

Epistemologia e didattica: un legame virtuoso

Renato Migliorato

Abstract

The terms are considered of a significant collaboration between the author and Filippo Spagnolo. Because they investigated on two different fields (epistemological the first, educational the second) such collaboration took the form of frequent conversations and exchanges of ideas on the common area of respective problems, not by common publications. This was founded in the belief that none epistemology can give a complete and stable interpretation of science. So a point of view was taken that attempts to understand the science in his historical becoming, trying to identify the constants and the genesis of the concepts. Now it is precisely this search for understanding the genetic processes that may be the main common ground between philosophy of sciences and theories of teaching.

Introduzione

Voglio innanzitutto ricordare il caro amico Filippo, non meno che lo studioso. La sua improvvisa scomparsa ha lasciato in me, come credo in tutti noi, un vuoto che non può essere riempito da alcuna parola. Ancora più acuto è stato per me lo shock della notizia, in quanto mi trovavo impossibilitato a muovermi per un problema di salute, né avevo mai sospettato in lui la presenza di un male così devastante.

Non posso fare a meno, ora, di ricordare i nostri incontri, le serate passate insieme in appassionate discussioni che riguardavano certo la matematica e la sua didattica, ma anche il più vasto mondo della scienza, della cultura, della vita civile e politica e, soprattutto, le nostre sfere personali e affettive. Ed anzi, non posso fare a meno di rimpiangere più di ogni altra cosa i rapporti personali, la sua presenza fisica, i suoi modi semplici e diretti, la sua cortesia, il suo modo di raccontare, di sorridere, di organizzare, di costruire eventi e situazioni.

Il mio compito è però, qui, di raccontare qualcosa di meno noto e forse anche di meno visibile. Dico meno visibile perché il nostro rapporto collaborativo non si è mai concretizzato in pubblicazioni o ricerche effettuate in comune. Operavamo in campi differenti e su problematiche diverse, o almeno apparentemente diverse. I miei interventi in didattica della matematica, quando ci sono stati, in diversi momenti della mia carriera, sono stati sempre sporadici e mai pienamente inseriti in un piano organico di ricerca. Filippo era un ricercatore a tutti gli effetti in didattica della matematica. Io nella mia attività scientifica, per vari decenni, ho percorso vie diverse mantenendo fermo solo un punto come baricentro delle mie ricerche: l'attenzione agli aspetti fondazionali ed ai rapporti strutturali tra settori diversi della matematica. E poi finalmente negli ultimi dieci anni, ho intrapreso una più diretta e pressoché esclusiva esplorazione delle problematiche epistemologiche e storiografiche accumulate nel corso di tutta una carriera di ricercatore e di docente.

Due campi di ricerca, dunque, il mio e il suo, che, almeno su un piano strettamente tecnico si presentano oggettivamente diverse e separate. Ma è davvero così? E in che consisterebbe allora la nostra collaborazione in assenza di ricerche effettuate in comune?

Certo, ho seguito molto da vicino le ricerche effettuate da miei collaboratori in stretto rapporto con Filippo Spagnolo: mi riferisco ai lavori di didattica della matematica pubblicati da Giuseppe Gentile¹ e Alessandro Sarritzu². Non mancavano neppure contributi reciproci ad eventi organizzati

1 GENTILE G. (2004), *Due questioni di didattica della matematica*. Atti del I Convegno: Quali prospettive per la Matematica e la sua Didattica, Piazza Armerina 16-19 settembre 2004; GENTILE G. (2005), *La storia della Matematica per la didattica della Matematica. Cosa può insegnarci Archimede?* Atti del II Convegno: Quali

dall'una o dall'altra parte, fossero convegni, seminari, incontri di studio o correlazioni in tesi di dottorato, o anche articoli e riflessioni sulla didattica da me pubblicati su atti di convegni o sulla rivista fondata e fortemente sostenuta da Filippo. Allo stesso tempo la riflessione epistemologica è sempre presente nel Lavoro di Filippo Spagnolo e costituisce una delle basi fondanti della sua ricerca in didattica della matematica. Essa va cercata, a mio avviso, non tanto in lavori specifici³, quanto nelle pieghe di tutte le analisi concettuali. Se dovessi poi indicare un tema specifico tra quelli da lui affrontati, a me pare che i suoi studi sulle differenti dinamiche di approccio alla formazione matematica nell'ambito di culture diverse (occidentale e cinese) offrano spunti particolarmente stimolanti in questa direzione⁴.

Eppure il baricentro del nostro rapporto collaborativo sta altrove: è fatto essenzialmente di scambi di idee e appassionate discussioni, che, travalicando il momento strettamente tecnico dell'attività scientifica, contribuivano alle nostre riflessioni, anche all'interno dei rispettivi ambiti di ricerca.

Detto così, però, sembra limitativo e non se ne comprende ancora il senso. Ecco perché ho ritenuto di chiarire, nei limiti in cui ciò può essere fatto in una breve comunicazione, il senso di una ricerca tutt'altro che lineare e tutt'altro che ortodossa. Una ricerca che qualcuno anzi definirebbe probabilmente “eretica”. Non è una possibilità da me semplicemente immaginata, ma un dato che spesso si è tradotto in rilievi critici anche da parte di alcuni referees particolarmente legati all'ortodossia interpretativa.

