"Quaderni di Ricerca in Didattica" N.2, 2019
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

L'angolo giro non esiste!

Alfio Grasso
Università degli Studi di Palermo

E-mail: grassoalfino@yahoo.it

Riassunto
In questo articolo si evidenziano alcune contraddizioni originate dalla nozione di angolo come parte di piano. Esse sono dovute, in parte a una terminologia imprecisa, in parte alla confusione tra angolo e sua misura, e anche alla difficoltà intrinseca della nozione. Ciò comporta che la somma di due angoli non è sempre definibile e che non ha senso parlare di multipli e misure di angoli.
In esso viene inoltre provato che l'angolo giro non esiste, cosicché le dimostrazioni dei teoremi che lo utilizzano sono prive di significato.
È poi presentato un possibile percorso che consente di superare le incongruenze segnalate ed è coerente col celebre *Programma di Erlangen* di Klein (1872) - che si fonda sull'uso delle Trasformazioni del piano.

Definizioni

Iniziamo, naturalmente, da Euclide, che, nel IX dei Termini degli *Elementi*, scrive:
«Angolo piano rettilineo è l'inclinazione reciproca di due linee rette sul piano, le quali s'incontrino e non giacciano in linea retta».
È innanzitutto opportuno notare che quella euclidea, più che una definizione, è una *descrizione* che serve a rendere riconoscibile l'ente in oggetto mediante una soddisfacente nomenclatura. Come definizione è autoreferenziale - non è stata definita "l'inclinazione reciproca" di due rette - esclude l'angolo nullo e quello piatto e si limita agli altri angoli convessi.
In seguito, Apollonio, Pappo, Proclo e successivamente altri ne dànno varie definizioni anch'esse non chiare.
Nel 1667 Arnauld, teologo e filosofo più che matematico, prospetta l'angolo come "parte di piano". Questa definizione, è avversata fortemente, per le incongruenze che comporta, da matematici come Clairaut nel 1741 e nel 1892 da Veronese, secondo cui «l'angolo è una parte del fascio di semirette cui appartiene (questa visione può favorire l'introduzione dell'angolo come rotazione dal punto di vista intuitivo).
Nel 1899 Hilbert pubblica i *Fondamenti della geometria*, una versione riveduta e corretta nei, degli *Elementi* per renderli completi; infatti:

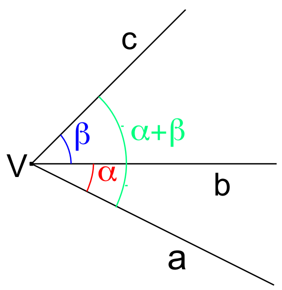
- Leibniz aveva scoperto che neppure la Proposizione 1 del I Libro degli *Elementi* si può dedurre dai cinque assiomi euclidei;
- Schopenhauer aveva provato che da essi non derivava la Proposizione 4 del I Libro, che comunemente chiamiamo il Primo criterio di congruenza dei triangoli.

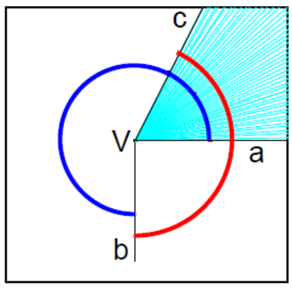
Nei *Fondamenti* il genio di Könisberg dà la seguente definizione:
«Dato un qualsiasi piano α chiamiamo angolo il sistema di due semirette **distinte** di α, (h,k) o (k,h), uscenti da un stesso punto O, che appartengono a rette diverse».
Anche tale visione – astratta - esclude l'angolo nullo e quello piatto.
Allora, la definizione di Arnauld è **una** tra le tante, e, riguardo agli inspiegabili motivi della sua persistenza tutt'oggi, sono illuminanti le parole del professore G. Prodi:
«La matematica deve conservare i suoi risultati fondamentali, ma finisce spesso **per prolungare certi abiti mentali** al di là del loro limite naturale di sopravvivenza».

