"Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 19, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

STORIA E DIDATTICA DELLA MATEMATICA UNA PROSPETTIVA ERMENEUTICA

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

Abstract. In this paper we shall describe an hermeneutic approach to mathematics teaching and learning, with reference to the introduction of infinite series by some historical references. Our theoretical framework is based upon some ideas by Heidegger and Gadamer. More particularly, we shall consider a sequence of pre–suppositions that can influence students' conceptions, and different kinds of inference (deductive, inductive, abductive inferences) leading them to change their viewpoints about infinite series.

Sommario. Nel presente articolo descriveremo un approccio ermeneutico all'insegnamento–apprendimento della matematica, con riferimento all'introduzione delle serie numeriche mediante alcuni spunti storici. Il nostro quadro teorico si basa su alcune idee di Heidegger e Gadamer. In particolare, considereremo una sequenza di pre–supposizioni che possono influenzare le concezioni degli allievi, nonché i diversi tipi di inferenza (inferenze deduttive, induttive e abduttive) che portano gli studenti a mutare i propri punti di vista a proposito delle serie.

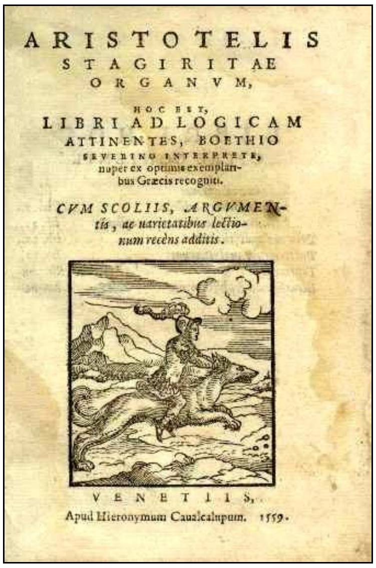
1. L'asse Heidegger–Gadamer

Uno studente chiamato ad apprendere un argomento matematico si trova di fronte a un ampio discorso scientifico formalizzato, a una pratica discorsiva (il termine è tratto da Foucault, 2005) che ancora non conosce e all'interno della quale deve penetrare, *interpretando* le procedure e i nuovi concetti espressi mediante segni specifici e convenzioni consolidate (seguiremo: Bagni, in via di pubblicazione–b; inoltre: in via di pubblicazione–a, 2006–a, 2006–b e 2007–a). Si tratta di un sapere formatosi nel tempo, sulla base di particolari esigenze e di motivazioni diverse (indichiamo ad esempio: Radford, 1997), non sempre, oggi, immediatamente comprensibili. Chi apprende (e naturalmente chi insegna, come emerge con chiarezza da: D'Amore 2005) opera dunque in un'ottica interpretativa, cioè sul piano dell'ermeneutica: Francesco Speranza (1932–1998) afferma ciò esplicitamente, nel proprio *Appello all'ermeneutica* (Speranza, 1999): «l'insegnamento–apprendimento si può interpretare in chiave ermeneutica: che cosa sarebbe altrimenti il passaggio dal *savoir savant* al *savoir de l'élève*?»

Il riferimento all'ermeneutica è una scelta, come vedremo, assai impegnativa da diversi punti di vista, ad esempio basata sull'interpretazione attiva del segno. In generale, nota ancora Speranza (1999), nella cultura dei giorni nostri «sono evidenti i motivi d'interpretazione nel pensiero scientifico; si tratta ora di esplicitare questa frase, di rendere consapevoli le "operazioni ermeneutiche"».

Gianni Vattimo definisce l'ermeneutica «come quella filosofia che si sviluppa lungo l'asse Heidegger–Gadamer» (Vattimo, 2002, p. 5) e nell'individuare in essa un clima importante con cui la cultura occidentale si sente chiamata «a fare i conti», afferma (Vattimo, 2002, p. 3): «sono pensatori ermeneutici non solo Heidegger, Gadamer, Ricoeur, Pareyson, ma anche Habermas e Apel, Rorty e Charles Taylor, Jacques Derrida ed Emmanuel Lévinas. Ciò che lega tutti questi autori non è una tesi comune, ma piuttosto quella che Wittgenstein (un altro pensatore ermeneutico, nel senso vago a cui sto alludendo) chiamava una somiglianza di famiglia; o, ancora di meno, un'aria di famiglia, un'atmosfera comune».