È qui che si articola e diviene comprensibile quel rapporto tra ricerca epistemologica e ricerca didattica che, al di là dell'amicizia personale, ha costituito il terreno comune del nostro incontro intellettuale. In verità bisogna dire che, oltre alla didattica e all'epistemologia, vi è un terzo polo di questo percorso di ricerca: ed è l'analisi storiografica. Poiché però non sono uno storico e l'analisi storiografica entro cui mi muovo è tutta interna e funzionale all'elaborazione di una visione unitaria del pensiero scientifico, ho ritenuto più corretto riferirmi alla sola diade epistemologia-didattica.

Dette queste cose, tuttavia, il quadro non è per nulla chiarito e può prestarsi ancora ad equivoci e sottovalutazioni. Che vi sia una stretta relazione tra epistemologia e didattica non è cosa nuova ed anzi è per molti un dato acquisito e indiscutibile. Lo stesso concetto di ostacolo epistemologico, messo in evidenza dalla teoria di Brousseau, dimostra quanto la dimensione epistemologica del pensiero matematico sia ritenuto essenziale nell'elaborazione di una teoria dell'apprendimento. È questo un punto cruciale sul quale tuttavia non mi soffermerò in quanto lo ritengo in questa sede già

prospettive per la Matematica e la sua Didattica Piazza Armerina, 15-17 Settembre 2005; GENTILE G. (2006), *Cambiare la visione della Matematica: se, come e perché*, Atti 6° Convegno Nazionale “Matematica, formazione scientifica e nuove tecnologie”, Lamezia Terme 24-26 Novembre 2006; GENTILE G. (2007), *La Matematica e i giovani: un rapporto conflittuale superabile? Resoconto di un'esperienza*. Atti del Convegno: Matematica è la più odiata dagli Italiani! Come farla amare? Con le nuove tecnologie? Lipari 21-23 Aprile 2006; GENTILE G. (2008), *L'esperienza del Progetto Lauree Scientifiche: alcuni risultati nel solco di un approccio semantico*. Quaderni di Ricerca in Didattica (Sezione Matematica), Vol. 18, pp. 47-72 .

2 SARRITZU A. (2004). *Modelli matematici e armonia musicale: uno sguardo storico*, Atti del I Convegno: Quali prospettive per la Matematica e la sua didattica, Piazza Armerina 16-19 settembre 2004.

3 Solo a scopo esemplificativo si può citare: CALLARI G., SPAGNOLO, F. (1996), Una proposta di itinerario filosofico matematico. Dalla rivoluzione scientifica ad oggi, Quaderni di Ricerca in Didattica GRIM, n. 6; SPAGNOLO, F. (2008), Alcune idee sulla Filosofia dell'Educazione Matematica tra oriente ed occidente, Quaderni di Ricerca in Didattica (Scienze Matematiche), n.18.

4 Oltre al già citato SPAGNOLO (2008), V. in particolare: SPAGNOLO F., AJELLO M. (2008), *Schemi di ragionamento in culture differenti: i paradossi logico-linguistici nella cultura europea e cinese*, Quaderni di Ricerca in Didattica (Sezione Matematica), n.18, pp.163-182; SPAGNOLO F. (2008), *Philosophy of Mathematics Education among east and west*, Philosophy of Mathematics Education Journal, n. 23, October; SPAGNOLO F., DI PAOLA B. (2009), *I sistemi indeterminati nei "Nove Capitoli" di Liu Hui. Il ruolo del "contesto" per determinare l'"algoritmo fondamentale" come strumento argomentativo*. Quaderni di Ricerca in Didattica (Sezione Matematica), n.19, pp. 101-171. SPAGNOLO F., D'EREDITÀ G. (2009), *Le diversità culturali nelle concezioni di Strategia e Tattica tra Oriente ed Occidente osservate attraverso gli scacchi ed il Wi-Ch'i e le connessioni con la Didattica*. Quaderni di Ricerca in Didattica (Sezione Matematica), n.19, pp. 263-283).

scontato e sufficientemente acquisito. Da qui bisogna partire invece per un passo ulteriore, cercando di capire quanto la comprensione dei processi cognitivi e delle loro dinamiche di sviluppo, insieme all'analisi dei processi storici di crescita della conoscenza, possa costituire uno dei capisaldi della ricerca epistemologica. Se ci poniamo in questa prospettiva, si viene innanzitutto a scardinare uno dei luoghi comuni su cui più frequentemente si fonda la distinzione tra scienze di base e scienze applicate. Nel caso specifico, l'idea che l'epistemologia possa svolgere un ruolo puramente funzionale o fondativo nei confronti della didattica, senza però riceverne, a sua volta, un contributo sostanziale sul piano dell'ideazione e della strutturazione concettuale del pensiero. Un'idea difficile da evitare fino a che si vede la didattica come una tecnica o una disciplina puramente applicativa, tributaria di altre discipline quali la psicologia o la pedagogia, ma priva di un suo statuto epistemologico e di un suo specifico contenuto cognitivo e concettuale. Si tratta ovviamente di un modo di vedere che non può trovare posto, in linea di massima, tra gli addetti ai lavori ma che, per mia esperienza, è assolutamente dominante al di fuori di questo contesto.

