"Quaderni di Ricerca in Didattica" (Scienze Matematiche), n18, 2008.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

L'esperienza del Progetto Lauree Scientifiche: alcuni risultati nel solco di un approccio semantico

G. GENTILE [*]

Sommario. *Partendo dal dato allarmante che sancisce una diminuzione del numero di studenti nelle Facoltà Scientifiche, in particolare in Matematica, l'autore vede nell'alta formalizzazione da una parte un traguardo dell'attività di ricerca, dall'altra un ostacolo nella fase di approccio. L'ipotesi proposta, basata su un recupero della parte "semantica" della Matematica, è stata sperimentata su un campione selezionato di studenti di Scuole Superiori, all'interno di un più vasto progetto biennale nazionale. I risultati del primo anno, che vengono qui presentati e discussi, mostrano la presenza negli studenti di preconcetti, che limitano la stessa comunicazione didattica, e confermano che l'approccio scelto può essere una via per superare tali preconcetti ottenendo negli studenti un cambiamento di visione della Matematica; è proprio tale cambiamento che potrebbe rivelarsi la carta vincente per superare le difficoltà presenti nei rapporti fra Matematica e giovani ed i cui effetti sono evidenti.*

Abstract. *Starting from the alarming data describing a decrement in the number of students in Scientific Faculties, particularly in Mathematics, the author looks at the high formalisation on one hand as an aim in research's activity, on the other as an obstacle in approaching Mathematics. The proposed approach, based on a recovery of the "semantic" side of Mathematics, was experimented on a selected specimen of students of Italian High Schools, inside a wider biannual national project. The results of the first year, here presented and discussed, show the presence in the students of preconceptions, limiting the didactic communication, and confirm that the chosen approach can be a possible way to surmount these preconceptions obtaining a change in the student's view of Mathematics; it is just this change that could be the winning card to overcome the difficulties inside the relations between Mathematics and youth, which effects are today clear.*

1. Introduzione

Gli obiettivi del presente lavoro sono fondamentalmente due: il primo è quello di descrivere alcuni risultati di un progetto nazionale che mira a colmare il calo di iscrizioni nelle facoltà scientifiche, in particolare il corso di Laurea in Matematica, quantomeno in Italia[1]; il secondo, funzionale al primo, è quello di descrivere un possibile percorso, per superare tale calo, che è stato sperimentato in alcuni istituti di scuola secondaria superiore.

---

[*] Department of Mathematics, University of Messina, Contrada Papardo, Salita Sperone, 31, 98166 Messina, Italy. Phone number: +39(0)90393229; Fax number: +39(0)90393502. E-mail address: gentile@dipmat.unime.it.

[1] Si può in generale parlare di crisi delle vocazioni scientifiche, ma la crisi non colpisce tutti i settori allo stesso modo, almeno se – per comparto scientifico – intendiamo il complesso dei corsi della Facoltà di Scienze ma anche Medicina, Ingegneria, Agraria. Ci sono indirizzi o Corsi di laurea che mantengono o, addirittura, incrementano il numero di matricole. Il numero degli studenti iscritti al "comparto scienze" negli anni è abbastanza costante; ma, mentre il numero degli iscritti a Ingegneria è triplicato, la crisi colpisce soprattutto le discipline teoriche: Matematica, Fisica, Chimica. Quindi, è a loro che ci si riferisce espressamente quando si parla di "sempre meno".

Per quanto riguarda il primo punto ci limitiamo a riportare alcuni dati relativi alle iscrizioni ai Corsi di Laurea in Matematica, Fisica e Chimica[2]: mentre nell'a.a. 1989/90 gli iscritti in tali Corsi di Laurea erano circa 10.000, nell'a.a. 2005/06 sono stati circa 7.600; nello stesso periodo, in Matematica le matricole sono passate dalle 4.396 alle 2.094 unità, il che costituisce lo 0,6% del totale. Alla luce di tali dati, il Ministero dell'Università e della Ricerca ed il Ministero della Pubblica Istruzione (che all'inizio del progetto erano unificati come Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca) hanno attivato il progetto nazionale "Progetto Lauree Scientifiche" (PLS), nel tentativo di invertire questa tendenza, incrementando le iscrizioni nei 3 Corsi di Laurea sopra citati. Il progetto, di durata biennale, ha visto (e vede) interagire tre attori: le Università, le Scuole Superiori e Confindustria. L'esperienza e i risultati che verranno descritti in queste note sono relativi al primo anno del PLS e riguardano l'Università di Messina e le scuole della provincia di Messina che hanno aderito al progetto stesso.

Le motivazioni fornite per spiegare un calo così evidente sono innumerevoli e di carattere molto diverso: motivazioni legate alla difficoltà degli studi scientifici o relative alla capacità degli insegnanti di gestire alcune fasi del processo di insegnamento-apprendimento; a ciò si aggiunga che, agli occhi delle giovani generazioni, il "mestiere" dello scienziato (mestiere che, almeno nel caso della Matematica, spesso viene identificato con l'insegnamento della Matematica stessa) ha poca appetibilità sia economica che sociale. Pur riconoscendo a ognuna di queste spiegazioni un fondo di verità, in questo lavoro proporremo un approccio al problema di carattere più tecnico, nel senso che guarderemo alla problematica "dal di dentro" della Matematica: è in quest'ottica che consideriamo il problema del calo di vocazioni verso la Matematica come un problema di Didattica della Matematica.

2. *Premesse teoriche e obiettivi*

Prima di passare a descrivere l'esperienza nei suoi aspetti tecnici, è necessario esplicitare alcune premesse teoriche sulle cui basi è stata concepita l'intera esperienza e che, pertanto, forniscono ad essa il significato e ne consentono l'interpretazione.

Il primo elemento considerato è stato quello relativo al legame fra il percorso ontogenetico e quello filogenetico. Lo sviluppo storico e quello cognitivo di un concetto, infatti, seguono talvolta percorsi simili; questo parallelismo, che è uno dei prodotti della ricapitolazione, da una parte deve essere considerato con tutti i limiti e le problematiche che sono connesse, in particolare nel dover tenere nella giusta considerazione fattori sociali, culturali e tecnologici[3]; d'altra parte, alla luce anche di tali considerazioni (che possono essere considerate non tanto come una critica, quanto piuttosto come un monito verso un uso troppo spregiudicato e acritico della storia in didattica) tale parallelismo può consentire di sfruttare le conoscenze storiche a fini didattici: e ciò non soltanto nel fornire

[2] I dati qui citati sono stati estratti da [MARIANO LONGO, 2006] e dall'ufficio statistico del MIUR.
[3] [ARTIGUE 1990], [RADFORD, 1997].

uno strumento valido per prevedere gli ostacoli che si possono creare ad un determinato apprendimento ed alle vie per un loro superamento[4], ma anche nel proporre un approccio didattico che, tenendo in considerazione la genesi e l'evoluzione storica dei concetti, possa fornire una chiave per una efficace azione didattica, soprattutto per quanto riguarda i momenti euristici e di approccio ad un nuovo concetto[5].

A tale elemento ne va aggiunto un secondo, frutto di alcune idee sviluppate in collaborazione con R. Migliorato e che hanno già dato luogo ad alcuni lavori[6]; qui ci limiteremo a riassumere schematicamente quanto già lì esposto, rimandando il lettore ad essi per maggiori approfondimenti. L'idea centrale che in tali lavori è stata sviluppata è che la Matematica (ma il discorso si potrebbe estendere alla conoscenza in generale) procede da una prima fase, che potremmo definire pre-formale, in cui domina la libertà di scelta degli strumenti di indagine e delle tecniche risolutive, ad una seconda fase in cui tali procedimenti vengono giustificati all'interno di un quadro formale[7]; tale affermazione è stata tratta da ambiti molto lontani tra loro e che, sebbene facciano uso di strumenti d'indagine diversi e si prefiggano finalità diverse, pervengono a conclusioni simili.

Il primo di tali ambiti è quello dell'epistemologia genetica di Piaget: in particolare vorremmo sottolineare la linea evolutiva, teorizzata dallo studioso svizzero, rappresentata da quattro periodi (senso-motorio, pre-operatorio, delle operazioni concrete, delle operazioni formali) e caratterizzata da quel processo di assimilazione e accomodamento che prevede, tra l'altro, il formarsi di strutture *provocate* dall'esperienza e che, a loro volta, consentono di dare significato a quella esperienza, cioè, relativamente a questo particolare ambito, di quei due momenti che abbiamo chiamato pre-formale e formale.

