

## **Dal concetto spontaneo di spazio al calcolo del volume Un percorso fra misura e geometria nella scuola primaria<sup>1</sup>**

Maria Pantaleo<sup>2</sup>

### **Sommario**

Il contributo documenta un lavoro sperimentale svolto nella scuola primaria e mirato alla analisi dei processi cognitivi messi in evidenza dagli allievi nel passaggio dai modelli spontanei a quelli scientifici sul concetto di volume come spazio geometrico misurabile. Il laboratorio è stato centrato su attività di pre-misura e mira a collegare due saperi matematici che spesso vengono trattati separatamente. Nella scuola primaria, in terza classe, all'interno del nucleo geometria e misura, si formalizza *la misura delle capacità*; la misura del volume invece si affronta in quinta classe ed è sempre più diffusa la scelta di demandarne lo studio alla classe terza della secondaria di primo grado frapponendo fra i due saperi una distanza temporale di cinque anni. Quando l'insegnante di scuola primaria, nella scelta del sapere da trasporre, demanda alla secondaria di primo grado il primo approccio all'argomento, lo studio dei volumi avviene quando già le pratiche di insegnamento sono orientate verso un approccio teorico e le attività di teorizzazione non sempre sono associate ad una abbondante attività di manipolazione verbalizzazione e riflessione.

Questo lavoro ricerca l'assenza di correlazione fra i due saperi nella pratica didattica andando a ricostruire la storia dell'insegnamento, indagando le concezioni degli insegnanti, ricercandone gli anelli mancanti attraverso l'analisi dei testi scolastici diretti agli alunni e dei testi didattici diretti ai docenti, ricostruendone la storia<sup>3</sup> nei secoli passati. Su questi piani si propone come studio e ricerca teorica, mentre parallelamente affronta l'argomento dal punto di vista sperimentale documentando i passaggi più importanti e significativi, dal linguaggio naturale al linguaggio quasi formale, delle attività laboratoriali condotte con alunni di una classe terza. Rispetto alla valutazione della parte sperimentale viene analizzata la trasformazione del lessico degli alunni che diventa più vicino a quello formale attraverso un continuo uso di metafore e inferenze. La documentazione scritta degli alunni e le registrazioni dei dialoghi sono riportate nella parte finale del lavoro e dimostrano i processi che sottendono la fase di costruzione e continua revisione delle strutture cognitive e dei saperi che si vanno formalizzando. Si comprende che i bambini passano da concetti ingenui a modelli deboli e spesso in conflitto, riorganizzano e revisionano alla luce di nuove esperienze, e piano piano si avviano verso la padronanza di una nuova semantica. In ultima analisi, si documenta un sapere in evoluzione che non può considerarsi “duraturo” e definitivo ma che sicuramente conduce ad assumere un approccio corretto al sapere matematico.

Infine una licenza che questo lavoro si concede è quella di riportare le “riflessioni a voce alta” e le argomentazioni che i bambini formulano, così come escono dalla loro bocca, ricche di metafore e di immagini. Essi ci dimostrano, nella spudoratezza del pensare, tutta la ricchezza che possiedono quando la loro spontaneità non viene imbrigliata da esercizi ripetitivi, falsi problemi e inutili “lezioni”.

---

<sup>1</sup> Tratto dal lavoro di tesi per il Master “Insegnamento delle Scienze nella Scuola di Base” Relatore prof. Aldo Brigaglia, A.A 2007/2008. Supervisore Tirocinio del Corso di Laurea in “Scienze della Formazione Primaria”, Facoltà Scienze della Formazione, Università di Palermo. Componente del GRIM.

<sup>2</sup> Ins. di Scuola primaria, supervisore presso la Facoltà di Scienze della Formazione Primaria di Palermo.

<sup>3</sup> Analisi epistemologica e storico epistemologica

## Abstract

### **From the spontaneous perception of space to the volumes’ measurement “A journey through..measurement and geometry in Primary School”**

This paper is about an experimental work carried out at a Primary School aiming at analysing those cognitive processes put in evidence by students, in their “shift” from spontaneous to scientific models, when facing the concept of volume as a measurable geometrical space.

It has involved activities of pre-measurement and is intended to unite two mathematical competences which are often tackled separately.

In the third year of study, in fact, the measurement of capacities is formalized inside the module “Geometry and Measurement”; while, the measurement of volume is dealt with in the fifth year, if not, is dealt with in the third year of first grade secondary school, by interposing, in such a way, 5 Years time between the two moments. Therefore, the analysis of volumes takes place when the teaching techniques have already been steered towards a theoretical approach which is not always supported by enough handling, reporting and reflexion activities. This work intend to inquire into the lack of mutual relation between these two competences in the present teaching practice, by rebuilding its history, looking for its missing links, through the analysis of both students’ and teachers’ textbooks over the years, and investigating teachers’ opinions.

At the same time, however, it also deals with these topics from an experimental point of view, documenting the main and the most important passages, from natural to semi-formal language, in the workshop activities carried out with students in the third form.

There is, also, a great emphasis on the transformation of the students’ language which becomes more and more formal, thanks to a continuous use of figurative language.

The written documents of the students and the recording of their dialogues are to be found in the last part of the work, that show the processes subtending both the construction phase and the revision of cognitive structures and competences to be formalized.

There is evidence that children “go” from simple concepts or ideas to weak and conflictual models, re-organizing and revising them on the light of their new experiences and, step by step, “head” for the mastery of a new semantics.

Finally, Knowledge in ... progress is shown which should not be considered “lasting” and “definitive” but necessary, to a correct approach to mathematics.

The only liberty this work would like to take is the quoting of children’s expressions, in the way they are thought and said: rich in metaphors and images. They let us appreciate, all the richness they possess whenever they are not “bridled” by repetitive drills, false problems and useless “lessons”.

## Premessa

Troppo spesso la matematica viene insegnata come qualcosa di già fatto, una sorta di cibo pronto da riscaldare e consumare alla maniera dei *fast food*. Agli studenti si danno le definizioni, gli algoritmi, le leggi e ci si aspetta che essi si comportino applicandoli anche in maniera originale e in contesti diversi in modo da dimostrarne una trasformazione in competenza.

Ogni teoria formale che oggi ci viene data così bell'e fatta, ogni algoritmo anche semplice, proviene da un passato storico che ne ha consentito un passaggio graduale e un'organizzazione sistematica che solo alla fine passa alla divulgazione, alla comunicazione, all'insegnamento. Lo sviluppo dell'umanità ci insegna che la matematica è nata attraverso i secoli aggiustando, rivedendo, integrando con le altre culture, eliminando branche di saperi ormai morti, risistemando il cammino dei predecessori spostandosi in avanti o andando a rivedere percorsi lasciati incompleti e in una certa epoca ritenuti errati.