Soffermiamoci a considerare la parola *ermeneutica*. Il suo significato è stato a lungo identificato con *interpretazione*. Quest'ultimo termine indica tuttavia un campo di riflessione assai ampio e, per alcuni versi, vago: non sarebbe semplice accostare, ad esempio, l'accezione classica di ῾ερμηνεία (pensiamo a Platone, *Repubblica* 523*b*, *Teeteto* 209*a*, *Ione* 535*a*, *Politico* 260*d*; Aristotele, Περί ῾ερμηνείας) e la celebre affermazione nietzscheana secondo la quale «non ci sono fatti, solo interpretazioni», (Nietzsche, 1975, § 7[60], pp. 299–300).



Più precisamente, «l’ermeneutica è la dottrina del comprendere», scrive Matthias Jung (2002, p. 7); «tuttavia chi voglia comprendere lo stesso comprendere farà bene a prestare attenzione alla molteplicità dei fenomeni rispetto a cui c’è qualcosa da comprendere»: una considerazione che potremo tener presente con profitto anche occupandoci di didattica della matematica (Bagni, 2008, in cui ci si riferisce in particolare a: Rorty, 2004).
Una storia filosofica dell’ermeneutica esula dagli scopi del presente lavoro. Ricordiamo che Friedrich Daniel Ernst Schleiermacher (1768–1834) aveva indicato la presenza di un «circolo apparente, per il quale ogni particolare può essere compreso solo a partire dall’universale di cui è parte e viceversa» (Schleiermacher, 2000, p. 331). Scrive Schleiermacher (in *Hermeneutik*, 144/455: Jung, 2002, p. 59): «Partendo dall’inizio di un’opera e progredendo a poco a poco, la comprensione graduale di ogni singolo elemento e delle parti della totalità che a partire da essa si organizzano è sempre soltanto qualcosa di provvisorio. […] Solo che quanto più avanziamo tanto più tutto ciò che precede viene anche illuminato da ciò che segue». Dunque, nota Jung (2002, p. 59), «a partire dal circolo chiuso si giunge a una spirale aperta, costituita da ripetuti cammini interpretativi che devono essere sempre ritenuti passibili di una nuova revisione».
La questione viene ripresa, nel secolo scorso, da Martin Heidegger (1889–1976), il quale determina la «svolta epocale» (Jung, 2002, p. 85) grazie alla quale la comprensione non viene più ad essere orientata sul solo modello della spiegazione teoretica dei testi, bensì sul rapporto che gli esseri umani hanno con il mondo. Heidegger riconosce che «l’interpretazione deve sempre muoversi nel compreso e nutrirsi di esso [e] le regole più elementari della logica ci insegnano che il *circolo* è *circulus vitiosus*»; tuttavia se si identifica nel circolo ermeneutico «*un circolo vizioso e se si mira ad evitarlo o semplicemente lo si “sente” come un’irrimediabile imperfezione, si fraintende la comprensione da capo a fondo*» (Heidegger, 2005, p. 188; inoltre: Gadamer, 2000). Possiamo concludere, sempre seguendo Heidegger (2005, p. 189), che «il circolo non deve essere degradato a circolo vizioso e neppure ritenuto un inconveniente ineliminabile. In esso si nasconde una possibilità positiva del conoscere più originario, possibilità che è affermata in modo genuino solo se l’interpretazione ha compreso che il suo compito primo, durevole e ultimo è quello di non lasciarsi mai imporre pre–disponibilità, pre–veggenza e pre–cognizione dal caso o dalle opinioni comuni, ma di farle emergere dalle cose stesse, garantendosi così la scientificità del proprio tema».
Naturalmente non intendiamo qui riferirci all’intera filosofia heideggeriana che va ben oltre queste prime considerazioni sul circolo ermeneutico. Ma le osservazioni ora citate sono importanti (anche, come vedremo, in ottica didattica) e capovolgono una posizione talvolta implicitamente assunta secondo la quale la stessa presenza di un pre–giudizio dovrebbe essere considerata negativamente, quasi alla stregua di un indice di scarsa disponibilità a una valutazione serena. Proprio i “pre–concetti”, le “pre–supposizioni”, i “pre–giudizi” sono invece, per Reale (Introduzione a: Gadamer, 2000, p. XIV), «*ciò che mette in moto il circolo*; e la scientificità della ricerca si realizza nella misura in cui i pre–concetti vengono via via rinnovati e sostituiti nel corso del lavoro di interpretazione, in modo sempre più adeguato, e sempre più in sintonia con l’oggetto che viene indagato».

