"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", n. 20, 2010
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Il ruolo delle tecnologie nel processo di argomentazione e dimostrazione

Luigi Menna[1]

Sommario

In questo articolo mi occuperò delle eventuali ripercussioni sul modo di dimostrare proprietà matematiche degli studenti che hanno possibilità di utilizzare strumenti di calcolo informatici nella propria pratica scolastica. Indagherò in particolare se l'uso dei software didattici incentiva il passaggio dalla congettura alla dimostrazione o se, piuttosto, sia interpretato quale mezzo efficiente e veloce per trovare soluzioni ai propri problemi. Nella ricerca proposta descrivo i risultati dell'elaborazione statistica di protocolli analizzati qualitativamente e quantitativamente (R. Gras, 2000) sottoposti a studenti degli ultimi anni del liceo scientifico. La sperimentazione ha come riferimento teorico la Teoria delle Situazioni (Brousseau, 1997). Il questionario tende a sottoporre agli studenti scelte argomentative differenti attraverso l'uso di registri linguistici diversi (Duval, 1996).

Abstract

This article deals with the possible consequences on the methods used in demonstrating mathematical matters when students are provided with computational processor tools in classrooms.
I'll emphasize in particular whether the use of educational software encourages the process from assumption to demonstration, or it is simply meant as an efficient and fast means to solutions of problems.
In this research the statistical results of protocols qualitatively and quantitatively analyzed and submitted to students in their last years of high school are described (R. Gras, 2000). This experimentation has as theoretical reference the Theory of Situations (Brousseau, 1997). The set of questions provides the students with different methods expressed in different linguistic registers (Duval, 1996).

[1] Dottorando di "Storia e Didattica delle Matematiche, della Fisica e della Chimica", presso l'Università di Palermo e componente del G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento/Apprendimento delle Matematiche, Dipartimento di Matematica, Università di Palermo).

1. Introduzione

Il presente lavoro riguarda l'uso delle tecnologie nella pratica scolastica di studenti che frequentano gli ultimi tre anni del liceo scientifico. La ricerca che descrivo riguarda in particolare la scelta da parte degli studenti del tipo di strumento e linguaggio da utilizzare nella risoluzione di problemi di geometria analitica.

A tal fine ho condotto una sperimentazione con circa 60 studenti nella quale ho cercato di analizzare i comportamenti che li hanno guidati nella gestione del software didattico *Geogebra* in ambito scolastico.

L'obiettivo della mia ricerca tende dunque ad evidenziare le idee implicite degli studenti durante:

- il riconoscimento di un problema che deve essere risolto attraverso una dimostrazione;
- l'individuazione della strategia più efficace per risolvere un problema;
- la gestione del software nel processo: congetturare, argomentare, dimostrare.

L'esigenza di queste riflessioni è dettata, secondo me, dal fatto che oggi gli studenti hanno a disposizione calcolatori e capacità di calcolo inimmaginabili per studenti già di qualche anno fa. Del resto anche parte dell'attività matematica fuori dalla scuola va affrontata con l'uso massiccio di calcolatori tanto da far parlare di "matematica sperimentale". Una simile prospettiva costringe ad una riflessione seria che riguarda la dimostrazione matematica ed il suo uso dal punto di vista epistemologico (Hanna, 2000).

In ambito didattico tutto ciò costringe a ripensare alcune metodologie di insegnamento/ apprendimento: ha ancora un ruolo la dimostrazione matematica espressa attraverso un linguaggio rigoroso altamente formalizzato? Quest'ultima può essere "ammorbidita" mediante strategie "più euristiche" (Mason, 1991)?

Dal punto di vista didattico, sono cambiate le indicazioni ministeriali (Hanna, 2000) in merito al curricolo matematico, sono cambiate le attrezzature in possesso degli studenti (tutti loro oggi possiedono almeno un computer) e sono cambiate le aule. Risulta pertanto doveroso chiedersi se anche il modo di concepire una dimostrazione, a scuola, possa essere diverso.

Dal punto di vista storico la questione della validità di un nuovo processo dimostrativo si è presentato più volte nel corso dei secoli. Non ritengo questo il luogo in cui approfondire l'argomento, ma accenno soltanto alla novità che rappresentò l'uso dell'analisi nella pratica matematica ordinaria, oppure più semplicemente, in tempi molto più antichi, l'episodio che vide Archimede risolvere il problema della trisezione dell'angolo utilizzando riga e compasso in un modo non del tutto conforme alla matematica platonica.

Com'è noto, infatti, per la matematica dell'epoca di Archimede il compasso era uno strumento utile a tracciare cerchi aventi centro in un punto e rigorosamente passanti per un altro punto: in altre parole il compasso non doveva servire a riportare misure. La riga non era altro che una barra rettilinea, perfettamente liscia e senza tacche. Si capisce dunque come il metodo di Archimede, che richiedeva l'uso di una riga con tacche, potesse destare perplessità nei contemporanei.

La riga con tacche, in grado di riportare una lunghezza, rappresentava, in questo contesto, una tecnologia lungi dal garantire un risultato rigoroso.

2. La sperimentazione

La sperimentazione è stata condotta proponendo un test guidato a circa 60 studenti degli ultimi anni del liceo scientifico in varie parti d'Italia (tra i 16 e i 18 anni). Gli studenti sono stati invitati a seguire un preciso percorso interattivo e multimediale proposto nel seguente indirizzo web: http://luigimenna.altervista.org. Le fasi del percorso proposto agli studenti è suddiviso in quattro parti e fa uso di registri semiotici diversi (linguaggio naturale, rappresentazione grafica, rappresentazione tabulare, linguaggio algebrico) durante le quali gli alunni hanno documentato l'evoluzione dei propri processi argomentativi.

Le fasi sono le seguenti:

1. proposta dei testi di due problemi; tempo lasciato agli studenti per scrivere le congetture;
2. esposizione (tramite testi esplicativi e modalità video) di due strategie risolutive del primo problema;
3. tempo lasciato allo studente per risolvere autonomamente il secondo problema;
4. scrittura da parte degli studenti delle proprie considerazioni sulle strategie proposte.

2.1. Prima fase: la presentazione di due strategie

Ho proposto agli studenti due problemi molto comuni nel curricolo dei licei scientifici italiani, rintracciabili in diversi libri di testo. Sono problemi di non difficile soluzione ma che richiedono una discreta capacità di modellizzazione e disinvoltura nel passare da un registro semiotico ad un altro. I problemi sono i seguenti:

1. determinare, tra tutti i rettangoli aventi lo stesso perimetro, quello di area massima;
2. determinare, tra tutti i triangoli di ipotenusa nota, quello che ha massimo il valore del rapporto fra la somma dei cateti e l'ipotenusa.

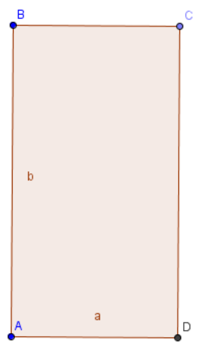
Preciso immediatamente che lo scopo delle interviste non era quello di avere informazioni sulle capacità degli studenti intervistati nel *problem solving*.

L'obiettivo consiste nel ricreare un contesto didattico nel quale la risoluzione di questi comuni problemi di matematica richiami alla mente la problematicità della scelta di un processo risolutivo piuttosto che di un altro. Non ho quindi chiesto di risolvere i problemi.

Ho dato un po' di tempo (15 minuti) per formulare congetture alla fine del quale io stesso ho fornito due diverse strategie per risolvere gli esercizi. Gli alunni potevano disporre di computer con software quali Excell, Geogebra, Derive.

La prima strategia è quella grafico-analitica proposta da ogni libro di testo. A seconda dell'età è stata proposta in maniera diversa.

I due problemi si risolvono molto semplicemente mediante la stessa procedura. Per sinteticità tratterò il primo problema.



La prima strategia, quella proposta dai manuali, è la seguente:

Indichiamo con p il semiperimetro;

$$p = a + b;\ b = p - a;$$
$$A = a \cdot b;$$
$$A = p \cdot a - a^2.$$

Se consideriamo questa espressione una funzione dell'area del rettangolo dipendente dalla base *a*, possiamo scrivere:

$$A(a) = p \cdot a - a^2.$$

A questo punto gli studenti devono riuscire a riconoscere l'equazione di una parabola: $y(x) = p \cdot x - x^2$.