Il secondo ambito, prettamente filosofico, è quello delle forme simboliche di Cassirer: il filosofo tedesco riprende le tesi kantiane dell'esistenza delle *forme*, ma se ne discosta nel momento in cui afferma che esse non sono *a priori*: se, infatti, le geometrie non-euclidee avevano minato alla base l'assunto kantiano delle forme sintetiche a priori, Cassirer, pur tenendo fede alle tesi kantiane sull'esistenza delle forme, suppone che queste non siano a priori ma che siano un prodotto culturale, frutto dell'evoluzione dell'uomo (che potremmo chiamare esperienza filogenetica): è in tal senso che Cassirer parla di *forme simboliche*[8].

---

[4] [BROUSSEAU, 1983], [FURINGHETTI-RADFORD, 2002].
[5] [PIAGET-GARCIA, 1983], [SFARD, 1991], [GENTILE, 2005].
[6] [GENTILE, 2004, 2005, 2006], [MIGLIORATO, 2004, 2005, 2006].
[7] In particolare, in [MIGLIORATO, 2005], viene proposta una analoga chiave di lettura nel passaggio dal *mito* alla *scienza*; qui però la fase pre-formale, il cui linguaggio è vicino a quello formale ma i cui procedimenti non sono stati ancora assimilati dentro un quadro coerente, viene fatta precedere da una fase informale, in cui il linguaggio è ancora vicino al puro e semplice fatto osservativo.
[8] Vedi anche [GENTILE, 2004]. Per ulteriori approfondimenti sulle posizioni e le idee del filosofo tedesco vedi, ad esempio, [CASSIRER, 2004]. Inoltre è da sottolineare come le tesi del filosofo neokantiano siano state riprese ed utilizzate da Panofsky in un contesto apparentemente molto lontano quale è quello della prospettiva, che viene appunto intesa da Panofsky come un prodotto culturale che consente di dare coerenza geometrica alle rappresentazioni spaziali; a tale proposito si veda [PANOFSKY, 1961].

Il terzo ambito, più vicino alla matematica, è quello messo in luce da Poincaré e dalle sue riflessioni, ad esempio, sul concetto di spazio, della sua euclidicità e della dimensione stessa[9]: per lo scienziato francese, infatti, per il formarsi di tale concetto ha un ruolo fondamentale proprio l'esperienza visiva, tattile e motoria del movimento, della sua invertibilità e della sua composizione, con la conseguenza che esperienze diverse porterebbero a rappresentarsi lo spazio in maniera diversa, dalla possibilità di spazi a più dimensioni a spazi non euclidei, etc.

Il quarto ambito che vorremmo segnalare è di carattere prettamente epistemologico e si riferisce ad una osservazione di Heyting sull'assiomatica. La distinzione intuizionista fra un fatto matematico, considerato come alinguistico, e linguaggio matematico, che ha il solo scopo di ricordare e riferire ad altri una certa costruzione mentale, si riflette, secondo il matematico olandese, nella distinzione tra due funzioni dell'assiomatica, una che potremmo definire *creativa*, l'altra che potremmo chiamare *descrittiva*; Heyting accetta solo la seconda, mentre non accetta, alla luce del punto di vista intuizionista, la prima[10].

L'ultimo ambito è di carattere storico-matematico e riguarda Archimede e, più in particolare, quanto da lui esposto nel *Metodo*[11]; per la questione di cui ci stiamo occupando, è di notevole interesse il modo con cui lo scienziato siracusano ha cercato di conciliare, affiancare e far interagire i due momenti caratteristici della sua opera: come comunicato dallo stesso Archimede ad Eratostene nella lettera introduttiva al *Metodo*, il primo momento è quello dell'euristica, della scoperta, il secondo è quello della rigorosa dimostrazione, attraverso il metodo di esaustione, dei risultati già precedentemente intuiti. Particolarmente significativo è il seguente passo, tratto proprio dal *Metodo*[12]:

Perciò anche di quei teoremi, dei quali Eudosso trovò per primo la dimostrazione, intorno al cono e alla piramide, [cioè] che il cono è la terza parte del cilindro e la piramide [è la terza parte] del prisma aventi la stessa base e altezza uguale, non piccola parte [del merito] va attribuita a Democrito, che per primo fece conoscere questa proprietà della figura suddetta, senza dimostrazione.

Infatti, il classico e rigoroso metodo di esaustione, dovuto con molta probabilità ad Eudosso, richiedeva che in qualche modo si conoscesse già la figura campione con cui confrontare le varie figure inscritte e circoscritte alla figura data; questa difficoltà poneva seri problemi all'uso stesso del metodo di esaustione che, se lasciato da solo, sarebbe rimasto del tutto infruttuoso. In sostanza il metodo di esaustione non è un metodo di indagine, ma solo un metodo di dimostrazione di un risultato già in qualche modo intuito, ma non ancora provato.

---

[9] Per ulteriori approfondimenti si può consultare ad esempio [POINCARÉ, 1963].

[10] Come esempio di teoria assiomatica con funzione esclusivamente costitutiva, Heyting propone l'assiomatica ZF della teoria degli insiemi (ma si potrebbe considerare una qualunque teoria assiomatica degli insiemi): di fronte alla domanda "Cosa formalizza ZF?" si può osservare che, se essa tenta di formalizzare l'insiemistica preformale, allora è contraddittoria, mentre (ed è qui che si appunta la critica intuizionista di Heyting) se non la formalizza, c'è da chiedersi se la ZF possa essere una teoria vuota ossia se l'esistenza degli oggetti di cui parla ZF "è rivelata solo dagli assiomi" [CASARI, 1976, p. 193].

[11] Su alcuni aspetti della produzione archimedea, vedi [GENTILE-MIGLIORATO, 2007].

[12] [FRAJESE, 1974, p. 572].

Volendo riassumere quanto finora detto, a prima vista potremmo affermare che il passaggio dal pre-formale al formale è un fatto che può essere messo in luce con considerazioni storiche, psicologiche, epistemologiche, filosofiche o, semplicemente, matematiche; ma questo non implica a priori che esso sia l'unico modo per ottenere una formalizzazione. Tuttavia, qui vogliamo affermare che il passaggio dal pre-formale al formale non solo è accaduto, ma non poteva non accadere: è un passo necessario nell'evoluzione scientifica e ciò, alla luce della nostra prima assunzione sulla somiglianza tra i percorsi filogenetico ed ontogenetico, implica che esso è un passo necessario nell'evoluzione del singolo. Viceversa, vogliamo sottolineare che il modo stesso con cui abbiamo discusso il passaggio dal pre-formale al formale, ed in particolare la diversa scala temporale, i differenti oggetti e strumenti di indagine che gli ambiti considerati assumono nel proporre tale passaggio e nell'arrivare a conclusioni concordanti, avvalora a sua volta la nostra prima assunzione sulla somiglianza tra i percorsi filogenetico ed ontogenetico. Tale similitudine suggerisce, infatti, la possibilità che considerazioni di tipo filogenetico possano fornire uno spunto nell'ambito dello sviluppo del singolo individuo e con ciò trovare la sua naturale applicazione nei processi di insegnamento-apprendimento: in particolare, vorremmo applicare le considerazioni sul passaggio dal pre-formale al formale, tratte dall'ambito storico-epistemologico, nei processi di apprendimento-insegnamento. E viceversa, il successo di una esperienza didattica che faccia uso di un tale tipo di approccio può rafforzare l'idea di una somiglianza fra i due percorsi.

Tornando alla nostra problematica iniziale, cioè al calo delle vocazioni e delle iscrizioni nelle facoltà scientifiche, le precedenti considerazioni possono fornirci una chiave di lettura che spieghi tale progressivo allontanamento e, nel contempo, suggeriscono una via per il loro superamento. Noi oggi portiamo ancora un'eredità di cui non ci siamo ancora del tutto liberati, rintracciabile nel primo Novecento, in cui il formalismo e, più ancora, il bourbakismo, hanno segnato fortemente la produzione scientifica e in qualche modo hanno anche indirizzato certe scelte sia metodologiche che di contenuto. Se da una parte è notevole l'essersi posti il problema dei fondamenti della Matematica (problema che in quel momento storico era significativo), è altrettanto evidente che lo strumento adottato dal formalismo ha portato a svuotare la Matematica della sua parte semantica, per mantenere il suo aspetto sintattico; al di là degli esiti di una tale impostazione (che Gödel ha dimostrato irraggiungibili), quel che di tale visione rimane è l'attenzione sempre più viva per gli aspetti sintattici, gli unici in grado di determinare in qualche modo la coerenza di una teoria. Il bourbakismo ha estremizzato tale punto di vista, negando di fatto ogni valore, matematico ed epistemico, ai momenti pre-formali di una teoria: in tale visione, all'interno di una teoria formale non solo non c'è spazio per i momenti pre-formali, ma a tali momenti viene negato ogni valore[13].