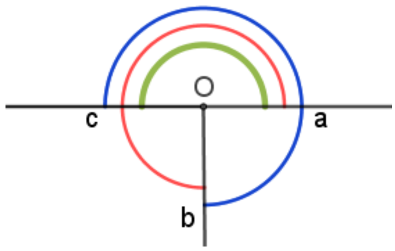
Concludo questa parte relativa alle definizioni con un'osservazione di carattere linguistico.

Il termine angolo deriva dalla radice indoeuropea "ank" che significa curvare, piegare. Ma curvare dalla "retta" via verso sinistra non produce lo stesso effetto che ruotare a destra: sembra che l'angolo nasca "naturalmente" orientato; così infatti lo introduciamo in goniometria.

Angolo somma di due angoli.
È definito **solo** quando essi sono consecutivi, cioè hanno un **solo** lato comune. É presentato sempre con angoli "piccoli" e ordinati (prima figura) – *come se fossero orientati* - cosicché si possono realmente addizionare. Ma angoli "abbastanza grandi" come aˆb e bˆc (seconda figura), hanno l'angolo aˆc in comune: non si possono addizionare.
Allora, se consideriamo il multiplo secondo il numero 2 dell'angolo concavo aÔb, dobbiamo addizionare ad aÔb l'angolo concavo bÔc a esso congruente (terza figura): ma tale operazione è impossibile perché i due angoli **non** sono consecutivi avendo in comune l'angolo piatto aÔc quindi: non ha senso parlare di multiplo di un angolo, né, conseguentemente, di una sua misura.

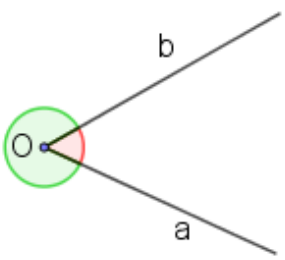


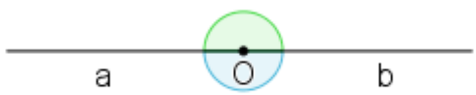




L'insieme degli angoli non costituisce una classe di grandezze omogenee.
La definizione di Arnauld comporta quindi della criticità.

Mi prendi in….. *giro?*!
Occupiamoci ora del *cosiddetto* angolo giro.
Se esistesse, sarebbe convesso o concavo a seconda della definizione di convessità usata. Infatti, se diciamo convesso un angolo in cui il segmento che congiunge due qualsiasi suoi punti è sottoinsieme dell'angolo, risulta convesso. Se invece chiamiamo convesso un angolo che non contiene i prolungamenti dei suoi lati, è concavo, perché l'angolo giro li contiene.
Inoltre: **nessuna** coppia di angoli ha per somma l'angolo giro: né per semirette generiche (a sinistra), né coincidenti (al centro), né opposte (a destra).





Infatti, in entrambi i casi gli angoli da addizionare **non** sono consecutivi poiché **hanno in comune due** lati – **a** e **b** – *non uno solo*: **non** si possono quindi addizionare.
Invece, si dice che la loro somma è l'angolo giro, cioè tutto il piano, che sarebbe così la somma di due angoli piatti.

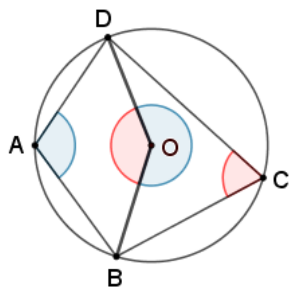
Si "dimostrano" poi, servendosi dell'angolo giro, alcuni teoremi, tra i quali:

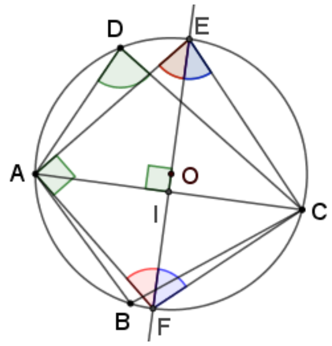
1. *La somma degli angoli interni di un poligono (convesso) di n lati è uguale a n-2 angoli piatti.*

Allora, se consideriamo un ennagono, l'angolo somma sarebbe sette angoli piatti, cioè, tre piani più un semipiano, tre piani più…mansarda?! Così l'angolo somma è, per definizione una parte di piano, e, in forza del "teorema", ha come sottoinsieme proprio il piano stesso: **ciò è assurdo**.
Questa contraddizione deriva dalla confusione tra angolo e sue misure.

