

Situation fondamentale caractéristique des connaissances relatives a la structuration algébrique des nombres

Mohamed BAHRA*, Ahmed AZOUGGARH*

*L’algèbre peut-elle être introduite aujourd’hui comme reprise théorique de l’étude de l’arithmétique et des nombres ? ou comme système de désignation de grandeurs ? ou comme instrument de l’étude des fonctions ? ou comme système formel autonome ? **comme sténographie d’algorithmes portant sur des valeurs inconnues** ? ou non déterminées ? comme moyen de généralisation ou de modélisation ?*

Guy BROUSSEAU, *que peuvent apporter les différentes approches de la didactique des mathématiques aux enseignants*¹ ? 1989, p. 6.

Résumé

L’introduction des nombres relatifs, du calcul littéral, des nombres rationnels, au collège, et des nombres complexes, au lycée, s’accompagne de l’institutionnalisation des algorithmes suivants : « la règle des signes », « la sommation de deux fractions, par réduction au même dénominateur », « la multiplication de deux fractions » et « le calcul des solutions de l’équation de second degré à coefficients réels, via le calcul du discriminant Δ ». Pour certains élèves l’expression « algèbre » renvoie à ces algorithmes et seulement à ces derniers. Cette conception de l’algèbre, qu’en hommage à Guy BROUSSEAU, nous qualifions de « sténographique » (voir l’épigraphe ci-dessus), nous la mettons en évidence et nous montrons son importance, en s’appuyant sur la méthode préconisée par la théorie des situations didactiques des mathématiques (TSD), laquelle méthode est basée sur le concept de ‘situation fondamentale’, développé par Guy BROUSSEAU, l’auteur de la TSD.

Via ce concept, nous montrons que :

- d’un coté, le Système d’Enseignement des Mathématiques fonctionne sous l’hypothèse erronée suivante : la conception sténographique de l’algèbre doit évoluer, chez l’élève : celui-ci saura la transformer, progressivement et spontanément, pour en faire l’outil de structuration des nombres, en le monoïde IN des entiers naturels, l’anneau Z des entiers relatifs, le corps Q des rationnels, le corps IR des réels et le corps C des complexes ;
- et que d’un autre coté :
 - cette conception est la conception d’une majorité des étudiants arrivant à la fin des deux premiers cycles universitaires ;
 - l’évolution de cette dernière vers l’outil de structuration des nombres, auquel elle devrait céder sa place chez ces étudiants, ne se manifeste guère ;
 - cette évolution est bloquée par le type de contrats didactiques successifs que le système didactique noue autour des notions de point, de nombre et de fonction ;
 - une refonte de ces contrats est nécessaire et doit être basée sur l’explicitation puis le franchissement de certains obstacles didactiques qui sont la véritable cause de la persistance de cette conception, jusque chez les étudiants des sections à forte teneur mathématique.

* CPR de Casablanca (Maroc).

¹ Cette citation est tirée de la conférence donnée par Guy BROUSSEAU au III CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE LA INVESTIGACION EN LA DIDACTICA DE LAS CIENCIAS Y DE LAS MATEMATICAS. SANTIAGO DE COMPOSTELA, 20-22 septembre 1989.

Sommario

L'introduzione dei numeri relativi, del calcolo letterale, dei numeri razionali, alle scuole medie, e dei numeri complessi, al liceo, si accompagna attraverso l'istituzionalizzazione dei seguenti algoritmi: “la regola dei segni”, “la somma di due frazioni, per riduzione allo stesso denominatore”, “moltiplicazione di due frazioni” e “calcolo delle soluzioni dell'equazione di secondo grado a coefficienti reali, attraverso il calcolo del discriminante Δ ”. Per certi allievi l'espressione “algebra” rinvia a questi algoritmi e solamente a questi ultimi. Questa concezione dell'algebra, che in omaggio a Guy BROUSSEAU, chiamiamo “stenografica” (vedi l'epigrafe in alto), la mettiamo in evidenza e mostriamo la sua importanza, appoggiandoci sul metodo preconizzato dalla teoria delle situazioni didattiche di matematica (TSD), metodo basato sul concetto di “situazione fondamentale”, sviluppata da G.Brousseau, autore della TSD.

Attraverso questo concetto, mostriamo che:

- da una parte il Sistema di Insegnamento delle Matematiche funziona sotto l'ipotesi erronea seguente: la concezione stenografica dell'algebra deve evolvere, nell'allievo: saprà trasformarla, progressivamente e spontaneamente, per farne uno strumento di strutturazione dei numeri, nel monoide IN di interi naturali, l'anello Z di interi relativi, il corpo Q dei razionali, il corpo IR dei reali ed il corpo C dei complessi;
- e che d'altra parte:
 - questa concezione è la concezione di una maggioranza di studenti che arrivano alla fine dei primi due cicli universitari;
 - l'evoluzione di questa ultima verso lo strumento di strutturazione dei numeri, al quale dovrebbe cedere il suo posto negli studenti, non si manifesta;
 - questa evoluzione bloccata dai tipi di contratti didattici successivi che il sistema didattico lega attorno alla nozione di punto, di numero e di funzione;
 - un rifacimento di questi contratti è necessario e deve essere basato sull'esplicitazione e poi il superamento di certi ostacoli didattici che sono causa della persistenza di questa concezione, sino agli studenti delle sezioni a forte tenore matematico.

1. OBJET DE L'ÉTUDE ET MÉTHODE D'APPROCHE

La motivation de cette recherche est née d'un doute. Ce doute porte sur la conception de l'algèbre que les manuels auraient tendance à promouvoir dans le milieu scolaire. Il met en avant la question suivante : Ces manuels ne tendraient-ils pas à promouvoir la conception sténographique de l'algèbre ?

