"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", n. 20, 2010.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Il ruolo della narrazione nell'insegnamento apprendimento delle frazioni con situazioni a-didattiche

Valeria Di Martino

Sommario

La sperimentazione descritta nel seguente articolo vuole individuare la fiaba come mezzo utile per vivere positivamente l'approccio alla matematica, e nello specifico alle frazioni, e incoraggiare il bambino a formulare diverse strategie risolutive relative alle situazioni a-didattiche proposte.

Il presente lavoro vuole quindi esplorare i vantaggi derivanti dalla mediazione di due particolari strumenti didattici, quali le situazioni a-didattiche e la narrazione, anche in quelle discipline che "parlano" più di numeri che di parole.

Partendo quindi dai riferimenti teorici di base relativi al pensiero narrativo e alla Teoria delle Situazioni Didattiche e percorrendo l'asse dell'agire attraverso la sperimentazione nel campo di diverse situazioni a-didattiche, si evidenziano le potenzialità cognitive di entrambi nell'insegnamento/apprendimento delle frazioni.

Résumé

L'expérimentation décrite dans l'article suivant veut déterminer le conte de fées comme moyen utile pour vivre positivement l'approche aux mathématiques, et en particulier aux fractions, et encourager les élèves à formuler différentes stratégies relatives aux situations a-didactiques proposées.

Le travail présent veut explorer ensuite les avantages qui dérivent de la médiation de deux instruments didactiques, quel les situations a-didactiques et la narration, aussi dans ces disciplines qui "parlent plus que numéros que de mots".

En partant donc des références théoriques de base relative à la pensée narrative et à la Théorie des Situations Didactiques et en parcourant l'axe de l'agir à travers l'expérimentation dans le champ de différentes situations a-didactiques, on souligne les potentialités cognitives des ces deux dans l'enseignement/apprentissage des fractions.

Abstract

The experimentation described in the following article wants to individualize the fable as useful mean to live positively the approach to the mathematics, and in the specific to the fractions, and to encourage the pupils to formulate different strategies related to the situations a-didactic proposed.

The present job wants therefore to explore the consequential advantages from the mediation of two particular didactic tools, what the a-didactic situations and the narration, also in those disciplines that "they speak" more than numbers that of words.

Departing therefore from the theoretical references of base related to the narrative thought and to the Theory of the Didactic Situations and crossing the axle of the to act through the experimentation in the field of different a-didactic situations, they are underlined the cognitive potentialities of both in the teaching/teaching of the fractions.

Introduzione

« Investigare e trovare il modo che
gli insegnanti insegnino meno e gli studenti imparino di più;
che nelle scuole ci sia meno chiasso, meno nausea,
meno fatiche inutili e più raccoglimento, più diletto e più solido profitto».
Comenio (1657)

Oggi si profila con sempre maggiore chiarezza l'esigenza di una messa a punto di una cultura didattica in grado di leggere in modo critico i processi di insegnamento-apprendimento e di intervenire con padronanza di mezzi e di metodi nell'impegno formativo, soprattutto, di non venire meno ad una vastità di orizzonti e di prospettive non riconducibili all'immediatezza storica, ma volti alla costruzione di un'umanità e di un mondo nuovi (Laneve, 2003).

Come le altre discipline anche la matematica si propone di promuovere l'acquisizione degli atteggiamenti, delle capacità e delle conoscenze indispensabili ad ogni essere umano per affrontare le situazioni della vita, che, in una civiltà in rapida trasformazione qual è quella nella quale viviamo, si fanno ogni giorno più problematiche. Mentre nelle civiltà statiche del passato poteva bastare l'acquisizione di ben determinati atteggiamenti ed abilità per far fronte a situazioni che restavano sempre identiche, nella civiltà attuale occorre invece poter disporre di atteggiamenti ed abilità che, come già precisavano i Programmi didattici del 1985, consentano di «pensare il futuro per prevedere, prevenire, progettare, cambiare e verificare ».

Purtroppo, però, molti sondaggi e rilevazioni condotte in ambito scolastico e non (prima fra tutte l'indagine OCSE Pisa 2003) sembrano lanciare un allarme circa la scarsa "simpatia" che il nostro Paese dimostra verso la matematica e le discipline scientifiche in generale.
Segnali come questi non possono essere ignorati da chi ha il compito di accompagnare le nuove generazioni nel loro primo incontro con queste discipline. A livello di scuola primaria, infatti, si gioca il primo *round* di una partita importante: un'occasione insostituibile per suscitare interesse e curiosità verso la matematica; se il compito fallisce, tutto il successivo percorso scolastico dell'alunno ne sarà condizionato negativamente.
Consapevole del fatto che la posta in gioco è piuttosto alta, ho provato ad avvicinare i bambini alla matematica con un approccio diverso, che mi ha permesso di smitizzare alcuni luoghi comuni e di sconfessare certi aridi tecnicismi, facendone emergere aspetti più nuovi e coinvolgenti.

Le conoscenze sono state poste in modo creativo per fornire agli allievi l'opportunità di *scoprire* piuttosto che di *ricordare*, per "giocare" con i fatti e con le idee e non solo ripeterli, per comprendere che un problema ha parecchie soluzioni e interpretazioni e che si possono eseguire itinerari diversi per arrivarci. In altri termini: ho cercato non solo di *docere* (spiegare), ma anche di *movere* (spronare, sollecitare, richiamare); ed ancora: di *delectare* (far provare piacere, e perciò porre le premesse per continuare ad apprendere), senza con questo voler passare sotto silenzio che l'apprendere talvolta comporta sforzo, fatica e sacrificio.

È stato quindi necessario creare un contesto "autentico" entro il quale individuare una situazione problematica "utile", che permettesse agli alunni di superare le difficoltà di apprendimento legate a una didattica lontana dai loro bisogni, dai loro interessi, e di scoprire la nuova cono-

scenza matematica mediante una partecipazione attiva e costruttiva. Mi sono infatti chiesta come entrare nel mondo delle esperienze del bambino? Come creare per lui situazioni particolari, significative, interessanti, attraenti? A tale scopo ho ritenuto importante partire da considerazioni riguardanti il modo in cui spesso i bambini vivono il rapporto con il reale, cioè un modo "magico", "fantastico" e contemporaneamente molto "concreto", da cui scaturisce la fiaba oggetto della proposta didattica.
Nel lavoro esposto di seguito si è tenuto conto delle componenti essenziali di uno studio finalizzato all'innovazione in classe, così come individuate da Arzarello e Bartolini Bussi (1998):
- *componente epistemologica*: analisi dei contenuti, in questo caso analisi epistemologica del concetto di frazione;
- *componente cognitiva:* analisi dei processi di apprendimento dal punto di vista delle scienze cognitive, e in particolare della narrazione come chiave per entrare nella realtà per strade nuove, diventando il mezzo per parlare coi bambini, anche piccolissimi, di tante cose su cui un discorso diretto sarebbe improponibile;
- *componente didattica*: analisi dei processi di insegnamento-apprendimento dal punto di vista della ricerca didattica, facendo riferimento in questo caso alla Teoria delle Situazioni Didattiche, e ricorrendo nello specifico all'uso delle situazioni a-didattiche.

Quindi dopo aver analizzato il valore formativo e pedagogico della narrazione da affiancare alla matematica e aver inserito le situazioni a-didattiche all'interno di un paradigma teorico di riferimento, analizzerò parte della letteratura nazionale e internazionale riguardante l'apprendimento delle frazioni. L'intento sarà quello di accostare la narrazione alle situazioni a-didattiche all'interno di un'indagine di ricerca volta a rilevare un miglioramento nell'apprendimento delle frazioni con l'apporto di queste due metodologie. Osserverò poi gli esiti dell'attività sperimentale volgendo la mia attenzione sia all'aspetto quantitativo, sia a quello qualitativo. Alla luce di tale indagine di ricerca e dei risultati ottenuti, dedicherò l'ultima parte alle conclusioni e alle prospettive operative.

1. La narrazione

"Le fiabe servono alla matematica come la matematica serve alle fiabe.
Servono alla poesia, alla musica, all'utopia, all'impegno politico:
insomma all'uomo intero, e non solo al fantasticatore."
G. Rodari (1973)

1.1 La narrazione e l'uomo

Dal punto di vista etimologico, il termine *narrare* deriva dalla radice *gna-*, che significa "rendere noto", mentre il suffisso *-zione*, deriva dal latino *catione* e trasmette il carattere semantico dell'agire, dell'azione, del gesto e di tutta la situazione relazionale. La narrazione si presenta come un concetto trasversale all'oralità e alla scrittura, sia le civiltà alfabetiche che quelle "illitterate" ne hanno avuto forme più o meno sviluppate. Essa attraversa, quindi, le culture, le epoche, i luoghi, è connaturata all'uomo, non si ha testimonianza di civiltà che non hanno utilizzato la narrazione; si potrebbe dire che essa è nata con l'uomo, con il nascere della socialità e della relazione interumana.

La narrazione prende forma attraverso i miti, le leggende, le fiabe, i racconti, la storia, la pittura, i fumetti, le notizie, le conversazioni; dai racconti culturalmente condivisi ai discorsi quotidiani, la costruzione di storie rappresenta un modo per categorizzare l'esperienza, dando ordine e senso alle imprevedibili vicende umane. Bisogna notare che la narrazione è stata anche lo strumento principe della costruzione e della trasmissione del sapere. F. Loytard, nel suo libro *La condizione postmoderna,* parla della preminenza del pensiero e della forma narrativa nella costruzione del sapere, assegnando quindi la funzione di trasmissione e d'elaborazione delle conoscenze alla narrazione (Lyotard, 1981).

Nelle culture passate, che si affidavano molto all'oralità, si può notare come le stesse leggi erano costituite da proverbi e massime, proposte sotto forma di vere e proprie micro-narrazioni che avevano un ruolo preminente nella vita quotidiana. Si constata invece, nella condizione post-moderna, una crisi del narrare e della capacità di scambiare esperienze, di dare una rappresentazione esaustiva, totalizzante e tranquillizzante della realtà, che possa "ridurre" la complessità nella quale ci troviamo a vivere. Calvino, in *Se una notte di inverno un viaggiatore*, scriveva: «Oggi mi sembra che al mondo esistano soltanto storie che restano in sospeso e si perdono per la strada» (Calvino, 1979).

Occorre, oggi giorno, recuperare il valore del racconto. Alcune discipline quali l'epistemologia, l'antropologia, la storia, la paleontologia, la sociologia, la neuropsichiatria, la psicanalisi e la psicologia hanno provato a mettere in luce l'importanza del concetto di narrazione non solo «per attribuire e trasmettere significati circa gli eventi umani» ma per «...dare forma al disordine delle esperienze» (Eco, 1993).

Kaneklin e Scaratti (1998) hanno ribadito il valore della narrazione come strumento indispensabile per la costruzione di significati e per la facilitazione dei processi di cambiamento sociale e organizzativo, poiché il punto di vista narrativo risulta connesso alla modalità esperite dai soggetti di attribuzione di senso agli eventi e alla realtà.

Daniel Taylor (1999) sostiene che ognuno è il prodotto delle storie che ha ascoltato, vissuto e anche di quelle che non ha vissuto; quotidianamente si racconta e ci si racconta, ed è proprio in questa relazionalità, che avviene la negoziazione del proprio sé con quello altrui, in questo senso la narrazione può trovare la propria validazione come strumento e soggetto nel processo formativo per la costruzione di significati.

