2)(S'(a,b)=\mathcal{P}(a,b))$

Il est un autre aspect où se manifeste l’adéquation du texte de la situation avec le genre de connaissances qualifiables de savoir de l’Observateur: il s’agit de la notion de ***C***-intersection par laquelle nous associons aux solutions d’une équation de second degré, l’intersection d’une courbe et d’une droite, que ces solutions soit réelles ou non. La ***C***-intersection déborde la notion classique d’intersection physique d’une courbe et d’une droite ou de deux courbes pour embrasser les cas de figure où cette intersection, lorsqu’elle est vide, exprime le fait que les solutions que cette intersection est censée représenter sont des nombres complexes. La ***C***-intersection associe à chaque équation de second degré à coefficient réels des triplets formé chacun d’une droite et d’un couple de courbes. Chacun de ces couples est formé d’une courbe fondamentale et d’une courbe auxiliaire : quand la droite coupe la courbe fondamentale son intersection avec la courbe auxiliaire est vide et ceci indique que l’équation admet des solutions réelles. Quand la droite coupe la courbe auxiliaire son intersection avec la courbe fondamentale est vide, ceci indique que les solutions de l’équation sont des nombres complexes non réels. Illustrons cela en étudiant les triplets du texte de la Situation :

- Dans le triplet : $\left(\delta a : y = a\,;\,\Delta_b : y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{x}\right);\,\Delta_{b,a}\;: y=\frac{1}{2}(x+\frac{2a^2-b}{x})\right)$, la courbe Δ_b est la courbe fondamentale et la courbe $\Delta_{b,a}$ est la courbe auxiliaire. L’intersection $\Delta_b\cap\delta a$ renvoie à l’équation $x^2-2ax+b=0$ (E). L’intersection $\Delta_{b,a}\cap\delta a$ renvoie à l’équation $x^2-2ax+2a^2-b=0$ (E’). Les discriminants de (E) et de (E’) sont opposés. Quand $\Delta_{b,a}\cap\delta a\neq\emptyset$ les deux points de l’intersection de la droite d’équation $x=a$ avec le cercle de centre ***A(a,0)*** passant par la projection orthogonale sur l’axe des abscisse d’un des points de $\Delta_{b,a}\cap\delta a$ représente les solutions complexes de l’équation (E).
- Dans le couple : $(\,\delta b : y=b\,;\Delta_a^{+} : y=x(2a-x)\,)$, la courbe Δ_a^{+} est la courbe fondamentale. Il s’agit de compléter ce couple par la courbe auxiliaire de la courbe Δ_a^{+}, en tant

que courbe fondamentale, afin d'obtenir le triplet. La courbe auxiliaire de la courbe Δ_a^+ est la courbe Δ_a^- d'équation $\boldsymbol{y = x(x-2a) + 2a^2}$.

Le couple 'Courbe fondamentale / Courbe auxiliaire' du triplet peut être considéré comme faisant partie des couples de mots du système de réécriture que le texte de la Situation ne fait que sténographier - puisque le déploiement de ce système va de pair avec celui de la solution de la Situation. La règle en vertu de laquelle on remplace la courbe fondamentale par la courbe auxiliaire est évidente : pour passer de (E) à (E') on garde le coefficient censé être la '*somme'* des solutions, ici ***2a,*** et on remplace le coefficient censé être leur '*produit*', ici ***b,*** par la somme dont les termes sont le double du carré de la moitié du premier coefficient, pour le premier terme, et l'opposé du second coefficient, comme second terme, soit, ici, ***2a²-b.*** Le texte de la situation doit suggérer aux professeurs qu'on effectue ce remplacement quand, l'équation n'admettant pas des solutions réelles, la représentation de ses solutions ***à partir de*** l'intersection de la droite du triplet avec la courbe fondamentale est impossible, cette intersection étant alors vide. La courbe auxiliaire permet alors de contourner cette impossibilité. En fait, les quaternions nous apprennent que l'acquisition des seules connaissances relatives au corps ***C*** des complexes doit suffire pour pouvoir effectuer ce contournement : chez le sujet connaissant, entrain de chercher la réponse aux questions relatives à la ***C***–intersection, ces connaissances interviennent sous forme de la mobilisation, comme modèle implicite, des propriétés suivantes :