D'où l'objectif de l'étude : « **Cerner la signification véritable de cette conception, tout en identifiant des arguments forts, en faveur de la conclusion affirmant la tendance des manuels à la développer chez l'élève et à la transformer en une conception robuste.**»

Pour identifier ces arguments, il faut disposer d'une grille de lecture des manuels en question. Nous avons réalisé une étude d'épistémologie historique sur les concepts de calcul, de système formel et de structure algébrique, pour en faire cette grille de lecture. Grâce à cette étude nous avons pu identifier plusieurs arguments en faveur de la conclusion annoncée. Ensuite le recours à la méthode préconisée par la Théorie des Situations Didactiques (TSD) nous a permis d'établir le caractère intrinsèquement fort de ces derniers en tant qu'arguments en faveur de la dite conclusion.

Rappelons que cette méthode consiste à confronter les conditions effectives d'enseignement à des situations caractéristiques (dites fondamentales), impliquant de façon minimale, de la part des acteurs de la relation didactique, l'usage ou la construction d'un concept et de caractériser ainsi les connaissances visées ou obtenues.

L'étude épistémologique qui nous a servi de grille de lecture des manuels scolaires s'articule autour d'une conception de l'algèbre élémentaire classique comme *système (symbolique) formel*, développée par Gilles-Gaston GRANGER dans (GRANGER G-G., 2003, p. 103-124), que nous avons réexaminé à l'aune du concept de *régulation syntaxique* développé par ce même auteur dans (GRANGER G-G. 2003, p. 149-169), et à l'aune du concept de *'dialectique outil/objet'* développé par Régine DOUADY dans (DOUADY, 1986).

Cette étude qui nous a servi de grille de lecture des manuels, nous permettant d'inférer sur la nature de la conception de l'algèbre que ceux-ci auraient tendance à promouvoir dans le milieu scolaire, nous a aussi permis de dérouler une *analyse épistémologique à priori des situations didactiques* (BROUSSEAU, 1987) pouvant servir d'instrument de confrontation à la contingence des inférences tirées de cette lecture.

Pour mieux cerner la signification de la conception sténographique de l'algèbre, nous avons aussi repris et actualisé une conception de l'algèbre comme *'calcul de fonctions'*. Cette conception est présentée par Auguste COMTE (voir COMTE A. (1975)). Or ce *'calcul de fonctions'* est considéré, à juste titre, par COMTE, comme relevant d'un type de problèmes mathématiques d'où doit dériver l'algèbre, et ce, pour une plus grande intelligibilité de celle-ci. C'est donc à partir de cette conception comtienne que nous avons pu concevoir des situations répondant aux stipulations de l'analyse épistémologique a priori. En effet nous avons pu porter la conception comtienne de l'algèbre à la réalisation d'une ingénierie didactique. Dans cette dernière, nous avons eu recours, entre autres registres, à celui de la géométrie analytique, registre rendu par le système didactique un point aveugle des contrats didactiques successifs que ce dernier nous a permis de développer autour des structures algébriques.

Nous avons donc repris la conception comtienne de l'algèbre et nous l'avons actualisée sous la forme d'un canevas de situations que nous avons voulu fondamentales et caractéristiques des connaissances relatives à la symétrisation de \mathbb{N} , puis de \mathbb{Z} , et enfin à la clôture de \mathbb{R} , laissant pour une étude ultérieure le cas de la complétion de \mathbb{Q} . **Ces situations inscrivent ces opérations de symétrisation et de clôture dans un continuum, que nous dénommons « structuration algébrique des nombres »** ; Elles font intervenir, pour chaque structure et de manière originale, un modèle géométrique et un modèle formaliste. L'adoption de l'un ou de l'autre servant de variable didactique.

Mais de là à confondre les situations ainsi construites avec *« l'archétype de toutes les situations où la structuration algébrique des nombres apparaît comme solution d'une situation d'action »* (BROUSSEAU 2005, p. 54.), il n'y a qu'un pas que la double analyse épistémologique et didactique nous a autorisé à franchir.

Avant de présenter cette situation, que nous désignerons désormais par le sigle **SF(SAN)**, acronyme de **'Situation Fondamentale caractéristique des connaissances relatives à la Structuration Algébrique des Nombres**, et avant de dérouler l'analyse didactique a priori et a posteriori des **comportements sollicités**, à travers cette situation, et ceux **effectivement suscités**, grâce à elle, auprès d'un groupe d'étudiants, nous présentons, en deux volets, le soubassement épistémologique qui nous a servi de guide pour la bâtir : le premier volet, qualifié d'analyse épistémologique a priori, fixe de manière normative les caractères qui fondent la situation, le second, qualifié d'analyse épistémologique a posteriori est un compte rendu sur la possession effective de ces caractères par cette situation. Ce soubassement épistémologique nous a aussi permis de cerner la signification de la conception sténographique de l'algèbre et servi de grille de lecture des manuels scolaires. Il est suivi de l'étude, introduisant l'analyse didactique, de la compatibilité de la **SF(SAN)** avec l'objet et avec la méthode de la **TSD**.

2. SOUBASSEMENT ÉPISTÉMOLOGIQUE DE LA SITUATION FONDAMENTALE CARACTÉRISTIQUE DE LA STRUCTURATION ALGÈBRIQUE DES NOMBRES

2.1. Analyse épistémologique a priori de la SF(SAN)

2.1.1 Régulation syntaxique et structures algébriques.

A la suite de Gilles-Gaston Granger, qui se propose dans (GRANGER G-G. 2003, pp. 149-169) « *d'examiner l'usage, manifeste ou latent, du concept de régulation dans la construction par le logicien de systèmes symboliques formels* », nous nous proposons d'examiner l'usage du même concept dans les constructions didactiques de structures algébriques. Et de conduire cet examen à l'aune de la conception comtienne de l'algèbre comme calcul de fonctions.