---

[13] È bene chiarire che qui non si vuole negare la validità e l'utilità dell'aspetto formale di una teoria. A tale scopo in [GENTILE, 2005] è apparso utile distinguere fra due termini: da una parte il *formalismo*, inteso come *rinuncia* ad ogni significato, rinuncia volontaria e con un obiettivo storicamente ben determinato; dall'altra il *formulismo*, inteso come *perdita* di ogni significato, perdita non del tutto volontaria e senza un obiettivo apparente. È di quest'ultimo che qui si vuole

Oggi abbiamo ancora echi di una tale visione ogni qual volta iniziamo a leggere le prime righe di un testo di Matematica, laddove inizia la “traduzione” di temi che, nel momento in cui sono stati trattati, erano significativi, ma che nella fase di “traduzione formale” vengono spesso taciuti perché *formalmente* superflui; sono tali significati che devono essere recuperati, perché *effettivamente* necessari, come dimostra l’allontanamento dei ragazzi dalla Matematica: è proprio su questa ipotesi che si fonda la scelta didattica, che chiameremo *approccio semantico* e che è stato utilizzato nell’esperienza che andremo a descrivere. Se, infatti, non v’è dubbio che la Matematica è ricca di significati, è altrettanto vero che in genere tale carica semantica viene quasi sempre soppressa in favore di un tecnicismo sintattico che riesce difficilmente comprensibile a chi non ne ha seguito lo sviluppo o quantomeno non sia informato dell’esistenza di un tale sviluppo: con ciò vogliamo dire che ai ragazzi viene spesso celata quella parte della Matematica che, se sul piano puramente formale è poco significativa, è stata storicamente necessaria sul piano euristico e può rivelarsi indispensabile sul piano didattico; da tale incompletezza ne scaturisce solitamente una visione distorta della Matematica che è una delle cause del progressivo allontanamento dei ragazzi da questa disciplina. Alla domanda, così frequente, “perché i ragazzi odiano la Matematica”, si può replicare che la domanda è priva di senso e che invece bisognerebbe affermare che i ragazzi non odiano la Matematica, ma quello che della Matematica viene loro fatto vedere. È per questo che appare necessario intervenire proprio su tale aspetto, facendo cioè cambiare la visione dei ragazzi nei confronti della Matematica; l’approccio semantico qui proposto è un tentativo di restituire un ruolo significativo ai momenti pre-formali di una teoria, trovando il giusto equilibrio tra i due momenti, pre-formale e formale. Il rischio, infatti, che i ragazzi abbiano solo una visione parziale di tale ambivalenza appare evidente; non sembra sensato proporre una Matematica i cui contenuti non siano collegati in un corpus organico, cioè non appare proponibile una Matematica che non abbia i suoi aspetti formali: il rischio sarebbe quello di una frammentazione che la faccia apparire disorganica, rischiando di inibire la capacità di astrazione e non consentendo quel salto che trasforma una *conoscenza* in un *sapere*. Se questo rischio è abbastanza evidente, il rischio opposto è più subdolo e, come osservato, è proprio in questo che può essere rintracciato il seme della progressiva disaffezione dei ragazzi verso la Matematica e, di conseguenza, è questo aspetto che, se opportunamente rivitalizzato, può restituire valore agli aspetti pre-formali di una teoria, ridando vigore e risuscitando interesse in primo luogo verso quella particolare teoria ed in secondo luogo verso la Matematica in generale[14].

---

negare la validità e l’utilità, anzi è proprio a quest’ultimo che può essere ascritto quel vuoto che fa apparire la Matematica del tutto arida.

[14] Vorremmo sottolineare fin d’ora che l’approccio semantico qui esplicitato ha forti legami con la situazione a-didattica di Brusseau; vorremmo tuttavia evitare il rischio che i due approcci vengano totalmente identificati: se la situazione a-didattica appare totalmente interna all’ambito didattico, cercando di creare quelle condizioni che favoriscano una costruzione condivisa dei significati e della conoscenza e con un grande valore assegnato ai momenti pre-formali, l’approccio semantico mira anche a giustificare la scelta di tali obiettivi, sul piano storico-epistemologico; in altre parole, se la situazione a-didattica si occupa del *come*, l’approccio semantico spiega anche il *perché*.

3. *L'esperienza*

L'esperienza che andremo a descrivere si è svolta all'interno del progetto nazionale biennale PLS che ha visto cooperare ed interagire, a livello nazionale, tre attori: le Università (in particolare i Dipartimenti di Matematica, di Fisica, di Chimica), i CSA (oggi USP), che hanno coordinato le scuole delle varie province, le industrie del territorio. La finalità del PLS è quella di incentivare le iscrizioni dei giovani nelle facoltà scientifiche, soprattutto nei corsi di laurea in Matematica, in Fisica ed in Chimica che, negli ultimi anni, stanno soffrendo di una crescente mancanza di "vocazioni". All'interno di tale progetto si è inserita l'esperienza con l'obiettivo, a breve termine, di recuperare la parte "semantica" della Matematica, mostrando ai ragazzi quegli aspetti storici e problematici che danno significato al successivo sviluppo formale; da un tale approccio ci si aspettava un cambiamento nel modo di avvicinarsi a questa disciplina da parte dei ragazzi stessi[15]: è proprio questo capovolgimento che, se ottenuto, potrà rendere possibile perseguire l'obiettivo a lungo termine del PLS.

L'esperienza, svoltasi nella provincia di Messina, ha visto coinvolte 8 scuole del territorio: i Licei Scientifici "Archimede" di Messina, "Impallomeni" di Milazzo, "Piccolo" di Capo d'Orlando (questi ultimi due con annessa sezione classica), il Liceo Classico "Maurolico" di Messina, "V. Emanuele III" di Patti (quest'ultimo con annessa sezione scientifica), il Liceo Socio-Psico Pedagogico "AINIS" di Messina, l'Istituto Tecnico Industriale "Verona-Trento" di Messina, l'Istituto Tecnico Commerciale e Geometri "Fermi" di Barcellona. L'esperienza, che ha avuto una durata complessiva di 15 ore distribuite in 5 incontri, ha visto partecipare gli alunni delle ultime tre classi: i ragazzi, complessivamente 156, sono stati selezionati non tanto in base al loro "rendimento scolastico", ma in base alla loro richiesta e curiosità di partecipare al progetto.

Le tematiche scelte sono state due: la Teoria dei Codici e la Crittografia. La scelta di tali tematiche non è stata casuale: alla luce della nostra ipotesi di una valorizzazione della parte "semantica", quantomeno come primo approccio alle problematiche coinvolte, era auspicabile trattare degli argomenti che i ragazzi non avessero già studiato, in maniera da lavorare con studenti non ancora "contaminati" dall'apparato formale; in tal modo sarebbe stato possibile (e lo è stato di fatto) partire da una situazione problematica, del tutto simile a quella che storicamente si è presentata, per far lavorare i ragazzi in una cornice pre-formale, che successivamente andava formalizzata: quando ci si può muovere in una situazione non formalizzata è più facile mettere in moto quei processi di scoperta, fondamentali da un punto di vista storico ed essenziali da un punto di vista didattico, senza che alcun preconcetto possa in qualche modo rendere difficile la comunicazione. Questa scelta spiega anche quella di far lavorare gli alunni in una situazione a-didattica, dove avrebbero (e di fatto hanno potuto) liberamente proporre soluzioni a problemi posti sia dal docente sia da loro stessi, sottoporle a

[15] Alla base di tale schema sta l'ipotesi che i ragazzi abbiano delle idee preconcette che inibiscono la possibilità da parte loro di un approccio ed un avvicinamento meno problematico. Tale ipotesi è stata confermata dai risultati del questionario sottoposto ai ragazzi prima dell'inizio dell'esperienza ed ha pertanto rinvigorito l'ipotesi fatta a priori.

verifica ed, infine, validarle o rigettarle: in altre parole la situazione a-didattica poteva essere (e di fatto lo è stata) la modalità più consona per consentire ai ragazzi di costruire autonomamente significati senza ricevere nozioni.