2. L’introduzione delle serie numeriche

Tornando alla matematica e alla sua didattica, l’introduzione delle serie numeriche può essere considerata un momento delicato del curriculum, in quanto il concetto di serie si sovrappone a quello di addizione, uno dei capitoli più familiari della storia scolastica di qualsiasi studente. Chiaramente una serie numerica *non* è riconducibile a un’addizione con “tantissimi” addendi, ma queste considerazioni non sono sempre presenti con chiarezza nella mente degli allievi che si accostano per la prima volta alle “addizioni con infiniti addendi”. Come avviene dunque l’ingresso di uno studente nel mondo delle serie, soprattutto quando esso non sia “preparato” da una trattazione del concetto di limite di una successione?
Come notato, una serie numerica viene percepita (anche per la simbologia impiegata) come un’ “addizione con tantissimi (infiniti) addendi”: dunque l’allievo ha direttamente a che fare con il

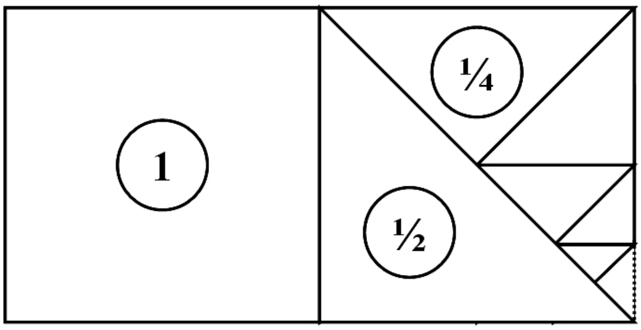
termine "infinito" e anche questo fa sì che l' "infinito" venga a costituire un accettabile risultato per queste "addizioni". Spesso una "somma di infiniti addendi" non nulli è intuitivamente considerata "infinitamente grande" (D'Amore, 1996) e la possibilità di indicare un controesempio sarebbe dunque preziosa. La storia della matematica può aiutarci: possiamo riferirci a Zenone d'Elea (490–430 a.C.) e al celebre paradosso di Achille e della Tartaruga, la cui analisi, com'è noto, porta a considerare una serie *convergente*.

3. Da Zenone a Nicola d'Oresme

L'uso di un esempio basato sulla serie delle potenze di ½ può essere efficace: la velocità di Achille potrebbe essere la metà di quella della Tartaruga e il vantaggio iniziale concesso dal primo alla seconda unitario. In tale caso

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

non superera 2, qualsiasi sia la quantità di addendi considerata. In ogni passo di questa "addizione" si aggiunge *la metà* di quanto servirebbe per raggiungere 2. Una visualizzazione didatticamente interessante della situazione può essere la seguente, in cui il rettangolo di area 2 viene suddiviso in un quadrato di area 1 e in una sequenza di triangoli rettangoli di area $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, …



Questo esempio può risultare didatticamente utile (Bagni, 2000); possono però sorgere equivoci: ad esempio, qualche allievo potrebbe notare che gli addendi sommati sono "sempre più piccoli" (indefinitamente piccoli): c'è dunque il rischio di interpretare tale condizione (che prevede che il termine generale sia infinitesimo) come *sufficiente* affinché una serie sia convergente, mentre essa è solo *necessaria*. Per evitare il formarsi di questa errata concezione potrà essere utile un altro esempio storico: la serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ (serie armonica), la cui divergenza è stata provata già nel XIV secolo (pur senza con ciò affermare una considerazione in senso moderno di una serie numerica nel Medioevo). Essa ha il termine generale infinitesimo e gli allievi potranno rendersi conto che la condizione che prevede ciò non basta a garantire la convergenza di una serie.

La dimostrazione della divergenza della serie armonica, seguendo Nicola d'Oresme (1323–1382), non coinvolge tecniche raffinate. Se addizioniamo i reciproci degli interi positivi possiamo scrivere:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

cioè raggruppare le frazioni considerate entro parentesi contenenti rispettivamente 2, 4, 8, … frazioni. La somma delle frazioni situate in ciascuna parentesi è non minore di ½, ed essendo possibile in questo modo ottenere un qualsiasi numero di parentesi, si può ottenere una somma maggiore di ogni costante arbitrariamente scelta (la serie armonica cresce "molto lentamente": per superare 20 servono 272 400 200 termini –quanto scritto è un'interpretazione moderna delle considerazioni trecentesche: la simbologia impiegata non era certo usata ai tempi di Nicola).