Una volta sgomberato il campo da possibili equivoci e luoghi comuni, il passo successivo, per comprendere le forme e i contenuti di un rapporto collaborativo, e soprattutto di reciproco stimolo e apporto culturale, è di definire le rispettive concezioni ed i rispettivi orizzonti culturali ed epistemologici. Poiché in questa sede sono da ritenersi noti i riferimenti scientifici e culturali di Filippo Spagnolo, resi per altro ancora più espliciti dai relatori presenti ed in modo particolare di Guy Brousseau, passerò senz'altro a definire la mia concezione epistemologica della scienza.

E c'è una ragione, come vedremo, per cui ho detto della scienza e non semplicemente della matematica, anche se questa rimane sempre al centro della mia ricerca e delle mie riflessioni. Il fatto è che tutte le volte che ho tentato di isolare la matematica, mentre da una parte sembravano delinearsi con più chiarezza i suoi specifici caratteri formali e metodologici, dall'altra sfuggivano più o meno fino a svanire, i suoi significati e le sue più profonde ragioni d'essere.

Non si tratta di abbattere le necessarie delimitazioni tra i campi del sapere, né tanto meno di smarrirsi in generici e indistinti discorsi sul tutto. Come ben sappiamo nessuna scienza può procedere senza le opportune delimitazioni entro cui far crescere i singoli saperi specialistici, né alcuna riflessione epistemologica avrebbe senso se ignorasse questa elementare esigenza. In modo particolare, non si tratta qui di ignorare la specificità, anche sul piano epistemologico, delle scienze matematiche rispetto alle altre scienze. Si tratta invece di avere ben chiaro che nessuna scienza, e la matematica in particolare, potrebbe essere pienamente compresa nelle sue implicazioni concettuali e fonomenologiche, se isolata dal contesto entro cui nasce e si sviluppa.

Scienza e mito.

Nel corso del Novecento si sono confrontate varie concezioni della scienza, differenti e talvolta in netta polemica tra loro. Ciò è altrettanto vero nell'ambito delle scienze empiriche quanto nelle scienze matematiche, anche se, per queste ultime, il paradigma bourbakista altamente formalizzato che si è imposto nel corso del secolo, ne ha visibilmente mascherato le differenze concettuali, talvolta anche profonde. Non si può quindi evitare di prendere una posizione a questo riguardo.

Quando dico che è necessario prendere una posizione, non intendo che si debba necessariamente assumere come proprio questo o quel punto di vista, dichiararsi popperiano o khunianiano o quant'altro in relazione alle scienze empiriche oppure formalista o antiformalista nell'ambito delle scienze matematiche. Non esiste, io credo, un punto di vista giusto e uno sbagliato, e ancor meno un punto di vista vero e uno falso. La metafora della visione spaziale e prospettica, può dare una prima sommaria idea di ciò che voglio dire.

Immaginiamo che io percepisca un oggetto (o meglio una sua immagine sensibile) per es. una casa, e che io la stia guardando da una certa posizione. Posso guardarla da diverse posizioni, girarle intorno, avvicinarmi e allontanarmi, guardarla alla luce del giorno o con illuminazione artificiale. Può anche darsi che uno dei suoi prospetti appaia sontuoso e ben curato, che un altro appaia

fatiscente. Ogni punto di vista coglie dunque aspetti diversi dell'oggetto e non avrebbe alcun senso dire che uno di questi è quello “vero” mentre l'altro è falso.

C'è tuttavia una differenza profonda tra la metafora della casa e i punti di vista epistemologici.

L'oggetto della metafora permane indisturbato e indifferente ai miei cambiamenti di posizione. La casa, possiamo presumere, esisteva già quando ho iniziato ad osservarla e il fatto che io la guardi da una parte o dall'altra non influenza i caratteri dell'oggetto osservato. Dopo ogni spostamento posso tornare nella posizione originaria e ritrovare esattamente la precedente visuale. Posso dire che la casa è invariante rispetto al gruppo dei miei mutamenti del punto di vista.

La scienza è invece un processo in continua evoluzione e non è indifferente al modo in cui viene interpretata. Non è dato una volta per tutte un oggetto chiamato scienza di cui devo “scoprire” i caratteri ed eventualmente la sua “vera” natura, così come, viceversa, sarebbe sbagliato pensare che l'interpretazione epistemologica possa essere assunta come normativa per il procedere della scienza. Questa procede sulla base delle più diverse istanze e sollecitazioni che vanno dal semplice bisogno di comprendere fino alle richieste della tecnica ed ai bisogni del vivere quotidiano ed è assoggettata alle regole che ogni ricercatore ha appreso fin dalla sua prima formazione specialistica, e perfezionato per rispondere ai problemi che gli si presentavano. La concezione generale del mondo e la posizione epistemologica rispetto agli oggetti della propria disciplina non possono in ogni caso essere ininfluenti nei confronti di questo processo.

Se così è, allora i diversi punti di vista non vanno intesi, a mio avviso, né come definizioni più o meno normative della scienza, né come asserzioni tra loro esclusive e incompatibili.