Dunque non bisogna semplicemente implementare l'utilizzo nell'educazione della narrazione tramite storie, romanzi, racconti, ma *educare narrando*, cioè occorre *dare un impianto narrativo al percorso educativo*, concepire l'educazione non solo come tempo e luogo di spiegazioni, della trasmissione del conoscere, ma anche come ascolto reciproco tra soggetti narranti la cui identità è anzitutto un'identità narrativa (Nanni, 1996).

1.2 Le ragioni di un interesse privilegiato

Voglio esaminare adesso alcune ragioni dell'interesse verso questo genere di testi che si è rilevato di notevole importanza nella strutturazione del progetto sperimentale. Innanzitutto va segnalata la «precoce familiarizzazione dei bambini con il materiale narrativo, sia scritto che presentato oralmente» (Pinto, 1993, p.48). Il contatto con il materiale narrativo e con i libri di storie, è un'esperienza sempre più precoce per il bambino che vive in società alfabetizzate. Fin dai primi anni di vita egli si trova immerso in un mondo di narrazioni: non solo fiabe, favole e storie più o meno canonizzate nella cultura in cui vive, ma anche fumetti, film, cartoni animati e quelle rielaborazioni di fatti quotidiani e eventi autobiografici che gli adulti gli ripropongono in forma di racconto.

La lettura di fiabe con l'adulto e l'ascolto di storie narrate rappresentano per il bambino strumenti privilegiati per lo sviluppo linguistico e per la conoscenza del mondo (Levorato, 1988). Il bambino si appropria precocemente dello "strumento narrativo" e le prime forme testuali comprese, prodotte e scritte dai bambini sono appunto le narrazioni. Tra le principali ragioni che motivano l'interesse privilegiato rivolto ai testi narrativi, ci sono poi i suoi stretti legami con l'alfabetizzazione.

Gli studi sui bambini di età prescolare hanno ampiamente sottolineato come la narrazione costituisca una strada privilegiata affinché il bambino possa entrare precocemente in contatto con la lingua scritta e ricavarne insieme piacere e competenza (Catarsi, 2001, p. 48). L'importanza dei testi narrativi non si esaurisce comunque nell'età infantile, le favole vengono col tempo sostituite da forme narrative più complesse, come il teatro, il cinema e i romanzi d'autore. La narrazione è dunque una delle esperienze più frequenti della nostra esistenza e ha un ruolo rilevante nell'espressione dell'immaginazione e dei vissuti emotivi, e nella sistematizzazione delle proprie conoscenze e credenze.

Bruner riconosce alla narrazione un ruolo e un'importanza fondamentali, sia a livello individuale che culturale. Egli ipotizza l'esistenza di un pensiero narrativo, di una «sorta di attitudine o predisposizione a organizzare l'esperienza in forma narrativa» (Bruner, 1991/1992, p.56). Il pensiero narrativo rappresenterebbe una capacità psicologica propriamente umana, una modalità universale per organizzare l'esperienza e costruire significati condivisi (Bruner, 1988). Esso è basato sui bisogni dell'essere umano di dare forma e senso alla realtà e al proprio agire, di comunicare agli altri i significati colti nell'esperienza, di mettere in relazione passato, presente e futuro. I racconti hanno infatti una forte organizzazione temporale, una forte direzionalità; presentano un intreccio che ha un inizio, uno sviluppo e una fine. "C'è un "prima" e un "dopo" e ciò che segue è connesso a ciò che precede come in una catena o in un filo" (Levorato e Nesi, 2001). È infine da sottolineare che i processi di comprensione e produzione di testi (narrativi e non) vedono coinvolte numerose abilità e funzioni: il linguaggio, la memoria, il processamento dell'informazione, gli schemi di conoscenza, la metacognizione… Si tratta quindi di un'area di indagine non chiusa e circoscritta ma ricca di interesse, proprio perché rappresenta un punto di incontro di ampi settori significativi per la comprensione delle funzioni psichiche superiori (Levorato, 1988, p.24).

1.3 Il valore formativo della narrazione

Oltre che per gli aspetti esaminati, il genere narrativo si caratterizza per il fatto di coinvolgere fortemente la dimensione affettiva e motivazionale del lettore o dell'ascoltatore. La narrazione non è un semplice resoconto o una lista di eventi. Di solito nelle storie è presente un "paesaggio duplice": lo "scenario dell'azione", cioè gli eventi e gli accadimenti, e quello della "coscienza", costituito dai vissuti emotivi e gli eventi mentali dei protagonisti (Bruner, 1990/1992). I due piani sono fortemente intrecciati e interconnessi.

Nella narrazione la tonalità emotiva è spesso molto forte. Il materiale narrativo innesca numerose emozioni: da quelle più "mentali" - come la curiosità, l'interesse, il divertimento, la suspance - a quelle più "calde"- come la gioia, la tristezza, la paura - che nascono dal nostro coinvolgimento empatico con gli stati interiori e i punti di vista dei personaggi (Levorato, 2000).

Spesso poi la stilizzazione e la caricatura che caratterizza i personaggi, ne rende più facile il riconoscimento, dato che ne estrae e ne sottolinea i tratti più tipici e peculiari. Si tratta dunque di agenti significativi, con cui ci si può confrontare e rispecchiare, e su cui si può costruire una concezione della propria identità e soggettività.

Sono spesso presenti eventi inattesi, non ordinari, "inghippi", problemi o conflitti che devono essere ricomposti o riequilibrati (Levorato, 2000). Questo "sbilanciamento", questa problematicità, che è secondo Burke (citato in Bruner, 1990/1992) la ragione stessa della narrativa, mette ancora più in rilievo i vissuti soggettivi dei personaggi (più o meno esplicitati ma sempre presenti in sottofondo) e calamita l’attenzione del lettore. Nel sperimentazione esposta di seguito è proprio su questi “inghippi” che è richiesta la partecipazione attiva degli studenti, che intervenendo in un contesto di situazione a-didattica devono aiutare i personaggi a superare le criticità.

Nell’ambito protetto della fiaba, il bambino può quindi sperimentare, attraverso il “come se”, gli effetti di azioni e pensieri mai realizzati, senza essere sottoposto ai possibili rischi derivanti dagli errori. La fiaba è una sorta di realtà alla quale il bambino si abitua con estrema facilità e dalla quale, per via analogica, desume tutta una serie di indicazioni circa la comprensione della realtà.

Un valido processo formativo dovrebbe essere in grado di guidare i bambini verso la maturazione di questa capacità fantastica di ricreare la realtà, utilizzandola come una preziosa risorsa, anche attraverso attività ludiche.

1.4 La narrazione nell’insegnamento/apprendimento della matematica

Sentir parlare di narrazione nell’insegnamento/apprendimento della matematica sembrerebbe piuttosto fuorviante, non soltanto per gli adulti, ma soprattutto per i bambini, i quali difficilmente legano la narrazione a questa disciplina, definita molto spesso ostica. Solitamente, la narrazione è considerata prevalentemente in ambito letterario, perciò, narrare una fiaba in matematica si mostra sorprendente.

Non bisogna dimenticare, però, che il modo infantile di vivere i rapporti con il reale, fermo restando il principio del rispetto della individualità di ciascun bambino, è, in massima parte, magico. Secondo Dallari (1980), la magia infantile non rappresenta “un” aspetto del comportamento del bambino ma piuttosto ne costituisce l’atmosfera esistenziale. Penso quindi che rispetto al problema di costruire «...situazioni problematiche concrete, che scaturiscano da esperienze reali del fanciullo...», così come si legge nelle Indicazioni per il Curricolo, “reale” non sia in contrapposizione con “fantastico” ma con “astratto”, cioè con l’uso di formalismi e definizioni lontani dal bambino.

Rodari (1973) afferma che la fiaba può fornire delle chiavi per entrare nella realtà per strade nuove, può aiutare il bambino a conoscere il mondo, diventa il mezzo per parlare col bambino anche piccolissimo, di tante cose su cui un discorso diretto sarebbe improponibile.

La dimensione fiabesca può essere un valido strumento educativo. Attraverso la fiaba si possono offrire al bambino occasioni per conoscere e controllare le sue ansie ed emozioni, per stimolare la sua fantasia e il suo intelletto. Occasioni che diventino per lui esperienze positive, che lo rendano tranquillo rispetto a ciò che sta costruendo.

Durante la sperimentazione ho quindi proposto una serie di situazioni problematiche fantastiche per le risorse inesauribili che tale contesto offre.

Questa situazione problematica fantastica con la quale affrontare le frazioni e, mediante la quale, creare una situazione di apprendimento che tenga conto del soggetto che apprende, delle sue caratteristiche, delle sue paure, è una fiaba, ma con qualcosa in più, è una "fiaba interattiva":

-"fiaba" perché è un racconto fantastico

-“interattiva" perché è accompagnata da schede operative, appositamente predisposte, che richiedono interventi di manipolazione, di costruzione di sagome, di completamento, oltre che accese discussioni. Il racconto viene interrotto, in vari punti, da rimandi ad alcune schede o situazioni a-didattiche che richiedono interventi operativi da parte degli alunni. Le interruzioni fanno sì che il racconto si presti ad essere letto a puntate durante le quali l’apprendimento delle frazioni prende via via sempre più forma.

2. Riferimenti epistemologici

"È innegabile che l'apprendimento delle frazioni è complesso, comunque lo si strutturi e lo si articoli ma, come ogni nemico in una battaglia che si rispetti, la mancata sottovalutazione dell'avversario e la sua perfetta conoscenza sono armi vincenti nelle mani di chi sa sfruttare la supremazia legata a competenza e consapevolezza".
Martha Isabel Fandino Pinilla (2005)

2.1 Il panorama internazionale delle ricerche in quest'ambito

Il tema delle frazioni è uno dei capisaldi della didattica della matematica, nella scuola primaria e nella scuola secondaria. Ciò spiega perché tale tema sia stato uno dei più studiati, fin dagli anni '60. A seguito del fondamentale lavoro di Kieran su questo tema (Kieran, 1975), molte ricerche hanno indagato sulle difficoltà che gli alunni incontrano nello sviluppo di concetti relativi ai numeri razionali[1]. Varie ricerche hanno messo in rilievo le diverse interpretazioni che i numeri razionali e le frazioni possono presentare in differenti contesti di applicazione[2]. Per esempio le frazioni possono essere interpretate come descrizioni di una relazione parte-intero, oltre che come oggetti che possono essere confrontati, sommati, sottratti…. Il numero razionale può essere visto come risultato di una divisione tra due numeri interi o come rapporto, cioè come confronto moltiplicativo tra due quantità, ma anche come operatore, cioè come qualcosa che opera su una quantità e la cambia, come probabilità, come punto su una retta orientata…[3]

È stato messo in rilievo che solo attraverso lo sviluppo di interpretazioni di questo tipo per mezzo di pratiche didattiche significative, gli alunni possono costruirsi un'idea pertinente di numero razionale e, quindi, anche di frazione, e comprendere le proprietà che caratterizzano questi nuovi ogetti matematici al centro del processo di insegnamento/apprendimento.

Molti risultati però mostrano che la didattica corrente non è in grado di costruire una base di esperienze e di significati appropriati nell'uso della notazione frazionaria[4].

A conferma di ciò all'uscita dalla scuola media, in un questionario proposto da Mariotti et al. (1995), gli alunni hanno risposto che tra i tipi di numero che essi conoscono ci sono anche decimali, frazioni, razionali, facendo così pensare che per essi scritture diverse corrispondano a numeri di tipo diverso. Ciò è stato ulteriormente confermato dalla rappresentazione dei vari sistemi numerici mediante insiemi disgiunti.