4. Presupposizioni e inferenze

Prima di proseguire è interessante ricapitolare le situazioni che si sono presentate allo studente che si accosta alle serie. Questo accostamento è influenzato da atteggiamenti mentali che possono rivelarsi decisivi nella fase interpretativa di un "discorso matematico" nuovo (D'Amore & Sbaragli, 2005; Sbaragli, 2005); per questo ci riferiremo ad essi come a delle "presupposizioni".
L'allievo, che conosce le operazioni aritmetiche, è portato a interpretare una serie come un'addizione "con tantissimi addendi" ("con infiniti addendi"):

Presupposizione originale (errata)

(i) una "addizione con infiniti addendi"
è pur sempre un'addizione e dunque avrà un "risultato";
(ii) essendo infinito il numero degli addendi,
tale "risultato" sarà infinito.

Essa è errata da due punti di vista: (i) è falso che una "addizione di infiniti addendi" sia una particolare addizione e abbia sempre un "risultato"; (ii) tale "risultato" (anche ammessa la sua esistenza) non è sempre infinito.
Approfondiamo la situazione chiedendoci: perché uno studente assume una posizione del genere? Ricordando la classificazione delle inferenze dovuta a Peirce (2003; Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 1999; Bagni, 2007 e in via di pubblicazione–a), potremmo innanzitutto individuare un'inferenza (scorretta) di questo genere:

Abduzione (a)

– *risultato* (*a*)	l'espressione considerata (una serie) è indicata con dei numeri e con il simbolo "+"
– *regola* (*a*)	se un'espressione è un'addizione, essa viene indicata con dei numeri e con il simbolo "+"
– *caso* (*a*)	l'espressione considerata (una serie) è un'addizione

Lo studente si trova dunque di fronte a un'espressione per alcuni versi nuova e cerca di interpretare (e di elaborare) tale espressione sulla base di alcuni elementi noti. Non si tratta, in questo caso, di un'abduzione particolarmente creativa (Paola, 2007), in quanto la regola (*a*) non ha richiesto una specifica ricerca: il soggetto ha semplicemente accostato una nuova scrittura ad altre, ben conosciute, formalmente simili (non intendiamo dunque affermare che nell'atteggiamento mentale dell'allievo debba essere riconosciuta una tipica abduzione; possiamo però dire che la struttura logica del ragionamento in gioco può ricondursi a uno schema abduttivo).

Quanto osservato spiega la prima parte della presupposizione originale. Per quanto riguarda la seconda parte, l'allievo si "sente in dovere" di assegnare un "risultato" all' "addizione" considerata. Possiamo allora pensare alla seguente inferenza (nuovamente scorretta):

Abduzione (*b*)

– *risultato* (*b*)	una serie ha "infiniti addendi"
– *regola* (*b*)	se la somma di una "addizione" di numeri supera ogni limitazione assegnata, allora tale addizione ha "infiniti addendi"
– *caso* (*b*)	la somma di una serie supera ogni limitazione assegnata

Questa abduzione è certamente più significativa della precedente. Infatti la regola (*b*) non è del tutto banale e la sua identificazione può collegarsi a situazioni cognitivamente interessanti. Il problema, com'è noto, è che non tutte le "addizioni con infiniti addendi" superano ogni limitazione assegnata…

Per correggere la prima presupposizione iniziamo dal punto (ii) e ricorriamo all'esempio storico citato: il paradosso di Achille e della Tartaruga, collegato alla serie geometrica delle potenze di ½. Esso smentisce il fatto che una "somma di infiniti addendi" sia sempre "infinita", ma *induce l'allievo a darsi una spiegazione della situazione* (che cosa c'è di "strano" in questa "addizione di infiniti addendi" tale da far sì che essa non superi la somma 2?). La risposta può portare a una seconda presupposizione errata:

Seconda presupposizione (errata)

(i) una "addizione con infiniti addendi"
è pur sempre un'addizione e dunque avrà un "risultato";
(ii) il "risultato" non è infinito
quando gli addendi diventano indefinitamente piccoli

L'origine della (nuova) parte (ii) di tale presupposizione può basarsi su di un procedimento vicino all'induzione:

Induzione (*c*)

– *caso* (*c*)	la serie 1+1/2+1/4+1/8+… ha il termine generale infinitesimo
– *risultato* (*c*)	la serie 1+1/2+1/4+1/8+… ha un "risultato finito"
– *regola* (*c*)	se una serie ha il termine generale infinitesimo allora ha un "risultato finito"

Anche per questa inferenza, come nel caso dell'abduzione (*a*), è possibile sollevare qualche obiezione. La considerata induzione verrebbe ad essere basata su di un'unica osservazione (1+1/2+1/4+1/8+…), mentre l'induzione, in generale, coinvolge una sequenza di osservazioni di *più* casi e risultati. Pur senza con ciò affermare che una tipica inferenza induttiva richieda un "numero minimo" di osservazioni, non possiamo non rilevare che una generalizzazione condotta sulla base di un solo dato esaminato è piuttosto debole (Paola, 2007; un'analoga osservazione potrà riproporsi per l'induzione (e) che sarà descritta tra poco; nel caso ora in esame, tuttavia, si può ipotizzare che l'allievo consideri la propria osservazione "facilmente" generalizzabile, che reputi "assai plausibile" il fatto che il termine generale infinitesimo porti a un "risultato" finito).