Prima di passare a descrivere nel dettaglio l’esperienza, vogliamo segnalare che, al fine di poter confrontare significativamente i risultati ottenuti, sono stati creati due campioni di alunni, uno solo dei quali ha lavorato seguendo l’approccio semantico, come riportato nella seguente tabella che riassume anche quanto finora detto:

Nome della Scuola	Tipologia della Scuola	Tematica scelta	Numero degli alunni	Approccio seguito
Piccolo	L S-C	Codici	13	Semantico
Verona-Trento	I T I	Codici	21	Semantico
Fermi	I T C G	Codici	18	Semantico
Maurolico	L C	Codici	8	Non semantico
Archimede	L S	Crittografia	11	Non semantico
V. Emanuele III	L C-S	Crittografia	8	Non semantico
Impallomeni	L C-S	Crittografia	17	Non semantico
Ainis	L S-P-P	Crittografia	8	Non semantico

È doverosa una nota esplicativa sulla precedente tabella e qualche commento su alcune scelte fatte. La nota riguarda il numero di alunni sopra riportato: mentre, come già detto, il numero totale dei ragazzi che ha iniziato il progetto è di 156, il numero totale riportato in tabella è di 104 e si riferisce ai soli alunni che hanno seguito per intero le attività previste; ciò è stato fatto per garantire che i dati, che verranno segnalati e discussi nel successivo paragrafo, fossero effettivamente provocati dall’esperienza stessa. Il primo commento riguarda la ripartizione degli approcci: per testare in maniera più significativa l’approccio semantico, era necessario adottarlo in scuole di diversa tipologia ed è per questa ragione che si è scelto di utilizzare tale approccio sia in un liceo (con alunni provenienti sia dalle sezioni scientifiche che da quelle classiche) sia in due istituti tecnici (di diversa tipologia). Il secondo commento riguarda la ripartizione delle tematiche: come risulta dalla tabella, l’approccio semantico è stato testato solo su una tematica (la teoria del codici), sebbene sarebbe stato probabilmente più completo avere dei dati anche per la seconda tematica (ma problemi organizzativi ne hanno impedito la scelta); tuttavia, è da sottolineare il fatto che la scelta della tematica non inficia il risultato che si vuole ottenere che, ricordiamo, è quello di far toccare con mano ai ragazzi gli aspetti pre-formali di una teoria, con l'auspicio che ciò possa far vedere in maniera diversa, più interessante e significativa, lo sviluppo formale della teoria stessa[16].

Prima di passare a descrivere quali sono stati gli aspetti toccati nel corso dell'esperienza, è opportuno precisare che all'inizio del primo incontro ed a chiusura dell'intero percorso sono stati proposti ai ragazzi due questionari (praticamente identici), che verranno riportati in appendice ed i cui risultati verranno discussi nel successivo paragrafo; qui vogliamo solo sottolineare che tali questionari non sono questionari *di* Matematica, ma *sulla* Matematica: essi, infatti, mirano ad acquisire informazioni su come e cosa i ragazzi vedono nella Matematica e consentono di verificare se e come l'esperienza fatta abbia in qualche modo mutato nei ragazzi la visione della Matematica.

Per quanto riguarda i contenuti trattati durante l'esperienza, mi limiterò a descrivere quelli relativi alla Teoria dei Codici, essendo questa la tematica affrontata con l'approccio descritto. La situazione problematica che storicamente ha portato alla nascita di tale teoria è quella rintracciabile nei lavori pionieristici di Shannon[17], in cui veniva introdotto il problema centrale della comunicazione, e di Hamming[18], in cui veniva considerato ed affrontato il problema relativo alla presenza di errori di trasmissione in una normale centrale telefonica. Per quanto riguarda la situazione proposta in classe durante il primo incontro, si è scelto di partire da una situazione problematica, del tutto equivalente a quella storica sopra accennata, in cui due ragazzi (uno trasmittente e l'altro ricevente) riscontravano degli errori nella trasmissione di alcuni sms; i ragazzi, in gruppo, sono stati lasciati liberi di proporre sia le loro spiegazioni del perché possano avvenire tali errori sia le soluzioni per porre rimedio ad una tale evenienza; è stato possibile distinguere due approcci alla soluzione del problema: uno che puntava sul miglioramento della tecnologia utilizzata, l'altro sulla creazione di un meccanismo che riuscisse a rilevare ed eventualmente a correggere gli errori; la discussione che ne è seguita ha portato a preferire quest'ultimo[19]. Nei successivi incontri i ragazzi hanno cercato di creare alcuni di tali sistemi; i problemi via via affrontati, sia posti dall'insegnante sia scaturiti dai ragazzi stessi, sono stati prima affrontati in piccoli gruppi (di 4 o 5 alunni) e successivamente sono stati esposti a tutto il gruppo. In particolare è da evidenziare il fatto che durante il secondo incontro i vari gruppi, invitati a trovare un codice di 4 parole che correggesse 1 errore, hanno proposto codici diversi da un gruppo all'altro, arrivando però alla unanime conclusione, seguita alla esposizione e discussione delle varie soluzioni, che tali esempi fossero in qualche modo equivalenti (un codice di lunghezza 3 su un alfabeto di 4 lettere, un codice di lunghezza 6 su un alfabeto di 2 lettere); dopo

---

[16] In ogni caso, ad ulteriore conferma dei risultati ottenuti, è stato già programmato, per il secondo anno del PLS, di testare tale approccio con altre tematiche, diverse da quelle del primo anno.

[17] [SHANNON, 1948].

[18] [HAMMING, 1950].

[19] Non deve sorprendere più di tanto il fatto che, nel momento storico in cui questi problemi hanno cominciato ad essere affrontati, sono state proposte essenzialmente le stesse due modalità di soluzione proposte dai ragazzi, scartando alla fine quella che puntava sulla tecnologia, cioè esattamente la stessa scelta adoperata dai ragazzi: anche questo può essere considerato un elemento che rafforza l'idea di una somiglianza tra percorso filogenetico ed ontogenetico. Su una questione analoga riguardante la congettura di Goldbach, si veda [SCIMONE, 2003].

aver trovato tale codice, in 2 dei 3 laboratori, alcuni ragazzi hanno sentito la necessità di ottimizzare le prime soluzioni proposte ("ma non si può fare più corto?"), entrando così naturalmente in uno dei problemi centrali della teoria dei codici: la creazione di codici che riescano a rilevare (o a correggere) il maggior numero gli errori col minor uso di caratteri. In tale incontro e nei successivi, sono venute così alla luce le nozioni di distanza di Hamming, di lunghezza di un codice, di codice rilevatore e di codice correttore, fino alla disuguaglianza di Hamming che fornisce una limitazione alle capacità di un codice e dà senso al concetto di codice perfetto[20]. L'ultimo incontro ha previsto una verifica sull'acquisizione dei contenuti trattati (che verrà riportata in appendice) ed il questionario (cui si è già accennato): tali verifiche hanno confermato quasi per tutti la comprensione delle questioni centrali relative a tale teoria, delle possibili soluzioni ad alcune situazioni problematiche, della possibilità di dimostrare l'impossibilità di risolvere un certo problema e, non da ultimo, dell'utilità della tematica trattata.

Alla chiusura dell'intera esperienza gli alunni sono stati invitati a porre per iscritto quanto era stato fatto durante tutto il percorso, chiedendo loro esplicitamente di mettersi nei panni di chi "deve scrivere un capitolo di un libro di Matematica". È stato in quel frangente che i ragazzi hanno percepito sia la difficoltà sia la necessità di formalizzare in maniera organica e deduttiva quanto acquisito fino a quel momento: le discussioni su come dare una definizione, su quale fra due definizioni dovesse essere messa prima, sulla concatenazione delle proposizioni e altre questioni simili, sono state per loro una scoperta: la scoperta che quanto viene scritto su un libro di Matematica non è un vuoto vocabolario di termini privi di significato, ma la sintesi di una esperienza che necessita di una fase di organizzazione e che di quella esperienza vuole tradurre formalmente i significati precedentemente emersi. La consapevolezza nei ragazzi che "c'è dell'altro" oltre il formalismo, ha modificato, come vedremo, la loro opinione su alcuni aspetti che venivano messi in luce nei già citati questionari: è proprio questa consapevolezza che può determinare un nuovo modo di porsi nei confronti della Matematica, senza che alcuni pregiudizi limitino o, in alcuni casi, impediscano la stessa comunicazione didattica. È proprio ai risultati dei questionari, ed ai relativi commenti, che sarà dedicato il prossimo paragrafo.

4. Risultati e commenti

Iniziamo col sottolineare, anche se ciò dovrebbe apparire ormai chiaro, che il questionario sottoposto ai ragazzi puntava non tanto sul contenuto, quanto sul processo e sui mutamenti eventualmente intervenuti durante l'esperienza. Gli items sui quali è stata riposta maggiore attenzione in fase di valutazione sono stati il n.6 ed il n.10[21], poiché era interessante sapere sia se i ragazzi considerassero la

---

[20] Per approfondimenti sugli aspetti tecnici riguardanti i codici e, in particolare, sui concetti cui si è accennato, si può vedere [CERASOLI-EUGENI-PROTASI, 1988], [SCAFATI-TALLINI, 1995], [BEUTELSPACHER-ROSENBAUM, 1998].