Questa ambiguità concettuale è aggravata dal fatto che contemporaneamente si è già formato nel bambino un modello forte, rigido dei numeri naturali che, riprendendo le parole di Fishbein (1984), «...confligge duramente con le frazioni in seconda media, così come ha già fatto con i decimali alla fine della scuola elementare e all'inizio della scuola media». Questa situazione emerge chiaramente in numerose indagini. Ad esempio, i già citati Mariotti et al. (1995) evidenziano che, per quanto riguarda i numeri decimali, essi sono visti come due numeri naturali giu-

---

1 Si veda al riguardo il seguente sito del Rational Number Project http://education.umn.edu/rationalnumberproject/default.html che contiene un alto numero di pubblicazioni realizzate da ricercatori che si sono occupati dell'argomento.

2 In questo lavoro facciamo riferimento alla seguente definizione matematica di numeri razionali e frazioni: I numeri razionali sono elementi di un campo quoziente infinito che consiste di infinite classi di equivalenza e gli elementi delle classi di equivalenza sono frazioni (Beher e Al., 1993).

3 Questa lista di interpretazioni non ha la pretesa di essere esaustiva.

4 Per un'alta percentuale di alunni all'inizio della scuola superiore il doppio di 2/3 è 4/6.

stapposti, tenuti separati da una virgola, e che ciò spiegherebbe errori del tipo 3,15>3,7 perché 15>7. Ciò, d’altra parte era già stato dimostrato da Brousseau nel 1981 affermando che, per i bambini della scuola primaria, i numeri decimali sono dei “naturali con la virgola”. Ancora oggi questa concezione è assai radicata e persiste, talvolta, fino all’università; essa costituisce un ostacolo didattico piuttosto diffuso alla comprensione dei numeri reali.

Duval (1993) afferma che l’acquisizione concettuale di un oggetto matematico si basa su due sue caratteristiche “forti”:

1. l’uso di più registri di rappresentazione semiotica che è tipica del pensiero umano;
2. la creazione e lo sviluppo di sistemi semiotici nuovi che è simbolo (storico) di progresso della conoscenza.

Nel caso delle frazioni, la quantità di registri semiotici a disposizione è immensa. A gestire i diversi registri, a scegliere i tratti distintivi del concetto da trattare, a convertire, non si impara automaticamente; questo apprendimento deve necessariamente essere il risultato di un insegnamento esplicito nel quale l’insegnante chiama ad essere corresponsabile lo studente. L’insegnante troppo spesso sottovaluta questo aspetto e passa da un registro all’altro senza problemi, perché ha già concettualizzato; ma lo studente no, egli lo segue sul piano delle rappresentazioni semiotiche, ma non su quello dei significati. Il rischio è enorme. L’apparente semplicità e leggibilità di certi registri, non deve far credere che lo studente se ne appropri o ne sia già padrone.

Ad esempio, la moltiplicazione tra due numeri naturali dà luogo ad un prodotto che è certamente maggiore di ciascuno dei due fattori; questa affermazione è vera in N, insieme dei numeri naturali, ma non certo in Q^a, insieme dei razionali assoluti. Il modello intuitivo della moltiplicazione in Q^a, però, potrebbe coincidere con il modello che lo studente si è costruito in N, evidentemente troppo presto; l’idea di limitare l’insegnamento della moltiplicazione al cosiddetto “schieramento” nella scuola primaria, non aiuta certo in questa impresa cognitiva; non è un caso che molti studenti evoluti (anche universitari) si dichiarino meravigliati di fronte al fatto che tra due operazioni: 18 x 0,25 e 18 : 0,25 la prima è quella che da il risultato minore. Essi conservano il modello errato creatosi nella scuola elementare in base al quale “la moltiplicazione aumenta i valori”.

Didatticamente conviene lasciare immagini ancora instabili, in attesa di poter creare modelli adatti e significativi, il più possibile vicini al sapere matematico che si vuole raggiungere.

Nel caso delle frazioni, succede molto spesso che un’immagine si trasformi in modello mentale interno troppo presto, quando ancora dovrebbe restare immagine. Ad esempio:

- L’immagine di un’unità-tutto che viene divisa in parti *uguali*, intendendo questo uguale come *identità*, congruenza, sovrapponibilità, marchia in modo efficace e duratura il concetto di frazione, trasformandosi in modello e pretendendo dunque di essere rispettata in ogni occasione. Ciò pregiudica assai presto la formazione noetica della frazione.
- L’immagine di dividere un’unità-tutto in parti uguali e prenderne alcune, suggerisce semanticamente che questo “alcune” non possa essere “tutte”; il modello si forma facilmente, dato che coincide con un’intuizione forte; ma pregiudica poi il passaggio all’unità come frazione *n/n* ed alle frazioni improprie.
- L’uso delle figure geometriche viene visto dagli studenti come specifico e significativo, mentre l’adulto le pensa causali e le vede come generiche. Per esempio il continuo e unico ricorso a rettangoli o cerchi costringe a ragionare in modo tale che l’immagine (che avrebbe dovuto essere aperta, duttile, modificabile) diventa invece persistente e stabile e si fa modello; se la frazione viene proposta su figure diverse (triangoli, trape-

zi…) lo studente non domina più la noetica della frazione perché la situazione proposta non fa parte del suo modello.

4 Se l'unità-totalità viene insistentemente proposta stilizzata come una figura geometrica unica, connessa, compatta, convessa, la costruzione del concetto di frazione si fa modello con questa configurazione fissa, irremovibile. Se poi si tenta di usare una unità-totalità che è formata da un insieme discreto di oggetti, il modello troppo presto formatosi non risponde più ai bisogni nuovi della situazione.

4 Se bisogna dividere sempre e solo *n* numero per un altro più piccolo e questo diventa il modello di divisione, allora, al momento di dividere 2 euro tra 4 persone, difficilmente allo studente sarà spontaneo operare con la frazione 2/4 o con la divisione tra numeri razionali 2:4. Questi due atteggiamenti non saranno compatibili con quel modello e lo studente cercherà alternative, come, per esempio, quella di operare solo tra centesimi 200:4, come se questa trasformazione fosse obbligatoria. Avrà sempre come risultato 50 centesimi e mai 0,5 o 0,50 euro perché questi due valori gli sembreranno innaturali (Fandino Pinilla, 2005).

2.2 Vari modi di intendere il concetto di "frazione"

A fronte di una definizione di frazione apparentemente intuitiva, si possono avere almeno una dozzina di interpretazioni del concetto di frazione:

 Frazione come parte di un tutto a volte continuo e a volte discreto: Nel linguaggio matematico il termine "frazione" indica le diverse parti di una grandezza ottenute dividendo quella grandezza in parti uguali.

 Frazione come quoziente: È possibile vedere la frazione a/b come una divisione non necessariamente effettuata ma solo indicata: *a:b;* in questo caso l'interpretazione più intuitiva non è la parte/tutto, ma la seguente: abbiamo *a* oggetti e li dividiamo in *b* parti.

 Frazione come rapporto: A volte la frazione indica un rapporto; l'interpretazione non si accorda più né alla parte-tutto, né alla operazione di divisione, diventando un legame tra grandezze.

 Frazione come operatore moltiplicativo: Molto spesso la frazione è considerata un operatore moltiplicativo, anzi questo è forse uno dei suoi significati più usati nella scuola. In questo caso però solo con uno sforzo si può ammettere di aver sfruttato al definizione iniziale di frazione, anche se a quella ci si può comunque ricondurre. La frazione come operatore, dunque, agisce sui numeri puri piuttosto che sulle raccolte o sugli oggetti; è, di fatto, una nuova operazione che combina la divisione e la moltiplicazione.

 Frazione in probabilità: In probabilità la frazione è profondamente presente, ma non rispetta più, almeno nella sua forma ingenua, la sua primitiva definizione.

 Frazione nei punteggi: Le frazioni nei punteggi sono un oggetto matematico che ha peculiarità proprie, intuitive, ma assai poco vicine alla definizione che era stata data all'inizio.

 Frazione come numero razionale: Prima o poi, la frazione si deve trasformare, lungo il corso di studi di un individuo, in numero razionale. In questo caso si mettono in particolare evidenza questioni aventi a che fare con l'operatività: equivalenza fra frazioni, addizioni… Un numero razionale, infatti, non è altro che la classe di equivalenza formata da tutte quelle infinite coppie di numeri (a;b) tali che *b=2xa.*

 Frazione come punto di una retta orientata: Spesso è richiesto di porre una frazione su una retta numerica. Per fare ciò bisogna valutare quella frazione come se fosse un numero razionale, applicare la relazione d'ordine in Q e mettere un cerchietto nero o una tacca nella posizione appropriata e opportuna. La frazione indica in questo caso la distanza tra l'origine e il punto-frazione.

 Frazione come misura: La frazione viene spesso usata come misura, specie nella sua espressione di numero con la virgola. La quantità di vino nella bottiglia, la spesa per una matita sono delle misure; a volte ha senso pensarle espresse come numeri razionali, a volte anche come frazioni, ma in nessun caso occorre o conviene fare riferimento alla definizione originaria di frazione. È più spontaneo un uso diretto della misura così come viene espresso.

 Frazione come percentuale: La percentuale non è altro che una frazione; ma anche in questo caso ha peculiarità specifiche.

 Frazione nel linguaggio quotidiano: Nel linguaggio quotidiano, infatti, colpisce l'uso che si fa delle frazioni, non sempre in modo esplicito. Si pensi ad esempio:

- alla **lettura dell'orologio** (sette e un quarto);
- alla **musica** in cui le frazioni hanno un ruolo determinante, ma non sempre si comportano come quelle in matematica; lo studente però sente nominare gli stessi nomi e dunque pensa agli stessi oggetti concettuali;
- allo **sconto**; se lo sconto è del 50% è intuitivo far capire che si tratta della metà. Se lo sconto è del 25% è istruttivo far riflettere sul fatto che si tratta di un quarto. Il viceversa è più complicato. Se una cosa che costava 80 ora costa 100 è aumentata di ¼ cioè del 25%; se ora cala di ¼ non torna a 80, come molti credono, ma arriva a 75;
- alla **pendenza delle strade**;
- alle **ricette di cucina;**
- alla **medicina.**

2.3 Ostacoli legati all'insegnamento/apprendimento delle frazioni

Occorre innanzitutto precisare che l'ostacolo, così come qui lo si intende, è un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi (anche solo cognitivi) precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Visto il successo ottenuto, anzi, a maggior ragione a causa di questo, si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti.

Si fa solitamente una distinzione fra tre tipi di ostacoli:

- di **natura ontogenetica**: legati all'allievo e alla sua natura;
- di **natura didattica**: legati all'insegnante ed alle sue scelte;
- di **natura epistemologica**: legati alla natura stessa degli argomenti della Matematica.

• Tra gli apprendimenti legati alle frazioni, molti possono essere pensati come veri e propri **ostacoli ontogenetici**. Per esempio, il tentativo di far costruire cognitivamente il numero razionale come classe di equivalenza di coppie di naturali (il secondo dei quali diverso da zero) è fallimentare. Per costruire davvero questo concetto, bisogna avere la forza cognitiva e culturale di considerare tale classe come un solo oggetto, astraendo dai suoi componenti. Si è visto che questa capacità si acquisisce solo in particolari circostanze per motivi legati all'ostacolo ontogenetico.