- Si la composante vectorielle de la somme de deux nombres est nulle alors les composantes vectorielles de ces deux nombres sont des vecteurs opposés.
- si, en outre, la composante vectorielle du produit de ces deux nombres est nulle alors : ou la composante vectorielle de chacun des deux nombres est nulle, ou les composantes scalaires des deux nombres sont égales.
- Ainsi, si la composante scalaire de la somme des deux nombres est ***2a*** et celle de leur produit est ***b,*** et sachant que $\boldsymbol{b \geq a^2}$, alors ces deux nombres, en tant qu'éléments de l'espace d'Hamilton EH sont de la forme :

$$\left(a; \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ et } \left(a; \begin{pmatrix} -y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ avec } a^2 + y^2 = b.$$

Les deux éléments sont donc $\left(a; \begin{pmatrix} \sqrt{b-a^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\left(a; \begin{pmatrix} -\sqrt{b-a^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

- A ces deux éléments correspondent les deux points suivants du plan d'Argand-Cauchy : $M\left(a\,;\sqrt{b-a^2}\right)$ et $M'\left(a\,;-\sqrt{b-a^2}\right)$.
- Dans le plan usuel les points M et M' sont les points intersection de la droite d'équation $(d): x = a$ et du cercle d'équation $x^2 + y^2 = b$.
- C'est aussi l'intersection de la droite (d) et du cercle d'équation $(x-a)^2 + y^2 = b - a^2$.
- Ce dernier cercle est le cercle de centre $\Omega\ (a, 0)$ passant par les deux points solutions de l'équation : $x^2 - 2ax + 2a^2 - b = 0$; d'où l'équation de la courbe auxiliaire.

En d'autres termes, connaissant la composante scalaire a des 2 quaternions inconnus, les cercles orientés les représentant en tant qu'éléments de l'Espace EH de Hamilton ont, l'un et l'autre, pour rayon, $|a|$ et pour sens de parcours celui déterminé par le signe de a. Il reste à trouver leurs composantes vectorielles opposées respectives. Sachant que ces deux quaternions sont des complexes, il s’agit alors de trouver les deux translations de vecteurs $\varepsilon k\vec{u}, k$ un réel positif ou nul, $\varepsilon = \pm 1$, telles que les images, par ces translations, du cercle de centre O, de rayon $|a|$, contenu dans le plan $"y = 0"$ soient les deux éléments de l’espace EH correspondants aux deux complexes : nous savons que $k = \sqrt{b - a^2}$. Dans le plan usuel, le cercle de centre $\Omega\ (a, 0)$ et de rayon $\sqrt{b - a^2}$, coupe l’axe des abscisses en les points solutions de l’équation $x^2 - 2ax + 2a^2 - b = 0$. D’où l’algorithme de construction géométrique des solutions de l’équation (E) via celle des solution de l’équation (E').

Le système didactique s’érige au niveau de l’Observateur à propos des moyennes, arithmétique et géométrique, si, au sein des professeurs de mathématique du lycée, la mobilisation de ce modèle implicite intervient dès que ceux-ci sont exposés aux questions relatives à la ***C***–intersection. La confrontation de la Situation à la contingence vise l’obtention d’informations sur ce sujet et sur les autres.

5. Confrontation de la situation à la contingence

5.1. Contexte et cadre de la confrontation

Dans les Ecoles Normales Supérieures (ENS) et les Centres Pédagogiques Régionaux (CPR) marocains, une partie du programme de la formation initiale à l’enseignement des mathématiques, respectivement dans les lycées et dans les collèges, est consacrée à la didactique des mathématiques (un volume horaire global d’environ 112 heures à raison de 4 heures par semaine pendant l’année de formation). L’analyse des programmes de mathématiques, des manuels scolaires des divers niveaux d’enseignement, des travaux d’élèves et de leçons de professeurs en exercice est désigné, institutionnellement, comme devant être le prétexte à l’introduction d’éléments de didactique théorique des mathématiques. Les éléments à introduire sont laissés à la discrétion du professeur.

Chargé d’assurer le module « didactique des mathématiques » à l’ENS de Casablanca, c’est abordant la Théorie des Situations Didactiques en Mathématique que j’ai émis l’idée d’associer les Situations, d’action, de formulation et de validation aux stipulations de la triple validité d’un énoncé mathématiques à savoir, les validités, syntaxique, sémantique et pragmatique. Dans la perspective d’illustrer cette association, j’ai mis au point la triple validation de l’Assertion, objet de cet article.

5.2. Deroulement effectif de la confrontation

La confrontation a concerné les promotions de l’ENS de Casablanca des années universitaires 2006-2007, 2007-2008 et 2008-2009. Elle est passée chaque fois par les 3 étapes successives décrites dans la méthode d’approches (se reporter aux étapes de l’arbre de décision substrat de l’échelle épistémique de Gras à la page 7). La première et la deuxième étape sous forme de devoir-maison, la troisième sous forme d’un devoir surveillé de 4 heures rentrant dans le cadre de l’évaluation institutionnelle de leurs travaux pendant l’année de formation. Chaque étape est suivie d’un débat et d’un travail sur la correction de la partie de la situation qui lui correspond et de la préparation à l’étape suivante.

Le défi à relever, pour le groupe-classe, est double : il s’agit d’obtenir une amélioration sensible des résultats afin de déclarer la Situation, objet d’étude, apte à fonctionner comme nid de situations didactiques directement utilisables par le professeur dans la classe du baccalauréat, section ‘sciences mathématiques’, et déclarer, par la même occasion, les futurs professeurs, membres du groupe, aptes à jouer pleinement ce rôle.

Les résultats enregistrés ne sont pas à la hauteur de cet espoir. Cela fut ressenti comme un double échec. Echec, pour le professeur de didactique quant à l'intelligibilité de la Situation qu'il propose aux futurs professeurs. Echec des futurs professeurs à s'adapter vite aux exigences de compréhension d'une Situation de ce genre et à interagir avec elle, quitte à proposer des simplifications, des amendements, à même de la rendre abordable. La situation, son corrigé, son analyse et ses prolongement est transformée ensuite en une occasion d'approfondissement de la formation en mathématique ainsi qu'un aperçu sur la recherche en didactique des mathématiques.

5.3. Resultats et analyse de la confrontation

Voici les résultats obtenus selon chacune des trois postures :

q / p	q1	$\overline{q1}$	Marges
p1	**0**	**17**	**17**
$\overline{p1}$	**0**	**83**	**83**
Marges	**0**	**100**	**100**

$n_{p1} > n_{q1}$

Il y a non admission du couple (*p1 ; q1*) à la soumission à l'analyse statistique implicative : En effet, l'intensité d'implication, qui est définie par GRAS comme étant la qualité d'admissibilité de $pi \Rightarrow qi$ est non définie pour les chiffres enregistrés.

q / p	q2	$\overline{q2}$	Marges
p2	**0**	**21**	**21**
$\overline{p2}$	**0**	**79**	**79**
Marges	**0**	**100**	**100**

$n_{p2} > n_{q2}$

Comme pour (*p1 ; q1*), il y a non admission du couple (*p2 ; q2*) à la soumission à l'analyse statistique implicative.

q / p	q3	$\overline{q3}$	Marges
p3	**7**	**18**	**25**
$\overline{p3}$	**11**	**64**	**75**
Marges	**18**	**82**	**100**

$n_{p3} > n_{q3}$

Comme pour (*p1 ; q1*) et (*p2 ; q2*) il y a non admission du couple (*p3 ; q3*) à la soumission à l'analyse statistique implicative. On remarque une petite amorce vers l'admission, mais elle est encore trop insuffisante, pour parler d'une percée significative.