[21] Nel questionario finale sono stati inseriti solo alcuni degli items presenti in quello iniziale e pertanto la numerazione è quasi del tutto diversa; la numerazione a cui si farà riferimento nella presente discussione si riferisce a quello iniziale.

Matematica come già tutta scritta e senza possibilità di ulteriori sviluppi o fossero consapevoli che essa è in continuo sviluppo, sia se e quanto nelle loro idee la creatività giocasse un ruolo in questo contesto. A tale proposito, è utile riassumere i risultati di un’indagine che negli anni ’80 Migliorato aveva condotto in alcuni istituti superiori[22], durante la quale venne proposto agli alunni il seguente quesito:
Quali delle seguenti doti, secondo te, è importante per fare bene in Matematica (puoi indicarne più di una):

a. Creatività. b. Pazienza. c. Intuizione. d. Memoria.

I risultati hanno indicato le seguenti percentuali fra le risposte[23]:

a. 6% b. 29% c. 81% d. 23%

il che ci dice come la creatività giocava per i ragazzi un ruolo poco rilevante (anzi, da una ulteriore analisi dei dati, veniva messo chiaramente in luce come essa apparisse meno importante col passare degli anni sui banchi di scuola). Ciò che oggi risulta chiaro dalla odierna esperienza è una sostanziale conferma di quei risultati; la novità che però emerge, rispetto a quella, è la possibilità di ridirezionare la visione dei ragazzi nei confronti della Matematica e, nel contempo, l’efficacia dell’approccio usato nell’ottenere un tale mutamento.

Tornando al quesito 6, è stato preso in considerazione come parametro la presenza o meno della risposta “avere molta fantasia”. Come è possibile vedere dall’enunciazione del quesito, i ragazzi hanno avuto la possibilità di scegliere quante risposte dare; tale scelta è stata dettata dalla volontà di distinguere il caso in cui l’“avere molta fantasia” fosse ritenuto poco importante da quello in cui tale qualità fosse ritenuta del tutto irrilevante[24]. Per avere la possibilità di fare un’analisi statistica quantitativa, la risposta a tale quesito è stata tradotta numericamente, assegnando un valore numerico secondo lo schema seguente:

1 se la risposta era segnalata al 1° posto
0,8 se la risposta era segnalata al 2° posto
0,6 se la risposta era segnalata al 3° posto
0,4 se la risposta era segnalata al 4° posto
0,3 se la risposta era segnalata al 5° posto
0,2 se la risposta era segnalata al 6° posto
0 se la risposta non era segnalata.

Tale quesito si trovava sia nel questionario di inizio corso sia in quello finale. La media calcolata per il questionario iniziale ha fornito il valore di 0,159; tale dato ha confermato l’ipotesi che i ragazzi vedono nella Matematica un ambiente in cui non c’è spazio per la creatività ed in cui, conseguentemente, vengono mortificati quegli aspetti che invece sono stati storicamente necessari allo sviluppo della Matematica stessa.

---

[22] I risultati completi sono contenuti in [MIGLIORATO, on line].
[23] La somma delle percentuali è maggiore di cento poiché agli alunni è stata lasciata la possibilità di dare più risposte.
[24] Esistono due differenze rispetto al quesito precedentemente citato: la prima sta nell’aver sottoposto il questionario ad un campione selezionato, mentre nella precedente esperienza il campione era indistinto; la seconda sta nell’aver dato la possibilità di scegliere l’“avere molta fantasia”, anche nel caso di una scarsa rilevanza di tale qualità: le due differenze avrebbero dovuto alzare il “peso” dato dai ragazzi alla fantasia, ma nonostante ciò, come vedremo, non si è avuto un risultato incoraggiante.

L’identico quesito, ripetuto nel questionario finale ed analizzato con la medesima griglia, ha fornito il valore di 0,173. Come già accennato nel precedente paragrafo, il campione è stato suddiviso in due parti: una, che indicheremo con CS, formato dagli alunni che ha partecipato ai laboratori con l’approccio semantico, l’altra comprendente tutti gli altri alunni, indicato con CN. I dati così suddivisi hanno fornito i seguenti risultati: CS è salito da 0,131 a 0,187; CN è sceso da 0,187 a 0,159. La particolarità, che dai dati globali non può emergere e che pertanto segnaliamo esplicitamente, è che in un caso (per il “Fermi”) a tale incremento hanno contribuito tutti i ragazzi, nel senso che alla fine dell’esperienza *ogni* ragazzo ha assegnato alla fantasia un ruolo più importante (o meglio, non meno importante) di quanto non lo avesse assegnato all’inizio.

Passiamo ora al quesito 10. Anche per tale quesito è stata adottata una griglia analoga al quesito 6; precisamente la corrispondenza è:

1 se la risposta era “invenzioni”
0 se la risposta era “scoperte”
0,5 se la risposta non propendeva per una delle due.

Anche in tale caso, il confronto fra i risultati dei due questionari (iniziale e finale) ha mostrato un deciso cambiamento; mentre, infatti, nel primo questionario il valore medio ottenuto è stato di 0,282, in quello finale tale valore è sceso a 0,269. Anche qui, separando come già fatto in precedenza il campione, viene fuori un risultato diverso a seconda del tipo di approccio usato; usando le stesse notazioni di prima, si ha infatti: per CS il valore è salito da 0,269 a 0,295; per CN è sceso da 0,295 a 0,243. È da notare, ancora una volta, che per il “Fermi” vale un fatto analogo al precedente: *ogni* ragazzo ha contribuito a far aumentare (o meglio, a non far diminuire) il valore numerico assegnato al quesito, rispetto al valore iniziale, vedendo nella Matematica una maggiore possibilità di costruzione e, pertanto, di un personale contributo. Questo dato, anche se non è indice diretto di un mutamento quale quello prefigurato dal precedente quesito, indica senz’altro che i ragazzi hanno percepito come possibile un intervento “umano” nelle dinamiche di sviluppo della Matematica, essendo stati loro stessi “attori” di un tale processo.

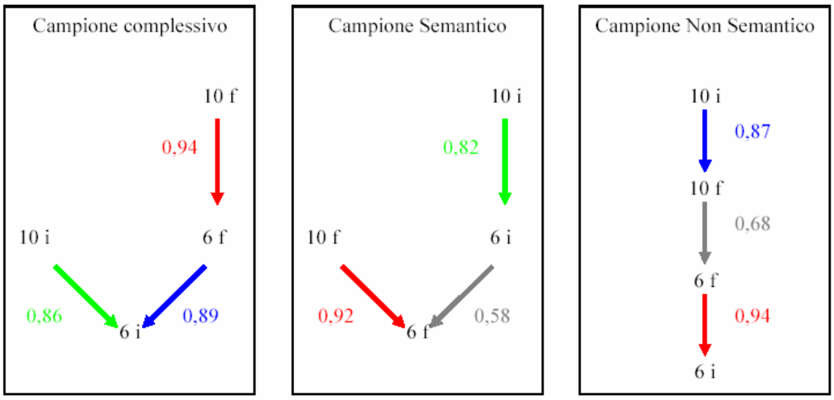
Segnaliamo inoltre alcuni risultati ottenuti dal confronto degli items 6 e 10, tramite un’analisi implicativa. In particolare, è apparso interessante vedere in che modo fossero legate l’aver indicato la Matematica come non soltanto una scoperta, con la presenza della fantasia fra i requisiti necessari per far bene nella Matematica stessa; l’analisi, condotta col supporto del software CHIC (*Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive*), ha segnalato alcune implicazioni la prima delle quali potrebbe essere riassunta nel seguente modo:

Se la Matematica è anche una invenzione $\Rightarrow$ *La fantasia ha un qualche ruolo in Matematica*.

ovvero

Se la fantasia non ha alcun ruolo in Matematica $\Rightarrow$ *la Matematica è solo una scoperta*.

L’indice di implicazione è passato da 0,86 nel questionario iniziale (10i $\Rightarrow$ 6i) a 0,94 in quello finale (10f $\Rightarrow$ 6f); in particolare, per il campione che ha seguito l’approccio semantico, l’indice di implicazione è passato da 0,82 a 0,92. È da segnalare inoltre un’altra implicazione forte: nel campione non semantico, se la fantasia è segnalata come importante nel questionario finale allora la fantasia è segnalata come importante anche nel questionario iniziale (ovvero se non è stata segnalata all’inizio allora non è stata segnalata alla fine), con indice di implicazione 0,94 (6f $\Rightarrow$ 6i). Dal confronto dei grafici si può evincere come i due campioni possono in qualche modo essere caratterizzati da tali implicazioni: mentre il campione semantico ha reagito ad alcuni stimoli prodotti dall’esperienza (come si può dedurre dall’aumento del valore dell’implicazione 10 $\Rightarrow$ 6), per il campione non semantico non è stato possibile far aumentare il valore assegnato alla fantasia (forte valore dell’implicazione 6 f $\Rightarrow$ 6 i).