La correzione del (nuovo, ma ancora errato) punto (ii) può basarsi sul secondo esempio: la dimostrazione di Nicola d'Oresme della divergenza della serie armonica. L'allievo potrà rendersi conto che il fatto che il termine generale sia infinitesimo *non basta* a garantire la convergenza (l'insegnante potrà mostrare che la condizione è *necessaria*). Il punto (ii) è sotto controllo e siamo così giunti alla:

Terza presupposizione (parzialmente errata)

(i) una "addizione con infiniti addendi"
è pur sempre un'addizione e dunque avrà un "risultato";
(ii) il "risultato", quando gli addendi diventano indefinitamente piccoli,
può essere finito o infinito

Ora però è necessario occuparsi del punto (i) della presupposizione originale. È importante che lo studente si renda conto che una serie numerica *non* è un'addizione (né, in generale, una "somma algebrica": ci riferiremo infatti non soltanto alle serie a termini positivi). Questa esigenza ha robuste motivazioni teoriche, ma può anche essere considerata dal punto di vista pratico. Un ulteriore esempio contribuirà a chiarire le idee.

5. Addizioni e proprietà

Consideriamo ancora la serie delle potenze di ½. Una volta che l'allievo ha constatato che il suo "risultato" non è "infinito", si pone il problema di capire quale esso possa essere (una serie è ancora interpretata come un'addizione e ogni addizione *deve* avere un risultato). In effetti, abbiamo mostrato che

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

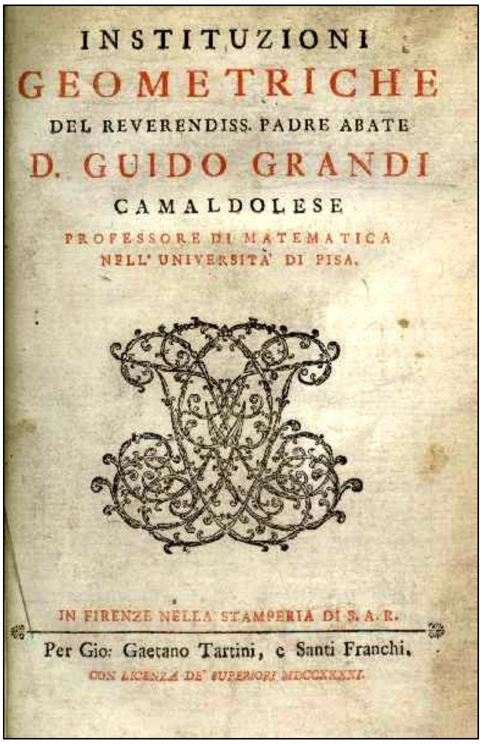
non supererà 2, qualsiasi sia la quantità di addendi considerata; al più possiamo sottolineare, sulla base di una verifica, che più addendi si fanno entrare in gioco più la somma parziale si avvicina a 2. Ma è sufficiente ciò per concludere che la somma di "tutti gli infiniti addendi" è proprio 2? Per ottenere ciò si potrebbe essere tentati di procedere nel (pericoloso) modo seguente: posto

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots = s$$

si "raccoglie" ½ tra tutti i termini dal secondo in poi, ottenendo:

$$1+\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right) = s \qquad 1+\frac{1}{2}s = s \qquad \text{da cui} \qquad s = 2$$

Nel realizzare il "raccoglimento" di ½ abbiamo applicato le proprietà formali delle operazioni aritmetiche: è però lecito operare così con un' "addizione di infiniti addendi"? Il procedimento ci ha portato a una conclusione corretta (la somma è davvero 2), ma può costituire un precedente piuttosto grave.



INSTITUZIONI
GEOMETRICHE
DEL REVERENDISS. PADRE ABATE
D. GUIDO GRANDI
CAMALDOLESE
PROFESSORE DI MATEMATICA
NELL' UNIVERSITÀ DI PISA.

IN FIRENZE NELLA STAMPERIA DI S. A. R.
Per Gio: Gaetano Tartini, e Santi Franchi.
CON LICENZA DE' SUPERIORI MDCCXXXXI.