Così ad esempio la concezione positivista, nella sua accezione classica o in quella logico-empiristica del Circolo di Vienna, costituisce sicuramente una limitazione forte e difficilmente proponibile se vogliamo comprendere le rivoluzioni scientifiche del Novecento. Ma pone allo stesso tempo una serie di acquisizioni irrinunciabili senza le quali sarebbe difficile discriminare tra scienza e mito, tra scienza e metafisica.

Prendere una posizione significa allora, secondo il mio punto di vista, non già assumere un posizionamento stabile ed esclusivo, ma dichiarare espressamente il modo in cui ci si vuole porre criticamente, qui ed ora, nel contesto in esame.

Detto ciò possiamo chiederci se c'è qualcosa che in modo molto generale, e in linea di principio, possa distinguere certe attività cognitive come scientifiche da altre forme di attività cognitive. Questa che è la prima e cruciale domanda che precede ogni possibile epistemologia, ha avuto com'è noto risposte abbastanza diverse di cui, per brevità richiamo schematicamente quelle che hanno dominato il panorama dalla fine dell'Ottocento ad oggi, differenziando l'ambito delle scienze empiriche da quello delle scienze matematiche:

A- Per le scienze empiriche:

- 1) La verificabilità per via sperimentale per i positivisti.
- 2) La falsificabilità per i popperiani.
- 3) L'esistenza di un paradigma condiviso dalla comunità scientifica per Khun.

B- Per le scienze matematiche:

- 1) L'analiticità e dunque la riducibilità alla logica per i logicisti (Frege, Russel),
- 2) La riducibilità ad un sistema logicamente coerente per i formalisti,
- 3) La riducibilità costruttiva ad operazioni mentali semplici per gli intuizionisti.

Io tuttavia preferisco cercare un riferimento più ampio, che al di là dei processi evolutivi della scienza e delle sue rivoluzioni, ci consenta di cogliere un comune denominatore di ciò che chiameremo spiegazione scientifica, nell'ambito di una più generale attività di spiegazione del mondo.

Questa scelta nasce intanto dall'impossibilità di pensare al mondo come ad un qualcosa che è dato una volta per tutte, con i suoi oggetti e le sue leggi, e che bisogna soltanto scoprire, ma presuppone un'attività di interpretazione che nell'atto di conoscere è anche creativa. Con ciò non dico nulla di nuovo, ed anche i più decisi realisti devono ammettere che la conoscenza scientifica di un

qualunque oggetto presuppone un preventivo atto creativo di costituzione dei concetti che lo esprimono e lo rappresentano. Concetti come massa, energia, materia, linea, punto, superficie, solo per restare ai livelli più elementari, sono quanto meno il risultato di processi puramente intellettivi. L'attenzione viene così diretta non tanto verso la costituzione di uno “statuto” a cui le scienze dovrebbero sottostare per essere tali, ma alle attività stesse del conoscere, o ancora meglio, dell'interpretare il mondo. E ciò che mi preme ora sottolineare è che in questo modo l'attività specifica del bambino piccolo e l'attività specifica dello scienziato, sia pure a livelli differenti, vengono collocati nella stessa classe di attività intellettive: la ricerca di un ordinamento razionale sempre più organizzato nella massa informe delle percezioni. Ho parlato di bambino piccolo e di scienziato, omettendo a ragion veduta i bambini più grandi e gli adolescenti, non perché questi costituiscano di per sé un mondo differente dai primi, ma perché, quasi sempre sono sviati, sia pure in misura diversa, da quello che Guy Brousseau ha genialmente definito “contratto didattico”⁵.

A questo punto, forse, si delineano in modo più chiaro le ragioni forti di un'interazione che, dal mio punto di vista può sussistere tra epistemologia e didattica. Ma per comprendere in che modo ed a quali livelli possa concretizzarsi una tale interazione, occorre andare oltre nella individuazione di ciò che vogliamo decidere di considerare come atteggiamento scientifico.

L'attività di sistematizzazione entro il mondo, in sé caotico, delle percezioni, per farne emergere un ordine razionalmente percepibile non è infatti esclusivo dell'attività scientifica ma è piuttosto l'atto costitutivo di qualunque funzione cognitiva. Nessuna rappresentazione del mondo è possibile senza un'organizzazione razionale dei dati forniti dalle percezioni. È questo il punto fermo già posto da Kant e con cui ogni successiva analisi gnoseologica ha dovuto sempre misurarsi. Ed è anche palese come la forma tipica di tutte le rappresentazioni globali del mondo che precedono il pensiero scientifico sono quelle che assumono la forma del mito. Questo, come già è stato ampiamente chiarito da Ernst Cassirer, non è pura favola, frutto di una fantasia non ancora matura sul piano della razionalità, come vorrebbe un vecchio e consolidato luogo comune. È, al contrario, una rappresentazione unitaria del mondo in forma di metafora, con una sua intima e complessa organizzazione razionalmente strutturata. In essa possono trovare spiegazione tutti gli eventi e tutti i dati fenomenici, secondo una precisa correlazione di causa-effetto. Dice Cassirer