Per quanto riguarda gli items 7 e 9, essi puntavano ad acquisire informazioni sul punto di vista dei ragazzi nei confronti degli “oggetti” della Matematica e, in particolare, sulla loro “esistenza” e sulla loro eventuale “costruzione”. Ci si è proposti di sapere se per i ragazzi un oggetto matematico esiste e se tale esistenza proviene da una costruzione dell’uomo o meno; per tale ragione il campione è stato suddiviso basandosi sul seguente criterio: in prima battuta il campione è stato suddiviso in base all’esistenza o meno assegnata all’oggetto (item 7) e successivamente è stato suddiviso il campione così ottenuto in base alla costruzione o meno di quell’oggetto da parte dell’uomo (item 9). I dati emersi si possono così riassumere:

Il triangolo esiste (Iniziale)								
SI 25%			NO 54%			Forse 21%		
Il triangolo è opera dell’uomo								
SI 18%	NO 3%	Forse 4%	SI 34%	NO 16%	Forse 4%	SI 11%	NO 5%	Forse 5%

Il numero esiste (Iniziale)								
SI 59%			NO 26%			Forse 15%		
Il numero è opera dell’uomo								
SI 11%	NO 38%	Forse 10%	SI 2%	NO 14%	Forse 10%	SI 4%	NO 9%	Forse 2%

Il triangolo esiste (Finale)		
SI 29%	NO 48%	Forse 23%

Il triangolo è opera dell'uomo								
SI 19%	NO 5%	Forse 5%	SI 25%	NO 20%	Forse 3%	SI 14%	NO 3%	Forse 6%

Il numero esiste (Finale)								
SI 23%			NO 57%			Forse 20%		
Il numero è opera dell'uomo								
SI 16%	NO 4%	Forse 3%	SI 32%	NO 20%	Forse 5%	SI 9%	NO 5%	Forse 6%

Il dato curioso che emerge dalle precedenti tabelle è la diversa percezione dell'esistenza assegnata al triangolo ed al numero nel questionario iniziale (25% contro 59%), differenza che si è invece ristretta nel questionario finale in virtù di un secondo dato altrettanto evidente, cioè il decremento del numero dei ragazzi che hanno assegnato l'esistenza al numero (dal 59% al 23%).

Con gli items 1 e 4 si è cercato di evidenziare se e in che misura un problema venga riconosciuto come matematico solo nel caso in cui esso risulti già totalmente formalizzato nel linguaggio tecnico di una teoria (questo spiega la formulazione adottata, che è diversa nei due items). Si è proceduto così a quattro confronti: due, all'interno di ciascun questionario, fra l'item 1 e l'item 4; altri due sono stati poi fatti fra gli items iniziali e quelli finali, per verificare che tipo di cambiamento avesse eventualmente apportato l'esperienza. Tale analisi è stata corroborata dal confronto con l'item 3, per il quale il parametro preso in considerazione è stato la presenza o meno di un problema proposto in veste formalizzata. I risultati di tale analisi possono così essere riassunti: i ragazzi che hanno dato le medesime risposte agli items 1 e 4 nel questionario iniziale costituiscono il 15% del campione, mentre tale percentuale si è più che raddoppiata nel questionario finale, passando al 32%; inoltre, nel campione che ha usato l'approccio semantico, la percentuale è salita dal 15% al 36% con la particolarità che quel 15% iniziale è rimasto sulle medesime posizioni ed il 21% in più è interamente dovuto a ragazzi che hanno cambiato idea tra l'inizio e la fine dell'esperienza; per la rimanente parte del campione la percentuale è salita dal 15% al 27%, ma con uno scambio tra coloro che fanno parte del 15% iniziale e di coloro che fanno parte del 27% finale. Questo tipo di analisi prefigura una complessiva maggiore consapevolezza del ruolo della Matematica nel modellizzare classi di problemi sempre più vasti, consapevolezza che viene accentuata dall'approccio semantico: tale affermazione è, allo stato attuale, solo una congettura che ci si propone di approfondire in future esperienze.

Gli items 2, 5, 8 sono di carattere qualitativo e da una loro analisi non è emersa nessuna particolarità significativa.

5. *Conclusioni e problemi aperti*

La Matematica, ma anche la Fisica e la Chimica, così come si sono andate configurando negli ultimi decenni, sono materie altamente formalizzate[25], e ciò

[25] Per approfondimenti su tali tematiche e sulle implicazioni di carattere epistemologico e

comporta una notevole difficoltà per chiunque abbia voglia di accedervi. In tale contesto, un approccio che cerchi di cogliere il frutto troppo rapidamente corre il rischio di non raccoglierne nessuno: in altre parole, partire dall'assetto finale di una teoria può provocare quei fenomeni di rigetto che oggi appaiono sempre più evidenti. L'approccio semantico qui proposto e discusso si prefigge di restituire un ruolo significativo ai momenti pre-formali di una teoria: è in questi ultimi che si può rintracciare la carta vincente che può ridare vigore e risuscitare interesse, in primo luogo verso quella teoria ed in secondo luogo verso la Matematica in generale. La parte prevalente degli incontri è stata così dedicata proprio a quei momenti euristici, ma non è stato tralasciato il momento formale a cui, come storicamente avviene e come previsto nell'approccio scelto, è stata riservata la parte finale e conclusiva di tutta l'esperienza.

L'esperienza qui descritta, svoltasi alla luce di tali ipotesi, ha evidenziato un sostanziale cambiamento nel modo di guardare alla Matematica, sia per quanto riguarda l'aspetto meramente contenutistico, sia per quanto concerne la visione stessa della Matematica. La possibilità per i ragazzi di costruirsi significati senza riceverli, di trovare delle "regole" senza doverle apprendere, di avere, in breve, un ruolo attivo all'interno di un percorso matematico, consente una comunicazione didattica più efficace, un approccio meno problematico e, non da ultimo, rende giustizia al percorso storico senza che questo ne risulti stravolto, se non del tutto capovolto.

La diversa modalità di approccio alle tematiche ed il confronto operato sui due campioni così formatisi, hanno messo in evidenza il successo di quello qui proposto. Va comunque precisato che, allo stato attuale, si è coscienti dei limiti di validità dei risultati finora discussi: ciò perché il campione preso in esame era formato da ragazzi che potremmo definire "motivati"; non si può pertanto trascurare la circostanza che l'incremento dei parametri considerati ha avuto luogo per un tale campione, sebbene non si possa tralasciare il fatto che, nonostante tale limitazione del campione, i parametri sono stati bassi in fase di partenza (e questo è un fatto non trascurabile che ci si propone di approfondire in seguito). È per tali ragioni che ci si riserva di riproporre e valutare, nel solco di tale approccio semantico, analoghe iniziative ed esperienze che possano essere allargate a classi indistinte di alunni.

Va infine segnalato un piccolo successo del PLS; infatti, fra i 12 ragazzi che hanno seguito il corso e che frequentavano le classi terminali, 2 si sono iscritti nel corrente anno accademico al Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Messina, mentre fra quelli frequentanti classi non terminali, una decina hanno già manifestato la loro volontà di iscriversi in tale Corso di Laurea, motivando ognuno la scelta fatta con la *sorpresa* nello scoprire un mondo affascinante e che finora gli era stato celato: sebbene non sembra che si parli di un grande numero, il suo peso diventa maggiore e acquisisce il valore che merita se lo confrontiamo, come deve essere, con le percentuali citate all'inizio di questo lavoro. Conscio che non è possibile dedurre *ipso facto* che tale incremento di iscrizioni sia effetto diretto dell'approccio semantico usato, non è possibile tuttavia escludere, da

---

didattico, si veda [MIGLIORATO, 2006].

quanto discusso, che tale approccio, avendo mostrato la capacità di determinare un cambiamento, o meglio un allargamento dell'orizzonte, nella visione che i ragazzi hanno della Matematica, possa aver messo i ragazzi nelle condizioni di accostarsi alla Matematica stessa in maniera meno problematica. Col tentativo qui descritto di restituire alla Matematica i suoi aspetti più "significativi", si vuole dare ai ragazzi una visione più allargata della Matematica stessa: è chiaro poi che la scelta di iscriversi in un certo corso di laurea e di proseguire su quel percorso può essere dettata anche da altri fattori, ma quantomeno tale scelta sarà stata più cosciente perché frutto di una conoscenza globale e di una visione sinottica.