2. *In un quadrilatero inscritto in una circonferenza gli angoli opposti sono supplementari.*

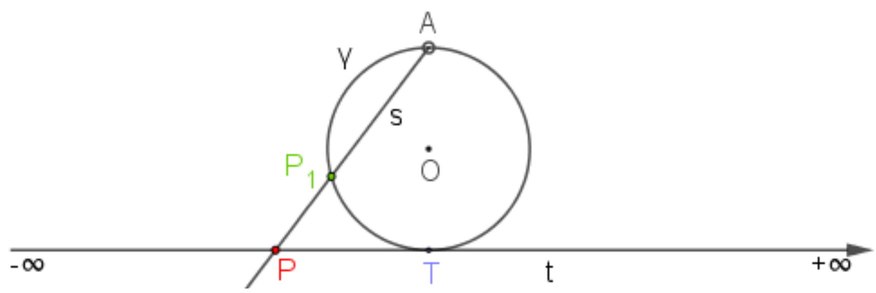
La "dimostrazione" riportata in molti libri è illustrata nella figura sopra a sinistra. L'angolo $B\hat{A}D$ è metà dell'angolo concavo $B\hat{O}D$ e $B\hat{C}D$ metà dall'angolo convesso $B\hat{O}D$: poiché la somma degli angoli in O "è" l'angolo giro, $\hat{A}+\hat{C}$ è uguale a un angolo piatto.





Ma gli angoli in O **non** sono consecutivi avendo due lati comuni, quindi <u>la loro somma non ha senso</u>!
A destra è delineata una semplice dimostrazione che si ottiene in virtù della simmetria di una circonferenza rispetto a ogni retta per il suo centro, considerando l'asse di una delle diagonali, nella figura di AC.
Il cosiddetto angolo giro presenta quindi delle incoerenze.

Per dimostrare che l'angolo giro non esiste premettiamo il seguente teorema della Teoria degli insiemi, di immediata intuizione che:
<u>Se A è un insieme infinito e B un insieme finito o numerabile disgiunto da esso, allora gli insiemi A e A ∪ B sono equipotenti</u>.
(Agli studenti si può fare il seguente esempio chiarificatore. Siano dati N-{0} ed N; assegniamo la funzione f: N-{0} → N tale che ∀ m ∈ N-{0} associa n ∈ N \ n=m-1: f stabilisce una corrispondenza biunivoca tra N-{0} ed N).
Siano γ una circonferenza di centro O, t la tangente in un suo punto T e A il simmetrico di T rispetto a O (figura).
Dimostriamo che esiste una funzione biiettiva f: t → γ-{A}.

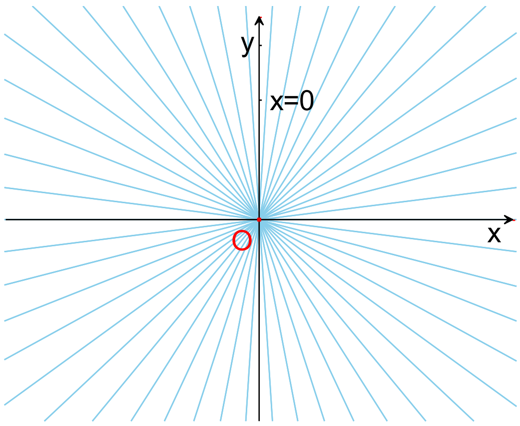


Sia P_1 un qualunque punto di $\gamma \neq A$ ed s la semiretta AP: f associa a P_1 il punto di t $P=s \cap t$.
Poiché c=c-{A}∪{A}, con {A} finito e disgiunto da c-{A}, per il teorema segnalato, c e t sono equinumerosi:

Ogni circonferenza ha cardinalità di R, cioè del continuo.

Proviamo ora che l'angolo giro non esiste.
Siano date una circonferenza c e il fascio di semirette di centro O. Detti A un punto assegnato di c e B uno *qualunque* su essa, è individuato l'angolo AÔB (figura).
Se B≡A, AÔB è l'angolo nullo. Al variare di B, l'angolo AÔB descrive, **riempie**, il piano in forza della cardinalità della circonferenza, cioè di R. Nessuna semiretta *generica* OB coincide con OA: **l'angolo giro non esiste!**

È interessante notare che **tutti** noi insegnanti di matematica abbiamo utilizzato **sempre**, "a nostra insaputa" questa proprietà.
Infatti, sia Φ il fascio di rette di centro un punto O.
Esso descrive, **riempie** tutto il piano. Consideriamo un riferimento cartesiano di origine O. C'è una corrispondenza biunivoca tra le rette di Φ e le equazioni ax+by=0, con a e b non contemporaneamente nulli. Se b=0 l'equazione associata è x=0, cioè l'asse y; per b≠0 la retta generica di Φ presenta equazione y= $\left(-\frac{a}{b}\right)$ x, che indichiamo con y=m·x, con m ∈ **R**: **non esiste** alcuna retta generica che si sovrappone all'asse $\vec{y}$.



Per superare le incoerenze originate dalla definizione di angolo come parte di piano, si può adottare l'assetto esposto da Choquet al *Congresso internazionale di Royamont* del 1959 e pubblicato ne *L'insegnamento della geometria* nel 1964.
La trattazione si fonda sulle proprietà dei Gruppi di trasformazioni del piano, secondo l'indirizzo tracciato dal celebre *Programma di Erlangen* di da Klein (1872) e fatto proprio dalla comunità matematica. In esso Klein realizza una sintesi creativa delle geometrie parabolica, iperbolica, ellittica e proiettiva:
Una geometria è lo studio delle proprietà che rimangono invariate quando si sottopone il piano (lo spazio) a un gruppo di trasformazioni.
La sistemazione di Choquet presenta **sette** assiomi – oltre **venti** quelli di Hilbert – semplici, intuitivi ma **forti**, cioè che consentono di scoprire sin dall'inizio proprietà interessanti. Permette d'introdurre al primo anno di superiore la geometria analitica che, oltre a essere utile ai colleghi di fisica, risulta interessante per gli studenti per il suo aspetto grafico.
E ancora, l'impostazione di Choquet consente di presentare esempi di gruppi non numerici, i quali sono abeliani. Infine, nel prosieguo degli studi, dà la possibilità di evidenziare un'unitarietà della matematica che spesso viene sottaciuta. Infatti, se chiamiamo I il gruppo delle isometrie, S quello delle similitudini, A il gruppo delle affinità e P quello delle proiettività, I□S□A□P, come Z□Q□R□C.

L'impianto di Choquet è stato utilizzato negli interessanti libri di testo:
Geometria Elementare di Morin e Busulini, *Il metodo matematico* di Lombardo Radice e Mancini Proia, *La scoperta matematica* di Prodi.
Choquet definisce rotazione: l'isometria che ha un solo punto unito o l'identità. (Didatticamente è opportuno introdurre la nozione di rotazione segnalando all'inizio esperienze abituali: ruota, orologio, giostra, tergicristalli, radar, pale eoliche, e così via. Inoltre, è fondamentale un'attività "pratica" in classe, con l'uso di schede predisposte).
Chiama angolo di due semirette **a** e **b** nell'ordine, di comune origine O, la rotazione di centr
Chiama angolo di due semirette **a** e **b** nell'ordine, di comune origine O, la rotazione di centro O che trasforma **a** in b, in un dato senso.
In particolare, l'assioma di misura degli angoli soddisfa le proprietà di linearità e monotonia caratteristiche della misura e rende coerenti geometria e goniometria.

Assioma di misura degli angoli
È data una funzione suriettiva di R sul gruppo abeliano $(A,+)$ degli angoli tale che:
A ogni numero reale **r≥0** è associato un angolo **α(r)**, di cui **r** è detto misura, tale che l'angolo corrispondente alla somma di due qualsiasi numeri reali **x** e **y** è la somma degli angoli immagini di **x** e **y**:

$$\boldsymbol{\alpha(x+y)=\alpha(x)+\alpha(y)}.$$

La linearità di questa misura è nell'assioma, e la monotonia si ottiene, facilmente, come segue.
Siano **x** e **y** ∈ **R** tali che: **x>y**; allora: ∃ **z** ∈ **R** \ **x=y+z**. Quindi: **α(x)=α(y+z)**; ma per la linearità **α(y+z)= α(y)+α(z)**, dunque, in definitiva **α(x)=α(y)+α(z)**. Allora:
da **x>y** segue che **α(x)> α(y);** ciò assicura la monotonia della misura degli angoli.

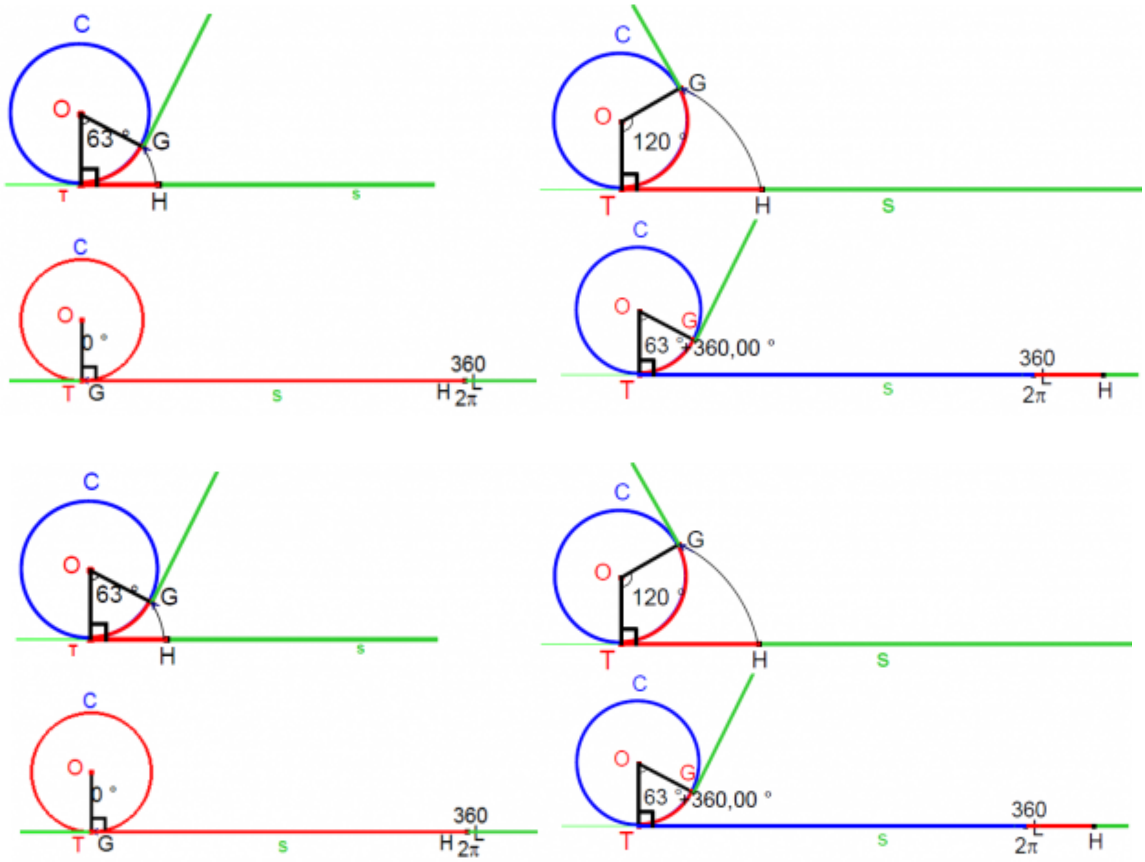
La coerenza tra geometria e goniometria, si può poi ottenere dalle seguenti osservazioni.
Se p è il numero reale cui si associa l'angolo piatto, α(2p) è l'angolo nullo; quindi, ∀ k ∈ Z, α(2pk) è l'angolo nullo. Infatti:

$$\alpha(2pk)=\alpha(2p)+\alpha(2p)+\ldots.+\alpha(2p).$$
$$1, \quad 2, \ldots\ldots\ldots, k$$

Detto allora x_0 un numero reale, con $0\leq x_0<2p$, per l'additività della misura:
$\alpha(x_0+2pk)=\alpha(x_0)+\alpha(2pk)=\alpha(x_0)$; allora: ogni numero reale x_0+2pk è una misura di $\alpha(x_0)$.
Un angolo ha quindi infinite misure, congrue tra loro rispetto al modulo 2p. E infatti, in goniometria, se consideriamo a esempio le equazioni sen$x=1/2$ e cos$x=\sqrt{2}/2$, esse hanno in radianti rispettivamente per soluzioni:

- sen$x = 1/2$: $x=\pi/6 + 2k\pi$ vel $x=5/6\,\pi+2k\pi$, con k ∈ Z;
- cos$x=\sqrt{2}/2$: $x=\pm\pi/4 +2k\pi$, con k ∈ Z.

Nessuno di noi docenti ha mai detto che per k=1 *x* è la misura dell'angolo giro, né che per k=2 *x* e la misura dell'angolo due giri, e così via: l'angolo giro "muore naturalmente" in goniometria.
L'assioma si può chiarire mediante gli esempi del calcolo del giro vita o di una semiretta che si "avvolge" su una circonferenza (ho ottenuto le figure sotto con Cabrì circa venticinque anni addietro: un software dinamico è molto più esplicativo delle immagini).



Nelle figure precedenti il punto L di s è quello per cui il segmento TL avvolge in senso antiorario l'intera circonferenza. Se associamo a L il numero 360, diciamo che l'angolo orientato TÔG, individuato dall'arco $\widehat{(TG)}$, è misurato in gradi sessagesimali; se invece $\overline{(TL)}$ =2π - lunghezza della circonferenza di raggio unitario - la misura si dice espressa in radianti.

Torniamo alle misure degli angoli:

- In radianti, posto $0 \leq x_0 < 2\pi$, ogni misura è $x = x_0 + 2k\pi$, con $k \in Z$.
- In gradi sessagesimali, posto $0° \leq x_0° < 360°$, ogni misura è $x° = x_0° + k360°$, con $k \in Z$.

Concludo chiedendo se non sia opportuno (necessario) che noi docenti modifichiamo metodologia e didattica così da rendere coerenti le nozioni introdotte, e altrettanto facciano i redattori dei libri di testo. E che Istituzioni le cui finalità sono la valorizzazione ed il progresso dell'insegnamento della matematica, segnalino le incongruenze rilevate e contribuiscano a un loro superamento.

Bibliografia

Arnauld, A. (1967). *Nouveaux Élémens de Géométrie*, Deprez, Guillaume & Cavalier, Pierre
Choquet, G., & Pescarini, A. (1969). *L'insegnamento della geometria*. Feltrinelli.
Frajese, A., & Maccioni, L. (Eds.). (1970). *Gli elementi* (Vol. 14). Unione tipografico-editrice Guillaume fils, Paris, 142.Hilbert, D., Bernays, P., & Canetta, P. (1970). *Fondamenti della geometria*. Feltrinelli.
Lolli, G. (2008). *Guida alla teoria degli insiemi*. Springer Science & Business Media.
Lombardo Radice , L, Mancini Proia, L. (2000). *Il Metodo matematico Vol. 1*, 210-211.
Prodi, G. (1977). *Matematica come scoperta*, Guida per vol. II - con il contributo dei Nuclei di Ricerca Didattica di Pisa, Pavia e Trieste, Firenze, Messina: Casa Editrice D'Anna.