• Per quanto riguarda gli **ostacoli didattici**, tra gli apprendimenti legati alle frazioni, essi sono in genere dovuti a scelte che compie l'insegnante nel presentare i vari elementi della didattica delle frazioni, sulla base del buon senso o della tradizione. Ad esempio la scelta di introdurre registri semiotici diversi senza didattiche specifiche, come se lo studente dovesse/potesse apprenderne a farne uno spontaneamente. Sarebbe bene mettere in evidenza la struttura semiotica di ogni registro scelto, man mano che lo si sceglie, in modo esplicito. Un altro esempio è costituito dall’insistenza nel voler trovare un “successivo” di una frazione o di un razionale; per cui la frazione “successiva” di 3/5 è allora 4/5 e il successivo di 0,3 è 0,4; è ovvio che si tratta di un ostacolo didattico legato al fatto che lo studente ha appreso a far uso del termine “successivo” nell’insieme N dei numeri naturali ed ha costruito il concetto che ha esteso poi a tutti i domini numerici, senza che mai si avesse un momento nel quale questa concezione venisse messa in crisi.

• Gli esempi di **ostacoli epistemologici** ci vengono forniti o dalla storia della Matematica o dalla vita d’aula. Concetti che nella storia hanno creato fratture, discussioni, difficoltà sono ostacoli epistemologici; argomenti sui quali gli studenti commettono errori che sono sempre gli stessi in qualsiasi tempo e in qualsiasi Paese. Tra gli apprendimenti legati alle frazioni, molti possono essere pensati come veri e propri ostacoli epistemologici. Essi sono facilmente riconoscibili nella storia e/o nella pratica didattica. La riduzione delle frazioni ai minimi termini è stata per molto tempo un oggetto di studio specifico nella storia; basti pensare che gli Egizi, che coltivarono le frazioni per molti secoli, preferirono avere a che fare solo con frazioni con numeratore unitario. Il passaggio dalle frazioni ai numeri con la virgola ha richiesto alla Matematica più di 4500 anni, nonostante fosse già disponibile (nel mondo sumero) un sistema posizionale; nel mondo indiano è nato nel VI secolo d.C. un sistema decimale corretto; ma solamente dal XV secolo si può dire che si sia fatto un uso consapevole e corretto dei numeri decimali. A scuola questo passaggio non è cognitivamente incruento, anzi lascia sul campo parecchie vittime.

Anche la gestione dello zero nelle frazioni ha creato difficoltà enormi nella storia, tanto che i matematici arabi hanno esplicitamente studiato queste situazioni.

L’idea di ostacolo conduce, quindi, a ripensare alla presenza e alla funzione dell’errore nella pratica scolastica; seguendo D’Amore: «L’errore, dunque non è necessariamente solo frutto di ignoranza, ma potrebbe invece essere il risultato di una conoscenza precedente, una conoscenza che ha avuto successo, che ha prodotto risultati postitivi, ma che non tiene alla prova di fatti più contingenti o più generali».

2.4 Uno sguardo al futuro: il contributo delle neuroscienze

A sorpresa e a dispetto del fatto che solitamente si ritenga che le frazioni siano un concetto matematico piuttosto difficile da apprendere, un recentissimo studio pubblicato sul Journal of Neuroscience nell’aprile del 2009 mostra che, almeno nell'adulto, esse sono elaborate automaticamente, anche senza l'intervento del pensiero cosciente. A farlo sarebbero in particolare alcune regioni dell'area del solco intraparietale (IPS) e della corteccia prefrontale, due regioni che già si sapevano coinvolte nell'elaborazione dei numeri interi.

Lo studio è stato condotto da Simon Jacob e Andreas Nieder dell'Università di Tübingen, in Germania, che hanno sottoposto a scansione il cervello di un gruppo di volontari mentre questi osservavano su un monitor l'apparizione, per brevissimi instanti, dell'immagine di varie frazioni.

Quando i ricercatori presentavano rapidamente e ripetutamente frazioni che equivalevano approssimativamente a 1⁄6, potevano osservare una diminuzione nell'attivazione dell'area IPS e della corteccia prefrontale, corrispondente al cosiddetto fenomeno di adattamento funzionale, che si manifesta di fronte a uno stimolo più o meno identico ripetuto molteplici volte. Successivamente, ai partecipanti venivano mostrate frazioni che deviavano da quel valore. Risultato: quanto più la frazione differiva da 1/6, tanto maggiore era l'attività delle cellule IPS. Ad assicurare i ricercatori che i partecipanti elaborassero direttamente le frazioni e non le calcolassero, era la rapida presentazione di ciascuna frazione unita alle piccole variazioni nel valore delle frazioni.

Questi risultati suggeriscono che negli adulti le frazioni attivino automaticamente l'area IPS e la corteccia prefrontale. I ricercatori hanno anche rilevato che differenti valori attivano gruppi distinti di cellule e che esse rispondono allo stesso modo sia che la frazione sia presentata in forma numerica che sotto forma di parole.
Lo studio è stato ideato dopo che altre ricerche avevano suggerito la possibilità che sia i primati non umani sia i bambini piccoli potessero in qualche modo afferrare naturalmente le frazioni o almeno alcune di esse.

Come sostiene Jacob, che con il suo gruppo ora intende verificare se l'elaborazione delle frazioni avviene in modo analogo anche nei bambini, «Questi esperimenti cambiano il modo in cui dobbiamo pensare alle frazioni. Sicuramente i cervelli educati degli adulti rappresentano intuitivamente le frazioni, e questo potrebbe avere riflessi sul modo in cui si dovrebbe insegnare l'aritmetica e la matematica a scuola».

3. Le situazioni a-didattiche

"Non vi spiego tutto, per non privarvi del piacere di apprenderlo da soli."
Renè Descartes

3.1 La Teoria delle Situazioni Didattiche
Come afferma lo stesso Brousseau (1998), «l'insegnamento dei decimali - e io aggiungerei anche l'insegnamento delle frazioni - è un problema didattico difficile e primordiale. Da una parte il loro uso è così diffuso, così comodo e così banale che gli allievi lo riconoscono molto velocemente; ma è evidente, allo stesso tempo, l'insufficienza di questa concezione "meccanica". Infatti solo la risoluzione di certe situazioni-problema può fornire una comprensione più chiara del concetto anche se queste ultime a volte sono talmente complesse da non sembrare possibile di proporle agli allievi troppo precocemente. D'altra parte, è impensabile ritardarne l'insegnamento.»
È dunque naturale porsi alcune domande: quali sono i risultati degli allievi? Quali decisioni possono migliorarli? Quali alternative si presentano? Come elaborare nuovi metodi? Come sceglierne uno? Come condurlo? Comunicarlo? Quali variabili bisogna controllare? Quali situazioni e quali comportamenti corrispondono a un'appropriazione conveniente di un concetto? Quali sono i comportamenti errati che appaiono e il loro significato? Quali ipotesi sono in grado di spiegare i buoni e i cattivi risultati?
Alla luce di ciò è necessario che la didattica prenda in carico la totalità delle interazioni dei sistemi presenti. In questo senso la Teoria delle Situazioni Didattiche si pone come obiettivo la creazione di una teoria didattica che permetta da una parte, di capire/spiegare i fatti che avvengono nell'insegnamento/apprendimento della matematica e d'altra parte, fornire ad insegnanti e ricercatori uno strumento per progettare e realizzare un insegnamento efficace della matematica.
La Teoria delle Situazioni Didattiche si basa sul principio che imparare significhi migliorare la propria capacità di analisi o di risposta di fronte a una situazione già conosciuta o nuova.

Così la relazione che viene ad instaurarsi tra l'Allievo ed il Sapere può rappresentare «la relazione obiettivo finale di ogni insegnante che, al termine del suo lavoro di mediatore, sparisce per far si che l'allievo abbia un rapporto personale con il Sapere. Questo fatto rappresenta una sorta di paradosso dell’insegnamento: l’insegnante raggiunge il suo scopo quando esce fuori di scena» (Spagnolo, 2001).

Perché questo si realizzi è di notevole importanza che l’insegnante sia consapevole dei processi cognitivi che sono alla base del pensiero matematico degli allievi e, ponga particolare attenzione al modo in cui si formano i concetti nella loro mente, guardando anche alla formazione di possibili ostacoli.

È necessario dunque al fine di far superare agli allievi questi *ostacoli* che l’insegnante progetti situazioni didattiche atte a fornire loro prove attendibili sulla necessità di cambiare le loro concezioni.

Organizzare il superamento di un ostacolo consisterà nel proporre una situazione suscettibile d'evoluzione al fine di fare evolvere l'alunno secondo una dialettica conveniente. Si tratterà, non di comunicare le informazioni che si vogliono insegnare, ma di trovare una situazione nella quale esse sono le sole a essere soddisfacenti o ottimali, tra quelle alle quali si oppongono, per ottenere un risultato del quale l'alunno si è fatto carico.

Questo però non basta: bisognerà anche che questa situazione permetta di primo acchito la costruzione di una prima soluzione o di un tentativo dove l'alunno investirà la sua conoscenza del momento. Se questo tentativo fallisce, la situazione deve tuttavia rinviare a una situazione nuova modificata da questo insuccesso in maniera intellegibile ma intrinseca, cioè non dipendente dalla maniera arbitraria delle finalità dell'Insegnante. La situazione *deve* permettere la ripetizione a volontà della messa in atto di tutte le risorse dell'alunno. Essa deve auto-motivarsi con un gioco sottile di sanzioni intrinseche (Spagnolo, 2009).

3.2 Le condizioni e le fasi delle situazioni a-didattiche

Nella Teoria delle Situazioni Didattiche è il gioco che deve favorire l’ingresso dell’allievo in una situazione a-didattica: è una «situazione in cui la conoscenza del soggetto si manifesta solamente per delle decisioni, per delle azioni regolari ed efficaci sull’ambiente» (Brousseau, 2002). È nel quadro della situazione che l’allievo può sviluppare degli apprendimenti in modo autonomo. Egli non è in attesa delle conoscenze del maestro ed è responsabile rispetto al sapere. «L’allievo sa bene che il problema è stato scelto per fargli acquisire una conoscenza nuova ma egli deve sapere anche che questa conoscenza è interamente giustificata dalla logica interna della situazione» (Brousseau, 1998, p.59).

È necessario per questo organizzare la situazione a-didattica in modo che la migliore strategia per vincere sia la conoscenza ambita: di conseguenza l’identificazione e la padronanza delle variabili didattiche è una posta in gioco centrale nella concezione e nello svolgimento di una attività ludica.

Si possono intravedere quattro condizioni per la messa a punto di situazioni a-didattiche:

2. L’alunno può immaginare una risposta, ma questa risposta iniziale (procedura di base) non è quella che si vuole insegnare; se la risposta fosse già conosciuta, questa non sarebbe una situazione d’apprendimento. L’alunno cioè deve trovarsi in una situazione di incertezza sulle decisioni da prendere;
3. Questa “procedura di base” deve rivelarsi immediatamente insufficiente o inefficiente perché l’alunno sia costretto a fare degli accomodamenti, delle modifiche del suo sistema di conoscenza.
4. Esiste un ambiente per la validazione, un ambiente cioè che permetta la conferma della verità o falsità di una soluzione trovata. Tale ambiente deve poter permettere delle retroazioni, l’ambiente a-didattico deve poter influenzare l’allievo nel senso che gli deve con-

sentire di correggere la sua azione, di accettare o respingere un'ipotesi, di scegliere fra numerose soluzioni. Un ambiente siffatto verrà chiamato a-didattico;
5. La situazione (gioco) sia ripetibile (analisi a-priori approfondita e individuazione delle variabili didattiche). (Spagnolo, 2009).