Ces résultats nous ont surpris. En effet nous attendions que les étudiants, après la première et la deuxième étape soient suffisamment imprégnés de la situation, et que la réalisation de ces deux étapes soit suffisante pour que la troisième connaisse des résultats significativement meilleurs. Nous tablions alors sur la réalisation par les étudiants d'au moins le niveau N3, le niveau le plus bas, dans l'échelle épistémique de Gras (se reporter à la page 9) ; même cela n'a pas pu avoir lieu ! L'analyse des travaux rendus par les étudiants montre que la Situation leur est hermétique le long des trois étapes et, dans l'arbre de décision substrat de l'échelle en question (se reporter à la page 7), c'est le chemin [(p1,q1), (p2,q2) et (p3, q3) non admissibles] aboutissant à la feuille (***F*31**), qui serait réalisé par le système didactique.

Par contre, le corrigé de la Situation a reçu, une fois qu'il été dévoilé, l'adhésion complète des étudiants. Il a même généré chez eux des prises de positions spontanées exprimant leurs doutes quant à l'efficacité et la pertinence des méthodes d'enseignement actuelles à propos, notamment, du nombre et de l'algèbre élémentaire.

Les réactions de ces étudiants au corrigé de la situation, qui ont pris des formes diverses : questionnement, débats, proposition d’exposés sur la Situation, nous est apparu comme argument fort en faveur de la conclusion affirmant que le contrat didactique que les pratiques scolaires nouent autour *des opérations sur les nombres* rend improbable la réussite de toute tentative qui s’apparenteraient à une détransposition didactique (ANTIBI A. BROUSSEAU G., 2000), visant obtenir des étudiants licenciés es mathématiques ces mêmes opérations, mais comme résultat d’*un calcul* usant de moyens élémentaires qui ne mettent en œuvre que des connaissances exigibles seulement des élèves de l’Enseignement secondaire (16-17 ans).

6. Conclusion

Les questions qui sous-tendent cette recherche sont : Comment ériger les notions de moyennes, arithmétique et géométrique, en ‘Savoir de l’Observateur’ comme le préconise la TSDM ? C’est-à-dire, comment faire de ces notions un moyen de reconnaître et de traiter des connaissances et des rapports entre connaissances ? Et quel système de réécriture, quel métalangage l’explicitation de ce moyen, de ce traitement, nous imposerait-il de concevoir, d’élaborer ?

Si le didacticien doit aborder ces questions, il ne peut pas en faire, exclusivement, siennes, sinon son travail risquerait de se réduire à une suite de prescriptions. En les abordant, il ne peut pas non plus en faire de manière exclusive, des questions à travers lesquelles le travail des mathématiciens serait interpelé, critiqué, sinon son propre travail s’inscrirait uniquement dans le cadre de l’épistémologie historique, voire de la philosophie des mathématiques.

Par contre, cette question s’impose comme sténogramme d’un faire question qui a court chez les systèmes didactiques des mathématiques, dès que ceux-ci posent les deux moyennes parmi les objets d’enseignement. La structuration adoptée par ces systèmes pour ces objets, pourrait faire des objets d’apprentissage le lieu où se déploie la réponse idoine à ce faire question ou le lieu où elle s’élude.

Interroger la structuration des objets d’enseignement sur la nature de cette réponse est du ressort exclusif du didacticien. Ce travail d’interrogation lui fait prendre tour à tour, la posture de mathématicien épistémologue et celle de scientifique constructeur d’artefactures. Ce travail fait pendant à la question suivante : Comment spécifier le rapport des systèmes didactiques aux deux moyennes, érigées en ‘Savoir de l’Observateur’ ?