...se [...] invece della visione teoretico-scientifica del mondo, prendiamo per base piuttosto la prospettiva dell'essere e dell'accadere propria del mito stesso, il quadro si sposta in modo strano. Ora le parti appaiono addirittura scambiate: quanto dall'un punto di vista appariva inintelligibile, semplicemente accidentale, se noi scambiamo il punto di riferimento, si capovolge nel suo opposto. In una quantità innumerevole di casi in cui la conoscenza empirico-scientifica rinuncia a ogni « spiegazione » precisa e che quindi essa considera «accidentali», il mito esige imperiosamente una spiegazione. Nel decorso dell'esistenza umana per il mito non c'è nessun accadere accidentale, ad esempio nessun insuccesso accidentale d'una impresa, nessuna malattia accidentale né alcuna morte accidentale. Tutto ciò dev'essere piuttosto determinato rigidamente — ma non è determinato da principi generali dell'accadere quali li enuncia la scienza nelle «leggi di natura », bensì da intenti individuali e da forze poste al servizio di questi. [...] ma] questa «causalità » magica penetra nei dettagli molto più di quanto non riesca a fare quella teoretico-scientifica; al puro «caso» essa non abbandona nulla: esige che in ogni caso particolare di malattia o di morte sia addotta la causa precisa, da cercarsi in una volizione individuale, in un qualche incantesimo ostile di cui l'interessato è rimasto vittima. E allora in un certo senso, invece d'una assenza della spiegazione causale, qui regna piuttosto una ipertrofia, un rigoglio soffocante dello «istinto causale », ed è solo nella specie di causa che il pensiero mitico si differenzia dal pensiero teoretico, col suo risalire a intenzioni e volizioni invece che a regole e leggi⁶.

5 Su questo tema V. in particolare: BROUSSEAU G. (1984), *Le rôle centrale du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage*, Acte du colloque de la troisième Université d'été de didactique des mathématiques d'Olivet ; CHEVALLARD Y. (1988), *Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation*, IREM, AixMarseille, 14, p. 10. Più in generale per l'opera di Brousseau v.

6 CASSIRER, E. (1937), *Determinismus und Indeterminismus in der modern Physik*, Ed. Italiana: *Determinismo e indeterminismo nella fisica moderna*, La Nuova Italia, Firenze, 1970, pp. 147-148.

La forma mitica della spiegazione appare dunque molto più dettagliata e ricca di significati di quanto non lo sia quella scientifica. Né possiamo individuare il limite di queste spiegazioni nel fatto che in essi la causalità degli eventi è attribuita a figure più o meno immaginarie, di natura divina ed eventualmente antropomorfe, se consideriamo il carattere simbolico e di metafora che li caratterizza. Gaia, la madre terra, fecondata da urano stellato, come racconta la teogonia di Esiodo, altro non è che la metafora di ciò che appare all'esperienza quotidiana degli uomini, secondo cui ogni cosa nasce dalla terra a condizione che questa riceva la pioggia. Allo stesso modo Cronos, l'inquietante divinità che genera per poi divorare i propri figli è forse la più straordinaria metafora del *tempo* che potesse mai essere concepita. E d'altra parte, gli oggetti concettuali costruiti dalla scienza, pur avendo perso la loro qualificazione divina e i caratteri più o meno antropomorfi, continuano tuttavia a mantenere i caratteri fondamentali della metafora. Dove porre allora il confine?

Io credo che questo si debba cercare essenzialmente nella capacità predittiva di una spiegazione. Superare l'incertezza del futuro, infatti è insieme un bisogno materiale e un'aspirazione dello spirito umano, che anche all'interno della spiegazione mitica ha cercato di avere risposte alle sue domande. Ma la spiegazione mitica rimaneva inevitabilmente ancorata all'alea di volontà individuali imperscrutabili, sia che appartenessero a divinità ordinatrici del mondo (come Zeus), o a messaggeri non sempre affidabili di verità nascoste (come le Muse) o rivelate attraverso la mediazione di figure speciali: sacerdoti, pizie, veggenti. Ciò che ha determinato e determina il successo della spiegazione scientifica sta invece proprio nella sua capacità di predire efficacemente eventi futuri che altrimenti non sarebbero stati previsti. E ciò è ottenuto al prezzo di rinunciare a una quantità grandissima di significati, eliminando dalle spiegazioni ogni riferimento a concetti come la volontà, il desiderio la coscienza individuale e perfino la finalità. Se la capacità predittiva può essere assunta come il discrimine tra spiegazione mitica e spiegazione scientifica, essa può anche determinare distinzioni all'interno stesso della scienza, se pensiamo ad esempio con quale precisione e quale grado di affidabilità può essere previsto un fenomeno fisico, e come invece in altri ambiti sia possibile solo una previsione statistica e probabilistica.

Scienza e metafora

Ed ora possiamo finalmente entrare nel vivo del nostro discorso.

Ho appena usato, in modo fugace e senza alcuna spiegazione, una frase che può apparire gratuita e ingiustificata quando ho affermato che *«gli oggetti concettuali costruiti dalla scienza, ..., continuano a mantenere i caratteri fondamentali della metafora»*.

Ancor prima di essere giustificata quest'affermazione, in verità, necessita di qualche chiarimento. Se cercassimo infatti di rintracciare tale carattere in una pubblicazione scientifica o in un trattato specialistico, perderemmo sicuramente il nostro tempo. Per chiarire anche questo concetto con una metafora, possiamo paragonare la scienza compiuta al cinema. Una persona che nella sua vita avesse visto centinaia di film senza conoscere il modo in cui vengono costruiti, non potrebbe assolutamente dedurre tutto il complesso lavoro che vi sta dietro e che va dalla sceneggiatura alla progettazione dei set alla scelta degli attori alle riprese e così via. Così anche il discorso altamente formalizzato della scienza, e quello della matematica in modo particolare, non lascia più trasparire, almeno direttamente, le idee o le domande originarie da cui sono nati i concetti scientifici.

Cercherò di renderne conto con alcuni esempi, dai quali, io credo, può emergere ancora con maggiore evidenza come l'analisi epistemologica dei concetti scientifici, nella prospettiva da me indicata, abbia molto a che fare con l'analisi dei processi di apprendimento.

Il primo esempio riguarda il nodo centrale e costitutivo della matematica come scienza: il concetto di infinito, ed a tale scopo prende l'avvio da un paradosso talmente noto e volgarizzato da potere apparire addirittura banale agli addetti ai lavori. È il paradosso di Achille e la Tartaruga. Ma non starò qui a dire ciò che i lettori già sanno. Andiamo invece ad esaminare la pretesa dei matematici

moderni di aver dato una risposta definitiva. Com'è noto i paradossi di Zenone si caratterizzano per il fatto che, ammettendo il dato empirico del movimento, ci si trova sempre di fronte ad una grandezza ben determinata e che tuttavia, allo stesso tempo, si presenta come somma di infinite quantità anch'esse determinate e finite. Qualcosa, dunque, che non sembra coerente con la nostra intuizione e con l'idea di infinito. A ciò risponde, almeno apparentemente, l'analisi infinitesimale, mostrando come la somma di una serie infinita possa convergere ad un valore finito. Ma questa è davvero una risposta alle domande poste dal paradosso?

Quelli proposti da Zenone nascono dall'assunzione che sommando infinite quantità finite non si possa ottenere una quantità finita, e da ciò segue che Achille, ad esempio, non potrebbe mai raggiungere la tartaruga, come invece avviene nel mondo fenomenico della nostra esperienza. La risposta dell'analisi infinitesimale consiste nel negare l'assunzione, con la pretesa di averne dimostrato la falsità. Le cose però stanno diversamente, perché la dimostrazione, o si svolge in termini finitistici secondo la definizione di limite di Cauchy, ma allora non c'è di fatto alcuna somma di infiniti termini ma solo il limite, finitisticamente definito di una successione di somme ridotte. Oppure si fonda sulla teoria formale degli insiemi. In questo caso, addirittura, non ci sono neppure gli insiemi se non come termini linguistici entro un calcolo combinatorio supposto coerente⁷.

Di fatto l'analisi infinitesimale e la teoria degli insiemi non rispondono alla domanda posta da Zenone, né potrebbero mai farlo. Perché il domanda di Zenone ha natura prettamente metafisica e non può quindi trovare alcuna risposta scientifica. Anzi non può avere nessuna risposta che sia coerente ed esaustiva. A questo punto direbbe Carnap trionfalmente: «Ve l'avevo detto, le domande metafisiche sono prive di senso, assurde, irragionevoli, e per ciò non vanno neppure prese in considerazione». Io però dico che Carnap è visibilmente fuori strada, perché senza le domande originariamente espresse da Zenone, probabilmente non ci sarebbero state neppure le risposte scientifiche dell'analisi infinitesimale. Di fatto la risposta scientifica non risponde mai all'originaria domanda così come essa si presenta all'intelletto, con i suoi significati spesso inafferrabili e mai riducibili per intero ad un apparato formale pienamente controllabile con strumenti logici. Risponde sempre a qualcosa di diverso, ad una concettualizzazione addomesticata e ricondotta entro uno schema formale semplice, nel quale però ha perso, di fatto, i significati originari. Il concetto scientifico è, dunque, solo una metafora dell'idea originaria, gravida quest'ultima di significato, ma in sé sfuggente e inafferrabile. L'idea originaria, che assuma forma mitica o consistenza metafisica non troverà mai risposte conclusive e definitive, ma può dar luogo alle elaborazioni razionali della scienza. Questa a sua volta esplica tutta la sua fecondità perché in grado di dare risposte coerenti e può presentare una capacità predittiva molto elevata. Ma senza la forma mitica significativa e senza la consistenza metafisica dell'idea originaria non può sussistere il concetto scientifico, né avrebbe ragione di esistere. Ciò sa bene Archimede quando si serve di metodi euristici (o meccanici) per giungere a risultati di cui però sa di dover fornire una diversa dimostrazione formale.

E ancora ad Archimede farò riferimento per il secondo esempio che voglio illustrare. Ce ne siamo occupati con Giuseppe Gentile in una pubblicazione recente sugli Atti dell'Accademia Peloritana⁸.

C'è una vecchia discussione intorno al trattato di Archimede *sull'equilibrio dei piani*. In questo lavoro, si sviluppa una serie di teoremi sui baricentri di figure piane, senza però che del concetto di baricentro venga data alcuna definizione. Da ciò, vari commentatori hanno dedotto che dovesse

7 La teoria formale degli insiemi è fondata su un numero limitato di assiomi diretti a regolare l'uso della parola *insieme*. Il prezzo è la perdita di significato della parola stessa che, divenuta un termine tecnico rigoroso, non denota più alcunché di definito. Tuttavia questo è il prezzo da pagare se si vuole evitare l'antinomia di Russel ed, allo stesso tempo, superare i limiti posti fin dall'antichità al concetto di infinito, e che nell'analisi infinitesimale sono stati rigorosamente fissati da Cauchy.

8 GENTILE G., MIGLIORATO R. (2008), *Archimede aristotelico o platonico: tertium non datur?* Atti dell'Accademia Peloritana dei Pericolanti, Classe di Sci. Fisi. Mat. e Nat., Vol. LXXXVI, DOI:10.1478/C1A0802009.

esistere un'opera precedente contenente una definizione di baricentro. Ora, tuttavia, non solo di una tale opera non si conosce alcuna traccia, né diretta né indiretta, ma non vi è neppure necessita che il concetto venga esplicitamente definito, dal momento che i postulati enunciati all'inizio del lavoro sono sufficienti per dimostrare tutti i successivi teoremi. Né si comprende quale potesse essere l'oggetto di tale lavoro, dal momento che nelle opere note di Archimede non sono richiamate proprietà del baricentro di cui sia già data la dimostrazione, né avrebbe avuto senso un lavoro contenente solo la definizione. Di più, c'è da dire che una definizione di “κέντρα τῶν βαρέων” (centro dei pesi, come viene chiamato) in questo caso sarebbe stata alquanto ardua, dal momento che le figure piane non hanno neppure peso. Se si prova invece a ricostruire il contesto storico, si può facilmente constatare che già esistevano trattati sull'equilibrio della bilancia ed esisteva un concetto di “*centro di sospensione*”. Si può, allora, più ragionevolmente ipotizzare che il “*centro dei pesi*” sia derivato dal preesistente concetto di *centro di sospensione*, mediante però un processo estremamente ardito. Il centro di sospensione, infatti, ha un significato fisico perfettamente descrivibile in termini operativi riferibili direttamente all'esperienza sensibile: è il punto da cui bisogna sospendere un barra portante dei pesi perché rimanga orizzontale. Il baricentro di una figura piana, non solo non è definibile in termini analoghi, visto che una figura piana non pesa, ma può anche non appartenere a nulla quando viene a trovarsi fuori dalla superficie della figura stessa. È questo per esempio il caso della corona circolare o delle figure a forma di U. L'idea originaria di centro di sospensione di un oggetto pesante è divenuto ora metafora di qualcos'altro, qualcosa di non definito e non definibile, ma caratterizzabile con dei postulati. È significativo a questo riguardo che in un successivo lavoro “*sul galleggiamento dei gravi*” il concetto di baricentro così caratterizzato venga usato per spiegare, e dunque prevedere, il comportamento di corpi galleggianti immersi in un liquido.

Il terzo esempio è tratto da un lavoro di Alessandro Sarritzu, anch'esso pubblicato sugli Atti dell'Accademia Peloritana⁹, nato nell'ambito di una ricerca su matematica e musica nella quale venivano esplorati da una parte gli aspetti storico-epistemologici, dall'altra le implicazioni didattiche. Il nostro esempio, centrato sull'opera di Aristosseno, è particolarmente interessante perché si pone proprio agli albori di quel passaggio fondamentale del pensiero scientifico che vede in Euclide probabilmente la prima realizzazione compiuta. E questo passaggio consiste proprio nell'assumere come oggetto del discorso scientifico non già un oggetto in sé, nella sua essenza metafisica, ma un'entità simbolica, assunta come metafora di qualcosa che non potrebbe essere altrimenti definito. Non ho qui lo spazio e il tempo per illustrare compiutamente il problema, che è quello della suddivisione delle scale musicali, o più precisamente di dividere in intervalli equivalenti l'intervallo di ottava. Affrontato in termini aritmetici dalla scuola pitagorica il problema si scontra con difficoltà che in termini moderni si potrebbero tradurre nell'irrazionalità della radice ennesima di un numero. Al di là della soluzione effettiva, il lavoro di Aristosseno è qui per noi significativo per due ragioni: innanzitutto egli sostituisce la rappresentazione aritmetica dei Pitagorici con una metafora geometrica. In secondo luogo se i numeri in gioco erano per i pitagorici grandezze fisiche direttamente rilevabili (ad es. la lunghezza di una corda), qui sono grandezze specifiche del suono, indipendenti da come questo è fisicamente prodotto. Un'astrazione, dunque, che può essere realizzata solo con una metafora e conseguentemente caratterizzata con assiomi. È il caso di citare proprio il passo di Aristosseno:

... Chi ci ascolta deve sforzarsi di ben accogliere ciascuna di queste definizioni, senza occuparsi se le definizioni date siano esatte o superficiali. Deve piuttosto sforzarsi di accettare di buon animo e di ritenere sufficientemente istruttiva la nostra definizione, se è capace d'introdurlo alla comprensione di quanto è stato detto ...¹⁰

9 SARRITZU, A. (2008), *Aristosseno tra aristotelismo e nuova scienza*, Atti dell'Accademia Peloritana dei Pericolanti, Classe di Sci. Fisi. Mat. e Nat., Vol. LXXXVI, DOI:10.1478/C1A0802010

10 ARISTOSSENO, *l'Armonica*, I, 16.

Ed in effetti quelle che Aristosseno presenta non sono effettive definizioni ma solo indicazioni intese a costituire delle immagini mentali che si consolidano in una metafora geometrica. Questa diviene infine un concetto scientificamente valido grazie alle assunzioni usate come assiomi.

Computabilità e costruttività

Il quarto ed ultimo esempio è relativo al programma di ricerca di Pietro Milici, dottorando all'Università di Palermo, che ho accettato di seguire per gli aspetti più strettamente epistemologici. Il problema di fondo era quello relativo alla costruibilità di funzioni irrazionali computabili. In termini molto generici, possiamo dire che un oggetto si dice computabile se esiste una regola che consente di darne una rappresentazione approssimata quanto si vuole. In altri termini l'oggetto dovrebbe essere il limite di una successione di cui, la data regola consente di calcolare l'elemento n -esimo qualunque sia n . In tal modo si ottiene una costruzione approssimata, ma non la costruzione dell'oggetto stesso. Ad esempio se si tratta di una curva, o della funzione che lo rappresenta, è possibile che se ne possa dare una costruzione sempre più approssimata, ma che allo stesso tempo non esista un solo punto di cui si possa determinare con certezza se appartiene o no alla curva. Ora una curva razionale è sempre computabile, mentre è dimostrato che in generale una non razionale non sempre lo è. L'idea che mi è stata sottoposta, e che ho ritenuto meritevole di attenzione, è quella di pensare dei dispositivi in grado di dare, in linea di principio, una costruzione completa di curve computabili.

L'esempio più semplice di macchina, pensata e costruita da Pietro Milici, si fonda su questo principio: *Se una ruota rotola senza strisciare su un piano, mantenendosi perpendicolare al piano stesso, il suo punto di contatto descrive una certa curva continua. Il piano della ruota incontra il piano su cui rotola lungo una retta che, in ogni punto è sempre tangente alla curva descritta.* Pertanto se io vincolo tale retta con una certa condizione, e per il resto lascio la ruota libera di muoversi, allora la curva descritta sarà definita dalle condizioni imposte alla tangente. O, in termini analitici, la funzione costruita sarà determinata dalle condizioni imposte alla sua derivata. Possiamo anche dire che è una macchina per integrare. Altre macchine meno semplici proposte da Milici, consentirebbero poi di estendere le costruzioni al campo complesso.

Che questo possa avere delle interessanti applicazioni didattiche non è difficile da comprendere, dato che riesce a dare delle rappresentazioni meccaniche di operazioni e concetti di livello superiore, quali sono quelli dell'analisi infinitesimale. La stessa tangente potrebbe avere una definizione cinematica elementare, proprio come la retta intersezione tra il piano della ruota e quello su cui rotola. Ma per il resto tutto questo resterebbe confinato al ruolo di semplice curiosità più meno dimostrativa sul piano didattico, se non vi fosse una ragione di interesse anche epistemologico. Questo è connesso ai limiti ben noti del formalismo matematico, le cui pretese di fondazione assoluta e definitiva, sono naufragate con i due teoremi di Gödel.

È per ciò che le ragioni dell'intuizionismo, soprattutto quelle legate alla richiesta di costruttività, continuano anche oggi ad avere una loro validità. Lo stesso calcolo elettronico, che pur da una parte sembra accantonare le problematiche classiche di esistenza sostituendole con il criterio della computabilità, non risolve ma anzi ne ripropone l'attualità. Prendiamo ad esempio uno dei prodotti del calcolo elettronico: la geometria frattale, e consideriamo il suo oggetto più noto: l'insieme di Mandelbrot. Si tratta di un insieme che può essere costruito punto per punto con un'approssimazione che può essere portata a livelli sempre più alti. Il fatto è, però, che di tale insieme, ciò che ha veramente rilievo sul piano teorico, in quanto dotato di proprietà frattali, è la sua frontiera. Ma questa, sebbene se ne dimostri l'esistenza entro la teoria formale degli insiemi (soggetta quindi alle insidie dei teoremi di Gödel), non può certamente essere costruita per punti. Anzi l'algoritmo che genera l'insieme di Mandelbrot non consente di determinare alcun punto che appartenga con certezza alla frontiera.

Conclusione

Ho cercato qui di delineare le ragioni di un'epistemologia che andasse oltre i diversi punti di vista specifici così come si sono proposti dall'Ottocento ad oggi. Ognuno di essi ha una propria validità che non viene meno neppure quando il punto di vista stesso viene superato da un riposizionamento del pensiero scientifico. D'altra parte, proprio perché la scienza non è una struttura data per sé stessa e una volta per tutte, ma è un processo che si svolge nella storia, nessuna epistemologia può dare di essa un'interpretazione compiuta e stabile. C'è però un punto di vista che cerca di cogliere la scienza nel suo farsi come processo nella storia, cercando di individuarne le costanti e la genesi dei concetti. Ora è proprio questa ricerca di comprensione dei processi genetici che può essere elemento comune con le teorie della didattica. Naturalmente non è lecito semplificare identificando due processi genetici, quello individuale dell'apprendimento e quello collettivo della ricerca scientifica. Sono certo livelli distinti, ma che allo stesso tempo non possono essere indipendenti, perché entrambi si svolgono all'interno di uno stesso territorio e di uno stesso ambito culturale.