Nella prima stesura della Teoria delle Situazioni Didattiche le fasi in cui si suddivideva la situazione a-didattiche erano:

- **Consegna**

In questa prima fase viene specificato il compito con cui gli allievi si devono confrontare. Nella ricerca esposta di seguito la consegna è fornita dai personaggi della narrazione. Ciò ha il duplice vantaggio di motivare maggiormente gli studenti e di dare continuità al processo di apprendimento fornendo delle coordinate spazio-temporali.

- **Situazione di azione**

È la fase in cui l'allievo è totalmente assorbito dal compito e dalla ricerca di una soluzione, formula ipotesi e adotta strategie rifiutando istintivamente o razionalmente le precedenti e mettendole alla prova in nuove esperienze. Questa fase costituisce il processo mediante il quale l'allievo perviene alla costruzione di strategie, ossia apprende un metodo per poter risolvere la situazione problema in cui ha accettato di *implicarsi.*

- **Situazione di formulazione**

In questa fase l'allievo deve rendere noto agli altri le sue scoperte, il suo modo per risolvere il compito, verbalizzare le sue strategie, argomentarle e difenderle. È così che l'allievo gradualmente si rende conto della necessità di dover elaborare un linguaggio comprensibile a tutti, poiché è mediante lo scambio comunicativo con gli altri che si giunge alla formulazione della strategia. In ogni momento di questo processo quindi il linguaggio è messo alla prova, poiché deve rivelarsi utile ed efficace e rendere possibile la comprensione sia delle azioni che dei modelli d'azione.

- **Situazione di validazione**

Durante questa fase alcuni allievi propongono una nuova strategia risolutiva argomentando a suo favore, il restante gruppo che riveste il ruolo di oppositore, può accettarla, richiedere ulteriori argomenti, oppure, contro argomentala. È dunque all'interno del gruppo, in cui gli allievi si trovano in situazione di parità, che vengono discusse sia le strategie da adottare che quelle da rifiutare. A volte i loro ragionamenti sono errati, accolgono teorie sbagliate, accettano prove insufficienti. È la situazione d'azione stessa, come succede nelle altre fasi, che porta gli allievi a scoprire l'errore, li conduce a rivedere i loro ragionamenti ed a riformulare modelli corretti. Quando le ipotesi vengono accettate da tutti diventano teoremi. Comunque non basta enunciare o formulare un'ipotesi perché essa diventi un teorema: è necessario argomentare, provare, dimostrare. Per l'allievo quindi non si tratta solo di conoscere la matematica, ma di saperla utilizzare per accettare o respingere le proposizioni e ciò richiede un'attitudine alla prova e favorisce la scoperta.

In seguito la ricerca ha mostrato il ruolo essenziale dei momenti di **istituzionalizzazione**, e si è aggiunta una quinta fase nella quale c'è un doppio riconoscimento:
- il "riconoscimento ufficiale" del nuovo sapere da parte dell'allievo;
- il "riconoscimento" da parte dell'insegnante, dell'apprendimento avvenuto.

L'istituzionalizzazione è l'operazione, guidata dall'insegnante con un linguaggio alla portata degli studenti, attraverso cui i saperi ricevono una formulazione chiara e semplice. Entrano così nel repertorio di “cose da sapere” e da utilizzare come strumenti matematici per affrontare situazioni-problema nuove.

3.3Analisi del ruolo dell’insegnante

Nelle prime due fasi delle situazioni a-didattiche, il compito più importante dell’insegnante non consiste nel controllare il contenuto e lo sviluppo delle riflessioni dei bambini: non deve intervenire, anche se ascolta, una proposizione interessante o una dichiarazione falsa. È la situazione che deve esercitare i feed-back necessari. Egli non è più - provvisoriamente - il guardiano della verità, il garante, il destinatario di tutti gli interventi dei bambini. Egli deve convincere gli alunni della sua neutralità rispetto ai loro commenti della situazione affinché essi rinuncino a trarre da lui le informazioni e gli aiuti che invece devono tirar fuori da loro stessi.

L’insegnante facilita la soluzione dei problemi subalterni, sorveglia il rispetto delle regole e delle consegne che precisa e ripete all’occasione, risolve i problemi d’organizzazione, aiuta l’evoluzione favorevole dei conflitti all’interno dei gruppi. Veglia affinché tutti partecipino e concorrino al risultato cercato. Sostiene l’allievo senza dare alcuna informazione che lo possa aiutare a risolvere la situazione problema, osserva gli avvenimenti, condivide il piacere o la delusione per il risultato dell’azione. Valorizza in ogni caso il tentativo, perché l’errore è inevitabile e nello stesso tempo utile.

Nelle ultime due fasi l’insegnante è il conduttore del gioco: fa giocare ma non gioca in prima persona. Cerca di avere delle formulazioni chiare, delle indicazioni precise, lascia arrivare alla loro formulazione corretta le dichiarazioni false o assurde, lascia agli altri il tempo di formulare i loro giudizi. Non conferma una dichiarazione corretta prima che tutti si siano dichiarati d’accordo. Incoraggia coloro che sono in minoranza a esprimere le loro riserve, chiarifica gli stessi dibattiti, dal momento che non li può risolvere.

4. Ipotesi di ricerca e strumenti metodologici utilizzati

La sperimentazione proposta di seguito vuole individuare la fiaba e le situazioni a-didattiche come mezzi utili per vivere positivamente l’approccio alla matematica, e nello specifico alle frazioni. Tramite esse, infatti, la matematica si riempie di espressioni, di emozioni che dovrebbero aiutare l’alunno a risolvere la situazione problema in maniera corretta oltre che essere un’esperienza per rafforzare l’autostima.

4.1 Ipotesi sperimentale di ricerca

Lo scopo che mi sono proposta di raggiungere è rappresentato dalla possibilità di collegare l’apprendimento delle frazioni all'utilizzo della narrazione e delle situazioni a-didattiche nei bambini di età compresa tra gli 8 e i 10 anni.

In particolare, ***l’ipotesi generale*** posta è la seguente “*SE* l’apprendimento delle frazioni migliora tramite l’uso combinato di narrazione e situazioni a-didattiche ALLORA questi ultimi si rivelano utili a una più adeguata comprensione dei numeri razionali”.

4.2 Strumenti di falsificazione

Per poter falsificare l'ipotesi posta, ho somministrato un questionario al campione di riferimento prima e dopo la sperimentazione. Lo stesso questionario, elaborato da una collega[5] del corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria, era già stato somministrato a un campione di 59 alunni delle classi quinte della scuola primaria "F. Raciti" del quartiere Borgonuovo di Palermo durante l'anno scolastico 2007/2008. Quest'ultimo campione ha quindi costituito il gruppo di controllo della mia sperimentazione.

4.3 Campione di ricerca

La ricerca sperimentale è stata svolta presso la Direzione Didattica San Lorenzo di Palermo, durante l'anno scolastico 2008-2009 nel periodo compreso tra dicembre e aprile. Nei mesi tra dicembre e gennaio è stata realizzata la parte preliminare della sperimentazione. Le attività sperimentali, invece si sono svolte nei mesi di febbraio, marzo e aprile dopo che l'insegnante aveva richiamato i prerequisiti necessari per lo svolgimento dello stesso progetto. Esso ha visto coinvolti, rispetto alla popolazione della scuola un campione piuttosto ristretto, composto dai bambini frequentanti la IV A del Plesso San Pio X. Quest'ultima è formata da 18 alunni di cui 7 di sesso maschile e 11 di sesso femminile di età compresa tra gli 8 e i 10 anni. Sono presenti due bambine straniere, di cui una del Bangladesh e una della Repubblica Democratica del Congo, perfettamente inserite all'interno della classe e con una buona competenza linguistica in italiano.

4.4 Metodologia di ricerca

La metodologia di ricerca utilizzata ha previsto l'uso combinato di:

- Fiaba
- Situazioni a-didattiche.

Entrambi sono coerenti con il target di riferimento, le condizioni socio-culturali di provenienza degli alunni e le loro capacità attentive generali. Ciò è stato possibile grazie all'osservazione partecipata delle attività didattiche sia scolastiche che extrascolastiche degli alunni e dei momenti di progettazione a cui ho preso parte.

4.5 Strumenti impiegati

La scelta degli strumenti mi ha consentito un'osservazione quanto più oggettiva dei fenomeni e una loro misurazione adeguata. Essi sono:

 Questionario: è stato completato individualmente da ciascun bambino. Esso è costituito da domande pensate per far riflettere i bambini sui molteplici aspetti delle frazioni e permette di rilevare l'eventuale presenza di misconcezioni, legate a concetti presenti nella matematica scolastica che concernono proprio l'apprendimento delle frazioni. Esso si articola in 9 item (non direttamente riscontrabili in quello fornito ai bambini). Ogni item contiene vari esercizi e problemi aperti sulle frazioni e sui numeri decimali e prevede la motivazione delle risposte date.

 Videoregistrazioni: hanno fornito innumerevoli informazioni sui processi di costruzione delle conoscenze adottate dai bambini partecipanti alla sperimentazione durante le situazioni a-didattiche. L'esigenza della videoregistrazione è nata per ovviare alla difficoltà di annotare contemporaneamente le congetture e le argomentazioni dei bambini. È inevitabile, infatti, che

5 Amato A., in tesi di laurea "L'insegnamento/apprendimento dei numeri razionali nella scuola primaria: alcune considerazioni sperimentali" disponibile sul sito http://math.unipa.it/grim/Tesi_FP_AAmato_08.pdf .

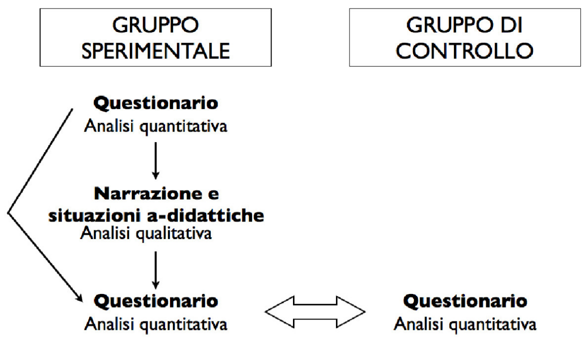
all’interno di una discussione le voci si sovrappongano. Inoltre il filmato permette: di scegliere le risposte considerate rilevanti e che dovranno essere rese in forma esplicita, di monitorare una situazione in cui ogni singola osservazione può essere rappresentata simultaneamente da uno o più codici.

 Analisi a-priori: essa è l’insieme delle rappresentazioni epistemologiche, delle rappresentazioni storico-epistemologiche e dei comportamenti ipotizzati[6]. L’analisi dei comportamenti ipotizzabili, tenendo conto degli errori, ostacoli della disciplina, misconcetti e conflitti, consente di individuare quelle attività che, nel rispetto dei diversi stili cognitivi degli alunni, favoriranno l’apprendimento. Lo strumento dell’analisi a-priori, oltre a fornire la possibilità di tabulare i dati emersi dalla somministrazione dei problemi aperti, configurandosi altresì come risorsa funzionale ai fini valutativi, consente di poter focalizzare l’attenzione su una serie di aspetti interessanti, il primo dei quali può essere considerato lo *spazio degli eventi*, ovvero l’insieme delle possibili risposte, corrette e non, che si possono ipotizzare in uno specifico contesto. Sulla base dello *spazio degli eventi* è possibile inoltre individuare sia il *buon problema* e quindi, una “situazione didattica fondamentale” che permette la migliore formulazione in termini ergonomici della conoscenza, sia le *variabili didattiche* che permettono di favorire un cambiamento nel comportamento degli allievi (Spagnolo, 1998, pp. 258-259).

4.6 Disegno di ricerca

Il disegno di ricerca seguito si basa sul confronto tra campioni diversi in cui sono state analizzate le risposte date allo stesso questionario, tabulando i dati sulla base della stessa analisi a-priori.

Al fine di evidenziare i cambiamenti apportati dalla variabile sperimentale, ossia l’utilizzo della narrazione e delle situazioni a-didattiche nell’apprendimento delle frazioni, è stato somministrato per due volte il medesimo questionario: prima dell’introduzione della variabile sperimentale, per rilevare le competenze di partenza, e poi al termine delle attività svolte. Queste ultime sono state pure confrontate con quelle del gruppo di controllo.



[6] Per “rappresentazioni epistemologiche” si intendono le rappresentazioni dei percorsi conoscitivi riguardanti un particolare concetto. Per “rappresentazioni storico-epistemologiche” si intendono le rappresentazioni dei percorsi conoscitivi (sintattici, semantici, pragmatici) riguardo un particolare concetto. Per “comportamenti ipotizzabili” dell’allievo nei confronti della situazione/problema sono tutte le possibili strategie risolutive sia corrette che non.

5. Il lavoro sperimentale

L'impiego della narrazione e delle situazioni a-didattiche ha il fine di sviluppare negli alunni un atteggiamento positivo verso la matematica e non fargli perdere il gusto per la scoperta e la capacità di divertirsi imparando. In questo percorso operativo, pertanto sono state pianificate, all'interno di un approccio narrativo, alcune modalità operative per condurre gli alunni ad un migliore apprendimento delle frazioni.

L'opportunità di muoversi ad ampio raggio, per stimolare gli alunni ad apprendere le frazioni e l'esigenza allo stesso tempo di ottenere dati qualitativi più accurati, poteva essere soddisfatta solo da una sperimentazione più ricca di situazioni a-didattiche che permettesse di codificare il maggior numero di indicatori semantici. Pertanto la ricerca è stata lunga, minuziosa e dettagliata in tutte le sue parti, che qui di seguito sono descritte e motivate brevemente.

Al fine di falsificare l'ipotesi generale, l'indagine sperimentale è stata articolata così articolata:

<table>
<tr><td rowspan="2">FASE PRELIMINARE</td><td colspan="2">Osservazione sistematica</td></tr>
<tr><td colspan="2">Questionario</td></tr>
<tr><td rowspan="2">FASE SPERIMENTALE</td><td>N
A
R
R
A
Z
I
O
N
E</td><td>Situazioni didattiche
- Falegname
- Fornai
- Cuochi
- Giullari*
- Storico*</td></tr>
<tr><td colspan="2">Situazioni a-didattiche
- Sarti
- Ingaggio
- Carte in ordine
- Numeri compresi
- Vince il più piccolo
- Tombola</td></tr>
<tr><td rowspan="2">FASE CONCLUSIVA</td><td colspan="2">Questionario</td></tr>
<tr><td colspan="2">Riflessioni metacognitive
- Lettera
- Diploma
- Libro</td></tr>
</table>

5.1 Fase preliminare

Nel prendere contatto con la classe si è proceduto con un primo momento d'osservazione delle attività didattiche per individuare la situazione di partenza dei bambini e per comprendere quali siano le conoscenze sulle frazioni già presenti in classe. Da questi incontri sono emersi alcuni atteggiamenti (che rivelano conoscenze più o meno consce relative alle frazioni) evidenziati dalle attività svolte e dalle discussioni scaturite.

Dagli incontri di osservazione sistematica si è cercato di constatare quali erano i concetti relativi alle frazioni posseduti dalla classe. È stato interessante anche evidenziarlo in contesti che apparentemente non rientravano nell'ambito logico-matematico, come ad esempio nella realizzazione di maschere di carta pesta. Nella classe, infatti, il discorso sulle frazioni è già stato avviato partendo da una fase manipolativa-concreta: attività di taglio, di piegatura, di coloritura di fogli. I bambini avevano già lavorato, sia alla costruzione di alcune unità frazionarie come operatori su grandezze continue e discrete, che con alcune frazioni con numeratore diverso dall'unità.

Successivamente si è proceduto alla somministrazione del questionario per saggiare le conoscenze possedute rispetto ai numeri razionali.

5.2 Fase sperimentale

Conclusa la fase preliminare sono state selezionate le attività relative all'ipotesi di ricerca, al fine di sviluppare negli alunni un miglior apprendimento delle frazioni.

Partendo dall'esperienza e dagli interessi dei bambini ho cercato di realizzare un clima sociale positivo, di conoscere e valorizzare le attitudini individuali e di utilizzare tutti i canali della comunicazione. Sono state stimolate tutte le forme di comunicazione orale ed è stata sollecitata l'assunzione di comportamenti di ascolto, sviluppando la capacità di attenzione e concentrazione coinvolgendo frequentemente i bambini. Ogni argomento, infatti, è stato affrontato partendo dalla fiaba che, fungendo da filo conduttore, ha stimolato in loro la curiosità e la motivazione.

Così, lasciandosi trasportare da questo percorso magico, hanno avuto modo di approfondire altri concetti fondamentali, inseriti gradualmente in contesti significativi e diversificati.

Esporrò brevemente di seguito alcune situazioni proposte nel percorso di ricerca, ognuna delle quali sarà preceduta dalla relativa parte di fiaba.[7]

[7] Per il lavoro nella sua integrità, comprensivo anche delle analisi a priori e dei grafici dei risultati ottenuti si rimanda a http://math.unipa.it/~grim/Tesi%20_FP%20_VDi%20Martino_09.pdf .

FORNAI

Ma il falegname non fu l'unico a trovarsi in difficoltà. La Regina, infatti, aveva deciso di prendere provvedimenti anche per quanto riguardava la sua larghezza, oserei dire "grossezza", limitando il consumo di dolci, e delle torte, in particolare. Ma non doveva essere certo lei la sola a limitarsi! È così che volle sapere da tutti i fornai del regno quanta farina fosse utilizzata ogni giorno per il pane e quanta per i dolci. I fornai, così le risposero:

"SUA MAESTÀ, OGNI GIORNO, NEI FORNI DEL SUO REGNO I 3/8 DI UN SACCO DI FARINA è USATO PER IL PANE E $\frac{1}{4}$ DEL SACCO è USATO PER LE TORTE."

Ma la regina, dovete sapere, di matematica non capiva nulla, per cui, chiese al matematico-astronomo di corte:

"È DI PIÙ LA FARINA USATA PER LE TORTE O QUELLA USATA PER IL PANE?"

Secondo voi?

Poi aggiunse, rivolta al matematico: «Scrivi loro dicendo che in ogni caso, d'ora in poi, voglio che le torte prodotte ogni giorno siano non di più della metà della metà di quelle sfornate sino ad oggi!».

Il matematico, che era un uomo di scienza, con il pallino per i numeri, secondo voi come rispose?

Dopo il racconto della storia, ad ogni bambino è stata fornita una scheda nella quale poteva rispondere agli interrogativi posti. Ogni bambino poteva inoltre servirsi di qualsiasi altro foglio o materiale per risolvere il compito.
Lo scopo dell'attività è la scoperta delle frazioni equivalenti e il confronto tra frazioni con denominatore diverso. È stata fornita la possibilità di rappresentare in modi diversi (verbali, iconici, simbolici) la situazione problematica, al fine di creare un ambiente di lavoro favorevole per la risoluzione del problema. In più, nella scheda è esplicitamente chiesto di verbalizzare le strategie risolutive scelte per la soluzione dei problemi e, soprattutto nella seconda parte, di usare i simboli dell'aritmetica per rappresentarle.
La maggioranza dei bambini ha adottato le strategie rappresentate schematicamente di seguito (Fig. 1 e 2). Erano stati infatti abituati a ragionare sul significato del concetto di frazione proprio suddividendo un foglio di carta in tante parti (Fig. 3).

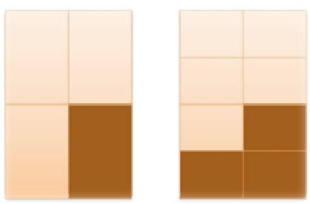


Fig.1

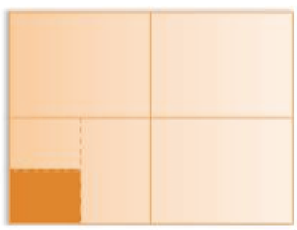


Fig.2

Fig. 3

CUOCHI

Nonostante la Regina cominciasse a prestare più attenzione alla sua linea, non cessava certo di indire feste, banchetti e gran balli in cui invitava anche i più illustri e potenti nobili dei regni vicini. Durante queste feste, a corte, tutti avevano un bel daffare: pulire, sistemare, addobbare, apparecchiare, CUCINARE…
Poveri cuochi! La Regina non voleva fosse buttato via nulla di quanto cucinato, né poteva fare, d'altronde, un magra figura con piatti poco abbondanti. I cuochi, pertanto, erano tenuti a preparare per il numero esatto dei partecipanti, che ahimè, variava in continuazione. Molti infatti, con una scusa qualsiasi, disdicevano l'invito all'ultimo minuto.
Così, un bel giorno, a mezz'ora dall'inizio del banchetto dovevano ancora preparare il dolce; dalle ultime stime il numero degli invitati doveva essere 35. Mahhh sul librone delle ricette le dosi erano per 4 persone… Mamma mia, si dovevano pure mettere a fare i conti così di fretta! Aiuta tu i cuochi a individuare la giusta quantità dei singoli ingredienti per preparare un buon tiramisù!

TIRAMISÙ

-500 g di mascarpone

-300 g di savoiardi

-6 uova freschissime

-200 g di cioccolato fondente

-250 g di zucchero

-2 cucchiai di cacao amaro

-Mezzo bicchiere di caffè

Lo svolgimento di quest'attività ha interessato diverse competenze, quali:
- eseguire semplici calcoli con numeri razionali usando metodi e strumenti diversi (calcolo mentale, carta e matita...);
- esprimere e interpretare i risultati di misure, con particolare riferimento agli ordini di grandezza, alla significatività delle cifre;
- realizzare formalizzazioni e possibili generalizzazioni di un procedimento risolutivo seguito, ad esempio passando dal problema considerato ad una classe di problemi;
- passare da una misura espressa in una data unità ad un'altra espressa in un suo multiplo o sottomultiplo;
- riconoscere scritture diverse (frazione, numero decimale...) dello stesso numero dando particolare rilievo alla notazione con la virgola.

I valori degli ingredienti sono stati volutamente scelti per far emergere calcoli con numeri decimali o con le frazioni, dando agli alunni quindi anche la possibilità di riflettere sul loro significato.

SARTI

Dovete sapere che, nel Paese delle Meraviglie, i capricci della Regina non finivano mai di sorprendere i suoi sudditi. Vediamo un po' cosa si è inventata stavolta!
Ebbene un bel giorno riunì i sarti del regno e dette loro queste precise parole per cucire una nuova bandiera, pensate un po' dopo ben 6 secoli di storia! Quella usata fino a quel momento era troppo grande per poter essere sventolata vicino la Regina, copriva la sua "maestosa" figura.
Quindi, dette ai sarti queste precise istruzioni:
LA BANDIERA DEL PAESE DELLE MERAVIGLIE DEVE ESSERE RIDOTTA DI 1 / 3 PER OGNI LATO.