6. La serie di Grandi

Prendiamo in considerazione ad esempio la "serie di Grandi".
Quale di queste due opzioni, 0 o 1, dovremmo privilegiare per dare un "risultato" a 1−1+1−1+1−1+…? Nel XVIII secolo la scelta cadeva spesso sulla media aritmetica di tali valori: la serie a segni alterni scritta modernamente come $\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i$ veniva eguagliata dallo stesso Grandi e da altri matematici del periodo a ½ (ad esempio: Leibniz, 1716, riportato nella figura seguente).

183

EXCERPTA
EX ACTIS ERUDITORUM
LIPSIENSIBUS,
TOMI QUINTI SUPPLEMENTORUM.

EPISTOLA G. G. L.

Ad V. Clarifs. CHRISTIANUM WOLFIUM, *Professorem Mathefeos Halenfem, circa fcientiam infiniti.*

Quæris a me, Vir Celeberrime, quid de Quæftione nuper a Clarifs. *Guidone Grandio* renovata fentiam, utrum 1 − 1 + 1 − 1 + 1 − 1 + &c. in infinitum fit ½; & quomodo abfurditas evitari poffit, quæ in tali enunciatione fe oftendere videtur. Nam cum infinities occurrere videatur 1 − 1 = 0, non apparet quomodo ex veris nihilis infinities repetitis poffit fieri ½. Intelligo, Dn. Grandium hanc vim infinito tribuere, ut ex nihilo faciat aliquid, & hinc non ineleganter illuftrare velle creationem rerum, quæ ex nihilo fit per divinam omnipotentiam. Sed Creatio non eft fimplex repetio Nihilorum, continetque realitatem novam & pofitivam fuperadditam. Audio etiam Cl. *Marchetium* Tomi V. Supplem. Sect. VI. Pag. 264.
Pro-

Nel 1703, Guido Grandi (1671–1742) affermò (Silov, 1978, I, p. 185): «Mettendo in modo diverso le parentesi nell'espressione 1–1+1–1+… io posso, volendo, ottenere 0 o 1. Ma allora l'idea della creazione *ex nihilo* è perfettamente plausibile». La constatazione di Grandi è riferita alla situazione seguente:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+... = 0+0+0+0+... = 0$$
$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+... = 1+0+0+0+... = 1$$

Secondo Grandi, la "dimostrazione" di ciò poteva essere ricondotta allo sviluppo seguente (che oggi però sappiamo essere valido soltanto per $|x|<1$):

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{+\infty} (-x)^i = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

Ponendo $x = 1$ (ma ciò *non* è tale da rispettare la condizione ricordata, $|x|<1$) seguirebbe infatti la convergenza di 1–1+1–1+… a ½ (Bagni 2005–b).
Queste osservazioni comportano un esplicito riferimento agli sviluppi in serie. Da un punto di vista più elementare, il risultato di convergenza della serie di Grandi a ½ potrebbe essere ottenuto anche nel modo seguente, attraverso un procedimento (pericolosamente) vicino a quello che, poco fa, ci ha condotto ad affermare che la somma di tutte le potenze di ½ è 2. Posto

$$1-1+1-1+\ldots = s$$

si "raccoglie" –1 tra tutti i termini dal secondo in poi, ottenendo:

$$1-(1-1+1-...) = s \qquad s = 1-s \qquad \text{da cui} \qquad s = ½$$

Questa volta, però, le conclusioni sono errate (la stessa implicita ammissione che 1–1+1–1+… indichi un numero s è ingiustificata); è infatti oggi noto che la successione delle somme parziali associata alla serie di Grandi non ammette alcun limite: da ciò segue che *tale serie non ammette alcuna somma* (non ci si occuperà, in questa sede, della convergenza secondo Cesaro: Bagni, 2007–b). Si tratta di una serie indeterminata (e anche qualche matematico del XVIII secolo aveva suggerito una tale conclusione: Riccati, 1761, I, p. 87).

