“Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)”, n. 20, 2010.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

DEPASSEMENT-MAINTIEN DU COMPTAGE AU COURS DE L’ANALYSE ET DE LA SYNTHESE DES NOMBRES A L’ECOLE MATERNELLE

Georgios Kosyvas*

EXCEEDING-MAINTENANCE OF THE COUNTING DURING THE NUMBERS DECOMPOSITION AND COMPOSITION IN THE KINDERGARTEN

Abstract – In this paper we present and discuss the findings of an experimental research, which was carried out on 6-year-old children. These particular findings verify the assumption that the children who were thought_in the “approach of number analysis” (experimental group) have demonstrated a more mature ability of solving narrative problems of the adding type than those who were thought in the usual teaching of the logical-mathematical approach (control group). Moreover, the former group has been able to apply the knowledge of analysis, especially through the analysis-synthesis use of finger patterns in many aspects of the number concept. Therefore, they demonstrated a more mature way of thinking than the children in the control team. All in all, the above results can withstand time as it was proved by the experiment using the same children as subject when they reached the 1st class of elementary school.

Key words: addition and subtraction problems, number decomposition, counting.

RESUME

Cette étude présente et analyse les résultats d’une partie d’une vaste recherche menée sur des enfants de 5-6 ans. Ce qui résulte de cette recherche confirme l’hypothèse selon laquelle les enfants qui ont suivi l’approche didactique du nombre, nommée "méthode d’analyse du nombre" (ils seront notre groupe expérimental), ont démontré une meilleure capacité à résoudre des problèmes narratifs de type additionnel que le groupe des enfants qui ont suivi l’approche classique du nombre (ils seront notre groupe témoin). De plus, ils ont été capables d’appliquer la connaissance de l’analyse, notamment par l’utilisation analytique-synthétique des configurations des doigts, dans plusieurs aspects de la notion de nombre, c’est-à-dire qu’ils ont développé une pensée arithmétique plus mûre que les enfants du groupe témoin. Enfin, ces résultats se maintiennent dans le temps, comme le prouve le test passé par ces mêmes enfants en 1ère classe du primaire.

Mots-Cléfs : problèmes d’addition et de soustraction, décomposition du nombre, dénombrement.

* Lycée Expérimental Unique de l’École Varvakeio, e-mail: gkosyvas@yahoo.com. Adresse : Georgios Kosyvas, Sevastoupoleos 92-94, 11526 Athens, Greece.

CADRE THEORIQUE

Le nombre naturel constitue une notion polyvalente et polynodale. La plupart des approches de la première numération ignorent l'une des caractéristiques fondamentales du nombre: l'analyse du nombre. Les recherches plus anciennes insistent sur la mémorisation des opérations (Thorndike, 1922) ou sur les structures logico-mathématiques (Piaget & Szeminska, 1941). Les travaux de recherche plus récents donnent au dénombrement une place privilégiée. Mais pour de nombreux chercheurs, la suite arithmétique orale et la numération, malgré des différences ponctuelles, sont des lieux qui se rejoignent (Greco, 1962 ; Gelman & Gallistel, 1978 ; Meljac, 1979 ; Fischer, 1981 ; Clements, 1984 ; Hughes, 1986 ; Fuson, 1988 ; Fayol, 1990 ; Briand, 1999; Brown, 2002 ; Verschaffel et al., 2006; Margolinas & De Redon, 2008). Plus spécifiquement, dans le cadre du constructivisme, des recherches systématiques ont abouti à la mise en place de modèles portant sur les stades d'élaboration du nombre, le surcomptage et le décomptage (Steffe et al., 1983 ; Steffe & Cobb, 1988 ; Wright, 2005) et le développement de la base de 10 (Cobb & Wheatley, 1988)

Toutes ces tendances scientifiques et didactiques méconnaissent le fait que le nombre est davantage qu'une notion ordinale et cardinale. Le nombre est fondamentalement une forme de décomposition en nombre plus petits et de recomposition à partir de ces nombres. L'analyse d'un nombre naturel en deux nombres naturels renvoie au contrôle de la conséquence mathématique suivante :

$$a=b+c \Rightarrow a=(b-x)+(c+x)$$

Il est évident qu'à partir de l'analyse initiale d'un nombre sont produites aussi d'autres analyses. Par exemple, de l'analyse 7=6+1 résultent à titre indicatif les analyses suivantes :

$$7=(6-1)+(1+1)=5+2 \quad 7=(6-2)+(1+2)=4+3 \quad 7=(6-6)+(1+6)=0+7$$

La beauté de la décomposition et de la recomposition des nombres donne de l'élan à l'imagination, stimule la recherche continue, l'invention d'idées et de stratégies alternatives et l'expression créatrice des enfants. D'après la bibliographie que nous avons pu consulter, il n'existe pas à ce jour de modèle élaboré qui articule ensemble l'analyse et les autres notions arithmétiques.

La décomposition et la composition du nombre trouve en partie un appui théorique dans l'œuvre de Piaget qui renvoie à la notion opérationnelle du nombre. Dans cette définition, les enfants sont supposés être capables d'aborder les analyses d'un nombre donné et de les retrouver dans le nombre même si la connaissance de ces analyses n'est pas explicitement exigée (Brissiaud, 1994). La preuve de la compréhension réelle de la notion de nombre est la réaction positive des enfants aux expériences correspondantes de conservation et d'inclusion. Dans les recherches de Resnick (1983), le schéma "le tout et la partie" détient une place primordiale:

> *La réalisation conceptuelle majeure des premières années scolaires est sans doute l'interprétation des nombres sur la base de la relation du tout et de la partie. En utilisant le schéma "tout et partie" dans une quantité, les enfants peuvent penser les nombres en termes de composition d'autres nombres. Cet enrichissement de la compréhension du nombre ouvre des possibilités vers des stratégies de résolution et d'interprétation de problèmes mathématiques qui ne sont pas à la portée d'enfants plus petits.* (Resnick 1983, p. 114).