Pour faire des moyennes, arithmétique et géométrique, ce moyen de reconnaissance et de traitement des connaissances et des rapports entre connaissances, nous avons procédé à l’étude de la possibilité de faire apparaître la construction des corps $\boldsymbol{C}$ et H, des complexes et des quaternions, comme processus d’authentification, en tant qu’objets mathématiques, des prolongements des deux moyennes, aux couples des points du plan et aux couples des points de l’espace.

Grâce à cette étude, nous avons pu réaliser une reconstitution de la généalogie des connaissances relatives à la recherche d’une extension de la multiplication entre réels à une multiplication entre couples, triplets et quadruplets de réels. Les connaissances relatives aux rotations vectorielles, prises avec leur renvoi au repérage dans le plan et dans l’espace, se sont alors progressivement imposées à nous comme fils conducteurs de ces extensions successives.

Nous avons pu aussi grâce à cette étude, proposer une seule et même représentation géométrique pour les nombres, qu’ils soient réels, complexes ou quaternions. Cette représentation nous a amené à introduire ce que l’on pourrait désigner comme étant « l’Espace d’Hamilton ». Grâce à elle, nous avons pu donner du plan d’Argand-Cauchy une interprétation qui le fait s’intégrer de manière naturelle à cet espace.

La dénomination du ‘prolongements des deux moyennes’, cette représentation géométrique des nombres et « l’Espace d’Hamilton » apparaissent alors comme réifiant un métalangage pour un nouveau système d’écriture : celui-ci retraçant les étapes d’une reconstitution de la généalogie des multiplications entre couples, triplets, quadruplets de réels et entre réels.

Tout cela, s’articule autour de la question suivante : Les acquis actuels du professeur de l’Enseignement Secondaire, peuvent-ils le rendre apte, s’il est mis dans la voie d’une telle reconstitution, à en dévoiler l’objet et à l’expliciter ?

Nous avons d’abord tenté de montrer que si le système didactique représenté par ce professeur se positionne au niveau de l’Observateur à propos des deux moyennes, alors la réponse par l’affirmative à cette question devait s’imposer.

Nous avons montré comment l’admission de ce système à ce niveau peut se confondre avec l’obtention de tableaux de contingence relatifs à l’implication de Gras, enregistrant l’admissibilité statistique des implications qu’elles expriment.

Les résultats obtenus auprès d’une centaine d’élèves-professeurs sensibilisés et mis dans la voie de la reconstitution, à travers une situation non didactique élaborée dans cette perspective, ne permettent guère de conclure, que la réponse par l’affirmative à la question s’impose.

En fait, la découverte d’Hamilton porte plus sur les réels que sur la « multiplication » entre quadruplets de réels : chaque réel, à l’instar de tout autre type de nombres, admet une composante scalaire et une composante vectorielle, mais cette dernière est nulle et est un des points aveugles des contrats didactiques successifs que les systèmes didactiques nouent autour du nombre. Tout se passe alors comme si, à propos de cette composante vectorielle, nullité équivaut non existence. Cela nous rappelle l’écriture chiffrée des nombres d’avant l’introduction du chiffre zéro.

Remarquons enfin que si ceci dédouane les élèves-professeurs testés, il ne dédouane pas le système didactique qu’ils représentent.

Références bibliographiques

ANTIBI A. BROUSSEAU G. (2000), La détransposition des connaissances scolaires, in *Recherches en didactique des mathématiques, 20/1,* Grenoble : La Pensée sauvage, 7-40.

BAHRA M., AZOUGGARH A. (2009), Situation fondamentale caractéristique des connaissances relatives a la structuration algébrique des nombres, in *“Quaderni di Ricerca in Didattica” G.R.I.M ;* n. 19, GRIM, 211-252.

BAHRA M. (2005), La théorie des situations comme outil d’analyse a priori de la transformation d’une étude d’épistémologie historique en question d’enseignement, in *Sur la théorie des situations,* éd. HELENE S., CLANCHE P., SARAZZY B. La Pensée Sauvage 109-124.

BAHRA M. (1995), *Problèmes de didactique de la numération échecs et succès de la remathématisation,* Thèse de l’Université Bordeaux I.

BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, in *Recherches en didactique des mathématiques* 19/1, 77-123.

BROUSSEAU G. (2005), Questions à Guy BROUSSEAU (Réponses écrites) *Sur la théorie des Situations didactiques,* Ed. SALIN M.-H., CLANCHE, P., SARRAZY B. La Pensée Sauvage, éditions. 48-80.

BROUSSEAU G. (2002) ‘*Glossaires de quelques concepts de la théorie des situations didactique en mathématiques*’ in http:/ pagesperso-orange.fr/daest/guy.../Glossaire_Brousseau.pdf.)

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques,* Textes rassemblés et préparés par N. BALCHEFF, M. COOPER, R. SUTHERLAND, V. WARFIELD. Grenoble : La Pensée sauvage.

BROUSSEAU G. (1996), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, in Brun J., *didactique des mathématiques*, Lausanne : Delachaux et Niésłté, 45-143.

BROUSSEAU G. (1990a), le contrat didactique : le milieu, in *Recherches en didactique des mathématiques, 9/3, 309-336*.

BROUSSEAU G. (1990b), Les différents rôles du maître, in *Bulletin de l’A.M.Q. n° 23*.

BROUSSEAU G. (1990c), *Schéma de la transposition didactique*, Cours de DEA, didactique des mathématiques, Bordeaux 1

BROUSSEAU G. (1989), Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique, in Bednarz N., Garnier C. éd : *Construction des savoirs-obstacles et conflits*, Montréal CIRADE, 277-285.

BROUSSEAU G. (1983a), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherche en didactique des mathématiques, 4/2.*

RUFFIEUX C. (2005), *La naissance du concept de structure algébrique en Grande-Bretagne dans la première moitié du 19ème siècle. Influence des philosophes de l’« École Écossaise du Sens commun »*. Thèse Faculté des sciences de l’Université de Genève.

DIEUDONNE J. (1987), *Pour l’honneur de l’esprit humain, les mathématiques aujourd’hui,* Collection Pluriel, Hachette p. 143.

GRANGER G.-G. (2003), *Philosophie, langage, science* EDP sciences. *p 303*

GRANGER G.-G. (1994), *Formes Opérations Objets,* Mathesis, dir. BLAY M. SINACEUR H, Librairie philosophique, J. VRIN, P. 343.

GRAS R. (1995), L’analyse implicative. Introduction, in *actes du colloque methode d’analyse multidimensionnelles en didactique des mathematiques*, éd. R. Gras, IRMAR Rennes et IRESTE Nantes, pages 129-143.

GUITART R. (2003), Calcul d’assimilations, modalités t analyse d’images, in *Calcul & Formes de l’activité mathématique*, Coord. BONIFACE J. Ed. Ellipses, p. 75-89.

ITARD J. (1997), La mathématique, in ‘*histoire des mathématiques’*, Librairie Larousse 1977, p. 17.

MARGOLINAS C (2005), La dévolution et le travail du professeur, *Sur la théorie des situations didactiques,* éd. SALIN M.-H. CLANCHE P. SARAZZY B. La Pensée Sauvage, 329-333.

MILNER J.-C. (1995), *Introduction à une science du langage,* Editions du seuil.

RATSIMBA-RAJON H. (1977), *Etude de l’introduction ostensive d’un objet mathématique*. Mémoire de DEA, Université Bordeaux 1.

SALANSKIS J.-M (2001), *Sens et philosophie du sens,* Descelée de Brouwer, p. 136-137.

STICHWEH R. (1991), *‘Etude sur la genèse du système scientifique moderne’*, PUL 1991, p. 134.