Gli allievi del terzo anno (15-16 anni) possono studiare la parabola associata (si noti come perdano così il contatto con l’oggetto del problema): una parabola con concavità rivolta verso il basso e passante per l’origine degli assi. Sull’asse delle x abbiamo una delle dimensioni del rettangolo, sull’asse delle y l’area del rettangolo. Il vertice indica il punto più alto e la sua ascissa il valore della base per cui l’area è massima.

I ragazzi dell’ultimo anno (17-18) studierebbero la derivata; $y' = p - 2 \cdot x$; $p - 2 \cdot x > 0$ e tratterebbero un problema di analisi di massimo e di minimo.

Entrambi i procedimenti conducono a concludere che tra tutti i rettangoli isoperimetrici quello di area massima è quello con le dimensioni uguali: il quadrato.

La seconda strategia fa uso del software Geogebra. Se utilizziamo la funzione *slider* (Figura 1), collegando il suo valore ad una delle dimensioni del rettangolo (nel nostro esempio la base) siamo in grado di modificare le dimensioni dell’altra dimensione mantenendo costante il valore del semiperimetro. Quest’ultimo peraltro si può associare al valore di un ulteriore *slider* per poter esemplificare con facilità classi di rettangoli con perimetri differenti.

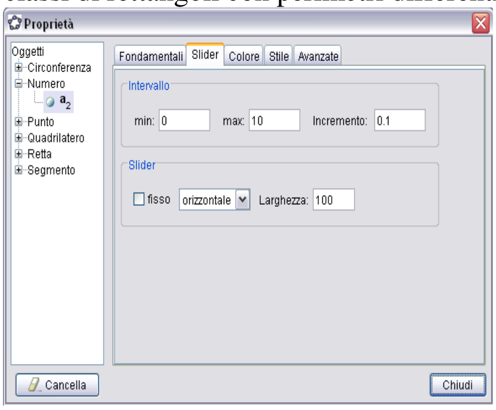


Figura 1

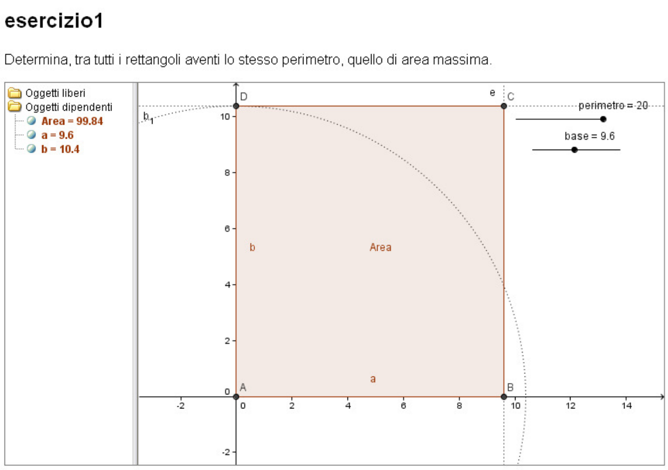


Figura 2

È importante far rilevare agli studenti che bisogna stabilire preliminarmente il *min* e il *max* nonché *l’incremento* dello *slider*. Nel caso descritto in figura *min = 0; max = 10; incremento =*

0.1, avremo esattamente 100 rettangoli per ogni valore del perimetro. Al variare della base si avranno istantaneamente i valori dell'area (Figura 2).

La particolarità e l'esigenza di inserire il secondo problema consiste nel tipo di soluzione: mentre nel primo esercizio la soluzione può essere rappresentata da un numero razionale, nel secondo caso è un numero irrazionale che, ovviamente, avrebbe messo in crisi un possibile approccio con il software utilizzato.

Per quanto riguarda il secondo problema non ho fornito alcuna strategia, ma ho chiesto agli studenti intervistati di provare a risolvere o almeno proporre uno schema argomentativo. Ovviamente è stato consentito l'uso di *Geogebra* (Figura 3).

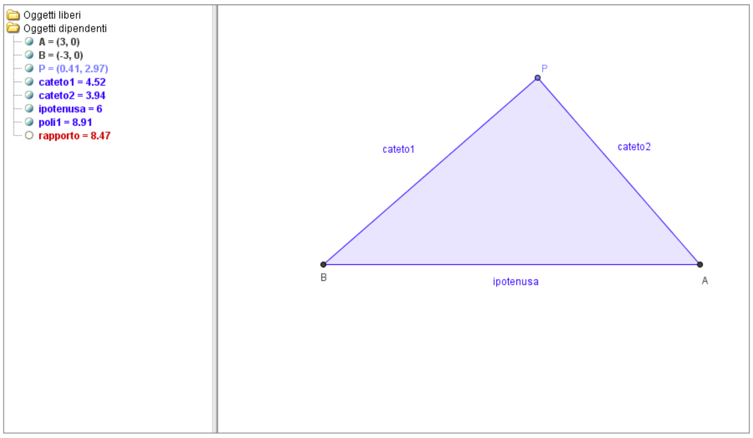


Figura 3

Solo a questo punto ho chiesto agli studenti di compilare un questionario.

2.2 Seconda fase: la scelta delle argomentazioni

Dopo aver elaborato congetture, riflettuto sulle due strategie proposte ed infine aver provato a risolvere autonomamente il secondo esercizio, ho chiesto agli studenti di rispondere alle seguenti domande, sentendosi liberi nell'espressione linguistica, dato che non erano tenuti ad utilizzare necessariamente una terminologia specifica.

1. Ritieni i due processi argomentativi che ho usato per risolvere l'esercizio matematicamente corretti?
2. Trovi analogie tra il tipo di argomentazione utilizzato per gli esperimenti di fisica e la seconda strategia proposta?
3. Quale delle due strategie ti sembra più efficace? Se avessi libertà di scelta, quale delle due utilizzeresti normalmente in una prova scolastica?

3. L'analisi dei dati

I protocolli sono stati raccolti e analizzati in base all'analisi a priori descritta di seguito e i dati elaborati con lo CHIC. L'analisi a priori ipotizzata per le tre domande è la seguente:

1a. Lo studente ritiene indifferente la prima o la seconda strategia perché entrambe conducono alla soluzione.

1b. Lo studente ritiene assolutamente sbagliata la seconda strategia perché il proprio professore ha illustrato solo la prima.
1c. Lo studente ritiene assolutamente sbagliata la seconda strategia perché il procedimento utilizzato usando il computer non garantisce il risultato.
1d. Lo studente ritiene la seconda strategia corretta nel primo esercizio e scorretta nel secondo esercizio perché nel primo caso dà il risultato preciso e nel secondo caso solo un’approssimazione.
1e. Lo studente ritiene corrette entrambe le strategie, ma riconosce la superiorità della prima dato che il calcolatore è piuttosto grossolano nei calcoli.
1f. Lo studente preferisce la seconda strategia perché gli permette di lavorare sugli oggetti matematici di cui parlano i problemi (quadrati e rettangoli) anziché dover lavorare su altro (parabole).
2a. Lo studente ritiene che non ci può essere assolutamente nulla in comune tra l’elaborazione di un esperimento di fisica e uno di matematica, dato che il tipo di logica usata è di tipo induttivo e di tipo deduttivo.
2b. Lo studente risponde che sono somiglianti ma mentre nell’esercizio di fisica la curva è un’approssimazione che meglio rappresenta l’insieme dei punti sperimentali, nell’esercizio di matematica la curva è creata esattamente sui punti trovati.
2c. L’analogia dei due procedimenti è totale.
2d. Non risponde.
3a. La prima perché è l’unica strategia ammissibile.
3b. La prima è quella corretta, ma la seconda (che non deve essere usata!) fornisce la soluzione più velocemente.
3c. Sono equivalenti.
3d. Poiché lo studente non sarebbe arrivato a produrre la dimostrazione per mezzo della prima strategia, ritiene la seconda più efficace.