En outre, Payne et Rathmell (1975) ont proposé l'utilisation des mots "tout" et "partie" pour souligner l'importance de ce rapport de séparation. Différents chercheurs se sont intéressés directement ou indirectement à des approches liées à l'analyse et la synthèse des nombres (Marton & Neuman, 1990 ; Brissiaud, 1991 ; Sophian & Corgray, 1994 ; Bobis, 1996 ; Brissiaud, 2003 ;

Briand et al. 2004, Wright et al., 2007 ; Margolinas & De Redon, 2008). Les raisons principales qui fondent l’importance de l’analyse des nombres dans la structuration et l’évolution des connaissances arithmétiques des enfants sont de proposer une approche multiple et ouverte, de faciliter l’élaboration de stratégies mentales de calcul réfléchi, de préparer la valeur positionnelle et de résoudre des problèmes (Irwin, 1996 ; Cobb et al., 1997 ; Hunting, 2003 ; Wright et al., 2006 ; Kosyvas, 2009a). C’est aussi une base précieuse qui contribue à faire avancer la pensée arithmétique des enfants et les aide à comprendre d’autres notions arithmétiques, plus complexes, telles la fraction, le pourcentage, la probabilité et le rapport (Payne & Huinker, 1993 ; McClain & Cobb, 1999 ; Baroody, 2004). Une élaboration et un approfondissement plus poussés des relations polymorphes et polyvalentes entre les nombres font émerger des idées mathématiques fertiles qui organisent et systématisent les nombres en nouvelles structures et nouveaux schémas (patterns).

Nous considérons qu’une série d’activités didactiques ayant un sens pour les enfants qui cultivent soigneusement et systématiquement leur apprentissage arithmétique dans la zone proximale de développement (Vygotsky, 1962) et s’inscrivent dans le cadre socioculturel de la maternelle, pourraient susciter et préparer certaines des capacités précitées. L’apprentissage, en tant que relation sujet-objet, constitue un processus de découverte active, multi-sensorielle et multi-opérationnelle, où la gestion des objets du monde vécu et la communication linguistique se renforcent mutuellement. Voici, à titre indicatif, quelques activités auxiliaires du projet: activités de séparation, union et regroupement, faites avec usage des doigts et de tout matériel à notre disposition dans notre environnement culturel (petites collections, tiges de bouliers, décade structurée, dés, tables d’analyse, jeux éducatifs) ainsi que des situations familières de réflexion sur le matériel pédagogique et d’autres moyens d’expression (récitation de la suite arithmétique, dénombrement, contes narratifs, chansons et autres moyens transversaux d’approche des nombres), (Kosyvas, 2001 ; Kosyvas, 2009b).

Dans cet ensemble structuré de situations didactiques de réflexion et de communication, l’analyse et la synthèse des nombres constituent un point essentiel pour l’élaboration de la pensée mathématique chez les enfants. Il approfondit la compréhension de la notion même de nombre, ainsi que des opérations d’addition et de soustraction, sans que soient négligés pour autant les autres aspects des nombres en tant que nombres cardinaux et ordinaux, ce qui provoquerait des phénomènes de déséquilibre. Le fait que les nombres peuvent se décomposer en plus petits ou se combiner pour former des nombres plus grands est essentiel à la compréhension de ces opérations. Dans toute synthèse arithmétique, les nombres qui sont analysés et recomposés se déterminent entre eux, de telle façon qu’un nombre peut provenir des autres par addition ou par soustraction. Cette connaissance est liée au schéma "tout-partie" et joue un rôle essentiel dans la résolution des problèmes d’addition et de soustraction (Vergnaud & Durand., 1976 ; Briars & Larkin, 1984 ; Riley & Greeno, 1988 ; Fayol, 1991 ; Verschaffel et al., 2007) puisqu’au fond, elle est inhérente aux relations notionnelles de chaque problème. L’analyse, l’addition et la soustraction constituent un tout, un ensemble d’actes opérationnels réversibles.

Nous avons étudié certains problèmes narratifs de structures additives. Les enfants de la maternelle qui ont participé à cette recherche ont résolu en tout 10 problèmes présentés à eux sous forme de petites histoires. La question qui nous intéresse dans cette recherche est la suivante: *Une approche didactique basée sur l’analyse des nombres aura-t-elle pour effet d’apporter une compréhension plus profonde et plus mûre dans la résolution des problèmes narratifs chez les enfants de 6 ans par rapport à l’enseignement traditionnel et quelles sont les stratégies adoptées dans chaque cas?*

METHODOLOGIE

La planification expérimentale comprend 2 groupes d’enfants qui se trouvent en dernière année de l’école maternelle: le groupe expérimental et le groupe témoin. Le groupe expérimental a suivi une nouvelle approche de la notion de nombre qui met l’accent sur l’analyse du nombre, tandis que le groupe témoin a suivi la méthode traditionnelle qui est axée sur des activités de type logique (classifications, correspondances, sériations).

Tous les élèves de l’échantillon total ont reçu 10 problèmes narratifs, divisés en 5 types (2 problèmes par type). Nous limitons notre épreuve à 6 problèmes de changement et 4 problèmes de composition (Carpenter & Moser, 1982 ; Resnick, 1989 ; Gutstein & Romberg, 1995)

Les nombres utilisés dans ces problèmes narratifs, tant pour les données arithmétiques que pour les résultats demandés, ne dépassent pas le nombre 8. Ci-dessous, nous présentons la liste des problèmes narratifs donnés aux enfants (les chiffres entre parenthèses correspondent au second problème du même type):

CATÉGORIES	ÉNONCÉS DES 10 PROBLÈMES
Changement 1: $2+6=x$ $(3+4=x)$, Accroissement avec état final inconnu.	Georges avait 2 (3) marqueurs. Voulant utiliser d’autres couleurs pour son dessin, il cherche et trouve 6 (4) autres marqueurs. Combien a-t-il de marqueurs maintenant?
Changement 2: $8–6=x$ $(8–4=x)$, Diminution avec état final inconnu.	Papy avait 8 (8) poules dans son poulailler. Mais, un jour, un rusé renard entre dedans et mange 6 (4) poules. Combien de poules reste-t-il dans le poulailler?
Changement 3: $3+x=7$, $(2+x=8)$ Accroissement avec quantité ajoutée inconnue	Il y avait 3 (2) enfants dans le bus de l’école. Puis d’autres enfants sont montés dans le bus. Maintenant, il y en a 7(8). Combien d’enfants sont montés dans le bus?
Composition 1 ou combinaison: $2+4=x$ $(5+2=x)$, Recherche du tout	Nikos a 2 (5) chats en peluche et 4 (2) chiens en peluche. Combien a-t-il d’animaux en peluche?
Composition 2 ou séparation: $7=4+x$ $(8=6+x)$, Recherche de l’une des parties	A l’anniversaire de Melina, 7 (8) enfants sont venus. Parmi eux, il y avait 4 (6) filles. Combien y avait-t-il de garçons?

Tableau 1. – Description des 10 problèmes narratifs.

Tous les enfants ont dû répondre aux questions des 10 problèmes narratifs à 4 moments distincts:

- avant l’application des 2 projets distincts d’action didactique pour l’approche de la notion de nombre (pré-test A),
- à la fin du premier cycle de cours (contrôle intermédiaire ou test B),
- à la fin de l’ensemble des cours de la maternelle (premier post-test C),

- au début de la 1ère année de l'école primaire (second post-test D).

La recherche expérimentale a été menée au cours de l'année scolaire 1992-1993 dans 22 classes de maternelle sur un échantillon de 258 enfants. Plus spécifiquement: cent vingt-neuf (129) enfants de 11 classes de maternelle du département de Corinthe, d'âge allant de 5 ans et 6 mois à 6 ans et 6 mois (moyenne d'âge: 6,02 avec 51,9 d'enfants de plus de 6 ans) au dernier recensement de leur âge (octobre), ont reçu l'enseignement de notre projet didactique (75 garçons et 54 filles). Et cent vingt-neuf (129) enfants de 11 autres classes de maternelle, d'âge allant de 5 ans et 6 mois à 6 ans et 6 mois (moyenne d'âge: 6,06 avec 63,6 d'enfants de plus de 6 ans) d'après le dernier recensement, ont reçu l'enseignement de l'approche de la notion de nombre prévue par le programme officiel de la maternelle (61 garçons et 68 filles).

L'échelle de mesure des résultats des enfants était de 0 à 4 pour tous les problèmes. Le contrôle des hypothèses et l'analyse statistique des résultats ont été faits avec le programme SPSS.

PRESENTATION ET DISCUSSION DES RESULTATS

Pour l'ensemble des problèmes narratifs de notre recherche, nous avons appliqué le coefficient de validité Cronbach's alpha. Tous les coefficients de validité se sont avérés élevés: A: 0,93, B: 0,94, C: 0,95, D: 0,95.

Le diagramme ci-dessous reflète la progression comparative des résultats moyens des deux groupes pour les 10 problèmes narratifs aux différents moments A, B, C et D. De plus, un contrôle est effectué du parallélisme des lignes de progression dans le temps des 2 groupes. La ligne continue se rapporte au groupe expérimental et la ligne en pointillé au groupe témoin.

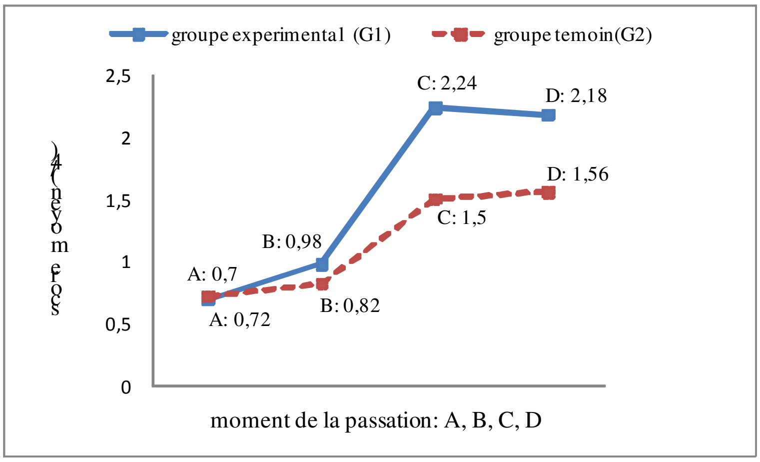

Figure 1. – Performances des deux groupes aux dix problèmes en fonction du moment de la passation.

L'étude des résultats du diagramme ci-dessus portant sur les problèmes narratifs nous permet de faire les observations suivantes:

Pour ces problèmes, tant au cours de l'exécution du programme (A-B-C) qu'une fois le programme terminé (D), les performances moyennes du groupe expérimental sont plus élevées que celles du groupe témoin. Le groupe expérimental présente donc une meilleure progression. En comparant l'évolution diachronique des résultats des 2 groupes pour les problèmes narratifs (contrôle de l'hypothèse du parallélisme des deux lignes), il s'avère que l'interaction de l'évolution dans le temps des élèves avec le type de groupe est statistiquement significative (GLM Repeated Measures-Sphericity Assumed: $F=30{,}81$, $p<0{,}01$). Si on relie ces différences avec les résultats du diagramme, on peut conclure que dans la résolution de ces problèmes, le groupe expérimental surpasse en progression le groupe témoin pendant toute la durée de l'expérimentation. Le groupe témoin montre une tendance à l'amélioration dans ses performances d'une épreuve à l'autre. C'est aussi le cas pour le groupe expérimental avec une exception: de l'épreuve C à l'épreuve D, il présente une légère baisse dans la résolution des problèmes passant de 2,24 à 2,18 (Figure 1). On doit attribuer ce phénomène aux quatre mois qui séparent le test final C de juin et le test final D d'octobre (sans enseignement puisque c'était la période des vacances).

La familiarisation systématique des enfants avec des activités d'analyse des nombres a favorisé le développement de capacités de résolution de problèmes bien que les problèmes spécifiques qui leur ont été soumis ne leur avaient pas été enseignés. Les résultats de cette recherche témoignent de la capacité des enfants à appliquer la connaissance de l'analyse à d'autres aspects des notions de nombres (problèmes narratifs d'addition et de soustraction). Enfin, ces résultats se maintiennent dans le temps, comme le prouve la répétition du test quand les enfants se trouvent en 1ère classe du primaire. Cette supériorité du groupe expérimental (G1) par rapport au groupe témoin (G2) doit être attribuée à la différence spécifique unique entre les deux groupes, à savoir l'intervention didactique spéciale qui se fonde sur les expériences arithmétiques préalables des enfants, sur l'utilisation d'un matériel pédagogique familier ou attractif dans la vie des enfants et sur l'analyse-synthèse des nombres.

Le tableau ci-dessous présente une image comparative de l'évolution dans le temps des scores des deux groupes pour chacun des problèmes narratifs.

Description des problèmes narratifs	***Groupe***	*A*	*B*	*C*	*D*
1. Accroissement avec état final inconnu *(2+6=x).*	G_1 G_2	8,5 9,3	14,0 11,6	72,9 38,8	70,5 41,1
2. Accroissement avec état final inconnu *(3+4=x).*	G_1 G_2	12,4 13,2	24,0 15,5	78,3 40,3	79,1 41,9
3. Diminution avec état final inconnu *(8–6=x).*	G_1 G_2	11,6 10,1	23,3 15,5	77,5 35,7	72,1 40,3
4. Diminution avec état final inconnu *(8–4=x).*	G_1 G_2	10,9 12,4	24,8 16,3	79,8 46,5	75,2 48,1
5. Accroissement avec quantité ajoutée inconnue *(3+x=7).*	G_1 G_2	7,8 10,1	17,8 12,4	53,5 32,6	52,7 34,1
6. Accroissement avec quantité ajoutée inconnue *(2+x=8).*	G_1 G_2	6,2 7,0	14,7 9,3	49,6 31,8	49,6 33,3
7. Recherche du tout *(2+4=x).*	G_1 G_2	11,6 12,4	23,3 15,5	82,9 45,0	76,7 48,8
8. Recherche du tout *(5+2=x).*	G_1 G_2	10,9 10,1	19,4 13,2	78,3 43,4	73,6 46,5
9. Recherche de l'une des parties *(7=4+x).*	G_1 G_2	10,1 10,1	23,3 16,3	67,4 35,7	62,8 34,9
10. Recherche de l'une des	G_1	9,3	21,7	63,6	61,2

parties *(8=6+x)*.	G_2	9,3	15,5	34,1	35,7

Tableau 2. – Évolution diachronique des pourcentages de réussite en fonction du groupe et du problème.

Les résultats de la recherche ont mis en évidence la capacité des enfants à résoudre des problèmes, ainsi que leurs difficultés mais aussi l'admirable variété de leurs stratégies. Par la suite, nous allons tenter d'analyser ces questions.

Le tableau ci-dessus nous renseigne sur les scores des deux groupes pour chacun des 10 problèmes narratifs et nous permet de faire les observations suivantes:

Une première constatation est que pour chacune des mesures A, B, et C, le pourcentage de réussite des enfants du groupe expérimental est plus élevé que celui du groupe témoin pour tous les problèmes. Les enfants ont démontré qu'ils étaient capables de résoudre un large éventail de problèmes narratifs. Le cadre des problèmes représentait des situations familières qui avaient un sens pour eux et leur ont permis de révéler les riches connaissances informelles qu'ils possédaient déjà. Leurs scores sont élevés. Plus précisément, lorsque les enfants on débuté en 1ère classe du primaire (octobre), les scores variaient de 49,6 à 82,9 pour le groupe expérimental et de 31,8 à 48,8 pour le groupe témoin. Les résultats du groupe expérimental sont impressionnants, si l'on considère qu'il ne provenait pas de classes moyennes (la composition sociale de la population du département de Corinthe est urbaine, agricole et ouvrière).

Une deuxième constatation concerne l'influence de la structure sémantique sur le degré de difficulté des problèmes: en effet, des problèmes qui sont résolus avec la même opération arithmétique mais varient quant à leur structure sémantique ont des degrés de difficultés différents. Ces résultats confirment des observations analogues de précédentes recherches (Carpenter & Moser, 1983 ; Riley et al., 1983). Bien que chaque problème constitue un cas particulier, on peut les diviser en deux catégories:

- des problèmes faciles (accroissement ou diminution avec état final inconnu et recherche du tout), pour lesquels les enfants du groupe expérimental ont atteint un score entre 70,5 à 82,9 et
- des problèmes difficiles (quantité ajoutée inconnue, recherche de la partie), pour lesquels les scores du groupe expérimental variaient de 49,6 à 67,4 .

Les enfants comprenaient facilement les problèmes de changement (accroissement ou diminution) avec état final inconnu et les problèmes de composition (ou combinaison) avec pour inconnue le tout. Ces problèmes d'accroissement ou de diminution, les enfants peuvent les rencontrent quelquefois dans les circonstances quotidiennes de leur vie sociale. De même pour les problèmes simples de composition auxquels se rapportent des classes d'objets familiers incluses dans une classe globale (les chatons et les chiots sont des animaux, les garçons et les filles sont des enfants). Tant le vocabulaire que les relations sémantiques existantes ont été assimilés par les enfants, bien que les rapports d'inclusion soient globalement difficiles à comprendre.

Les enfants ont rencontré des difficultés pour les problèmes de la seconde catégorie (quantité ajoutée inconnue, recherche de la partie – séparation). Les principales difficultés portaient sur la compréhension des problèmes. Aussi, dans certains cas, les enfants avaient des difficultés à représenter les données du problème avec leurs doigts (Nunes & Bryant, 1996). La relation de la partie au tout, contenue dans la structure sémantique de ces problèmes, est de nature différente. Cependant, les performances des enfants sont élevées et cela est dû principalement à l'application du programme d'activités mathématiques qui mettait particulièrement l'accent sur les relations d'analyse-synthèse des nombres. Enfin, les enfants ont fait des progrès en passant de résolutions de problèmes comportant des représentations physiques immédiates (usage des doigts) à l’utilisation de relations d’analyse et de recomposition des nombres. Ces résultats sont conformes à ceux provenant d’autres recherches (Sophian & McCorgray, 1994 ; Fuson, 2004).

Ajoutons qu’il résulte des résultats ci-dessus que les enfants du groupe expérimental se montrent supérieurs non seulement quant au score global, mais aussi quant aux types de stratégies employés.

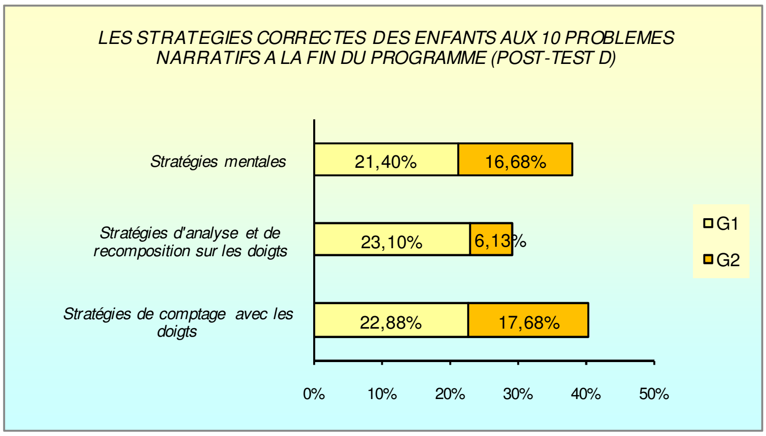

Figure 2. – Les stratégies correctes des enfants aux 10 problèmes narratives a la fin du programme (post-test D).

Les stratégies que choisissent les enfants du groupe expérimental sont plus mûres que celles utilisées par le groupe témoin. Cela est évident, autant par les pourcentages élevées dans l’ensemble des stratégies que par la grande supériorité du groupe expérimental dans les stratégies d’analyse sur les doigts (G1: 23,10 , G2: 6,13), lesquelles constituent le niveau intermédiaire où l’enfant passe de processus avec matériel à des processus sans matériel. Dans les stratégies mentales (appel immédiat à la mémoire à long terme) la suprématie du groupe expérimental (G1: 21,40 , G2: 16,68) est évidente. De même pour les stratégies de comptage avec les doigts (G1: 22,88 , G2: 17,68). On peut en conclure que la familiarisation constante et méthodique des enfants avec l’analyse et la recomposition sur les doigts, d’une part assure et préserve l’acquisition de l’énumération et, d’autre part, la dépasse en aidant à la conception progressive de la notion de nombre. Il serait très intéressant de tester cette hypothèse sur des enfants de 1ère année du primaire notamment pour le dépassement vers le haut et vers le bas de la dizaine. En tout cas, les enfants ne font pas tous preuve de constance dans l’utilisation des stratégies, ce qui corrobore les constatations d’autres chercheurs (Torbeyns et al., 2005). Les stratégies diffèrent autant d’un problème à l’autre que le problème lui-même. Souvent, les enfants changent de stratégies dans leur effort de trouver une solution au problème. Ils font appel à diverses stratégies qu’ils connaissent ou adaptent des stratégies familières ou en inventent de nouvelles.

DISCUSSION COMPLEMENTAIRE ET CONCLUSIONS

En résumant les résultats ci-dessus, on aboutit à la conclusion que les enfants de 6 ans du groupe expérimental à qui on a enseigné la notion des nombres selon l’approche analytique, ont fait preuve d’une capacité à résoudre des problèmes comportant des structures de type additif. Nos résultats montrent que les enfants du groupe expérimental dépassent le niveau de compétence requis par le programme officiel détaillé du premier semestre de la 1ère année du primaire. Mais les enfants du groupe témoin ont eux aussi sensiblement progressé, même si la comparaison avec le groupe expérimental donne un avantage statistiquement significatif au groupe expérimental. Tous les enfants ayant participé à notre recherche ont débuté l'année scolaire du primaire avec davantage de connaissances que celles requises à ce niveau.

A première vue, ces résultats ne sont pas compatibles avec les conclusions de Piaget. L'émergence chez les enfants de la connaissance complexe de résolution des problèmes provient des expériences pédagogiques enrichissantes qu'ils ont acquises au cours du programme d'enseignement. L'approche du nombre du point de vue de l'analyse que nous avons mise en œuvre à la maternelle s'accordait pleinement avec les connaissances pré-acquises des enfants. Nous pouvons supposer que les enfants disposaient d'un ensemble de principes à l'état latent concernant l'analyse et la synthèse additive avant de pouvoir faire face avec succès à la tâche d'inclusion des classes de Piaget. Ils disposaient aussi d'un modèle de conservation arithmétique avant d'être en mesure de répondre à l'expérience de conservation classique de Piaget. Ces connaissances se limitaient à la conservation arithmétique et à l'inclusion arithmétique, et ne s'étendaient pas généralement à la conservation et à l'inclusion logique des classes. Toutes les connaissances préalables sont utiles pour leur développement conceptuel ultérieur. Selon Resnick, ce sont ces schémas logiques primo-quantitatifs qui constituent le fondement de la construction mathématique chez l'enfant (Resnick, 1983).

L'approche des nombres à la maternelle selon la logique du programme officiel (Ministère de l'éducation nationale et des cultes, 1989 ; Institut Pédagogique, 1990) présente les caractéristiques suivantes: fixation exclusive sur les concepts logiques pré-requis, sous-estimation de l'importance de l'analyse des nombres, approche non-ouverte, absence d'usage des doigts, transfert dogmatique et mécanique d'expériences psychologiques dans l'enseignement. Néanmoins, une grande partie du programme des mathématiques de la maternelle contient des compétences qui, directement ou indirectement, pourraient se rattacher à la compréhension des relations d'analyse des nombres. Les résultats de cette étude prouvent que l'intervention didactique qui met l'accent sur l'analyse des nombres peut aider à l'élaboration multiple de la notion de nombre et des compétences qui y sont liées. Les différences entre les deux groupes semblent être dues à la différence d'approche existant entre les deux séries d'enseignement.

Les résultats de cette recherche conduisent à la conclusion que la familiarisation méthodique des enfants avec des activités d'analyse a favorisé l'émergence de capacités à résoudre des problèmes narratifs d'addition et de soustraction. Ces relations polyvalentes constituent un fondement majeur qui met l'accent sur de nombreuses notions mathématiques développées chez les enfants. De plus, ces résultats se maintiennent dans le temps, comme le prouve le test mené chez ces mêmes enfants à leur entrée en 1ère classe du primaire. Les performances cognitives des enfants du groupe expérimental nous ont étonnées et sont dignes d'observation.

Par quelles méthodes et quels moyens pouvons-nous aboutir à un enrichissement de la compréhension des nombres? Comment les enfants pourront-t-ils élaborer de nouvelles stratégies pour résoudre de nouveaux problèmes? Notre étude tente de donner quelques premières réponses à ces questions, en proposant de redéfinir le poids relatif des composantes de l'évolution arithmétique des enfants. Nous n'étions satisfaits ni de la théorie de Piaget (sous-estimation des enfants) ni du behaviorisme ni encore de l'approche des constructivistes modernes. Malgré son importance, l'analyse arithmétique n'apparaît que très peu dans la théorie de Piaget. Il s'est surtout concentré sur l'inclusion logique et la conservation. Selon lui, l'analyse et la synthèse du nombre et la compréhension de l’addition et de la soustraction arrivent à l’âge de 7 ans environ avec la maturation de l’esprit (stade de la pensée concrète). L’analyse est absente du behaviorisme où l’on met en exergue la mémorisation partielle de produits d’addition et de soustraction sans compréhension des notions. Enfin, l’analyse du nombre ne fait pas l’objet d’une étude systématique dans les expériences didactiques de l’école du constructivisme, où les relations tout-partie sont essentiellement examinées dans le cadre de la suite arithmétique. (Steffe, 2004). On n’explique pas quelles connaissances doivent acquérir les enfants de niveau pré-mental afin de transformer graduellement leurs stratégies spontanées et arriver au stade abstrait de numération et à l’élaboration de stratégies de réflexion (calcul mental). Enfin, on ne propose pas d’activités pertinentes avec matériel pédagogique qui pourraient fonctionner comme des "ponts cognitifs" facilitant et préparant cette élaboration. Pourtant, ces dernières années, de nouveaux programmes expérimentaux voient le jour, dans lesquelles les enfants se livrent à l’analyse des nombres à travers l’addition de deux termes avec usage d’objets (Brissiaud et al., 1994 ; Wright et al., 2007 ; Clements, 2004 ; Fuson, 2004 ; Baroody, 2004).

Dans notre approche, tout en reconnaissant la valeur des multiples savoirs vécus non-appris que nous offre notre civilisation, nous avons considéré que la mathématisation progressive doit être liée avec les mathématiques de l’école. C’est pourquoi nous nous sommes démarqués des épreuves de conservation et d’inclusion. L’acquisition d’une variété d’expériences sur les analyses des nombres séparément aide à la formation d’un ensemble composite de concepts, d’opérations et de relations. L’utilisation de chaque nombre dans des cas multiples et différents contribue à l’acquisition d’une notion flexible du nombre qui ne s’assimile pas à la numération. La présente étude nous permet de suggérer une méthode d’approche des notions arithmétiques, dans le cadre de la maternelle, fondée sur l’analyse du nombre lui-même. Nous avons mis en place un faisceau d’activités didactiques pertinentes qui avaient pour but de faciliter la construction arithmétique chez les enfants. Les scores élevés des enfants qui ont été initiés au monde des nombres à l’aide de cette méthode, prouvent sa réussite. Bien sûr, l’écart des performances d’apprentissage ne peut à lui seul nous permettre de conclure que la qualité de cette approche du nombre est la meilleure. Mais ce n’est qu’un aspect de la question. Ce qui est plus important est le fondement de l’approche elle-même et le contenu du faisceau d’activités d’apprentissage.

Comme en témoignent nos résultats, l’analyse et la recomposition des nombres enrichit et accroît les stratégies que les enfants élaborent pour résoudre les problèmes. Le faisceau riche et évolutif des idées qui sont liées aux nombres préserve mais en même temps dépasse la l’acquisition du dénombrement. Dans des situations de réflexion véritable et de communication cognitive active, la numération n’est pas la seule stratégie à laquelle font appel les enfants. On a trouvé que les enfants qui savent compter n’utilisent pas la numération pour comparer deux ensembles (Gréco, 1962; Starfd, 2008). Les enfants, absorbés comme ils le sont dans des opérations de dénombrement, ne pensent jamais au fait que les ensembles qu’ils comptent peuvent être constitué de deux composantes, ni à la pluralité de ces composantes. Ce figement long et exclusif dans la monotonie de la numération peut assécher sa valeur d’expérience vécue et affaiblir la perspective d’émergence d’idées nouvelles et fécondes. Mais en élaborant progressivement de nouvelles structures et schémas quantitatifs, en inventant et en construisant des relations de plus en plus fines et différenciées entre les nombres, ils deviennent des créateurs admirables qui approfondissent leur compréhension en continuant à développer leur esprit mathématique. Il suffit de garantir un environnement d’apprentissage scolaire, riche et agréable, qui atténue et réduit les différences notionnelles entre les connaissances mathématiques systématisées et les expériences spontanées antérieures, en cultivant leur évolution naturelle et équilibrée. La synergie et le soutien d’un tel environnement motivent les enfants, stimulent leur imagination et aiguisent leur intérêt, entraînent une joie et un plaisir durable et les encouragent sans cesse à considérer les mathématiques comme faisant partie de leur vie quotidienne.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BAROODY, A.J. (2004) The developmental bases for early childhood number and operations standards. In D. H. CLEMENTS & J. SARAMA (eds.), Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education (pp. 173-219). LEA Publishers.

BOBIS, J. (1996) Visualisation and the development of number sense with kindergarten children. In J. T. MULLIGAN & M. MITCHELMORE (eds.), Children's number learning (pp. 17-34). Adelaide: AAMT.

BRIAND, J. (1999) Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d"enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherches en Didactique des mathématiques 19*.1, 41-76.

BRIAND, J., LOUBET, M., & SALIN, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris: Hatier.

BRIARS, D.-J. & LARKIN, J. H. (1984) An integrated model of skill in solving elementary word problems. Cognition and Instruction, 1, 245-296.

BRISSIAUD R. (1991) Calculer et compter de la petite section à la grande section de maternelle, Grand N, 49, 37-48.

BRISSIAUD R. (1994) L'acquisition de connaissances numériques. Dans R. GHIGLIONE ET J.– F. RICHARD (Eds) Cours de psychologie, 3. Champs et théories, (pp. 98-109), Paris : Dunod.

BRISSIAUD R. (2003) *Comment les enfants apprennent à calculer.* Paris : Editions Retz.

BRISSIAUD R., BOULARD C., OUZOULIAS A., MARTINE R. (1994) J'apprends les maths GS, livre du maître, Paris : Retz.

BROWN, M. (2002) Researching primary numeracy. In: A.D. COCKBURN & E NARDI (eds), Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (Vol. 1, pp. 15-30). Norwich: University of East Anglia.

CARPENTER, T.P., MOSER J. M. (1983) The acquisition of addition and subtraction concepts. In: R. LESH & M. LANDAU (eds), Acquisition of Mathematics: Concepts and Processes, (pp. 7-44). New York: Academic Press.

CLEMENTS D.H. (1984). Training effects on the development and generalization of piagetian logical operations and knowledge of number. *Journal of Educational Psychology*, 76, 766-776.

CLEMENTS, D. H. (2004) Major Themes and Recommendations. In D. H. CLEMENTS & J. SARAMA (eds.) Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education (pp. 7-72). LEA Publishers.

COBB, P. & WHEATLEY, G. (1988) Children's initial understandings of ten. Focus on Learning Problems in Mathematics, 10, 1-28.

COBB, P., BOUFI, A., MCCLAIN, K., WHITENACK, J. (1997) Reflective discourse and collective reflection. Journal for Research in Mathematics Education, 28, 261-265.

DECRET PRESIDENTIEL. Ministère grec de l'éducation national et des cultes (1989). Programme quotidien détaillé de la maternelle.

d'Epistémologie Génétique, pp.1-70). Paris: PUF.

FAYOL M. (1990) L'enfant et le nombre, du comptage à la résolution des problèmes, Neuchâtel-Paris : Delachaux et Niestlé.

FAYOL M. (1991) Du nombre à son utilisation: la résolution de problèmes additifs. Dans J. BIDEAUD, CL. MELJAC, J. P. FISCHER (Eds) Les Chemins du Nombre (pp. 259-270), Presses Universitaires de Lille.

FISCHER J.–P. (1981) Développement et fonctions du comptage de 3 à 6 ans, Recherches en didactique des mathématiques, 2-3, 277-302.

FUSON, K.C. (1988) Children's counting and concepts of number. New York:Springer-Verlang.

FUSON, K.C. (2004) Pre-K to Grade 2 Goals and Standards: Achieving 21st-Centoury Mastery for All. In D. H. CLEMENTS & J. SARAMA (eds.) Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education (pp. 105-148). LEA Publishers.

GELMAN, R. & GALLISTEL, G. R. (1978) The child's understanding of number, Cambridge, MA: Harvard University Press.

GRECO P. (1962). Quantité et quotité, nouvelles recherches sur la correspondance terme-à-terme et la conservation des ensembles. In P. Gréco & A. Morf (Eds), *Structures numériques élémentaires* (Vol. XIII des Etudes

GUTSTEIN, E., & ROMBERG, T. A. (1995) Teaching children to add and subtract, Journal of Mathematical Behavior, 14, 283-324.

HUGHES, M. (1986) Children and Number, Difficulties in learning mathematics. Oxford: Basil Blackwell.

HUNTING, R. P. (2003) Part-whole number knowledge in preschool children, Journal of Mathematical Behavior, 22, 217-235.

IRWIN, K. C. (1996) Children's understanding of the principles of compensation and covariation in part-whole relationships, Journal for Research in Mathematics Education, 27, 25-40.

KOSYVAS G. (2009a) Number analysis in the kindergarten. In M. TZEKAKI, M. KALDRIMIDOU & C. SAKONIDIS (eds.) Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, (p. 465), Thessaloniki, Greece: PME.

KOSYVAS G. (2009b) Number analysis and solution of addition and subtraction problems in 6-year-old children. In: A. GAGATSIS & S. GROZDEV (eds), Proceedings of the 6th Mediterranean Conference on Mathematics Education, (pp. 439-450). Plovdiv, Bulgaria: Cyprus Mathematical Society, University of Plovdiv.

KOSYVAS, G. (2001) L’enseignement vécu des notions arithmétiques à la maternelle, l’influence de l’analyse des nombres avec des configurations des doigts et autres outils pédagogiques et moyens d’expression de la civilisation sur l’élaboration de la pensée arithmétique des enfants de 5-6 ans. AUTH. Essai inédit.

LIVRE DU MAITRE. Ministère grec de l’éducation national et des cultes – Institut Pédagogique (1990) Livre d’activités pour la maternelle.

MARGOLINAS, C., & De REDON, M. –C. (2008). Connaissances naturalisées dans le champ du numérique à l'articulation école maternelle / école primaire. Dans A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques* (pp. cédérom). Grenoble: La pensée sauvage.

MARTON, F. & NEUMAN, D. (1990) Constructivism, Phenomenology, and the origin of arithmetic skills. In: L.-P. STEFFE & T.WOOD (eds.) Transforming children’s counting mathematics education: International perspectives, (pp. 62-75). LEA Publishers.

MCCLAIN, K. & COBB, P. (1999) Patterning and partitioning: Early number concepts. In J. COPLEY (ed.) Mathematics in the early years (pp. 112 – 118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

MELJAC CL. (1979) Décrire, agir et compter: L’enfant et le dénombrement spontané, Paris : PUF.

NUNES, T. & BRYANT, P. (1996) Children Doing Mathematics. Oxford: Basil Blackwell.

PAYNE, J. N. & HUINKER D.-M. (1993) Early number and numeration. In R. C. JENSEN (ed.) Research ideas for the classroom, early childhood Mathematics, (pp. 43-71). New York: Macmillan.

PAYNE, J. N., & RATHMELL, E. C. (1975) Number and numeration. In J. N. PAYNE (ed.) Mathematics learning in early childhood (pp. 125-160). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

PIAGET, J., SZEMINSKA, A. (1941/1991) La genèse du nombre chez l'enfant. Neuchâtel-Paris : Delachaux et Niestlé.

RESNICK, L. -B. (1983) A developmental theory of number understanding. In: H.-P. GINSBURG (ed) The development of mathematical thinking, (pp. 109-151). New York: Academic Press.

RESNICK, L. -B. (1989) Developing mathematical knowledge, American Psychologist, 44 (2), 162-169.

RILEY, M. S. & GREENO J. G. (1988) Developmental analysis of understanding language about quantities and of problems. Cognition and Instruction, 5, 49-101.

SFARD, A. (2008) Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing. Cambridge University Press.

SOPHIAN, C.& MCCORGRAY P. (1994) Part-Whole Knowledge and Early Arithmetic Problem Solving, Cognition and Instruction, 12, 3 – 33.

STEFFE, L (2004) PSSM From a Constructivist Perspective. In D. H. CLEMENTS & J. SARAMA (eds.), Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education (pp. 221-251). LEA Publishers.

STEFFE, L.- P., von GLASERSFELD, E., RICHARDS, J., COBB P. (1983) Children's counting types: Philosophy, theory, and application. New York: Praeger Scientific.

STEFFE, L.-P. & COBB, P. (1988) Construction of arithmetical meanings and strategies. New York: Springer-Verlag.

THORNDIKE, E.L. (1922) The psychology of arithmetic. New York: Macmillan.

TORBEYNS, J., VERSCHAFFEL, L. & GHESQUIÈRE, P. (2005) Simple addition strategies in a first-grade class with multiple strategy instruction. Cognition and Instruction, 23, 1–21.

VERGNAUD G., DURAND C. (1976) Structures additives et complexité psychogénétique, Revue Française de Pédagogie, 36, 28-43.

VERSCHAFFEL, G., GREER, B., & TORBEYNS, J. (2006) Numerical thinking. In A. GUTIERREZ, AND P. BOERO (eds.), Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present, and future (pp. 51-82). Rotterdam: Sense Publishers.

VERSCHAFFEL, L., GREER, B., & DE CORTE, E. (2007) Whole number concepts and operations. In F. LESTER JR. (ed.) Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 557-628). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

VYGOTSKY, L. (1962) Thought and language, Cambridge: MIT Press.

WRIGHT R. (2005) A study of the numerical development of 5-year-olds and 6-year-olds. Educational Studies in Mathematics, 26, 25-44.

WRIGHT, R. J., MARTLAND, J., STAFFORD, A., & STANGER, G. (2007) Teaching number: Advancing children's skills and strategies. London: Paul Chapman Publishing.

WRIGHT, R.J., MARTLAND, J. & STAFFORD, A.K. (2006) Early numeracy: Assessment for teaching and intervention. London: Paul Chapman Publishing.