Dopo il racconto della storia, la classe è stata suddivisa in 4 squadre in modo del tutto casuale. Ogni squadra ha avuto il nome del colore del pezzo di bandiera assegnato. Ogni squadra ha poi ridotto di un terzo ogni lato della bandiera. Un portavoce per ogni squadra ha spiegato la strategia adottata al resto della classe. Alla fine dell’attività se tutti hanno operato correttamente i pezzi combaceranno di nuovo.

GIULLARE

Da quanto detto sin qui, si può ben notare come nel Paese delle Meraviglie, da quando la Regina di Cuori è salita al trono, tutti cominciarono “a fare un po’ i conti” con le Frazioni. Pensate un po’, anche chi, per il mestiere che faceva, non aveva necessità di utilizzarle, cominciò a familiarizzare con esse. Ad esempio, volete sapere cosa si inventò il giullare di corte?

Cominciò a formulare degli strani indovinelli….

Dopo il racconto della storia, ad ogni bambino è stata distribuita una scheda. Ognuno ha dovuto applicare i concetti appresi sulle frazioni alle lettere che compongono alcune parole date, e sommando o sottraendo hanno ottenuto nuove parole (*Es: Chi è? La prima metà di SPILLO + il primo terzo di APE*). La seconda parte dell’attività ha previsto la formulazione di questi “indovinelli” al compagno di banco. I più belli e divertenti sono stati poi posti al gruppo classe.

STORICO

Falegnami, muratori, giardinieri, cuochi, sarti, giullari….tutti utilizzavano le frazioni. Ma c’era pure chi aveva un pensiero fisso: da dove spuntano fuori queste frazioni, chi è che le ha inventate? Infatti, nella polverosa, nonché piena di libri biblioteca del palazzo, viveva uno storico tutto intento a scartabellare documenti antichi, libri, manoscritti, rotoli di pergamena, e indovinate un

Dopo il racconto della fiaba, ad ogni bambino è stata fornita una scheda nella quale è riportata la storia delle frazioni presso gli egizi e i babilonesi. È stata un’occasione per riflettere sul significato dei simboli utilizzati e sull’evoluzione che essi hanno subito.

INGAGGIO

Ma lo storico non era l’unico a vivere nella grande biblioteca del palazzo, con lui c’era pure un vecchio matematico-astronomo, esperto sia di numeri che di stelle. Capite bene che, col gran da fare che la regina aveva dato a tutti i suoi sudditi a impegnarsi in calcoli e ragionamenti matematici, molti avevano chiesto e continuavano a chiedere a lui consulenza, Regina compresa, che come abbiamo già detto non ne capiva molto di numeri e figure…

In questo modo, però, il matematico-astronomo, si dedicava più ai numeri che alle stelle, la sua vera grande passione. Ed è per questo che indirizza proprio a voi, alunni della IV A della Scuola San Pio X di Palermo questa lettera con una proposta, dando personalmente a me il compito di

"Cari ragazzi e care ragazze,
a scrivervi è un vecchio matematico e astronomo che ha dedicato tutti gli anni della sua vita a studiare, capire, cercare di spiegare come funziona il mondo, la luce, il tempo… Ma ormai la vecchiaia, ahimè, comincia a farsi sentire!
Scrivo proprio a voi perché so che siete a conoscenza di quanto sta accadendo nel Paese delle Meraviglie e perché so anche che siete molto bravi in matematica.
Ho allora da farvi una proposta. Avrei bisogno del vostro aiuto per 30 giorni, sapete bene quanto lavoro mi spetta per adesso, quindi validi collaboratori mi sarebbero di grande aiuto. Naturalmente la vostra collaborazione sarà ben retribuita. Anzi, avrete voi stessi la possibilità di scegliere tra due opzioni di pagamento:

–0,01 € il primo giorno, 0,02 € il secondo, 0,04 il terzo e così via raddoppiando il vostro salario ogni giorno

–oppure 1 milione di euro subito.

Fatemi sapere!"

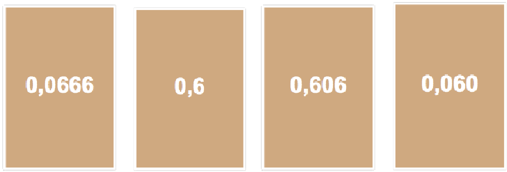
Dopo il racconto della storia e la lettura della lettera, i bambini, prima individualmente, hanno cominciato a ragionare sulla modalità più conveniente di pagamento, poi a seconda della scelta effettuata sono stati divisi in gruppi. Ogni gruppo aveva il compito di sostenere la sua tesi e e dimostrare la falsità delle altre. Ha vinto il gruppo che con le opportune argomentazioni è riuscito a convincere tutti.
L'attività si è rilevata una vera e propria gara di determinazione. Ha vinto chi ha portato a termine sino alla fine un innumerevole quantità di operazioni con i numeri decimali!

CARTE IN ORDINE

Il matematico-astronomo è lieto di comunicarvi che siete diventati tutti suoi preziosi collaboratori! Quindi, mettiamoci subito a lavoro, sapete bene il gran da fare che ci spetta!
Ebbene oggi ci toccherà aiutare una cara amica del matematico-astronomo che si trova in difficoltà: la maga.
Forse ancora non vi ho detto che la Regina è molto superstiziosa, e "credulona": incantesimi, specchi, amuleti, sfere, carte…cerca in vari modi di scoprire quello che il futuro le riserverà. Si tratta di cose abbastanza riservate, è per questo che si fida solo di una vecchia maga che da più di 300 anni vive in un'ala del suo grande palazzo. La vecchia maga ha imparato, nel corso dei suo i molti anni, che è meglio non contraddire la Regina, meglio darle sempre una visione rosea del futuro.
C'è una consuetudine che va avanti da molti anni: ogni settimana la Regina si fa leggere le carte. Si tratta di carte molto particolari, che hanno degli strani simboli al centro (a ben vedere sono numeri!) e che possono essere disposte in ordine crescente e decrescente. È proprio l'ordine a fare la differenza: un ordine crescente è sinonimo di prosperità, ricchezza, salute, potere…l'ordine decrescente, ahimè, del contrario. Capite bene, quindi, perché la povera maga disponeva le carte sul tavolo già rovesciate e già in ordine crescente!

L'obiettivo principale dell'attività è il confronto e l'ordinamento dei numeri decimali, comprendendo il valore posizionale delle cifre. A tal fine, infatti, tutti i numeri contengono solo due cifre 0 e 6.

Dopo il racconto della storia, ad ogni bambino sono state distribuite 4 carte (tutti i bambini hanno avuto le stesse carte). Prima individualmente ogni bambino ha formulato ipotesi e congetture per giungere infine a una propria modalità di ordinamento. Dopo circa 10-15 minuti la classe è stata suddivisa in squadre, tante quante le diverse modalità di ordinamento formulate dai bambini. Ogni squadra così formata ha sostenuto le proprie ipotesi e strategie e dimostrato la falsità di quelle della altre squadre. L’attività è terminata quando tutti si sono trovati d’accordo su un



determinato ordinamento.

NUMERI COMPRESI

Devo comunicarvi che il matematico-astronomo è molto soddisfatto del lavoro che state svolgendo per lui e vi manda i ringraziamenti anche a nome della Regina, che però, come sapete, è molto esigente. Ha, infatti, un nuovo pensiero fisso: riuscire a vincere il Gran Prix des Merveilles 2009. Si tratta del più prestigioso premio del Paese delle Meraviglie, per intenderci è come i vostri Premi Nobel per la scienza, come i Premi Oscar per i miglior film… Si tratta di un premio internazionale che negli ultimi anni è stato vinto dagli scienziati dei paesi in competizione con il Paese delle meraviglie.
Non vi dico la rabbia e dispiaceri della Regina che quest’anno invece è proprio decisa a vincere! Come??? Proprio con il vostro aiuto.
Ha piena fiducia in voi! Sa che ce la potete fare! Dovete risolvere due rompicapi su cui da secoli migliaia di scienziati si sono interrogati, inviandole la formulazione dei rispettivi Teoremi!
Ecco il primo:

Obiettivo principale della situazione a-didattica proposta è quello di comprendere intuitivamente che l’insieme dei numeri razionali è un insieme continuo e infinito.
Dopo il racconto della storia e la lettura del quesito, i bambini, prima individualmente hanno cominciato a ragionare sulla modalità più conveniente di rispondere, poi a seconda della scelta effettuata sono stati divisi in gruppi. Ogni gruppo ha sostenuto la sua tesi e e dimostrato la falsità delle altre. Ha vinto il gruppo che è riuscito a convincere tutti. Gli alunni hanno quindi scritto una lettera al mago per comunicargli la soluzione del quesito.

VINCE IL PIU' PICCOLO

Avevo ragione a fidarmi di voi! Ecco il secondo rompicapo:
"Voglio fare una moltiplicazione con voi: io vi dico il primo fattore, è 60, voi dovete trovare il secondo fattore: può essere qualsiasi numero escluso lo zero. Ma attenzione! Il prodotto dovrà essere minore del numero che dico io. Vince chi riesce ad ottenere il prodotto più piccolo."

60 x ? = numero più piccolo per vincere

Questo quesito sta particolarmente a cuore alla Regina, immaginate….con un numero piccolo rimpicciolire un numero grande! Se riuscite a risolvere anche questo rompicapo, lei stessa ha promesso una grande festa in vostro onore.

La situazione a-didattica si prefigge di far comprendere le proprietà della moltiplicazione per un numero decimale minore di 1.
Inizialmente è stata raccontata la storia e letto il quesito. Subito dopo gli alunni hanno giocato per gruppi di due, registrando su un foglio le proprie prove e intuizioni confrontandole con quelle dell'altro giocatore, vinceva chi per primo trovava il fattore che permetteva di ottenere il risultato più piccolo. Dopo circa 10 minuti si sono riportati alla lavagna i numeri che ogni coppia di compagni ha trovato.
In base ai dati riportati alla lavagna gli allievi sono stati divisi in 3 gruppi, ognuno dei quali con un portavoce: coloro che sostenevano che bisognava moltiplicare per un numero intero; coloro che sostenevano che bisognava moltiplicare per un numero decimale maggiore di 1; coloro che sostenevano che bisognava moltiplicare per un numero decimale minore di 1. In questa fase l'obiettivo era quello di formulare e comunicare le strategie applicate e motivare la soluzione a cui si era giunti. Infine ogni squadra doveva cercare di convincere l'altra della propria scelta; ha vinto chi finalmente è riuscito a farlo col consenso di tutti gli "avversari".

TOMBOLA

Bene! La Regina ha mantenuto la promessa…così vi ha organizzato una bella festa!
Visto che le frazioni ormai facili sono per voi, vi ha organizzato una tombola un po' particolare!

Scopo della situazione a-didattica è quello di comprendere che uno stesso numero razionale può avere differenti rappresentazioni ricorrendo anche alle frazioni equivalenti, alle operazioni con le frazioni e alla corrispondenza decimale-frazioni.
Dopo il racconto della breve storia, alla lavagna viene appeso il tabellone mentre ad ogni bambino viene distribuita una cartella e dei fagioli. La cartella riporterà alcuni dei numeri del tabellone, ma con rappresentazioni semiotiche differenti. La cartella di ogni bambino sarà differente da quella degli altri, ma sono comunque rapportabili a 3 livelli di difficoltà. Ad ogni bambino sarà lasciato un po' di tempo per confrontare la propria cartella con il tabellone, e dargli quindi la possibilità di individuare le varie rappresentazioni. Dopo circa 5 minuti si procede all'estrazione. Vince chi per primo completa la sua cartella, dopo che gli altri compagni ne hanno controllato la validità.