Il nous paraît en effet possible, partant de cette conception et d'une interprétation de la proposition de Gilles-Gaston Granger, de mieux faire apparaître la nature profonde des contrats didactiques successifs que le système didactique noue autour des structures algébriques élémentaires.

Concernant les systèmes symboliques formels que construit le logicien, Gilles-Gaston Granger (2003) considère que cette construction consiste d'abord en l'explicitation d'un ensemble fini de règles, qui constitue une image homomorphe du système total, lequel est alors conçu comme ensemble de « productions »² selon ces règles. D'après cet auteur, le système des règles est formé d'énoncés appartenant à une métalangue, puisque ils désignent des propriétés d'expressions du système formel à construire. Aussi considère-t-il assez naturel de *définir la régulation comme la présence d'un métasystème, à l'intérieur même du système*. Or, rappelle l'auteur, nous savons depuis Gödel et Tarski que la formulation des règles ne nous fournit pas la maîtrise complète des systèmes formels et qu'un système formel comme celui des mathématiques classiques ne comporte pas en lui-même les moyens de constituer sa propre métalangue : *trop riche pour être décidable, il ne l'est pas assez pour pouvoir définir lui-même la vérité de ses énoncés*. Ce qui a conduit cet auteur à conclure qu'un système formel ne saurait inclure une image suffisante de lui-même, et qu'un tel système ne saurait donc être régulé que de façon partielle.

D'un point de vue spécifique à la didactique des mathématiques, cela nous amène à se poser la question suivante : **si nous voulons analyser à l'aune de cette conclusion les problèmes de didactiques des structures algébriques, serait-il nécessaire de voir chacune de ces structures comme formée de deux parties à la fois complémentaires et concurrentes : une partie effectivement régulée et une partie virtuellement régulée ?**

Ce serait le cas si une structure algébrique est assimilable à une langue, lorsque celle-ci, selon les termes de Gilles-Gaston GRANGER (2003), est prise sous son aspect le plus dépouillé et le moins spécifique. Or, c'est justement le cas puisque la langue, ainsi entendue, peut, selon ce même auteur, être considérée comme une partie du monoïde libre L^* engendré par un ensemble fini L de symboles qui constitue son alphabet. Les éléments de L^* qui font partie de la langue sont les « mots ».

Notons que, d'après cet auteur, le fait de régulation fondamental d'une langue apparaît avec la restriction du monoïde L^* aux seuls mots permis, et le fait syntaxique se présente comme une contrainte réduisant le monoïde libre des mots « virtuels » au sous-ensemble des « mots » permis, disons « corrects ».

Les structures algébriques élémentaires apparaissent alors, comme relevant d'un projet accompli, qui visait la réalisation d'extensions successives d'une certaine langue, en

² Le mot de « productions », souligne l'auteur, ne doit certainement pas conserver ici la connotation temporelle, que seule pourrait légitimement restaurer le point de vue du psychologue sur le fonctionnement de la pensée logique du langage.

L'occurrence une structure numérique, par la transformation de familles de mots « virtuels » de cette langue en de familles de mots « corrects ».

2.1.2. Régulation syntaxique et dialectique outil/objet

La reprise de ce projet nous fait prendre l'une des deux attitudes suivantes : la première consiste à établir, a posteriori, par un calcul usant des seules règles de « productions » anciennes et disponibles avant tout calcul, des conditions suffisantes sous lesquelles des mots « virtuels » deviennent des mots « corrects ». La deuxième consiste à établir a priori, les conditions nécessaires sous lesquelles des mots « virtuels » deviennent des mots « corrects », et ce, par un calcul usant de règles nouvellement introduites et éventuellement choisies, pour la circonstance, entre plusieurs éventualités rendues disponibles par ce calcul même.

La situation fondamentale caractéristique des connaissances relatives à la structuration algébrique des nombres, dont la perfection doit caractériser les structures algébriques, doit alors actualiser ce couplage opération/objet décrit par Gilles-Gaston GRANGER dans (GRANGER G.-G. 2003, p 301-303) : plus précisément cette situation doit discriminer deux point de vues : le premier menant à « *la production d'objets par un système opératoire* » et le second, en quelque sorte inverse, devant mener à « *la constitution d'un système opératoire à partir de la description d'objets empiriques* ». La situation doit faire apparaître comment la première attitude se manifeste quand on adopte le premier point de vue, comment la deuxième attitude se manifeste quand on adopte le second point de vue, et comment ces deux attitudes proviennent de la dualité opération/objet, entendue comme « *relation de réciprocité, de correspondance mutuelle entre deux registres d'entités de pensée* » voir (GRANGER G.-G. 2003, p 301-303).

Dans la première attitude la régulation syntaxique est mise à contribution de manière implicite par l'activité mathématicienne, elle est, suivant la conception de 'dialectique outil/objet' développée par Régine DOUADY (1986), mobilisée, dans cette activité, exclusivement comme outil. Ceci peut s'expliquer, relativement au discours scientifique en tant que discours « *dont la forme du raisonnement mathématique définit la cohérence* », par la description qu'en donne DESANTI J. T. quand il écrit :

« ...Il en résulte qu'un tel discours, du seul fait qu'il se déroule conformément à ses normes immanentes, expulse en vertu de son seul contenu les énoncés mal formés. » (DESANTI J. T. 1975, p 11).

Cependant, la deuxième attitude contraint celui qui la prend à hisser la régulation syntaxique au rang d'objet d'étude à part entière, car cette attitude consiste, en fin de compte, à « *substituer partiellement aux contenus empiriques des contenus formels* », voir (GRANGER G.-G. 2003, p. 303).