Appendice A

Questionario di inizio corso

1. Quale (o quali) dei seguenti è un problema di matematica (barrare 1 per dire SI, 0 per dire NO, ½ se si è indecisi sulla risposta):

a. Trovare due numeri la cui somma è 15 ed il cui prodotto è 26.
0 1 ½

b. Data una circonferenza di raggio *r*, determinare il lato del quadrato inscritto e di quello circoscritto.
0 1 ½

c. Una signora entra in un negozio per comprare una stoffa. Quale colore sceglierà? 0 1 ½

d. Due ragazzi vogliono mandarsi un messaggio in un ambiente che disturba la comunicazione. Come possono riuscire a far arrivare integro il messaggio? 0 1 ½

e. Un cassetto contiene 10 calze rosse, 8 blu, 6 verdi. Un ragazzo che si trovi al buio, quante calze deve prendere per essere sicuro di averne due dello stesso colore? 0 1 ½

f. Due ragazzi vogliono mandarsi un messaggio in presenza di altre persone che li ascoltano, senza che nessuno capisca cosa si siano detti. Come possono fare? 0 1 ½

g. Un asteroide si trova vicino alla Terra. È possibile sapere se e quando ci colpirà? 0 1 ½

h. Inviare messaggi lungo una certa linea costa un centesimo di euro a carattere. Trovare un modo per spendere meno possibile senza perdere niente del messaggio originale. 0 1 ½

i. Paolo e Francesca giocano a scacchi. Alberto, che li osserva, a un certo punto dice: "Qualunque mossa farà, Paolo non può più vincere, a meno che Francesca non sbagli". È possibile stabilire se la frase di Alberto è vera? 0 1 ½

2. Da cosa si riconosce un problema di matematica da uno che non lo è?

3. Scrivere un problema di matematica.

4. Quale (o quali) dei seguenti è un problema a cui la matematica può dare una risposta (barrare 1 per dire SI, 0 per dire NO, ½ se si è indecisi sulla risposta):

a. Trovare due numeri la cui somma è 15 ed il cui prodotto è 26.
0 1 ½

b. Data una circonferenza di raggio *r*, determinare il lato del quadrato inscritto e di quello circoscritto.
0 1 ½

c. Una signora entra in un negozio per comprare una stoffa. Quale colore sceglierà? 0 1 ½
d. Due ragazzi vogliono mandarsi un messaggio in un ambiente che disturba la comunicazione. Come possono riuscire a far arrivare integro il messaggio? 0 1 ½
e. Un cassetto contiene 10 calze rosse, 8 blu, 6 verdi. Un ragazzo che si trovi al buio, quante calze deve prendere per essere sicuro di averne due dello stesso colore? 0 1 ½
f. Due ragazzi vogliono mandarsi un messaggio in presenza di altre persone che li ascoltano, senza che nessuno capisca cosa si siano detti. Come possono fare? 0 1 ½
g. Un asteroide si trova vicino alla Terra. È possibile sapere se e quando ci colpirà? 0 1 ½
h. Inviare messaggi lungo una certa linea costa un centesimo di euro a carattere. Trovare un modo per spendere meno possibile senza perdere niente del messaggio originale. 0 1 ½
i. Paolo e Francesca giocano a scacchi. Alberto, che li osserva, a un certo punto dice: "Qualunque mossa farà, Paolo non può più vincere, a meno che Francesca non sbagli". È possibile stabilire se la frase di Alberto è vera? 0 1 ½

5. Descrivi brevemente di cosa si occupa, secondo te, la Matematica.

6. Per far bene in Matematica è necessario (si può fare anche una classifica):

a. Possedere una buona memoria.
b. Capire bene i concetti.
c. Fare molti esercizi.
d. Studiare con regolarità.
e. Avere molta fantasia.
f. Imparare più formule possibile.

7. Quali delle seguenti cose possiamo ritenere come realmente esistenti (barrare 1 per dire SI, 0 per dire NO, ½ se si è indecisi sulla risposta):

a. Il Sole. 0 1 ½
b. Un atomo. 0 1 ½
c. Un suono. 0 1 ½
d. Un triangolo. 0 1 ½
e. Un software. 0 1 ½
f. L'energia elettrica. 0 1 ½
g. Un libro. 0 1 ½
h. Un numero. 0 1 ½
i. Un sogno. 0 1 ½

8. Con quale giudizio concordi maggiormente a proposito della seguente frase: "*La Matematica è quella Scienza in cui non si sa di cosa si sta parlando e se quello che dice è vero o falso*" (si può fare anche una classifica):

a. La frase non ha senso perché quando si fa Matematica si sa esattamente di cosa si parla (perché si danno le definizioni), oltre al fatto che i teoremi di Matematica sono sempre veri.
b. Sicuramente la frase non è di un Matematico.
c. La Matematica ha dei concetti che a volte non sono molto precisi e quindi non sempre si sa di cosa si stia parlando; ma quello che dice è senz'altro vero.
d. La Matematica precisa sin dall'inizio quali sono i concetti, ma a volte può non dire la verità.
e. Forse in questo giudizio c'è qualcosa di vero.
f. La Matematica non parla di oggetti concreti e quindi a volte non si sa di cosa si parli, ma sicuramente fa affermazioni sempre vere.
g. Concordo con la frase perché ____ ____ ___________
h. Altro:____ ____ ________________________

9. Quali delle seguenti cose sono un prodotto dell'uomo (barrare 1 per dire SI, 0 per dire NO, ½ se si è indecisi sulla risposta).

a.	Il Sole.	0	1	½
b.	Un atomo.	0	1	½
c.	Un suono.	0	1	½
d.	Un triangolo.	0	1	½
e.	Un software.	0	1	½
f.	L'energia elettrica.	0	1	½
g.	Un libro.	0	1	½
h.	Un numero.	0	1	½
i.	Un sogno.	0	1	½

10. Secondo te, è più corretto dire che "la Matematica fa delle *scoperte*" o che "la Matematica fa delle *invenzioni*"? (Dare una breve motivazione)

Appendice B

Questionario di fine corso

1. Quali dei seguenti è un problema di matematica (1 per dire SI, 0 per dire NO, ½ se si è indecisi):

a. Trovare due numeri la cui somma è 15 ed il cui prodotto è 26.
0 1 ½

b. Data una circonferenza di raggio *r*, determinare il lato del quadrato inscritto e di quello circoscritto.
0 1 ½

c. Una signora entra in un negozio per comprare una stoffa. Quale colore sceglierà? 0 1 ½

d. Due ragazzi vogliono mandarsi un messaggio in un ambiente che disturba la comunicazione. Come possono riuscire a far arrivare integro il messaggio? 0 1 ½

e. Un cassetto contiene 10 calze rosse, 8 blu, 6 verdi. Un ragazzo che si trovi al buio, quante calze deve prendere per essere sicuro di averne due dello stesso colore? 0 1 ½

f. Due ragazzi vogliono mandarsi un messaggio in presenza di altre persone che li ascoltano, senza che nessuno capisca cosa si siano detti. Come possono fare? 0 1 ½

g. Un asteroide si trova vicino alla Terra. È possibile sapere se e quando ci colpirà? 0 1 ½

h. Inviare messaggi lungo una certa linea costa un centesimo di euro a carattere. Trovare un modo per spendere meno possibile senza perdere niente del messaggio originale. 0 1 ½

i. Paolo e Francesca giocano a scacchi. Alberto, che li osserva, a un certo punto dice: "Qualunque mossa farà, Paolo non può più vincere, a meno che Francesca non sbagli". È possibile stabilire se la frase di Alberto è vera? 0 1 ½

2. Descrivi brevemente di cosa si occupa, secondo te, la Matematica.

3. Quali dei seguenti è un problema a cui la matematica può dare una risposta (1 per dire SI, 0 per dire NO, ½ se si è indecisi):

a. Trovare due numeri la cui somma è 15 ed il cui prodotto è 26.
0 1 ½

b. Data una circonferenza di raggio *r*, determinare il lato del quadrato inscritto e di quello circoscritto.
0 1 ½

c. Una signora entra in un negozio per comprare una stoffa. Quale colore sceglierà? 0 1 ½

d. Due ragazzi vogliono mandarsi un messaggio in un ambiente che disturba la comunicazione. Come possono riuscire a far arrivare integro il messaggio? 0 1 ½

e. Un cassetto contiene 10 calze rosse, 8 blu, 6 verdi. Un ragazzo che si trovi al buio, quante calze deve prendere per essere sicuro di averne due dello stesso colore? 0 1 ½
f. Due ragazzi vogliono mandarsi un messaggio in presenza di altre persone che li ascoltano, senza che nessuno capisca cosa si siano detti. Come possono fare? 0 1 ½
g. Un asteroide si trova vicino alla Terra. È possibile sapere se e quando ci colpirà? 0 1 ½
h. Inviare messaggi lungo una certa linea costa un centesimo di euro a carattere. Trovare un modo per spendere meno possibile senza perdere niente del messaggio originale. 0 1 ½
i. Paolo e Francesca giocano a scacchi. Alberto, che li osserva, a un certo punto dice: “Qualunque mossa farà, Paolo non può più vincere, a meno che Francesca non sbagli”. È possibile stabilire se la frase di Alberto è vera? 0 1 ½

4. Per far bene in Matematica è necessario (si può fare anche una classifica):
a. Possedere una buona memoria.
b. Capire bene i concetti.
c. Fare molti esercizi.
d. Studiare con regolarità.
e. Avere molta fantasia.
f. Imparare più formule possibile.

5. Quali delle seguenti cose possiamo ritenere come realmente esistenti (1 per dire SI, 0 per dire NO, ½ se si è indecisi):
a. Il Sole. 0 1 ½
b. Un atomo. 0 1 ½
c. Un suono. 0 1 ½
d. Un triangolo. 0 1 ½
e. Un software. 0 1 ½
f. L’energia elettrica. 0 1 ½
g. Un libro. 0 1 ½
h. Un numero. 0 1 ½
i. Un sogno. 0 1 ½

6. Quali delle seguenti cose sono un prodotto dell’uomo (1 per dire SI, 0 per dire NO, ½ se si è indecisi).
a. Il Sole. 0 1 ½
b. Un atomo. 0 1 ½
c. Un suono. 0 1 ½
d. Un triangolo. 0 1 ½
e. Un software. 0 1 ½
f. L’energia elettrica. 0 1 ½
g. Un libro. 0 1 ½
h. Un numero. 0 1 ½

i. Un sogno. 0 1 ½

7. Secondo te, è più corretto dire che "la Matematica fa delle *scoperte*" o che "la Matematica fa delle *invenzioni*"? (Dare una breve motivazione)

Appendice C
Verifica finale

1. In quale periodo storico ha origine la teoria dei codici? Perché, secondo te, tale teoria non è nata prima? In quali contesti oggi si fa uso di tale teoria?

2. Che cosa è il parity bit (o bit di parità) e a quale scopo viene utilizzato nella teoria dei codici? Fare un esempio di codice che faccia uso del parity bit.

3. Un codice contenente 11 parole e di lunghezza 6 può correggere 1 errore? Motivare la risposta.

4. Un codice corregge 1 errore ed è perfetto. Rispondere alle seguenti domande motivando le risposte.

a. Può tale codice contenere 11 parole?
b. Può tale codice contenere 16 parole?
c. Può tale codice avere lunghezza 11?
d. Può tale codice avere lunghezza 15?

5. Calcolare la distanza del seguente codice, precisando quanti errori corregge.

0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 1 1
1 1 0 0 0 1
1 0 1 1 1 0
0 1 0 1 1 1

Quali di queste parole può venire corretta dal precedente codice? e con quale?

0 0 1 0 1 0
0 0 0 1 0 1
1 1 1 0 1 0

6. Si consideri il codice lineare la cui matrice generatrice è

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quante sono le parole di tale codice? Scrivere la matrice di controllo H, determinando la distanza del codice e precisando se tale codice è perfetto. Verificare infine quali delle seguenti parole sono prive di errori e quali no, correggendo eventualmente l'errore rilevato:

1 1 1 0 0 1 0 1
1 1 1 1 1 0 0 0
1 1 1 1 1 0 1 1

Bibliografia

ARTIGUE M.. *Epistémologie et didactique*, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 10/2.3., pp. 241-286, 1990.

BEUTELSPACHER A., ROSENBAUM U., *Projective Geometry: From Foundations to Applications*, Cambridge University Press, 1998.

BROUSSEAU G., *Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques*, Reserches en Didactique des Mathématiques, 4, 2, pp. 165-198, 1983.

CASARI E., *Questioni di filosofia della matematica*, Feltrinelli, 1976.

CASSIRER E., *Filosofia delle forme simboliche*, La Nuova Italia, 2004 (Translation of *The Philosophy of Symbolic Forms*, Yale University Press, 1955).

CERASOLI M., EUGENI F., PROTASI M., *Elementi di matematica discreta*, Zanichelli, 1988.

FRAJESE A., *Opere di Archimede*, UTET, 1974.

FURINGHETTI F., RADFORD L., *Historical Conceptual Developments and the Teaching of Mathematics: from Phylogenesis and Ontogenesis Theory to Classroom Practice*, Handbook of International Research in Mathematics Education, Hillsdale: Erlbaum, 2002, pp. 631-654.

GENTILE G., *Due questioni di didattica della Matematica*, Atti del Convegno Regionale "Quali prospettive per la Matematica e la sua Didattica", Piazza Armerina, 2004 (atti on line sul sito del GRIM all'indirizzo: math.unipa.it/~grim/conv_aicm_grim.htm).

GENTILE G., *La storia della Matematica per la didattica della Matematica. Cosa può insegnarci Archimede?*, Atti del Convegno Regionale "Quali prospettive per la Matematica e la sua Didattica", Piazza Armerina, 2005 (atti on line sul sito del GRIM all'indirizzo: math.unipa.it/~grim/conv_aicm_grim.htm).

GENTILE G., *La Matematica e i giovani: un rapporto conflittuale superabile? Resoconto di una esperienza*, Atti del Convegno Nazionale, 3° incontro ADT-Mathesis "Matematica è la più odiata dagli italiani! Come farla amare? Con le nuove tecnologie?", Lipari, 2006 (disponibile anche on line fra le pubblicazioni della Sezione della Mathesis di Messina all'indirizzo: ww2.unime.it/mathesis/pub/matematica_giovani.pdf).

GENTILE G., MIGLIORATO R., *Archimedes between tradition and innovation*, submitted, 2007.

HAMMING R.W., *Error Detecting and Error Correcting Codes*, The Bell System Technical Journal, vol. XXVI, n. 2, pp. 147-160, 1950.

MARIANO LONGO T., *Scienze, un mito in declino? La crisi delle facoltà scientifiche: Italia, Francia ed uno sguardo internazionale*, Bollettino dell'A.N.I.S.N., anno XII, n. speciale – ottobre 2003 (anche on line sul sito: crisiscientifica.anisn.it/ricerca.php).

MIGLIORATO R., *L'astrazione matematica tra fantasia, conoscenza e ricadute tecnologiche*, Atti del Convegno Regionale "Quali prospettive per la Matematica e la sua Didattica", Piazza Armerina, 2004 (atti on line sul sito del GRIM all'indirizzo: math.unipa.it/~grim/conv_aicm_grim.htm).

MIGLIORATO R., *Spiegazione e predizione. Dalla rappresentazione mitica alla rappresentazione scientifica*, Atti del Convegno Regionale "Quali prospettive per la Matematica e la sua Didattica", Piazza Armerina, 2005 (atti on line sul sito del GRIM all'indirizzo: math.unipa.it/~grim/conv_aicm_grim.htm).

MIGLIORATO R., *Tra gioco e metafora: per una rappresentazione matematica del mondo*, Atti del Convegno Nazionale, 3° incontro ADT-Mathesis "Matematica è la più odiata dagli italiani! Come farla amare? Con le nuove tecnologie?", Lipari, 2006 (disponibile anche on line sul sito della Sezione della Mathesis di Messina all'indirizzo: ww2.unime.it/mathesis/pub/gioco_metafora.pdf).

PANOFSKY E., *La prospettiva come forma simbolica ed altri scritti*, Feltrinelli, 1961.

PIAGET J., GARCIA R., *Psychogenèse et histoire des sciences*, Paris: Flammarion, 1983.

POINCARÉ H., *La scienza e l'ipotesi*, Signorelli, 1963.

Radford L., On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, For the Learning of Mathematics, 1997, 17(1), pp. 17-23.

SFARD A., *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins*, Educational Studies in Mathematics, 1991, 22, pp. 1-36.

SCIMONE A., *Pupils' conceptions about an open historical question: Goldbach's conjecture. The improvement of mathematical education from a historical viewpoint*, Doctoral Thesis, Quaderni di Ricerca in Didattica del G.R.I.M., n.12, 2003.

SHANNON C.E., *A Mathematical Theory of Communication*, The Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp.379-423 July, pp. 623-646 October, 1948.

SCAFATI M., TALLINI G., *Geometria di Galois e Teoria dei Codici*, CISU, Roma, 1995.

VYGOTSKY L.S., *Il Processo cognitivo*, Universale Bollati Boringhieri, 2002 (Translation of *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.) - London, 1978).