Se questo è il modo di procedere di un sapere vivo e attuale non si comprende perché tutto ciò non si debba consentire agli studenti, bambini o ragazzi che siano, in modo da consentirgli di re-inventare la matematica facendola rivivere, nella sua complessità, come una sfida verso la conquista di un sapere tanto affascinante quanto più soggetto a revisioni e nuove invenzioni. Imparare a fare la matematica piuttosto che imparare la matematica anche se le due cose sono inscindibili. Imparare ad imparare in modo che vi sia acquisizione di competenze e non solo di conoscenze o di abilità, che vi sia consapevolezza dei processi che determinano la costruzione di nuove conoscenze. La verbalizzazione dei processi, anche dei più banali, di quelli che sembrano ovvi fa sì che essi non vengano dimenticati. Al contrario di un'opera d'arte la matematica è un processo mai concluso, per ciò ogni nuova conoscenza ogni intuizione di percorso possibile è un nuovo trampolino di lancio verso una nuova meta; quindi il processo che lo ha prodotto va ricordato, evocato, riapplicato, magari rivisto e modificato.

La funzione docente, in un contesto di ricostruzione delle conoscenze, è una funzione di guida, di mediatore consapevole verso una meta. Una guida attenta a documentare bene il viaggio perché si possa ripetere, attenta e scegliere bene le tappe e le diramazioni da intraprendere ad una determinata età.

Fuor di metafora, il docente dovrebbe essere consapevole delle conoscenze matematiche in gioco durante le attività didattiche e dei possibili sviluppi in altre branche del sapere, ed essere in grado di guidare la verbalizzazione dell'esperienza verso la formalizzazione e il passaggio da concetti intuitivi e spontanei in oggetti del pensiero matematico.

Individuare i concetti fondamentali organizzatori, o come oggi si dicono, i nuclei fondanti della matematica, diventa determinante poiché a partire da essi si dovranno scegliere e organizzare dei percorsi che conducono verso una formalizzazione graduale ed elevata senza inutili anticipazioni.

Non esiste un'età con divieto di insegnamento, ogni sapere può essere affrontato e vissuto ad ogni età, ma ad ogni età in modo diverso e ad un diverso livello di astrazione, eppure in questi ultimi anni si assiste a un fatto strano, alcuni argomenti di geometria e misura non vengano affrontati prima dei 12 – 13 anni. Le Indicazioni Nazionali e le Indicazioni per la costruzione dei Curricoli collocano lo studio dei volumi e delle figure solide nell'ultimo anno della scuola secondaria di primo grado e tutto ciò sta generando una grande confusione nelle scelte progettuali degli insegnanti. Molto spesso si tralasciano tutte le attività pratiche nel campo della pre-misura, attività che rappresentano gli aspetti propedeutici all'idea fondamentale di misura e di grandezza; i ragazzi si imbattono in contesti quale può essere quello della misura della capacità senza aver affrontato esperienze di volume in quanto spazio occupato e misurabile.

Misurare significa definire operativamente una grandezza fisica perché questo avvenga correttamente sono indispensabili alcune tappe:

- Primo passo: la *premisura*, che ci porta a individuare le grandezze fisiche; *Confrontare* e *ordinare* grandezze *trovare una procedura* per il confronto
- Secondo passo: la *misura*, che ci permette di trasformare la grandezza fisica in numero, il confronto e l'ordinamento sono semplificati, si può rappresentare graficamente, effettuare operazioni, trovare relazioni;
- Terzo passo: l'indagine sulle *relazioni* fra le grandezze fisiche.

Gli insegnanti che operano la scelta di posporre le esperienze di pre-misura si ritengono giustificati perché la distanza di tempo fra l'esperienza e la formalizzazione è tale che la prima sembra un' inutile perdita di tempo. Invece, gli studi sull'apprendimento dimostrano che la matematica che nasce dalla matematizzazione della realtà primordiale e non può ignorare per anni la riflessione su alcuni elementi spaziali presenti nell'ambiente in cui vive e si muove il bambino. Dai libri di testo della scuola primaria emerge un curricolo di geometria molto debole e precocemente teorico in contrasto con le “indicazioni per il Curricolo” che invece auspicano l'uso delle tecnologie<sup>4</sup> e di una didattica laboratoriale manipolativa.

## 1. Insegnare la geometria oggi.

### 1.1 Dai documenti ufficiali all'azione didattica

Come si inquadra nel panorama dell'insegnamento lo studio della geometria? Uno sguardo ai documenti ufficiali ministeriali ai risultati della ricerca in didattica ma anche una doverosa attenzione alle opinioni ricorrenti degli insegnanti può risultare efficace per comprendere i motivi di ciò che viene agito durante le attività nella scuola primaria.

Da un esame dei testi scolastici più diffusi si nota che la geometria si sviluppa in pochissime pagine collocate alla fine del testo, seguite soltanto da quelle dedicate alla logica e alla probabilità, anch'esse di pochissime pagine. È una geometria che si suppone debba essere proposta con molte esperienze di movimento e di individuazione e descrizione di oggetti nello spazio, insomma una geometria come assunzione di sempre più consapevolezza del sé corporeo in relazione al movimento nello spazio vissuto. Soltanto in un secondo momento si passa ad uno spazio rappresentato utilizzando gli strumenti del disegno e della misura e questo avviene nelle classi della scuola secondaria di primo grado. L'uso di software quali Cabri o GeoGebra o altri simili non viene minimamente proposto agli alunni della scuola primaria neanche sotto forma di gioco. Eppure molti bambini di oggi usano Internet e programmi abbastanza elaborati forse più di quelli necessari a giocare con una geometria virtuale colorata e in simulazione di movimento.

Dalle Indicazioni per la Costruzione del Curricolo leggiamo i traguardi per lo sviluppo delle competenze in matematica al termine della scuola primaria:

- “L'alunno percepisce e rappresenta forme, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo, utilizzando in particolare strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura”
- “Impara a costruire ragionamenti (se pure non formalizzati)”

Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola primaria

- *Spazio e figure*
  - Comunicare la posizione di oggetti nello spazio fisico, sia rispetto al soggetto, sia rispetto ad altre persone o oggetti, usando termini adeguati
  - Disegnare figure geometriche e costruire modelli materiali anche nello spazio, utilizzando strumenti appropriati.

Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria

- *Spazio e figure*
  - Costruire e utilizzare modelli materiali nello spazio e nel piano come supporto a una prima capacità di visualizzazione.
- *Relazioni, misure, dati e previsioni*
  - Conoscere le principali unità di misura per lunghezze, angoli, aree, volumi/capacità, intervalli temporali, masse/pesi e usarle per effettuare misure e stime

---

<sup>4</sup> Teoria cognitiva dell'embodiment: Obiettivo di questa teoria è analizzare la struttura cognitiva dei concetti matematici, evidenziando come in questi siano presenti i meccanismi cognitivi quotidiani. Ad esempio il pensiero metaforico, le mappe concettuali e gli schemi immagine costituiscono strumenti onnipresenti nella genesi dei concetti matematici fondamentali anche se non hanno nulla di specificamente matematico (Arzarello & Robutti 2002).

Obiettivi di apprendimento di scienze al termine della classe quinta della scuola primaria

- *Oggetti, materiali e trasformazioni*
- Costruire operativamente in connessione a contesti concreti di esperienza quotidiana i concetti geometrici e fisici fondamentali, in particolare: lunghezze, angoli, superfici, capacità/volume, peso, temperatura, forza, luce, ecc.
- Passare gradualmente dalla seriazione in base a una proprietà (ad esempio ordinare oggetti per peso crescente in base ad allungamenti crescenti di una molla), alla costruzione, taratura e utilizzo di strumenti anche di uso comune (ad esempio molle per misure di peso, recipienti della vita quotidiana per misure di volumi/capacità), passando dalle prime misure in unità arbitrarie (spanne, piedi, ...) alle unità convenzionali.

## 1.2 Le opinioni degli insegnanti

Spesso nella scelta del sapere e delle modalità di trasposizione didattica l'insegnante si lascia guidare da quello che pensa, dalla preparazione che ha, dalle richieste della comunità e delle famiglie.

Fra gli insegnanti si pensava che l'impostazione dell'educazione scientifica debba essere essenzialmente di tipo qualitativo e che le principali relazioni debbano svilupparsi con l'educazione linguistica. Tuttavia negli ultimi anni si è cambiato in parte opinione, avendo acquisito più consapevolezza dei gravi limiti di concettualizzazione che si verificano a proposito del peso, del volume, ecc.

Il fenomeno non è solo italiano; esso è causato da un insegnamento matematico e scientifico pedagogicamente assurdo. Nel secondo ciclo della scuola elementare, nell'ambito della matematica, viene dedicato molto tempo ad effettuare calcoli sulle misure di lunghezza, peso, capacità, superficie e volume, in particolare allo svolgimento di equivalenze. L'abilità di calcolo, evidentemente necessaria, non coincide con la concettualizzazione, ne rappresenta soltanto un aspetto, insieme ad attività di sperimentazione e problematizzazione.

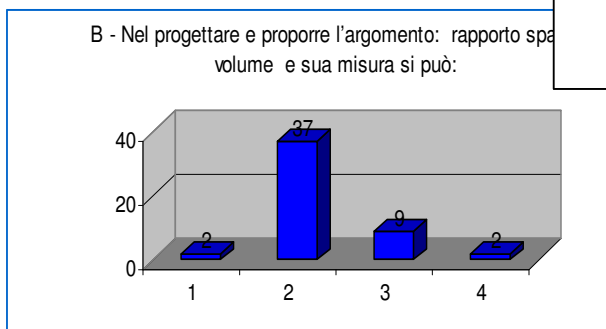
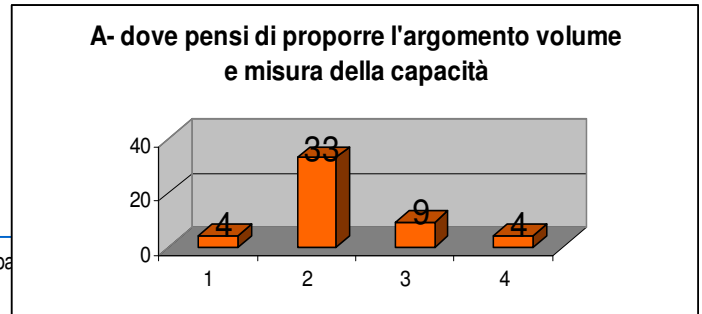
La costruzione operativa dei concetti è una base imprescindibile della concettualizzazione<sup>5</sup>. Per questo è stato interessante sottoporre ai docenti un questionario per poter comprendere se e come guidano i loro piccoli allievi nel passaggio dalle concezioni spontanee di spazio e misura agli oggetti matematici, e al concetto di volume e di unità di misura convenzionale. Il sondaggio utilizza il metodo dell'intervista attraverso un questionario con risposte a scelta multipla e mira ad avere una visione, anche se parziale, della preparazione scientifica del maestro tutologo che dovrà nel futuro prossimo insegnare ogni disciplina. Le domande A e B cercano di conoscere le scelte metodologiche e la collocazione dell'argomento all'interno del curriculum. Le domande C e D pongono delle domande quasi paradossali e delle risposte a volte errate o incomplete per accertare le conoscenze degli insegnanti rispetto all'argomento. In queste ultime viene lasciata la possibilità di una risposta aperta per raccogliere le ipotesi corrette e non presenti fra le risposte da scegliere. Il questionario: è stato proposto a 50 docenti di scuola primaria. La consegna era:

**Segna con una crocetta la risposta che ti sembra più appropriata a descrivere il modo migliore di trasposizione didattica in classe dell'argomento**

---

<sup>5</sup> Il gruppo di ricerca sono nati proprio dall'esigenza di nuove prospettive e di adozione di nuove metodologie tecnologiche che permettono di interagire fisicamente e incorporare mentalmente i concetti fondamentali ed essenziali all'esperienza umana in una naturalizzazione del fenomeno: si tratta del cosiddetto *embodiment*.

- A-**
1. scuola dell' Infanzia
  2. **Dalla classe terza della scuola primaria**
  3. In terza media
  4. Altro:



- B-**
1. partire dalle misure di capacità dei liquidi
  2. **partire dalla misura dello spazio occupato da oggetti di uso comune**
  3. partire dallo studio delle figure geometriche solide
  4. Altro.....

- C-**
1. **Prendendo le misure in modo approssimato e applicando la formula  $v = l \times l \times l$**
  2. Non si può misurare, non ci sono formule
  3. **In altro modo:.....**



### 1.3 Analisi dei risultati

Prima di commentare i dati che sono emersi dall'intervista è indispensabile precisare che a nessuno è stato concesso il tempo di documentarsi sull'argomento, e che tutti hanno ammesso il bisogno di aggiornare le proprie conoscenze, alcuni hanno confessato il timore di non riuscire ad insegnare una disciplina complessa come la matematica e altri hanno ammesso di non averla mai insegnata e di sentirsi inadeguati. Sicuramente le opportunità di formazione non mancano, e non mancano nel campo dell'editoria e di internet pubblicazioni specifiche nel settore della didattica della matematica. Tutti però sappiamo che le competenze del docente passano attraverso l'esperienza e la sperimentazione in classe, passano anche attraverso le motivazioni che spingono a rivedere ed aggiornare le proprie competenze didattiche. A fronte di un evidente bisogno di formazione si assiste alla solitudine di chi riesce a farlo senza incentivi per la propria carriera, spendendo tempo della propria vita senza alcuna remunerazione.

Cosa possiamo leggere dai risultati? Intanto i dati che emergono sono fortemente discordanti come se fra le domande non ci sia un legame concettuale, questo fa pensare che la misura della capacità non viene vista in relazione con la misura del volume. Infatti, la maggior parte degli intervistati considera la 3<sup>a</sup> classe quella in cui proporre l'argomento e sostiene di dover partire dalla misura dello spazio occupato da oggetti di uso comune, ma poi ritiene che l'unico modo per misurarne il volume sia quello di prendere le misure approssimate! Dalle risposte al test emergono almeno due elementi di criticità da indagare in modo più approfondito: 1) sembra che l'unico modo conosciuto per misurare il volume degli oggetti sia quello diretto e questo spiegherebbe la scelta paradossale della risposta n° 1 ( prendendo le misure) alla

domanda C “se devi proporre ai tuoi alunni di misurare lo spazio occupato da un oggetto comune per esempio una macchinina giocattolo, come procedi?” 2) sembra inoltre che l’insegnante di scuola primaria non conosca la relazione fra capacità e volume e che la storia e le regole del sistema delle misure si sia persa nel tempo. Dalle risposte emerge inoltre una mancanza di visione verticale del sapere insegnato nella scuola dell’obbligo, i libri di testo della scuola secondaria di primo grado, per lo studio del volume suggeriscono attività pratiche dove si usa un liquido o della polvere ( esperimenti con la sabbia ) che dopo aver riempito lo spazio interno di un solido, piramide o cono o altro, viene a sua volta riversata in un contenitore graduato effettuando una misurazione indiretta attraverso un mediatore. Ancora riguardo alle risposte del test ci si aspettava che la risposta aperta “ in altro modo....” potesse contenere le ipotesi corrette e non presenti. Purtroppo soltanto 2 fra gli intervistati propongono alcuni suggerimenti corretti.

Magari questo sondaggio può essere ripreso in seguito per approfondire questo aspetto interessante per cercare di scoprire cosa pensano i docenti che insegnano la matematica della stessa matematica. Questa non è la sede e il momento per farlo.

## **2. Scelta del percorso sperimentale**

### **2.1 Un progetto per correlare i saperi geometria e misura.**

La geometria del quotidiano procede per immagini mentali<sup>6</sup> di oggetti e di posizioni nello spazio. Il linguaggio specifico della geometria va costruito insieme all’esperienza e la verbalizzazione è lo strumento che spinge verso l’astrazione. La geometria va codificata, con l’uso di termini nuovi che non fanno parte dell’esperienza ma anche attraverso la scelta di percorsi che costruiscono catene di processi di apprendimento a lungo termine piuttosto che singoli eventi slegati fra loro.” Gli oggetti mentali che servono inizialmente per parlare di oggetti e fenomeni geometrici e organizzarli, sono presi a prestito dal pensiero comune e dovranno essere elaborati matematicamente, solo strada facendo e ogni volta che se ne sente la necessità<sup>7</sup>. La geometria nasce dall’osservazione, dalle manipolazioni, dalle costruzioni e dalle rappresentazioni di semplici oggetti, nella scuola primaria non può che essere fondata su tre azioni fondamentali della persona: manipolare, costruire e comunicare.

Per quanto attiene alla misura attività sperimentali vengono effettuate generalmente soltanto all’inizio del lavoro sulla misura, generalmente in riferimento alle lunghezze. Quando si introducono, invece, le altre grandezze, spesso, questa attività operativa non viene ripetuta: facendo riferimento alle unità di misura di lunghezza, dove i multipli ed i sottomultipli del metro vanno di 10 in 10 si introducono prima le grandezze che hanno multipli e sottomultipli similari, peso e capacità, poi le unità di misura di superficie (di 100 in 100), ed infine di volume (di 1000 in 1000).

Evidentemente i concetti di peso, capacità e volume sono considerati autoevidenti, non hanno bisogno di essere compresi, è sufficiente imparare ad effettuare calcoli.

Viene presupposta nel bambino una capacità di astrazione che a quell’età non può avere, una capacità che in realtà può essere costruita e sviluppata durante tutto l’arco della scuola di base, proprio ripetendo in ogni contesto, con ogni nuovo concetto, il passaggio graduale dal concreto all’astratto, e cogliendo sempre le analogie, le differenze e le connessioni con gli altri concetti.

### **2.2 le connessioni nel sistema delle misure**

Nella storia della matematica il problema dell’unificazione delle unità di misura convenzionali ha avuto molte vicissitudini.

Tra i grandi matematici che per primi affrontarono il problema va ricordato il belga Simone Stevin, nato a Bruges nel 1548 e morto a Leida nel 1620 che, ben due secoli prima della rivoluzione francese, suggerì la divisione decimale delle misure, e l’italiano Tito Livio Burattini che in una sua pubblicazione del 1675 (Misura Universale) espone alcune idee basilari del sistema metrico decimale e il modo di derivare

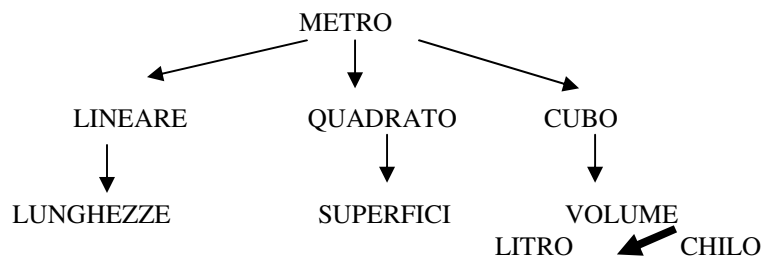
---

6 Hans Freudenthal 1994:93

7 Grugnetti-Villani, 1999: 138



le unità di misura per le superfici, per i volumi e per i pesi da quelle di lunghezza. Dopo diverse vicende storiche il sistema vide la luce il 22 Giugno 1799. Una Commissione di Scienziati, della quale fecero parte anche alcuni italiani<sup>8</sup>, aveva ultimato i lavori portando a termine il compito di coordinare le altre unità di misura col metro.



La relazione che ne consegue è:

$$1\text{cm}^3 = 1\text{ ml} = 1\text{ gr}$$

$$\text{LITRO}^9 \longrightarrow \text{CHILO}^{10}$$

Se ciò che va costruito viene fin dall'inizio presupposto, non ci si può stupire che la maggior parte degli studenti non abbia alla fine della scuola media concettualizzato grandezze così importanti come il peso ed il volume. Se poi si dimentica che la storia della matematica è un faticoso processo di scoperte invenzioni e condivisioni, sarà difficile comprendere il significato delle conquiste che la cultura matematica ha prodotto<sup>11</sup>.

Peso, volume e capacità sono da molti studenti utilizzati indistintamente. La capacità viene considerata spesso come una grandezza che non ha nessuna relazione con il volume: generalmente la prima viene riferita a liquidi di uso quotidiano ed il secondo soltanto a

corpi solidi regolari. Peso e volume debbono essere costruiti, con un approccio operativo, in modo analitico, ma debbono essere anche in molti contesti sperimentali affrontati in modo interrelato tra la fine della scuola elementare e i primi anni del biennio della scuola secondaria superiore.

La dicotomia esistente tra i concetti di capacità e volume probabilmente dipende dal fatto che vengono generalmente introdotti in modo separato, la capacità in terza ed il volume in quinta elementare, i disciplinari, al contrario, ritengono che capacità e volume debbano essere affrontati contestualmente con attività di pre-misura a cominciare dalla classe terza, principalmente dal volume dei liquidi, a questo scopo può essere necessario presentare agli studenti delle teorie parziali e provvisorie che essi possano comprendere senza tuttavia accettare come verità assolute ma da considerare come tappe di un sapere in evoluzione.

Quali possono essere le tappe in un percorso verso la misura convenzionale?

- Confrontare. Mettendo in relazione proprietà
- Ordinare. Capiente più o meno, tanto quanto, il più capiente
- Classificare. Secondo diversi attributi
- Stimare e quantificare.
- Inventare unità di misura arbitrarie. Scoprire il bisogno della convenzione;
- Conoscere il problema della misura nella storia.
- Usare strumenti formalizzati.
- Riflettere individualmente,
- Riorganizzare le conoscenze.

<sup>8</sup> Fra cui Giuseppe Luigi Lagrange, il chimico naturalista Giovanni Valentino Febroni e Prospero Balbo.

<sup>9</sup> Corrisponde alla quantità di acqua contenuta in un  $\text{dm}^3$

<sup>10</sup> Corrisponde al peso di un litro d'acqua distillata alla temperatura di  $4^\circ\text{C}$

<sup>11</sup> Il sistema delle unità di misura è il frutto faticoso di secoli di studio e condivisioni difficili.



Queste ed altre operazioni non sono da intendersi in modo propedeutico ma contemporaneamente in gioco nei contesti e nelle situazioni didattiche.

## **2.2 Volume e implicazioni in altri campi del sapere scientifico**

Il concetto di volume si presta a diverse diramazioni, le attività di pre-misura devono essere percorsi verso la modellizzazione di semplici leggi e convenzioni.

Il concetto di volume non può prescindere dal concetto di spazio occupato e dalla revisione di un pregiudizio diffuso nei bambini che non considerano l'aria come materia che occupa uno spazio. Dopo le esperienze che dimostrano che uno spazio può essere occupato non solo da oggetti solidi ma anche da liquidi e gas si pone il problema della misura del volume dei liquidi attraverso la capacità dei recipienti. Un corpo liquido o una polvere o un solido che occupa un contenitore, che si modella al contenitore e ne occupa tutto lo spazio possibile e che quindi lo misura e nello stesso tempo ne viene misurato.

Le relazioni e le funzioni fra oggetto che viene misurato e oggetto che misura è reversibile?

Nel caso della capacità lo è, il recipiente misura la quantità di acqua sia che sia stato tarato sia che non lo sia stato. Ma al contrario può esserne misurato lo spazio interno di un recipiente dallo stesso liquido se ne conosciamo la quantità?. Questo modo di pensare rimanda idealmente ad una precedente misurazione del liquido che stiamo usando come unità di misura..... innescando un processo circolare infinito che si arresta solo se si decide di assumere regole certe per tutti, recipienti e contenuti.

Risolto il dilemma e compreso che la relazione è reversibile il concetto di volume si evolve in almeno tre direzioni:

- calcolo del volume espresso in  $\text{cm}^3$
- la densità della materia: volume in relazione con il peso
- le variabili che influenzano il fenomeno del galleggiamento
- le misure di capacità.

## **3. La progettazione**

### **3.1 aspetti metodologici**

Gli aspetti metodologici che il progetto realizza trovano conferma nei documenti ministeriali. Nelle “Indicazioni per la costruzione del Curricolo” si legge:

*“Tutte le discipline dell'area hanno come elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico (aula, o altro spazio specificamente attrezzato) sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati e a confrontarli con le ipotesi formulate, negozia e costruisce significati interindividuali, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive. In tutte le discipline dell'area, inclusa la matematica, l'insegnante avrà cura di ricorrere ad attività pratiche e sperimentali e a osservazioni sul campo, con un carattere non episodico e inserendole in percorsi di conoscenza”.*

### **3.2 ipotesi sperimentale**

Avviare al concetto geometrico di volume espresso nell'unità di misura convenzionale “ $\text{m}^3$ ”, utilizzando l'abilità di effettuare stime e la capacità di cogliere relazioni di equivalenze fra le misure di capacità e misure di volume. ( $1\text{ml} = 1\text{cm}^3$ )

#### **Il format didattico:**

- A. preparazione dell'ambiente d'apprendimento<sup>12</sup>,
- B. fase individuale di approccio al nuovo sapere;

---

<sup>12</sup> Per ambiente si intende qualunque mezzo o strumento sarà manipolato anche mentalmente dagli alunni, sarebbe più corretto chiamarlo milieu nella sua accezione originale

- C. fase della socializzazione in piccolo gruppo;
- D. discussione matematica di tutto il gruppo classe guidata dal docente che mira a sviluppare l'argomentare congetturare e dimostrare<sup>13</sup>;
- E. l'istituzionalizzazione in cui il sapere condiviso viene formalizzato ed espresso in codice matematico.

Il progetto rappresenta un segmento del percorso multidisciplinare presente nel curriculum della scuola e realizzato con una parte della quota opzionale dell'orario di lezione.

Conoscenze dichiarative e conoscenze procedurali:

#### **Misurazione indiretta**

- Le misurazioni arbitrarie
- La scoperta e l'uso delle misure convenzionali
- Il concetto di superficie
- Il concetto di volume

#### **Modalità di verifica e valutazione**

- 1- Prova oggettiva, Test di accertamento delle conoscenze
- 2- Osservazione situata con griglia: descrittori e indicatori di comportamento

### **3.3 situazioni laboratori**

#### **SPAZIO PIENO – SPAZIO VUOTO**

##### **Obiettivo specifico:**

comprendere che lo spazio che sembra vuoto contiene l'aria, che il vuoto si può creare solo riuscendo a togliere l'aria.

##### **Il gioco: IL MAGO COTONE**

Mago Cotone odia l'acqua al punto tale che riesce ad entrarvi dentro senza bagnarsi e sfida tutti a scommettere che riuscirà a farlo. Vuoi scommettere anche tu? Ma come farà mago cotone a non bagnarsi?

**La discussione e le ipotesi:** l'esperienza insegna che tutto ciò che entra in acqua si bagna, osservando i singoli casi si deduce che anche il cotone si bagnerà!

**L'esperienza:** fissiamo un batuffolo di cotone con del nastro adesivo sul fondo di un bicchiere.

Capovolghiamo il bicchiere e lo inseriamo dentro un recipiente trasparente in modo che si possa vedere che dentro il bicchiere rimane una bolla d'aria. Il cotone, fissato in alto, non si bagna.

**Conclusione:** è l'aria rimasta imprigionata nel recipiente ed impedisce all'acqua di entrare. Occorre che l'aria esca fuori se vogliamo far entrare l'aria.

**Nuova ipotesi:** se si buca la bottiglia l'aria esce dal buco e l'acqua prende il suo posto.

**Nuovo esperimento:** capovolghiamo una bottiglia di plastica con un piccolo taglio sul bordo, immerghiamo la bottiglia capovolta in una vasca piena d'acqua e notiamo che rimane l'aria imprigionata e il livello dell'acqua è uguale a dove arriva il taglio. Per far uscire l'aria prendiamo una pallina di plastilina e attraverso la plastilina, che fa da sigillo, facciamo un buco con l'ago di una siringa e aspiriamo l'aria. Si vede l'acqua salire e poi fermarsi quando lo stantuffo della siringa non si tira più. Togliamo la siringa e l'aria esce liberamente e l'acqua aumenta fino a quando il livello esterno e quello interno si equilibrano.

**Documentazione:** l'esperimento viene disegnato sul quaderno insieme alla narrazione.

##### **Riflessione del docente: stralci di discussione**

**Alunni:** “Se un oggetto non entra il recipiente è pieno di troppe cose e non ci va più niente”, “la scatola è piena di aria.”...Ogni tanto bisogna fare spazio... buttare fuori qualcosa...”

**Ins:** di cosa è piena la bottiglia vuota? Perché l'acqua non entra? Cosa bisognerebbe buttare fuori? ...”

---

<sup>13</sup> Vedi UMI 2001: nuclei di contenuto e nuclei di processo.

**Conclusione: l'acqua assume la forma del recipiente perché è un liquido ma per entrare deve cacciare via l'aria. L'aria è un gas, anche i gas occupano lo spazio intorno a noi.**

### COME LE MATRIOSKE

**Obiettivo:** comprendere che ogni oggetto è contenuto e contenitore e che quindi può essere un misuratore e può essere anche misurato.

**Il gioco/attività:** si cercano oggetti che possono stare uno dentro l'altro come le matrioske e le scatole cinesi. Si usano questi giochi come metafora di ciò che succede quando mettiamo un oggetto dentro l'acqua che a sua volta sta nel recipiente che sta nello spazio della stanza.....

**La discussione e le ipotesi:** ci sono due spazi uno interno e l'altro esterno, fra questi spazi c'è lo spessore del recipiente. I volumi del recipiente sono 3 quale misuriamo e come lo misuriamo?

**L'esperimento- 1 :** misuriamo la vasca grande con il bicchiere e contiamo i bicchieri. Il bicchiere è l'unità di misura, la vasca si riempie fino all'orlo con 8 bicchieri d'acqua, possiamo dire che misura 8 bicchieri. Questo è il suo volume

**Esperimento- 2 :** facciamo una tacca sulla vasca col pennarello nero ogni volta che aggiungiamo un bicchiere così sappiamo che ogni tacca è un bicchiere. Nella vasca graduata arbitrariamente versiamo l'acqua di una bottiglia in modo da sapere qual è il suo volume in termini di bicchieri. ( un mediatore: il bicchiere)

Ripetiamo il percorso con la sabbia e il BAM e stavolta parliamo di  $\text{cm}^3$  e  $\text{dm}^3$ .

**Documentazione e divulgazione:** facciamo il resoconto dell'attività sul quaderno e leggiamo l'aneddoto di Archimede e la corona di Gerone.

#### **Riflessione del docente: snodi linguistici rilevanti**

Alunni: “.la sabbia è dentro la scatola e la pallina è dentro la sabbia, la scatola misura la sabbia che misura la pallina, come le matrioske, una dentro l'altra”

Ins.” in un certo senso!.... ma quante volte entra una pallina dentro la scatola?..”Alunni: “come nelle divisioni?.. “Ins: “sì, in un certo senso si può dire quante volte è contenuto, quante volte entra..si si può dire.” Alunno: “ Ma non si può dire quante volte puoi fare gruppi di palline?.... “

Alunno: “.... ma rimane spazio in mezzo, ci vuole una cosa a misura che aderisce come nei vestiti....”

**Il volume dell'acqua è anche la capacità del recipiente soltanto quando lo riempie tutto.**

### VESTITI SU MISURA :misurazione diretta e indiretta

**Obiettivo:** avviare all'uso dell'unità di misura convenzionale cogliendo relazioni di equivalenza.

**Attività di problem solving:** partiamo da alcune domande e lasciamo che i bambini discutano fra loro per almeno mezz'ora, poi raccogliere le ipotesi di soluzione e metterle alla prova effettuando esperimenti. **Devi misurare oggetti** regolari per esempio i solidi geometrici come ti organizzi? Bisogna veramente riempirlo tutto di sabbia? O basta prenderne le misure dell'altezza e ripeterne il primo strato tante volte? Con quali solidi lo puoi fare? Con la piramide? E il cono? O il cilindro?

**Le ipotesi:** dove si può si mettono i cubetti, dove non si può ( come il cono e la piramide) mettiamo dentro di nuovo la sabbia. Oppure, se sono duri, li mettiamo in acqua col cilindro graduato.

**L'esperimento:** i  $\text{cm}^3$  sono l'unità di misura per lo spazio interno ed esterno degli oggetti misurabili. La sabbia permette la misurazione indiretta degli oggetti irregolari.

#### **Riflessione del docente: snodi linguistici rilevanti**

“Grande come., più grande di . Meno grande di. Il più grande, grandissimo; fermiamoci sul comparativo di uguaglianza come ci ha insegnato la maestra Annamaria, ci vuole una relazione di uguaglianza fra due proprietà, fra due aggettivi,.. insomma a noi serve il “ tanto quanto” questa scatola ha lo spazio interno uguale a 20 cubetti del BAM

**Conclusione: non tutto si può misurare con i cubetti perché sono rigidi e non sempre si possono riempire di sabbia o buttarli in acqua, bisogna trovare un altro modo.**

### **RELAZIONI EQUIVALENTI**

**Obiettivo:** cercare e annotare in tutti i modi relazioni di equivalenza fra solidi e oggetti di uso comune.

**Attività:** gioco libero con scheda strutturata per registrare le situazioni di equivalenza che si scoprono.

**L’esperienza:** disponiamo lo stesso numero di cubetti in modo da fare diverse figure e diverse combinazioni. Cerchiamo di capire che avremo figure di volume equivalente se il numero dei cubetti è uguale. Mettiamo i solidi costruiti nel cilindro graduato per avere la verifica che forme diverse possono essere equivalenti che sono formate dallo stesso n° di  $\text{cm}^3$  perché spostano la stessa quantità di acqua, se si riempiono con la stessa quantità di sabbia....

**Conclusione:** è importante il passaggio dall’esperienza alla verbalizzazione corretta, alla fine dell’attività i bambini devono usare consapevolmente le frasi di equivalenza: due solidi sono equivolumetrici solo se si possono costruire con lo stesso n° di cubetti non importa la forma che assumono ( $\text{cm}^3$ )

**snodi linguistici rilevanti:** “ è come dire di cercare un valore uguale,.. no no è come dire di trovare uno spazio uguale, “ “. La mia figurina è preziosa vale almeno 3 delle tue?..”.. no, non è questa la relazione non è un’ attribuzione di valore come il panino che costa 1 euro eccc.. qui è lo spazio che deve essere uguale, stesso spazio, come la formina e la polpetta di sabbia...!

### **3.4 Le prove di verifica**

Sono tre le situazioni in cui l’insegnante si è soffermato ad osservare gli alunni lavorare da soli in gruppo e individualmente. Questi momenti possono considerarsi verifiche in itinere non finalizzate alla valutazione degli apprendimenti ma alla scoperta delle strategie che gli alunni mettono in atto quando pensano liberamente di fronte a un problema o un progetto. Rispetto a questi momenti di verifica sono state improntate le analisi a-priori dei comportamenti. I risultati sono serviti per la messa a punto di nuove situazioni didattiche.

#### **Prova A: progettare strategie di misurazione adeguate ad un oggetto irregolare**

Obiettivi della verifica: 1) capacità progettuali 2) lavoro di gruppo 2) conoscenza di strategie di misurazione indiretta degli oggetti.

**Consegna:** scoprire tutti i modi possibili di misurare lo spazio che occupa un oggetto irregolare a scelta del gruppo.

**Titolo del gioco/attività:** **A MODO MIO.** progettare e illustrare un modo che consenta la misurazione del volume di un oggetto attraverso l’uso di un mediatore ( acqua, sabbia, altro)

#### **Organizzazione della classe e fasi:**

i bambini sono divisi in gruppo e ognuno di loro ricopre un ruolo ( secondo la modalità del cooperative learning).

- **Fase di piccolo gruppo:** concordare un modo per misurare lo spazio occupato da un oggetto, progettare l’esperimento che ne dimostra la validità e infine proporlo al resto della classe.
- **La discussione collettiva:** invalidare le strategie degli altri gruppi e dimostrare l’efficacia della propria strategia.
- **Valutare la migliore strategia:** secondo parametri di valutazione condivisi: correttezza della misurazione, efficacia in ordine di tempo impiegato, utilizzo di misure non convenzionali, uso del mediatore più appropriato, originalità della strategia.
- **Confronto con i testi e con la storia delle misure:** ricercare in internet notizie sull’argomento attraverso i siti delle scuole e delle università. Cercare informazioni sulla storia delle Unità di Misura per scoprire i passaggi che conducono alla convenzione delle misure di capacità.

### Analisi a-priori delle strategie.

**S.1:** viene graduato un recipiente attraverso il metodo del bicchiere ( un bicchiere – una tacca). Si immerge l’oggetto nel recipiente e si rileva lo spostamento dell’acqua verso l’alto. si confronta la misura dello spostamento con la misura di una tacca-bicchiere e si rapporta l’oggetto al bicchiere dicendo che lo spazio occupato è equivalente a quello di x bicchieri:

**S.2:** si immerge l’oggetto in un recipiente pieno fino all’orlo di liquido /sabbia, si raccoglie l’acqua fuoriuscita e si misura attraverso un contenitore graduato che c’è in laboratorio. Si registra il termini di ml e poi si trasforma in cm<sup>3</sup>. alla fine si scrive il rapporto ( $x \text{ ml} = y \text{ cm}^3$ )

**S.3:** si prendono due recipienti uguali e graduati, nel si mette l’oggetto, nell’altro si mette acqua. Si travasa l’acqua in quello con l’oggetto fino a quando non raggiunge l’orlo. L’acqua che resta nel secondo recipiente equivale allo spazio occupato dall’oggetto.

**S.4:** conosciamo la capacità di un contenitore. Fissiamo l’oggetto nel fondo e riempiamo di acqua. travasiamo l’acqua utilizzata in un contenitore graduato e facciamo la sottrazione  
capacità del bicchiere – acqua versata = spazio dell’oggetto ( modello:  $A + B = C$  )

**S.5:** faccio il calco dell’oggetto e poi lo riempio di acqua misurando quella che entra.

**S.6:** (parzialmente errata) metto un recipiente con l’oggetto da misurare su una bilancia e ne azzerò il peso. Verso l’acqua e mi fermo quando il recipiente è pieno. Il peso dell’acqua corrisponde al volume dello spazio libero dentro il recipiente!.

**S.7:** (errata) metto l’oggetto in una scatola e dico che quello è lo spazio che occupa

**S.8:** (errata) prendo le misure dell’oggetto e faccio calcoli a caso ( somme, prodotti...)

**S.9:** (errata) metto i cubetti (BAM) uno sull’altro accanto all’oggetto cercando di occupare uno spazio quasi uguale! Conto i cubetti e faccio un calcolo approssimato.

**S.10:** disegno la sagoma dell’oggetto in diverse posizioni e ogni volta conto i quadretti che occupa, poi li sommo.

### Gli esperimenti proposti dai gruppi:

#### **-modellato: S.5**

l’acqua viene sostituita dalla plastilina e serve a fare il calco dell’oggetto, il calco viene riempito di sabbia..... ( metodo giudicato creativo ma poco efficace)



#### **-quale spazio?:S.4**

si decide di misurare il volume di una conchiglia, in questo caso poiché è un oggetto cavo si procede per differenza: l’acqua del recipiente – l’acqua che resta nella conchiglia!

( giudicata poco chiara, il gruppo non riesce a difenderla)

#### **-Traboccante: S.3:**

si prendono due bicchieri identici in uno si ripone l’oggetto l’altro si riempie d’acqua fino all’orlo. Poi lentamente si travasa l’acqua in quello con l’oggetto, quando sta per traboccare ci si ferma e si misura l’acqua rimasta da travasare. ( non male)



#### **-Prima e dopo: S.1:**

si prende il segno del livello prima di immergere l’oggetto e quello dopo. L’acqua in più corrisponde al volume dell’oggetto ( giudicato il migliore, semplice e veloce)

### Conclusioni :

durante la discussione emergono dei tentativi di strategie **S.8,9,10** che nel gruppo non riescono a passare,, vengono cassate come strategie che non portano a calcoli esatti. Concettualmente riceve più consensi

e viene ritenuta possibile, ma non certa, la strategia del calcolo approssimato ( a occhio) dei cubetti accanto all'oggetto. Pur considerata possibile viene abbandonata perché non fornisce dati oggettivi sulla misurazione.

in ognuno dei casi abbiamo fatto di tutto per avere qualcosa da misurare al posto dell'oggetto che non si può misurare, insomma un sostituto, che si adegua allo spazio del misuratore. Questo sostituto ( cubetto, sabbia, acqua,...) ha sicuramente lo stesso volume e sarebbe interessante scoprire se ha anche lo stesso peso. (misurazione indiretta)

**Prova B - individuale**

**Obiettivi della verifica:** 1) lessico specifico dell'argomento 2) Conoscenza dei contenuti specifici  
3) Capacità di formulare ipotesi

**Guarda le immagini e descrivi le fasi dell'esperimento, poi completa le domande.**



**Descrizione dell'esperimento condotto in classe:**

---

---

---

---

---

---

---

**Pensi che la sabbia fuoriuscita corrisponda allo spazio del pupazzino?    SI    NO**

**Se hai segnato NO spiega perché.....**  
.....

**Se dovessi proporre lo stesso esperimento quale tipo di materiale sceglieresti?**

**Liquido                                  polvere                                  gas                                  solido**

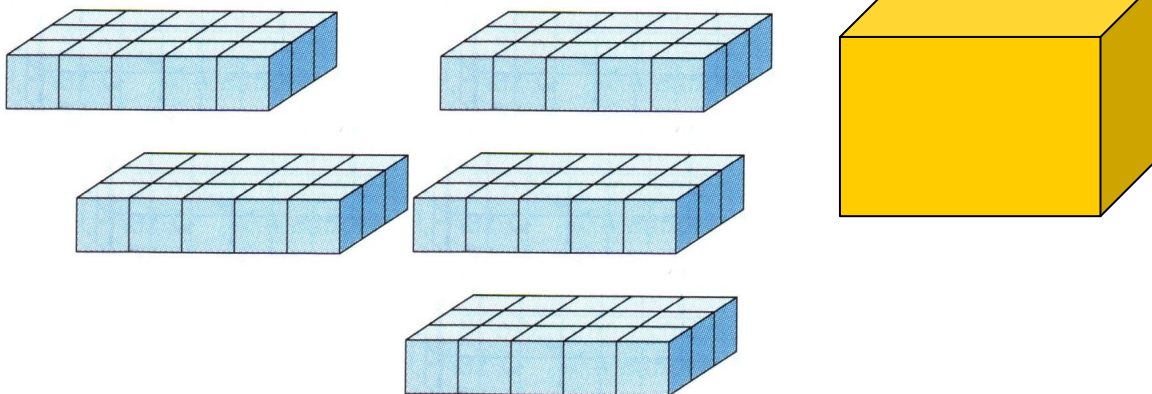
**Spiega perché: .....**



**Prova C sulla misura del volume**

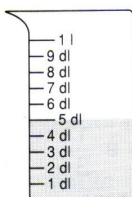
Tutti questi cubetti servono a riempire lo spazio interno della scatola gialla.

Sai dire quanti  $\text{cm}^3$  è il volume della scatola?..... Secondo te la scatola è un cubo? **SI**  
**NO**

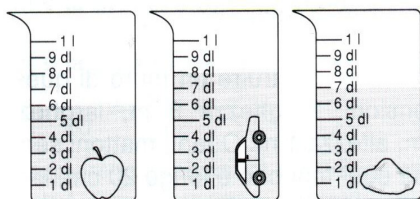


**Prova sulla correlazione fra volume e capacità<sup>14</sup>:**

In questo recipiente graduato vengono messi i seguenti solidi:



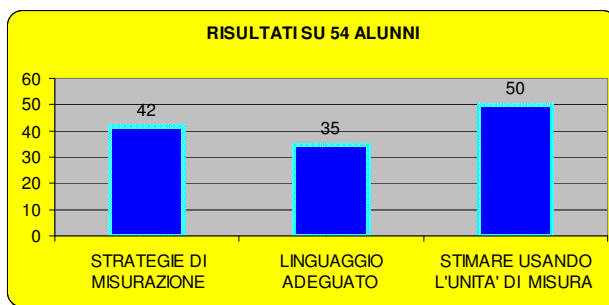
Rileva di quanto si è alzato il livello dell'acqua ogni volta e determina il volume di ciascun solido completando la tabella:



solido	di quanto si è alzato il livello dell'acqua?	volume del solido
mela		
macchinina		
sasso		

**3.5 analisi dei dati e valutazione**

La valutazione del percorso, attraverso la verifica e valutazione degli apprendimenti degli alunni, è molto positiva. Il progetto che mette insieme le misure di capacità e il volume degli oggetti comuni, si è rivelato vincente. I bambini non hanno dimostrato alcuna difficoltà nel considerare contestualmente i due aspetti dello stesso concetto. Anche l'uso di un campione convenzionale come in  $\text{dm}^3$  e i suoi sottomultipli è avvenuto in modo del tutto spontaneo e naturale. La scrittura delle regole e delle misure convenzionali viene demandata ai prossimi anni, per ora ci limiteremo a far passare i con-



<sup>14</sup> Questa prova non è stata somministrata, può essere usata in una classe quarta o quinta



cetti attraverso l’espressione verbale senza soffermarci a fare equivalenze scritte di formule o calcolare il volume dei solidi.

### 3.5 Riflessioni e conclusioni

Pensare la relazione fra i saperi consente applicazioni sempre nuove e creative di conoscenze e abilità, facilitando la loro trasformazione in competenze. Questo lavoro si conclude con un invito ad andare oltre i suggerimenti che seguono in un continuo fare e disfare creativo del sapere-strumento di crescita della “persona”.

- Misura diretta e misura indiretta: come si misura la distanza fra i pianeti? il volume di un frutto?...l’altezza di un albero?
- Volume come relazione fra spazio interno e spazio esterno: quanto spazio c’è dentro una conchiglia?
- I liquidi come mediatori nella misura dello spazio e nelle equivalenze: quanti  $\text{cm}^3$  di aria ci sono nella sabbia? E quanti  $\text{cm}^3$  di ossigeno al secondo consuma una candela?
- Progettare esperimenti che sfruttano la misurazione indiretta: di quanti gr si alleggerisce il peso di un oggetto immerso nell’acqua?
- I metodi per stabilire l’equivalenza di due solidi: equiscomponibilità, innalzamento di un liquido, la pesatura, confronto delle capacità, sezioni equivalenti..
- .....

### **Bibliografia**

- Brigaglia A. Indovina G. ( 2003), *Stelle, girandole ed altri oggetti matematici*. Tradizione e innovazione nell’insegnamento della geometria. Editore. Zanichelli
- Bartolini Bussi. (1991) *La discussione collettiva nell’apprendimento della matematica*. L’Insegnamento delle Matematiche e delle Scienze Integrate, delle scienze integrate, vol. 12(1989) n°1.
- D’Amore B. ( 2001) *Didattica della Matematica*. Pitagora Editrice Bologna.
- Fandino Pinilla M.I. Sbaragli S.(2001) *Matematica di base per insegnanti in formazione*. Pitagora Editrice Bologna.
- Di B. Di Paola, G. Manno, A. Scimone, C. Sortino. (Collana diretta da Spagnolo F., Bazzini L.) (2007), *La Geometria, Una guida ai suoi contenuti e alla sua didattica*. (vol. 4, pp. 1-140). ISBN: 978-88-6017-032-3. Collana "Insegnare Matematica". Palermo: Palumbo (Italy).
- Freudenthal H. ( 1994 ) *Ripensando l’educazione matematica*. A cura di Carlo Felice Manara. Editrice La Scuola.
- Gattuso L. (2001) *Fait-on ce qu’on pense quand on enseigne des mathématiques?*. Edition Bande Aidactique.
- Grugnetti L. Villani V.(1999 ) *La Matematica dalla scuola materna alla maturità*. Pitagora Editrice Bologna.
- Pesci A.(2002) *Lo sviluppo del pensiero proporzionale nella discussione matematica*. Pitagora Editrice Bologna.
- Petter G. (2006) *Il mestiere di insegnante*. Giunti Editore, Firenze.
- Spagnolo F. (2000) *Insegnare la matematica nella scuola secondaria*. Editrice La Nuova Italia, Firenze.
- Spagnolo F. et alii (2009), L’epistemologia sperimentale delle Matematiche, *Quaderni di Ricerca in Didattica (Sezione Matematica)*, Supplemento n.1 al n.19, ISSN 1592-4424, [http://math.unipa.it/~grim/quaderno19\\_suppl\\_1.htm](http://math.unipa.it/~grim/quaderno19_suppl_1.htm)