C'est que, du point de vue qui est le notre, c'est-à-dire celui du didacticien, nous considérons, eu égard à cette conclusion de Gilles-Gaston Granger à propos du caractère partiel de la régulation du système formel, citée plus haut, que la première attitude prend le système formel par son côté *effectivement régulé*, tandis que la deuxième le prend par son côté *virtuellement régulé* se contraignant ainsi à en extraire les principes régulateurs qui, bien que présents, ne le sont que sous forme latente : puisqu'il s'agit, dans ce second cas, d'entités empiriques, organisés en un système opératoire matériel autant que conceptuel, auxquels sont potentiellement substituable des entités formels.

Les deux cotés fonctionnent donc à la manière de deux attracteurs dont les bassins se partagent les pratiques calculatoires. Ces attracteurs mettent celles-ci face à une bifurcation, ce qui signifie qu'au début d'exécution de chaque projet de démonstration (de calcul), la pratique est chaque fois entraînée vers la zone d'influence de l'un ou de l'autre des deux attracteurs, mais immédiatement avant le commencement de l'exécution, ces deux éventualités se présentent simultanément.

La dialectique outil/objet étant inscrite dans l'activité mathématicienne, cette activité passe facilement d'une zone à une autre, l'illustration en est ce que JEAN DIEUDONNÉ désigne par 'transferts d'intuition' :

« ... l'exemple type de ces transferts est la diffusion à travers toutes les mathématiques du langage géométrique. Après l'invention, par Descartes et Fermat, de la méthode des coordonnées, qui réduisait les problèmes de géométrie à des problèmes d'algèbre, on avait pas été long à remarquer qu'inversement, des problèmes algébriques où ne figuraient que 2 ou 3 variables pouvaient, en considérant ces variables comme les coordonnées d'un point, s'interpréter comme équivalents à des problèmes de géométrie ; grâce à cette transcription, ils donnaient plus de prise à une intuition tirée de l'expérience géométrique, qui pouvait servir de guide vers leur solution. » (DIEUDONNÉ J., 1987, p. 178).

Par contre cette dialectique n'étant pas inscrite dans l'activité mathématique de l'élève, le passage de celle-ci de la zone d'influence du premier attracteur à celle du second lui serait inaccessible, à moins que soient mobilisés, pour cela, des moyens didactiques spécifiques.

2.1.3. Les manuels scolaires, vecteurs de la conception sténographique de l'algèbre ?

La nécessité dont serait le système didactique de disposer de moyens didactiques spécifiques pour permettre à l'activité mathématique de l'élève de s'arracher de la zone d'influence du premier attracteur pour rejoindre celle du second, pose le problème de la disponibilité de ces moyens et de leur intégration par le système didactique. D'où la question suivante :

Parmi les deux zones, dans quelle zone le système didactique a-t-il tendance à placer l'activité mathématique de l'élève, dans la zone d'influence du premier attracteur ou dans celle du second ?

En d'autres termes :

Parmi les deux cotés du système formel, vers quel côté le système didactique se laisse-t-il entraîner le plus à orienter l'activité mathématique de l'élève, vers le côté effectivement régulé ou vers le côté virtuellement régulé ?

Nous savons, depuis les travaux d'Yves CHEVALLARD (1991) sur la transposition didactique, que le système didactique soumet les objets de savoir mathématique à un processus d'algorithmatisation. Ceci témoigne du côté vers lequel le système didactique se laisse entraîner à orienter l'activité mathématique de l'élève. En outre, de par sa virtualité même, le côté virtuellement régulé reste inaccessible à cette même activité sans un travail de dévolution tel que le propose BROUSSEAU (1986b).

Or il est notoire qu'autant le travail d'algorithmatisation est à la portée des pratiques didactiques courantes, par manuels interposés, autant le travail de dévolution est hors de cette portée. Le système didactique serait donc enclin à se laisser entraîner à diriger l'activité mathématique de l'élève vers la zone d'influence du premier attracteur plutôt que vers celle du second. D'où les questions suivantes :

- Le système didactique ne fonctionnerait-il pas, dans les faits, sous l'hypothèse erronée selon laquelle la première attitude engendre la deuxième ?

- En d'autres termes ne serait-il pas victime de l'illusion qui consiste à croire qu'à force de faire prendre à l'élève la première attitude, tôt ou tard, celui-ci saura prendre spontanément la deuxième, chaque fois que la situation l'exige ?

- N'allons nous pas nous trouver devant une trop grande population d'élèves qui mobilisent dans les calculs algébriques la régulation syntaxique, sans aucune difficulté, mais seulement comme outil, lesquels élèves seraient pourtant incapables d'appréhender cette régulation comme objet d'étude à part entière, fussent-ils des élèves devenus étudiants et ayant fréquentés des sections à forte teneur mathématique ?

Ces questions émanent de la dichotomie 'travail d'algorithmatisation/travail de dévolution' conjuguée à l'impossibilité quasi certaine de mener un travail de dévolution par manuels interposés, du moins dans l'état actuel des manuels scolaires et de celui des recherches en didactique des mathématiques, à cause notamment de la difficulté qu'il y aurait à rendre l'activité mathématique de l'élève suffisamment mathématicienne pour qu'elle puisse s'arracher de la zone d'influence du premier attracteur et rejoindre celle du second.

Cette combinaison, prise avec son renvoi aux questions précédentes, est un argument en faveur de la conclusion affirmant que les manuels scolaires et les monographies sont entraînés malgré eux à promouvoir la conception sténographique de l’algèbre dans les milieux scolaire et universitaire, peut être à cause de la proximité entre structures algébriques et systèmes formels.

Notre conviction concerne cette combinaison ; elle énonce que celle-ci est suffisamment forte en tant qu’argument pour que la conclusion qu’elle induit soit admise comme propriété caractéristique des manuels scolaires.

De la conception comtienne de l’algèbre, dont nous donnons ci-dessous une caractérisation, nous tirons un second argument qui renforce celui qu’on vient de dégager : en effet l’analyse de cette conception permet de tracer une esquisse de la situation fondamentale caractéristique des connaissances relatives à la structuration algébrique des nombres, en ce sens que, si comme le souligne JEAN TOUSSAIN DESANTI dans (*DESANTI J. T. 1975, p. 15-17*), « ... la science s’offre dans l’horizon d’un ensemble de configuration textuelles, systèmes ouverts d’énoncés déjà constitués et qui se donne à déchiffrer », et qu’alors : « le problème est de comprendre comment ce qui est là, livré, déjà réfléchi dans une formulation canonique, peut être produit dans la forme capable d’en assurer le fondement et d’en manifester la genèse », alors l’analyse de la conception comtienne permet d’aborder ce problème même et, ce faisant, dégager et l’argument et l’esquisse en question. Notons que cette esquisse, vise entre autres choses, dégager un rapport aux structures algébriques qui serait la négation de celui que JEAN TOUSSAIN DESANTI, invoquant Spinoza, attribue à ceux qu’il désigne par ‘savants vulgaires’. Tels que DESANTI les décrit, ces derniers nous rappellent la noosphère, cette architecte de la transposition didactique identifiée et caractérisée par YVES CHEVALLARD (1991).

DESANTI avance à ce propos que :

« ... ce qui caractérise le « corps des sciences » (par exemple la mécanique issue de Galilée, ou même la géométrie), c’est qu’on y considère des « créatures » : c’est-à-dire des déterminations singulières de l’étendue (le cercle par exemple), ou des configurations matérielles manifestant un état donné de mouvement (par exemple, les corps individualisés dont Spinoza dit qu’ils réalisent une proportion donnée et invariante de mouvement et de repos). Les savants vulgaires (*vulgus philosophicum*) peuvent fort bien enchaîner, à ce niveau, des relations causales, ils peuvent dérouler, en un procès discursif, des enchaînements de théorèmes. Leur savoir restera en partie aveugle, et donc menacé, si les chaînes ne sont explicitement rapportés à leur source et reproduites à partir d’elle. Dans ce mouvement de conversion réflexive, la configuration donnée (empirique) du savoir est bouleversée. Le discours de l’entendement, discours fondateur, est un discours polémique : il apporte la discrimination et restitue les structures vraies ». (*DESANTI J. T., 1975, p. 15-17*).

Si la noosphère est, de notre point de vue, assimilable à ces ‘savants vulgaires’, la situation fondamentale, par contre, doit, quant à elle, pouvoir rapporter explicitement les chaînes, dont il est question, à leur source, les reproduire à partir de cette source, apporter la discrimination et restituer les structures vraies, comme l’exige l’épistémologie de DESANTI. Et, partant, par exemple, d’une caractérisation de la conception comtienne de l’algèbre, cette situation doit pouvoir nous mettre dans la position épistémique du ‘penseur’ que décrit DESANTI quand il écrit :

« Le penseur ‘reçoit’ le texte de la science : il est un lecteur qui a pour fonction de défaire ce texte, de l’ouvrir et d’y rendre manifestes les projets unitaires qui le parcourent et l’animent. Construire son discours propre, intérieur à ce discours étranger, trouver dans ce discours second, en les rapportant à l’intérêt de sa démarche, les formes d’unités, les noyaux fondateurs, capables de dévoiler les normes productrices du premier discours, telle est la tâche que le penseur se donne. Forme originale d’intériorisation, qui exige la production d’une instance normative coprésente au

déroulement du discours second, et qui, en son nom, restaure l'unité éclatée du discours premier." (DESANTI J. T., 1975, p. 15-17) ».

La situation fondamentale caractéristique des connaissances relatives à la structuration algébrique des nombres doit apparaître comme cette *instance normative, qui restaure l'unité éclatée* de la structuration habituelle, celle-ci étant ce discours premier donnant lieu aux diverses structures algébriques des nombres, IN, Z, Q, IR, C...etc., prises chacune avec un mode propre de construction.

2.1.4. Conception Comtienne de l'algèbre comme calcul de fonctions

A. objets de l'algèbre et de l'arithmétique selon COMTE

Auguste COMTE (COMTE A., 1975, 83-106) donne une description programmatique de l'arithmétique et de l'algèbre, et cette description est résumée par les expressions 'calcul de fonctions' et 'calcul des valeurs' : pour COMTE, l'algèbre gagnerait à désigner son objet par la première expression et l'arithmétique son objet par la seconde ; à ce propos il écrit notamment :

« ...on voit que *l'algèbre* peut se définir, en général, comme ayant pour objet *la résolution des équations*, ce qui, quoique paraissant d'abord restreint, est néanmoins suffisamment étendu, pourvu qu'on prenne ces expressions dans toutes leur acception logique, qui signifie transformer des fonctions *implicites* en fonctions *explicites* équivalentes : de même, *l'arithmétique* peut être définie comme destinée à *l'évaluation* des fonctions. Ainsi en contractant les expressions au plus haut degré, je crois pouvoir donner nettement une juste idée de cette division, en disant, comme je le ferai désormais pour éviter les périphrases explicatives, que *l'algèbre est le calcul de fonctions*, et *l'arithmétique le calcul des valeurs*. » (COMTE A. 1975, 89)

B. Une Description formalisante de la conception comtienne de l'algèbre

Comme évoqué ci-dessus, Gilles-Gaston GRANGER (2003) considère que la langue est, à certains égards, une partie du monoïde libre L^* engendré par un ensemble fini L de symboles qui constitue son alphabet. Les éléments de L^* qui font partie de la langue sont les « mots ». En revanche, en grammaire formelle on considère que toute partie (l) d'un monoïde libre L^* est appelée 'langage', et tout procédé effectif uniforme (algorithme) générateur d'un langage est appelé 'grammaire'. Or si on analyse les propos de COMTE sur la notion d'équation, notamment quand il écrit que:

« ... l'idée abstraite et générale qu'on donne de *l'équation* ne correspond aucunement au sens réel que les géomètres attachent à cette expression dans le développement effectif de la science. Il y a là un vice de logique, un défaut de co-relation, qu'il importe beaucoup de rectifier.