L’attività prevedeva la padronanza di tutti i contenuti affrontati nelle precedenti situazioni didattiche. I bambini si sono mostrati molto abili, in più si sono divertiti moltissimo nello svolgimento del compito!

4.3 Fase conclusiva

Nella fase conclusiva della sperimentazione sono state previste:

- la somministrazione dello stesso questionario somministrato all’inizio, ciò ha permesso di evidenziare un notevole aumento di conoscenze e competenze relative all’apprendimento delle frazioni;
- una riflessione metacognitiva sul percorso di apprendimento effettuata con la stesura di una lettera alla regina, protagonista della fiaba filo-conduttore del progetto;
- il compito unitario di apprendimento consistente nella realizzazione di un “libro” che ripercorre la fiaba e le attività svolte.

5. Conclusioni e problemi aperti

5.1 Punti di forza

Alla luce di quanto delineato e di quanto è stato esperito nell’azione didattica durante le attività d’aula posso affermare che è stata un'esperienza significativa e gratificante sia per me che per i bambini. La ricerca ha consentito e favorito l’avvicinamento alla conoscenza in modo critico e la problematizzazione della realtà al fine di una migliore comprensione della stessa. L’uso della narrazione ha consentito una scansione dei tempi permettendo di inserire la matematica in un contesto significativo storicizzato.

La curiosità, opportunamente stimolata dalla narrazione, è stata la spinta che ha favorito l’azione e, di conseguenza, l’apprendimento e il consolidamento dei concetti matematici.

L’errore è stato vissuto come elemento di riflessione e ulteriore spinta verso nuove strategie di risoluzione. Altro elemento fondante dell’attività è stata la discussione, sia nei piccoli gruppi, ossia tra i componenti delle squadre, che nel gruppo classe, tra pari e con l’insegnante, in cui gli allievi si sono impegnati a sostenere le strategie risolutive ipotizzate giustificandole e argomentandole.

La ricerca, inoltre, ha incrementato la motivazione, l’interesse e l’attenzione degli allievi. Ha anche migliorato la qualità del sistema scolastico, in quanto ha permesso di trovare soluzioni pedagogiche e didattiche nuove alle problematiche emergenti non perdendo di vista l’idea di una scuola come luogo di sperimentazione nella quale i bambini si mettono in gioco in prima persona e conquistano gli strumenti culturali necessari per la propria crescita.

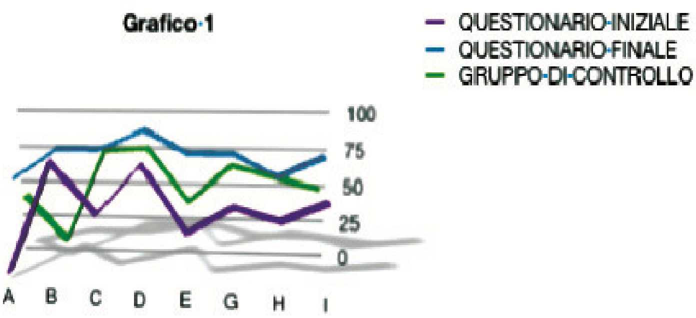
Sulla base dei dati raccolti dal questionario iniziale e finale somministrati al gruppo sperimentale e da quelli provenienti dal gruppo di controllo si evince (grafico 1) che vi è stato un miglioramento nell’apprendimento delle frazioni a seguito della sperimentazione che ha visto l’uso combinato di narrazione e di situazioni a-didattiche.

Prendendo avvio dall’idea che entrambe facilitano un apprendimento attivo e incentivano la comprensione, il coinvolgimento emotivo e motivazionale degli alunni, occorre dunque sfruttarne le potenzialità in ambito didattico, in modo da dare vita ad uno stile di insegnamento/apprendimento originale e creativo che consenta, sia di avvicinarsi al mondo dei bambini, sia di *dare un impianto narrativo al percorso educativo* (Nanni, 1996).

5.2 Punti di debolezza

Il dato emerso, però, non consente di generalizzare il risultato a causa del numero ristretto di bambini coinvolti nella sperimentazione.

Inoltre la mia presenza in classe non costante, solo due volte a settimana, non mi ha permesso di monitorare come avrei voluto la fase di istituzionalizzazione del sapere né le “situazioni intermedie” vale a dire gli esercizi per il consolidamento delle conoscenze acquisite tra una situazione a-didattica e un’altra.



Sull’asse delle ascisse con le lettere sono indicate le diverse sezioni in cui è articolato il questionario, mentre sull’asse delle ordinate sono riportate le percentuali di risposte corrette per

5.3 Questioni aperte

Nell’ottica del miglioramento, ritengo sia importante mettere in evidenza alcune questioni aperte che possono fungere da ipotesi per eventuali ricerche successive.

- Sarebbe stato interessante esaminare separatamente il ruolo di ciascuna variabile sperimentale (narrazione e situazioni a-didattiche). Ciò sarebbe stato possibile inserendo uno strumento che permettesse il confronto tra la prima parte della sperimentazione, in cui era presente solo la narrazione e le attività erano strutturate nella forma di situazioni didattiche, e la seconda parte in cui invece la narrazione stessa prevedeva il coinvolgimento diretto degli allievi in situazioni a-didattiche. Purtroppo ciò non è stato possibile a causa del tempo a disposizione.
- Altrettanto interessante sarebbe stato indagare gli effetti dell’uso della narrazione e delle situazioni a-didattiche in soggetti di culture diverse.
- Oltre che indagare in che misura il piacere e il divertimento derivanti da “giocare e narrare” la matematica possano provocare dei cambiamenti personali (psicologici, affettivi e cognitivi) nei confronti della matematica e non vederla più come una sorta di “buco nero”.

Tutto ciò sottolinea il carattere non esaustivo della ricerca che si vuole porre semplicemente come occasione per riflettere e approfondire aspetti teorici rilevanti, raccogliendo diverse prospettive che favoriscono una più ampia visione del fenomeno.

Infatti il vero “viaggio” di conoscenza che la didattica organizza è non tanto, o soltanto, diretto a scoprire “nuovi territori”, a addizionare nuove conoscenze, né limitato a costruire mappe cognitive, quanto piuttosto inteso a stimolare le esigenze di criticità, di riflessione e di consapevolezza, e perciò a rispondere ai vari perché circa quanto si viene acquisendo, sicché gradualmente, le conoscenze assimilate diventino per il discente fattori essenziali della sua capacità di giudizio, che egli in seguito eserciterà nei più diversi contesti cognitivi e pratico-operativi. È il modo con cui i vari contenuti sono organizzati, appresi ed elaborati che conferisce loro un grado maggiore di livello culturale: quel modo - che con Marcel Proust potremmo dire - di usare “un occhio nuovo”, con cui (ri-)guardare quello che si sa - o forse solo si presuppone di sapere -, e quindi, con cui esaminare questioni, porsi interrogativi, insomma rivolgere domande *sul* e *al* proprio sapere. In questa prospettiva, la didattica dinamizza il sapere, lo anima: lo riscopre come generatore di altro sapere.

Bibliografia

Arzarello, F., & Bartolini Bussi, M. G., (1998). Italian trends in research in methematics education. In J. Kilpatrick & A. Sierpinska (Eds.), *Mathematics education as a research domain* (pp. 243-262). Dordrecht: Kluver.

Brousseau, G., (1980), *Problèmes de l'enseignement des décimaux, Recherches en Didactique des Mathématiques* n. 1.1, Editions La pensée sauvage, Grenoble

Brousseau, G., (1981), *Problèmes de didactique des décimaux, Recherches en Didactique des Mathématiques* n. 2.1, Grenoble: Editions La pensée sauvage.

Brousseau, G. et N., (1985), *Documents pour l'enseignement: les décimaux*, Brochure de l'I.R.E.M de Bourdeaux

Brousseau, G., (1986). *Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques*. in Recherches en Didactique des Mathématiques, 7, 2, 33-115

Brousseau, G., (1988). Le contrat didactique: le milieu, *Recherche en didactique des mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, 1988 pag. 309.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G., (2001). Atti del convegno. Palermo.

Brousseau, G., (20l08). *Ingegneria didattica ed Epistemologia della matematica*. Bologna: Pitagora Editrice.

Bruner, J., (1988). *La mente a più dimensioni*. trad. it. Bari: Laterza.

Bruner, J., (1991). La costruzione narrativa della "realtà" in Ammaniti, M., Stern D.M. (a cura di), *Rappresentazioni e narrazioni*. Bari: Laterza, pp. 17-38.

Bruner, J., (1992). *La ricerca del significato*, trad. It., Torino: Bollati Boringhieri.

Calvino, I., (1979) *Se una notte di inverno un viaggiatore*, Torino: Einaudi

Catarsi, E., (2001). *Lettura e narrazione nell'asilo nido.* Bergamo: Junior.

Dallari, M., (1980). *La fata internazionale. Per una pedagogia della fiaba e della controfiaba.* Firenze: La Nuova Italia.

Duval, R., (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg.

Eco, U. (1993) *Sei passeggiate nei boschi narrativi*. Milano: Bompiani.

Fandino Pinilla, M. I., (2005), *Le Frazioni. Aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora editrice.

Fischbein, E., (1984). *Concreto e astratto nell'insegnamento della matematica elementare*, in Prodi, G. (a cura di), Processi cognitivi e apprendimento della matematica nella scuola elementare. Brescia: La Scuola.

Kaneklin, C., Scaratti, G., (1998) *Formazione e narrazione*. Milano: Cortina.

Kieran, T., (1975). On the mathematical cognitive and instructional foundation of rational numbers, in R. Lesh (ed), *Number and measurement*, pp. 101-144, Columbs, Ott: Eric/SMEAC.

Laneve, C., (2003). *La didattica tra teoria e pratica*. Brescia: La Scuola.

Levorato, M. C., (1988). *Racconti, storie e narrazioni*. Bologna: Il Mulino.

Levorato, M. C., (2000). *Le emozioni della lettura*. Bologna: Il Mulino.

Levorato, M. C. & Nesi, B., (2001). Imparare a comprendere e produrre testi. In L. Camaioni (a cura di) *Psicologia dello sviluppo del linguaggio*. Bologna: Il Mulino.

Lyotard, J. F., (1981) *La condizione postmoderna*, Milano: Feltrinelli.

Mariotti, M.A., Sainati, M., Siolis, M., (1995). *Con quale idea di numero i ragazzi escono dalla scuola media*. L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 18A-18B (5)

Nanni, A., *La pedagogia narrativa: da dove viene e dove va*, in Mantegazza, R., (a cura di), (1996), *Per una pedagogia narrativa*, Bologna: EMI

Pinto, G., (1993). *Dal linguaggio orale alla lingua scritta. Continuità e cambiamento*. Firenze: La Nuova Italia.

Rodari, G., (1973). *Grammatica della fantasia*. Torino: Einaudi

Spagnolo, F., (1998). *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*. Firenze: La Nuova Italia.

Spagnolo, F., (2001). *La Ricerca in Didattica delle Matematiche, un paradigma di riferimento*. Quaderni di ricerca in Didattica n. 11. GRIM: Palermo.

Spagnolo, F., (2009). *Epistemologia sperimentale delle matematiche*.Quaderni di ricerca in Didattica n. 19. GRIM: Palermo.

Taylor, D. (1999). *Le storie ci prendono per mano*. Piacenza: Frassinelli.