Nella figura 4 è presentato l’albero delle similarità elaborato tramite il software CHIC da cui si evincono le seguenti considerazioni:

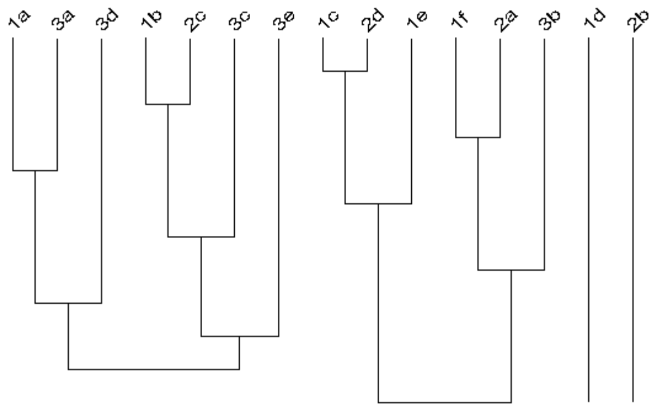


Figura 4

alcuni degli studenti intervistati (1b↔2c) hanno subito affermato che la strategia da utilizzare dovesse essere, senza alcun dubbio, la prima. Tuttavia non hanno fornito spiegazione. Ciò mi lascia pensare che abbiano risposto in questo modo dato che non avrebbero avuto difficoltà a svolgere l'esercizio secondo una modalità usata dai loro insegnanti.

Un piccolo gruppo (1f↔2a) mi ha scritto che non avrebbe mai saputo svolgere gli esercizi con il primo metodo, ma che ha subito compreso la seconda strategia. Tuttavia si rende conto della forte differenza sussistente tra le due.

Un altro gruppo (1a↔3a), numeroso, mi ha scritto che il metodo da utilizzare dovrebbe essere senza dubbio il primo, ma che il secondo non sarebbe sbagliato.

Mi sembra particolarmente importante soffermarmi su questo ultimo gruppo e analizzare nel dettaglio quanto descritto nei protocolli ricevuti.

Questi studenti preferirebbero svolgere l'esercizio secondo il metodo "tradizionale", perché sentito come più *elegante*, nonché garante di una risposta per qualsiasi caso particolare.

Alcuni degli studenti che hanno dimostrato particolare interesse e curiosità verso l'argomento trattato hanno acconsentito ad essere video-intervistati. A tali studenti ho chiesto se ritenessero ragionevole pensare che l'uso del software non fosse esaustivo nella descrizione delle funzioni da elaborare nei due esercizi. In altre parole se la formalizzazione algebrica fornisse veramente informazioni maggiori rispetto all'insieme dei dati calcolati da Geogebra. Tutti loro mi hanno risposto di no.

Di fatto, implicitamente, mi sembra di poter dire che l'unico motivo che facesse preferire a questi studenti la prima strategia fosse la garanzia della "certezza assoluta" (molti di loro hanno ripetuto: "*è sempre vero*"). Oltre che, ovviamente, non poco avrà influito il fatto che tale metodo riproduce quello utilizzato dai loro insegnanti. Qualcuno di loro ha inoltre molto apprezzato che Geogebra fosse in grado di rendere letteralmente visibile la corrispondenza tra i rettangoli, le loro aree, e la parabola (Figura 5). Qualche studente (soprattutto i più giovani), avendo notato come l'uso dello slider mostrasse la corrispondenza tra l'area del rettangolo, la base e i punti della parabola, ha usato parole significative come "potenza", "fascino", ed ancora "eleganza" della matematica.

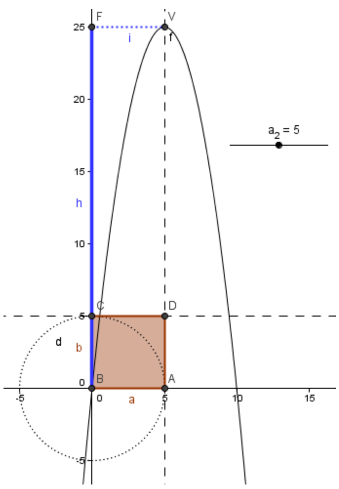


Figura 5

Per quanto riguarda la seconda domanda, molti studenti non l'hanno trattata. A mio parere questo potrebbe significare che non essi non la percepiscono come significativa: in effetti la domanda indaga sul valore epistemologico del concetto di dimostrazione che di fatto, molto probabilmente, non è mai stato oggetto del curricolo scolastico di questi studenti. Chi ha risposto ha comunque evidenziato il carattere sperimentale della seconda strategia con *Geogebra.*