7. Verso una presupposizione corretta…

Quanto osservato ci induce a ribadire che l'identificazione tra le "addizioni normali" e le serie intese come "addizioni con infiniti addendi", ammessa nella presupposizione originale al punto (i), non è accettabile. Proprio l'ultimo esempio storico può essere utile in tal senso.
Possiamo pensare di proporre ai nostri allievi la serie di Grandi e di mostrare che essa non ha alcun "risultato"; ma ciò potrebbe non essere banale. A rigore, come sappiamo, sarebbe necessario riferirsi alla nozione di limite di una successione e dunque mostrare che la successione delle somme parziali associata alla serie di Grandi (1; 0; 1; 0; 1; 0; …) non ammette limite. Bisognerebbe però tener conto della storia scolastica della classe in gioco: in quale fase del curricolo matematico ci troviamo? Gli allievi hanno già trattato il concetto di limite di una successione? Se sì, un'analisi della situazione porterà subito alla conclusione desiderata: l'insegnante darà la definizione di "somma di una serie", ben distinta da quella di "risultato di un'addizione", e mostrerà che la serie di Grandi non ha alcuna somma. Le presupposizioni analizzate avrebbero dunque vita breve.
Un primo approccio alle serie potrebbe tuttavia avvenire, in termini meno rigorosi, anche senza far riferimento alla nozione di limite (Bagni, 2005–a). In tale caso non sarà possibile invocare l'assenza del limite delle successione delle somme parziali per escludere la presenza di un "ri-

sultato” per 1–1+1–1+… Una strategia alternativa si basa sulla possibilità di ottenere diversi “risultati” per 1–1+1–1+… applicando (impropriamente) i tre procedimenti:

$$s = (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+... = 0+0+0+0+... = 0$$
$$s = 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+... = 1+0+0+0+... = 1$$
$$1-1+1-1+\ldots = s \;\;\Rightarrow\;\; 1-(1-1+1-\ldots) = s \;\;\Rightarrow\;\; s = 1-s \;\;\Rightarrow\;\; s = ½$$

Questi procedimenti *non sono accettabili* in quanto applicano a un’ “addizione di infiniti addendi” delle proprietà che valgono per operazioni propriamente dette (leggi di composizione interna binarie definite in un insieme numerico). La discordanza dei risultati ottenuti potrebbe indurre l’allievo a comprendere che *la presenza di questi “infiniti addendi” cambia radicalmente le cose*, sia da un punto di vista pratico che da un punto di vista teorico.
Il percorso ora ipotizzato può sintetizzarsi nell’inferenza seguente, vicina alla *deduzione*:

Deduzione (*d*)

– *regola* (*d*) a tutte le comuni operazioni aritmetiche devono poter essere applicate le ben note proprietà

– *caso* (*d*) applicando in modi diversi alla 1–1+1–1+… (serie di Grandi) le proprietà delle operazioni aritmetiche si ricavano:

$$1-1+1-1+\ldots = (1-1)+(1-1)+\ldots = 0$$
$$1-1+1-1+\ldots = 1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1$$
$$1-1+1-1+\ldots = 1-(1-1+1-1+\ldots) = ½$$

e ciò è contraddittorio

– *risultato* (*d*) la serie 1–1+1–1+… non è una comune addizione (non ha un “risultato”)

Questa inferenza è chiaramente accettabile.
Dunque alla terza presupposizione si potrà sovrapporre la seguente, che possiamo ritenere corretta, adeguatamente motivata dalla precedente discussione:

Quarta presupposizione

(i) una “addizione con infiniti addendi”
non è una vera e propria addizione;
(ii) essa può avere un “risultato” finito o infinito
oppure non avere alcun “risultato”

Potremmo tuttavia notare ancora che la precedente deduzione si riferisce a una serie ben determinata: la serie di Grandi. Per giungere alla quarta presupposizione (un’affermazione “sulle serie”) l’allievo potrebbe essere portato a operare una generalizzazione, per alcuni versi riconducibile a un’inferenza induttiva (pur ricordando le precedenti annotazioni critiche sulla scarsità delle osservazioni a disposizione):

Induzione (*e*)

– *caso* (*e*) 1–1+1–1+… è una serie numerica
– *risultato* (*e*) 1–1+1–1+… non è una comune addizione

– *regola* (*e*) le serie numeriche non sono comuni addizioni

Una fase di controllo potrà essere ottenuta considerando altri esempi di serie (si noti che la conclusione, in questo caso, non estende la proprietà di "non avere una somma" a *tutte* le serie numeriche, cosa che sarebbe ovviamente errata; deve essere piuttosto considerata in termini di quantificazione: "*non tutte* le serie numeriche hanno una somma", quindi *in generale* "le serie numeriche non sono comuni addizioni" – se così fosse, *tutte* avrebbero una somma).
Quest'ultima presupposizione, così progressivamente costruita, potrà finalmente consentire anche agli allievi principianti (dunque non sorretti dalla trattazione del concetto di limite) di entrare nel mondo delle serie senza l'eredità di un'analogia, quella tra la serie numerica e l'addizione aritmetica, che spesso ostacola in maniera decisiva l'apprendimento.