Pour y parvenir, je distingue d'abord deux sortes de *fonctions* : les fonctions *abstraites*, analytiques, et les fonctions *concrètes*. Les premières peuvent seules entrer dans les véritables équations, en sorte qu'on pourra désormais définir, d'une manière exacte et suffisamment approfondie, toute *équation* : une relation d'égalité entre deux fonctions abstraites des grandeurs considérées.

... la question de savoir si telle fonction déterminée est véritablement abstraite, et par là susceptible d'entrer dans de vraies équations analytiques, va devenir une simple question de fait, puisque nous allons énumérer toutes les fonctions de cette espèce.

Au premier abord, cette énumération semble impossible, les fonctions analytiques distinctes étant en nombre infini. Mais en les partageant en *simples* et *composées* la difficulté disparaît.

...voici le tableau de ces éléments fondamentaux de toutes nos combinaisons analytiques, dans l'état présent de la science.

... soit x la variable indépendante, y la variable co-relative qui en dépend. Les différents modes simples de dépendance abstraites que nous pouvons maintenant concevoir entre y et x sont :

1^{er} couple :

1° $y = a+x$: fonction *somme*, 2° $y = a - x$: fonction *différence* ;

2^e couple :

1° $y = ax$: fonction *produit*, 2° $y = a/x$: fonction *quotient* ;

3^e couple :

1° $y = x^a$: fonction *puissance*, 2° $y = \sqrt[a]{x}$: fonction *racine* ;

4^e couple :

1° $y = a^x$: fonction *exponentielle*, 2° $y = \log_a x$: fonction *logarithmique* ;

5^e couple :

1° $y = \sin x$: fonction *circulaire directe*, 2° $y = \arcsin(x)$: fonction *circulaire inverse*.

Tels sont les éléments très peu nombreux qui composent directement toutes les fonctions abstraites aujourd'hui connues. Quelque peu multipliés qu'ils soient, ils suffisent évidemment pour donner lieu à un nombre tout à fait infini de combinaisons analytiques » (COMTE A. 1975, 83-106)

On ne peut s'empêcher de décrire la conception comtienne de l'algèbre en ces termes : COMTE part d'un **alphabet L** constitué de sa liste de fonctions et, pour former les **mots**, considère, comme opération de **concaténation** des éléments de cet alphabet, la composition des fonctions de cette liste. La résolution des équations devient alors **la spécification** de la correspondance ρ définie sur l'ensemble E 'des équations' dans l'ensemble $P(L^*)$ des parties de L^* , qui fait correspondre à chaque élément (e) de E l'ensemble des solutions de l'équation (e). La réunion S des éléments de $\rho(E)$ est, en tant que partie de L^* , un **langage**. L'algèbre, dans l'acception de COMTE, serait alors la partie des mathématiques dont l'objet est la **grammaire** de ce langage, en tant que celle-ci pose le problème de l'identification de E à l'ensemble des **conditions de concaténation** des éléments du **lexique**, que représente le tableau de COMTE, conditions dont **le respect** détermine seul « **les expressions bien formées** » dans le produit $E \times S$: il s'agit des éléments de ce produit qui rentrent dans la constitution du graphe de la correspondance ρ .

C. Motivation de cette description formalisante

Avec la description ci-dessus, nous voulons montrer que COMTE visait nous faire partager, à travers ses Leçons, une vision de l'algèbre qui la fait apparaître comme une grammaire visant générer un langage en perpétuels déploiements, de sorte que celle-ci doit, en conséquence, faire l'objet de perpétuels amendements.

La preuve en est, le résultat auquel abouti COMTE, suite à sa description de la notion d'équation. En effet, il s'agit d'une description qui, non seulement, embrasse ces moments de l'abstraction que Cavaillès³ désignait par le mot de « paradigme », mais aussi, elle anticipe, bien avant, ce sens global assigné par G.-G. GRANGER aux théorèmes de limitation. Ce sens stipule que ceux-ci montrent que l'opérateur est à un certain niveau débordé par l'objectal : signalons, au risque de nous répéter, que ces résidus objectaux, *apparemment irréductibles à l'opérateur*,

³ « Parlant de l'évolution des mathématiques, Jean Cavaillès montrait que s'y manifestent deux espèces de mise en forme. L'une consiste à vider de leur contenu particulier les figures et les calculs pour y faire apparaître une structure où les éléments auparavant spécifiés ne sont plus représentés que comme variables. Il désignait ce moment de l'abstraction par le mot « paradigme ». L'autre espèce de formalisation consiste, partant de « paradigmes » déjà mis en forme, à y considérer comme variables les relations ou les opérations elles-mêmes que la première abstraction avait dégagées, et qui deviennent alors à leur tour objets d'une théorie. C'est la « thématization » qui apparaît par exemple avec les propriétés les plus générales des opérations algébriques, constitutives de structures abstraites dont l'algèbre des nombres réels ou complexes est une réalisation particulière » (GRANGER G.-G., 2003, p 161)

sont désignés par G.-G. GRANGER du nom de « contenus formels », et ce, bien qu'ils doivent être, selon lui, envisagés dans leur *positivité*, et que :

« ... presque tous les progrès décisifs des mathématiques correspondent à la rencontre - **inattendue** le plus souvent - d'un contenu formel faisant **obstacle** aux manipulations opératoires, et **obligeant** alors à **restructurer** ce système opératoire en étendant les objets qu'il domine. » (Granger G.-G., 2003, p 303).