Un'altra costante è la necessità, riconducibile alla matrice aristotelica, di generalizzare le soluzioni all’interno di intervalli continui e non discreti come quelli a cui si è costretti utilizzando lo slider. Questi studenti insistono sulla necessità di esorcizzare l’eventualità di un punto di discontinuità. Pur realizzando infatti che tale punto non esiste, gli alunni ritengono che esso potrebbe mettere in crisi l’intero ragionamento portato avanti usando il calcolatore e la seconda strategia.

4. Conclusioni

A mio parere, occorre, nella normale pratica di insegnamento/apprendimento delle matematiche, insistere con gli studenti su attività che li costringano a riflettere sul processo dimostrativo. L'uso dei software vanno, secondo me, incontro a questa esigenza, in quanto l'uso di uno strumento informatico, come il software gratuito Geogebra, costituisce uno strumento utilissimo nelle mani degli studenti quando devono analizzare il testo di un problema. Li costringe, evidentemente, a quelle conversioni da un registro semiotico all'altro che secondo Duval sono necessarie per osservare il «funzionamento cognitivo delle diverse attività matematiche» (Duval, 1996). In particolare, oltre alle conversioni tra linguaggio algebrico, grafico, tabulare, naturale è richiesto un'ulteriore conversione nel e dal linguaggio del software specifico.

Ritengo inoltre importante, per i prossimi studi, avviare un confronto tra i risultati ottenuti da questa sperimentazione e quelli ricavati da sperimentazioni condotte su studenti non occidentali a cui saranno somministrati testi analoghi. Tale comparazione dovrebbe evidenziare una differenza di comportamento che potrebbe essere ricondotta alla distinzione tra culture aristoteliche e non aristoteliche.

References

- Brousseau G, 1997, *Theory of Didactical situations in mathematics. 1970-1990*, translation M. Cooper, N. Balacheff, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield (Kluwer Academic Publishers).
- Di Paola B., Spagnolo, F., 2008, *Different procedures in argumentation and conjecturation in primary school: an experience with Chinese students. Conference of five cities*, "Research in mathematics education", Cyprus.
- Duval R., 1996, *Quel cognitive reteniren didactique des mathèmatiques?*, Recherche en Didactique des Mathèmatiques, 16, 3, 349-382.
- Gras R., 2000, *Les fondements de l'analyse implicative statistique*, Quaderni di Ricerca in Didattica, Palermo, http://dipmat.math.unipa.it/~grim/ quaderno9.htm
- Gras R., Suzuki E., Guillet F., Spagnolo F. (Eds.), 2008, *Statistical Implicative Analysis - Theory and Applications*, Springer.
- Hanna G., 2000, *A critical examination of three factors in decline of proof* , Interchange, vol. 31/1, 21-33.
- Hanna G., 2000, *Proof, explanation and exploration: an overview*, Educational studies in mathematics, 44, 5-23.
- Spagnolo F., 1997, *L'analisi a-priori e l'indice di implicazione statistica di Gras*, Quaderni di Ricerca in Didattica GRIM, n.7, Palermo.
- Spagnolo F. et alii, 2004, *L'analisi implicativa per lo studio di una esperienza didattica in statistica*, Quaderni di Ricerca in Didattica n.13, Palermo
- Spagnolo F., 2005, *Reasoning patterns and logical-linguistic questions in European and Chinese cultures: Cultural differences in scholastic and non scholastic environments*, The International Conference on School effectiveness and School improvement in China, University of Shenyang, China.
- Spagnolo F., Ajello M., 2008, *Schemi di ragionamento in culture differenti: i paradossi logico-linguistici nella cultura europea e cinese*, Quaderni di Ricerca in Didattica (Sezione Matematica), n.18, , pp.163-182.
- Spagnolo F. et alii, 2009, *Epistemologia sperimentale delle matematiche*, Quaderni di Ricerca in Didattica (Sezione Matematica), Supplemento n.1 al n.19, 2009.