Riferimenti bibliografici

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (1999). Dalle congetture alla dimostrazioni: una possibile continuità cognitiva. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 22B, 3, 209–233.

Bagni, G.T. (2000). Difficulties with series in history and in the classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (a cura di), *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (pp. 82–86). Dordrecht: Kluwer.

Bagni, G.T. (2005–a). The historical roots of the limit notion. Cognitive development and development of representation registers. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 5, 4, 453–468.

Bagni, G.T. (2005–b). Mathematics education and historical references: Guido Grandi's infinite series. *Normat*, 55, 4, 173–185.

Bagni, G.T. (2006–a). *Linguaggio, storia e didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Bagni, G.T. (2006–b). Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 3, 259–280.

Bagni, G.T. (2007–a). *Rappresentare la matematica. Simboli, parole, artefatti e figure.* Roma: Aracne.

Bagni, G.T. (2007–b). Didactics and history of numerical series: Grandi, Leibniz and Riccati, 100 years after Ernesto Cesaro's death. In *Proceedings of Joint Meeting of UMI-SIMAI / SMAI-SMF "Mathematics and its Applications", Panel on Didactics of Mathematics, Turin, July 6th, 2006. La matematica e la sua didattica. Special Issue*. 21, 1, 75-80.

Bagni, G.T. (2008). Richard Rorty (1931–2007) and his legacy for mathematics educators. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 1, 1–2.

Bagni, G.T. (in via di pubblicazione–a). *Interpretazione e didattica della matematica. Una prospettiva ermeneutica*.

Bagni, G.T. (in via di pubblicazione–b). La storia della matematica nell'insegnamento e apprendimento della matematica. In *Atti del Convegno Nazionale "Il piacere di insegnare, il piacere di imparare la matematica"*. San Giovanni Valdarno, Montevarchi, Figline Valdarno, Terranuova Bracciolini, 21–23 febbraio 2008.

D'Amore, B. (1996). L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi. *La matematica e la sua didattica*, 3, 322–335.

D'Amore, B. (2005). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (Nyaya). *For the Learning of Mathematics*, 25, 2, 26–32.

D'Amore B. & Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*, 2, 139–163.

Foucault, M. (2005). *L'archeologia del sapere*. Milano: Rizzoli (1969, *L'archéologie du savoir*. Paris: Gallimard).

Gadamer, H.G. (2000). *Verità e metodo*. G. Vattimo (a cura di). Milano: Bompiani (1960, *Wahrheit und Methode: Grundzüge einer philosophischen Hermeneutik*. Tübingen: Mohr).

Heidegger, M. (2005). *Essere e tempo*, nuova edizione a cura di F. Volpi sulla traduzione di P. Chiodi. Milano: Longanesi (1927, *Sein und Zeit*. Halle an der Saale: Niemeyer).

Jung, M. (2002). *L'Ermeneutica*. Bologna: Il Mulino (2001, *Hermeneutik zur Einführung*. Hamburg: Junius).

Leibniz, G.W. (1716). Epistola G.G.L. ad V. Clariss. Christianum Wolfium, Professorem Matheseos Halensem, circa scientiam infiniti. *Excerpta ex Actis Eruditorum Lipsiensibus*, V suppl., 183–188.

Nietzsche, F. (1975). *Frammenti postumi, 1885–1887*. Milano: Adelphi.

Paola, D. (2007). *Comunicazione privata all'Autore*.

Peirce, Ch.S. (2003). *Opere*. M.A. Bonfantini (a cura di). Milano: Bompiani (1931–1958, *Collected Papers*. I–VIII. Cambridge: Harvard University Press).

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio–cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17, 1, 26–33.

Riccati, J. (1761). *Opere*. Lucca: Jacopo Giusti e Giuseppe Rocchi.

Rorty, R. (2004). *La filosofia e lo specchio della natura*. Nota introduttiva di D. Marconi & G. Vattimo. Milano: Bompiani (1979, *Philosophy and the mirror of nature*. Princeton: Princeton University Press).

Sbaragli S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica*, 1, 57–71.

Schleiermacher, F.D.E. (2000). *Ermeneutica*. M. Marassi (a cura di). Milano: Bompiani.

Silov, G.E. (1978). *Analisi matematica. Funzioni di una variabile*. Moskva: Mir (1978, *Matematičeskij analiz. Funkzii odnogo peremennogo*. Moskva: Nauka).

Speranza, F. (1999). Appello all'ermeneutica. *Quaderni di ricerca in didattica* 8, Palermo.

Vattimo, G. (2002). *Oltre l'interpretazione*. Roma–Bari: Laterza.