Les difficultés inhérentes, à la fois, au franchissement de cet obstacle et au travail de structuration du système opératoire, auxquelles s'ajoute ce caractère souvent inattendu de la rencontre en question, nous renvoient inmanquablement à ce qu'avancait COMTE à propos de l'extension de son tableaux de fonctions élémentaires, notamment quand il écrit :

« En effet, la création d'une véritable nouvelle fonction abstraite élémentaire présente, par elle-même, les plus grandes difficultés. Il y a même, dans une telle idée, quelque chose qui semble contradictoire. Car un nouvel élément analytique ne remplirait pas évidemment les conditions essentielles qui lui sont propres, si on ne pouvait immédiatement l'évaluer : or, d'un autre côté, comment évaluer une nouvelle fonction qui serait vraiment simple, c'est-à-dire qui ne rentrerait pas dans une combinaison de celles déjà connues ? Cela paraît presque impossible. L'introduction, dans l'analyse, d'une autre fonction abstraite élémentaire, ou plutôt d'un autre couple de fonctions (car chacune serait toujours accompagnée de son inverse), suppose donc nécessairement la création simultanée d'une nouvelle opération arithmétique, ce qui est certainement fort difficile. » (COMTE A., 1975, 93)

D. Plan de COMTE et distinction entre deux conceptions de l'équation

Les commentateurs⁴ de COMTE donnaient de son plan relatif à l'algèbre une interprétation qui le fait assimiler à celui de VIETE relatif à la résolution des équations. L'un d'eux regrette expressément de constater que:

« Dès le seizième siècle, Viète distinguait déjà l'analyse zététique ou art de poser l'équation, la poristique ou art de la transformer, enfin l'exégétique ou rhétorique ou art d'évaluer les solutions. C'est exactement le plan de Comte, dans les quatrième et cinquième leçons » (voir COMTE A., 1975, 96)

De notre point de vue, cette interprétation serait erronée : En effet le plan de COMTE pour l'algèbre s'appuie sur une distinction féconde entre deux conceptions de l'équation. Pour saisir cette distinction, plaçons nous dans le formalisme développé par G. POLYA (1945) à propos de la typologie des problèmes mathématiques. Considérons, par exemple, l'équation : $ax+b=0$. Résoudre cette équation est, selon cette typologie, un problème de 'recherche'. Les parties de ce problème (il en admet trois selon G. POLYA) sont : *l'inconnue du problème*, en l'occurrence un nombre x , *les données du problème*, en l'occurrence les nombres a et b , et *la condition du problème*, c'est-à-dire la relation liant les données du problème à son inconnue, il s'agit ici de la relation $ax+b=0$. **Or la conception comtienne de l'algèbre, en tant que calcul de fonctions, nous oblige** à considérer l'équation non seulement avec son renvoi à cette **trilogie** qu'on vient de décrire, mais aussi avec son renvoi à cet autre problème qui, lui, n'admet, comme problème de recherche, que **deux parties**, au lieu des trois par lesquels G. POLYA caractérise ce type de problème: c'est que le problème en question n'admet pas de données spécifiées, et l'inconnue de ce problème n'est pas un nombre, c'est une *fonction f dont l'ensemble de définition est, par exemple, Z^*xZ , mais dont l'ensemble d'arrivée est inconnu (il est à construire)*, tandis que la condition associée à ce nouveau problème, c'est la relation « **$aff[(a,b)]+b=0$, pour tout élément (a,b) de Z^*XZ** ». Ainsi, l'équation peut être prise avec son renvoi au problème aux trois parties, dans ce cas nous parlerons d'une *conception ternaire de l'équation*, comme elle peut être prise avec son renvoi au problème aux deux parties, et dans ce cas nous parlerons de *conception binaire de l'équation*.

⁴ Voir Présentation et notes de Michel SERRES, François DAGOGNET, Allal SINACEUR de : « Auguste COMTE 'Philosophie première, cours de philosophie positive, leçons 1 à 45', Hermann, 1975 ».

E. Signification de la conception sténographique de l’algèbre

De ce qui précède nous déduisons que, selon le point de vue où l’on se place, le plan de COMTE peut être réduit ou, au contraire, considéré comme irréductible à celui de VIETE. Ainsi, si on se place du point de vue de la conception binaire de l’équation, le plan de COMTE étant rattachable à cette conception alors que celui de VIETE ne l’est pas, de ce point de vue là, le premier est alors irréductible au second. Si l’on se place du point de vue de la conception ternaire de l’équation, le plan de VIETE, étant rattachable à cette conception, et celui de COMTE ne l’excluant pas, alors de ce point de vue, on peut être amené à assimiler le second plan au premier. Or, parmi ces deux points de vue, le second serait le seul accessible à ceux chez qui la conception ternaire de l’équation se constitue en obstacle à l’émergence de la conception binaire. Serait-ce le cas pour les commentateurs de COMTE, mentionnés ci-dessus? On peut le supposer.

Mais, COMTE, lui-même, n’a pas explicitement mentionné de relation assimilable à la relation « $af[(a,b)]+b=0$, pour tout élément (a,b) de $Z^* \times Z$ », par laquelle s’origine la conception binaire de l’équation. Serait-il lui aussi victime du même obstacle ?

Sur cette dernière question, on pourrait mettre en avant l’indisponibilité de certaines connaissances, celles, par exemple, relatives aux notions Bourbachistes de *relation* et de *structure*⁵. Ainsi, COMTE aurait été obligé, à cause de cette indisponibilité, de proposer un plan, celui basé sur la conception binaire de l’équation, tout en suivant un autre, celui notamment attribué à VIETE, en tant que ce plan renvoie à la conception ternaire.

En fait la conception binaire devait résulter d’un amendement de connaissances anciennes : Ainsi, pour que cette conception soit à l’œuvre dans la résolution de l’équation de premier degré à coefficients entiers, on doit faire comme si on ne connaissait pas les nombres rationnels, car sinon on ne voit pas comment, s’agissant de cette équation, la conception binaire de l’équation serait différente de la conception ternaire. Or, faire comme si on ne connaissait pas ces nombres c’est devoir les réinterpréter. Et cela doit se faire à l’aune de la constitution par ces derniers de *l’ensemble d’arrivée* de la fonction f . En outre, si cette réinterprétation consiste à les considérer comme exprimant des propriétés de f , deux éléments distincts ne doivent pas, toujours, exprimer des propriétés distinctes, sinon on sera, encore, rattrapé par la conception ternaire. La réinterprétation doit nécessairement consister en une classification des nombres : chaque classe exprimant une propriété de f . Cette classification ne pouvant pas être opérée directement au niveau de l’ensemble d’arrivée, elle doit être réalisée indirectement par le biais d’une partition de *l’ensemble de départ de f* : chaque élément de la partition doit représenter un élément de *l’ensemble d’arrivée de f* . Cette partition ne saurait être autre chose que celle qu’opère *la relation d’équivalence associée à f* : ainsi, les éléments de l’ensemble de départ qui ont même image par f , pris ensemble, constituent une représentation d’un élément de *l’ensemble d’arrivée* de cette fonction ; d’abord comme *signifié*, ou plutôt comme *signifiant potentiel*, ensuite comme *signifiant* proprement dit : *le passage de signifié au signifiant* est réalisé, une fois que les opérations sur ces classes ont pu être spécifiées. Ces opérations peuvent être déduites à partir de la relation « $af[(a,b)]+b=0$, pour tout élément (a,b) de $Z^* \times Z$ ». Notons à ce propos que l’écriture $af[(a,b)]+b=0$ n’a, a priori, de sens que si (a,b) est tel que $f[(a,b)]$ est un nombre entier, l’extension de cette écriture, de telle sorte qu’elle passe outre cette contrainte, participe aussi de l’explicitation de f . il s’agit là d’un problème d’homogénéisation d’écriture qui

⁵ Citons à ce propos DESANTI J. T. : « Nous disposons aujourd’hui de théories structurales assez générales pour tenter une lecture récurrente des textes mathématiques édifiés dans le passé. Telle est, on le sait la méthode suivie par N. BOURBAKI dans les *Eléments de l’histoire des mathématiques*. » (DESANTI J. T., 1975, p. 213).

Les commentateurs de la quatrième et cinquième leçon de COMTE, dans (COMTE, 1975, 83-106) signalent, de leur côté, que les travaux d’Abel et de Galois, responsables d’un nouveau départ de la question, sont à peu près contemporains du Cours. Galois introduit l’idée de groupe. Alors, d’après eux, la notion de structure remplace la notion d’élément analytique. De notre point de vue, pour peu que la conception ternaire de l’équation ne se constitue pas en obstacle à la conception binaire, l’élément analytique que propose COMTE peut engendrer la notion de structure.

rappelle, à bien des égards, le principe d'homogénéité⁶ de COMTE. Cette spécification de f se fera avec celle de son graphe : une partie du produit de l'ensemble de départ et d'une partition opérée sur ce même ensemble. Mais alors, pourquoi COMTE évoque son principe d'homogénéité, là où il aurait pu poser le problème d'homogénéisation de l'écriture en question? L'un n'excluant pas l'autre.

La réponse serait donc que la connaissance (première) qu'aurait COMTE des nombres rationnels serait d'une prégnance telle qu'il lui serait impossible de la soupçonner d'une quelconque imperfection et de songer lui apporter un quelconque amendement : on connaît contre une connaissance disait BACHELARD, comme aimait G. BROUSSEAU (1983) à nous le faire rappeler.

Cela voudrait dire qu'**une connaissances nouvelle est une connaissance ancienne à laquelle on a pu adjoindre quelque amendement, après qu'on ait pu, en la violentant, tempérer sa prégnance, sans quoi, elle continuera à se constituer en obstacle à l'émergence d'autres connaissances.**

Autant dire que les commentateurs de COMTE en assimilant le plan de celui-ci à celui de VIETE pointent, en réalité, cet **obstacle épistémologique** ; obstacle que VIETE ne soupçonne guère et que COMTE soulève. De sorte qu'il aurait suffi à celui-ci de prendre la peine de lier la résolution de l'équation à la thématization du franchissement de ce même obstacle, pour partir, bien avant BOURBAKI, à la rencontre des notions **d'ensemble, de relation et de structure, voire de passage au quotient**. Montrons comment cette thématization pourrait être conduite.

F. Résolution de l'équation de premier degré selon la conception binaire

Puisqu'il s'agit d'amender par de nouvelles propositions un système symbolique ancien, en l'occurrence le système des nombres rationnels, partons de la distinction de Peirce à propos des signes, entre *icon*, *index* et *symbol*⁷. L'obstacle épistémologique, dont il est question ci-dessus, est ce qui pourrait avoir empêché COMTE d'installer le nombre rationnel comme règle conventionnelle d'évocation de la résolution de l'équation du premier degré à coefficients entiers en tant que cette résolution est calcul de fonctions. Ce n'est qu'en vertu de cette règle, que ce nombre s'installe, en référence à la distinction peircienne, comme *symbole*. L'obstacle girait dans les deux autres pôles de cette distinction : l'*icon* et l'*index* et surtout l'*index*, de sorte que si amendement il y a, celui-ci porterait sur cette partie du signe: En effet posons : $(a,b)^f = \{(x,y) \in Z^*xZ / f[(x,y)] = f[(a,b)]\}$, on a une correspondance biunivoque entre $f(Z^*xZ)$ et l'ensemble $(Z^*xZ)/f = \{(a,b)^f / (a,b) \in Z^*xZ\}$, $(a,b)^f$, en tant que représentant générique d'un élément de l'ensemble d'arrivée de la fonction cherchée f , pris avec son renvoi à la correspondance biunivoque en question, est cet *index*, passage obligé vers le *symbole*, en l'occurrence le graphe de f . