Laboratorio di Geometria ed Arte: Tassellazioni e Gruppi di Tassellazioni

Cinzia Cerroni
Università degli Studi di Palermo

E-mail: cinzia.cerroni@unipa.it

Sommario. Nel lavoro è presentata l’esperienza di un percorso laboratoriale svolto in un istituto di istruzione secondaria nel quale si sono costruite, facendo uso di un software di geometria dinamica, le tassellazioni uniformi e i mosaici.

Abstract. The paper presents the experience of a laboratory course carried out in a secondary education institute in which uniform tessellations and mosaics were constructed using dynamic geometry software.

1. Introduzione

Nel seguito viene presentata un’attività laboratoriale della durata di 15 ore che si è svolta come PCTO presso il *Liceo Scientifico Benedetto Croce* di Palermo. Il percorso è stato svolto da un esperto universitario affiancato da due insegnanti di scuola secondaria come tutor.
Il laboratorio ha riguardato un’attività interdisciplinare tra matematica ed arte che prevede lo studio e la costruzione delle tassellazioni uniformi e dei mosaici, ispirandosi ai mosaici presenti nei monumenti della città, in particolare quelli della *Cappella Palatina.*
L’impostazione didattica si è ispirata al *Programma di Erlangen*, proposto nel 1872 da Felix C. Klein (1849, 1925), dove fu esposta per la prima volta la definizione di geometria in senso moderno, cioè come studio delle strutture geometriche a partire dai gruppi che vi agiscono. In particolare, le tassellazioni e i mosaici sono stati introdotti e costruiti facendo uso dei gruppi di trasformazioni geometriche che vi agiscono. Le costruzioni sono state svolte facendo uso del software di geometria dinamica Geogebra che ha permesso di realizzare il percorso definendo le trasformazioni geometriche (isometrie) attraverso le proprietà caratterizzanti e mostrando come agiscono. Le metodologie didattiche utilizzate sono state quella laboratoriale, del problem solving, e del cooperative learning.

2. Il percorso laboratoriale

2.1 Prima Fase: introduzione delle isometrie

Nel primo incontro sono state introdotte le isometrie (Dedò, 1996) facendo uso di schede didattiche che ne evidenziano le proprietà caratterizzanti e usando gli strumenti presenti in Geogebra. Le schede sono strutturate in modo che lo studente prima costruisca la figura corrispondente nell’isometria applicando la definizione e poi verifichi la costruzione attraverso il corrispondente comando di Geogebra. Gli studenti hanno lavorato in gruppi di due o tre nel laboratorio di informatica.
Si riporta in appendice la scheda riguardante la rotazione, in senso esemplificativo. Successivamente alla presentazione della scheda si è proposto il seguente esercizio con la finalità di verificare la comprensione della definizione:
Disegna un poligono e determina il suo corrispondente mediante una rotazione di 90° attorno ad un punto, costruendo i punti corrispondenti. Verifica con il comando rotazione, che è una rotazione di 90° e che si può ottenere componendo due rotazioni di 45°.

2.2 Seconda fase: le tassellazioni uniformi

Nel secondo e nel terzo incontro sono state introdotte le Tassellazioni Regolari ed Uniformi (Dedò, 2000) ispirandosi al *Programma di Erlangen* (1872) di Felix C. Klein. Ricordiamo che una tassellazione uniforme è una famiglia di poligoni (dette facce) che ricoprono il piano tali che: a) tutte le facce sono poligoni regolari (non necessariamente uguali fra loro); b) Da ogni vertice esce lo stesso numero di spigoli. Se le facce sono poligoni regolari tutti uguali fra loro la tassellazioni si dice regolare. Le tassellazioni uniformi sono 8 (cfr. Fig.1) e le tassellazioni regolari sono 3 (triangoli, quadrati, esagoni).

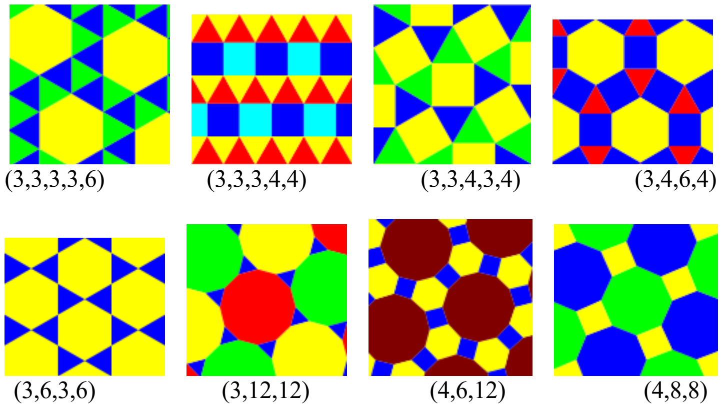


Figura 1

Le tassellazioni uniformi si possono riprodurre attraverso il parallelogramma di base agendo con le traslazioni o attraverso il disegno minimo agendo con le isometrie. Proprio in questa costruzione delle tassellazioni attraverso le isometrie che si applica il metodo del *Programma di Erlangen.* Gli studenti hanno quindi avuto il compito di creare e riprodurre le tassellazioni partendo dalla figura minima e completandole con l'applicazione delle necessarie isometrie. Queste attività sono state svolte in gruppi e al computer usando il software di geometria dinamica Geogebra. Gli studenti hanno compreso le proprietà matematiche delle tassellazioni, che consentono quindi di riprodurle in modo perfetto. A titolo esemplificativo si riportano in appendice le schede delle tassellazioni (3,3,4,3,4) e (4,8,8).

2.2 Terza fase: i mosaici e i gruppi cristallografici

Nel terzo e nel quarto incontro si sono introdotti i mosaici attraverso i loro gruppi di simmetria portando al culmine l'approccio dello studio della geometria, in questo caso dei mosaici, attraverso l'azione dei gruppi secondo il *Programma di Erlangen*. Ricordiamo che E.S. Federov, nel 1891, dimostrò che ci sono 17 mosaici del piano, ciascuno corrispondente a uno dei 17 gruppi cristallografici (Catastini & Ghione, 2011) che agiscono come gruppi di simmetria. Tale classificazione è stata resa nota dal matematico G. Polya nel 1924. I 17 gruppi cristallografici si identificano come segue (cfr. Fig.2):

- Il primo simbolo può essere una "p" oppure una "c" (c evidenzia la presenza di un centro di simmetria o di un asse diverso dall'asse x);
- Il secondo simbolo è un numero, che rappresenta l'angolo della rotazione in grado di sovrapporre due disegni minimi: se è 1 non ci sono rotazioni; se è 2, 3, 4, 6 ho rotazioni di angoli $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/6$
- il terzo simbolo è una "m", una "g" o un "1". "m" significa presenza di una riflessione, "g" presenza di una glissoriflessione, "1" l'assenza di entrambe, in direzioni ortogonali all'asse x;
- il quarto simbolo è una "m", una "g" o un "1". "m" significa presenza di una riflessione, "g" presenza di una glissoriflessione, "1" l'assenza di entrambe, in direzioni non necessariamente ortogonali all'asse x.

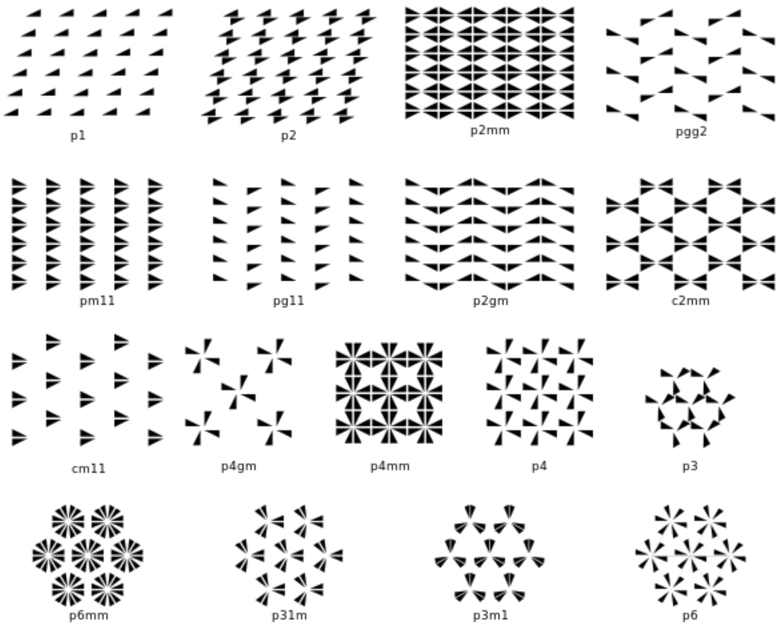


Figura 2

Gli studenti, attraverso le schede di lavoro, hanno costruito i mosaici corrispondenti ai 17 gruppi cristallografici, riconoscendo il disegno minimo e individuando le isometrie con le quali ricavare a partire da esso, il parallelogramma di base. Tra i mosaici costruiti alcuni rapprentano i decori dell'Alahambra a Granada (Spagna). Queste attività sono state svolte in gruppi e al computer usando il software di geometria dinamica Geogebra. L'analisi, lo studio e la costruzione dei mosaici hanno messo in campo capacità di problem solving degli studenti attraverso la didattica laboratoriale e l'apprendimento collaborativo. A titolo esemplativo si riporta in appendice la scheda di mosaici p4g, pm, e cmm.

3. La ricerca delle tassellazioni e dei mosaici in città

La seconda parte del percorso ha riguardato una visita guidata in città alla ricerca delle tassellazioni e dei mosaici presenti nelle pavimentazioni e nelle opere d'arte. In particolare, ci si è recati alla *Capella Palatina.* È proprio qui, nei mosaici palermitani in cui gli Arabi sono stati straordinari maestri, che la Matematica nascosta nell'arte siciliana si svela agli studenti in tutta la sua bellezza nelle più varie tassellazioni geometriche. Gli studenti hanno fotografato e riprodotto in Geogebra alcuni di questi mosaici (cfr. fig.3), per poi creare delle magliette con queste immagini, insieme alla professoressa di arte. Quest'attività ha avuto tra l'altro lo scopo di mostrare come la matematica sia presente nella vita di tutti i giorni e che attraverso la classificazione e le proprietà, geometriche in questo caso, ci aiuti a comprendere il mondo circostante.

Figura 3

4. Conclusioni

Il percorso svolto attraverso l’uso dei contenuti matematici come strumento per la comprensione e dell'opera d 'arte, la natura interdisciplinare dell'argomento trattato e l'impiego in laboratorio del software di geometria dinamica hanno destato negli studenti notevoli livelli d'interesse e coinvolgimento anche per i contenuti matematici più astratti o di natura puramente teorica.

Bibliografia

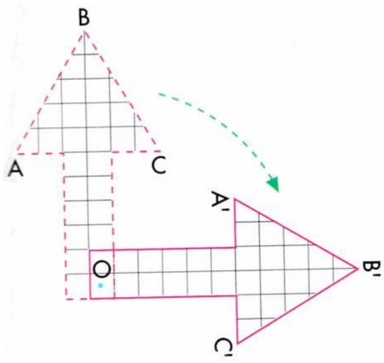
Catastini, L. & Ghione F. (2011). *Matematica e Arte. Forme del Pensiero Matematico.* Collana Convergenze. Springer.
Dedò, M., (1996). *Trasformazioni geometriche. Con una introduzione al modello di Poincaré.* Zanichelli.
Dedò, M., (2000). *Forme, Simmetria, Topologia*, Zanichelli.

Appendice

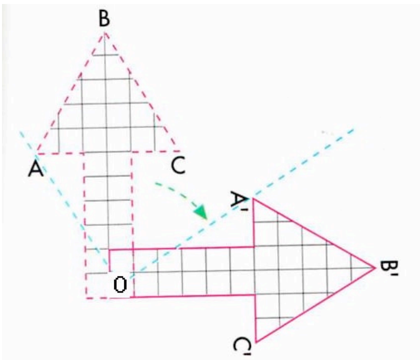
Scheda Rotazione

La rotazione

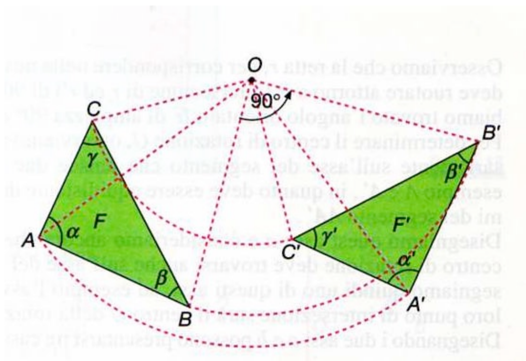
Si dice rotazione il movimento rigido individuato da un punto fisso O, detto centro di rotazione, e da un angolo orientato che stabilisce l’ampiezza e il verso di spostamento nel piano.



Ogni coppia di semirette che congiunge il centro di rotazione con i punti corrispondenti forma angoli uguali la cui ampiezza indica l’ampiezza della rotazione.



Fissato l’angolo e il centro di rotazione, per disegnare in F’ il punto A’, corrispondente del punto A nella figura F, si punta il compasso in O e con apertura uguale al segmento OA si descrive in senso orario (o antiorario) un arco corrispondente all’ampiezza dell’angolo.



Una rotazione stabilisce tra i punti del piano una corrispondenza biunivoca che dà origine a una isometria. Il centro di rotazione può essere interno o esterno alla figura.

Scheda Tassellazione (3,3,4,3,4)

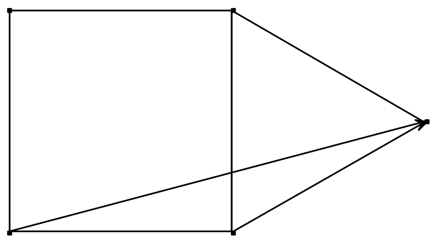
a) Costruisci un quadrato con il comando poligono regolare;

b) Costruisci un triangolo equilatero sul lato destro (guardando la figura) del quadrato (utilizza la scheda triangolo equilatero);

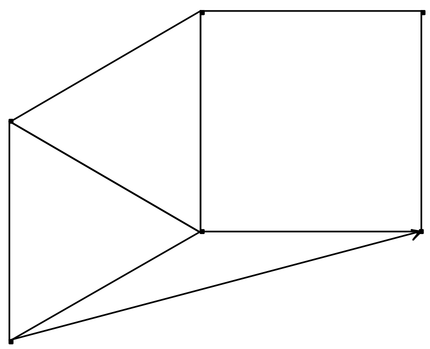
c) Fai una simmetria assiale del quadrato rispetto alla base;

d) Fai una simmetria assiale del triangolo rispetto al lato;

e) Fai una traslazione del quadrato di vettore che va dal vertice di base del quadrato al vertice del triangolo (come in figura).



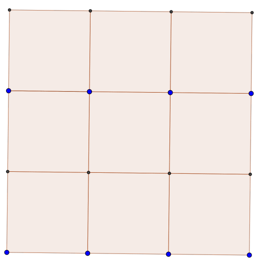
f) Fai una traslazione del triangolo di vettore (si trova nella seconda casella del menù) che va dal vertice di base del triangolo al vertice base dell’altro quadrato (come in figura).



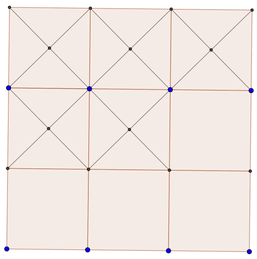
g) prosegui facendo traslazioni e simmetrie assiali, otterrai una pavimentazione del piano.

Scheda Tassellazione (4, 8, 8)

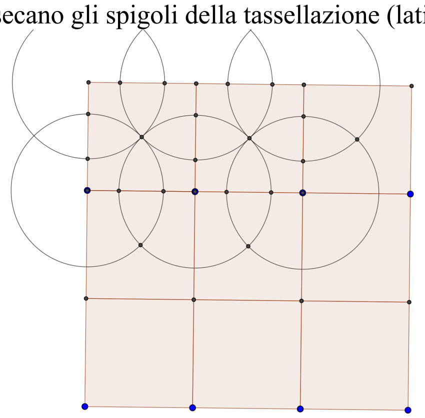
1) Costruisci la tassellazione regolare (4, 4);



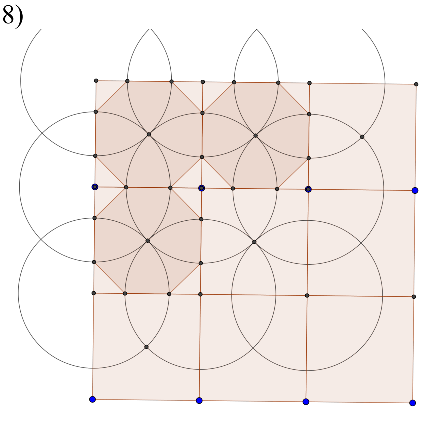
2) Traccia i centri delle facce della tassellazione (4,4);



3) Traccia le circonferenze di centro un vertice della tassellazione e passanti per un centro della faccia. Queste circonferenze intersecano gli spigoli della tassellazione (lati dei quadrati) in punti che sono i vertici dell'ottagono regolare;

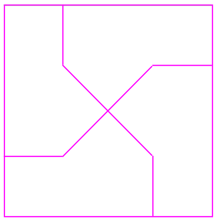


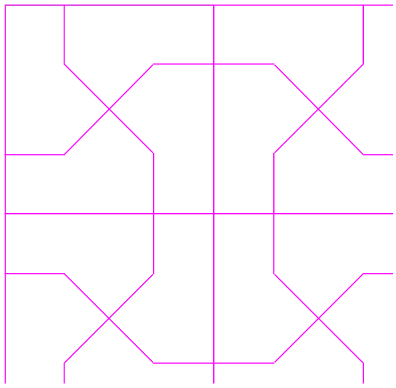
4) Unisci i punti individuati, otterrai degli ottagoni regolari e i corrispondenti quadrati, ovvero la tassellazione (4, 8, 8)



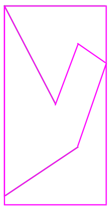
Scheda mosaici e gruppi cristallografici

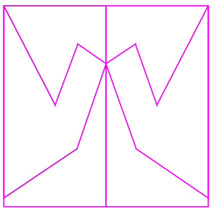
1) Riproduci la tassellazione p4g che ha come disegno minimo, elencando le isometrie utilizzate:

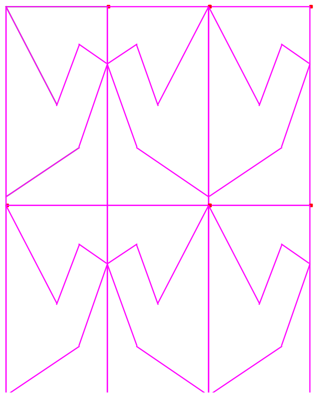




2) Riproduci la tassellazione pm che ha come disegno minimo, elencando le isometrie utilizzate:







3) Riproduci la tassellazione che ha come disegno minimo, elencando le isometrie utilizzate: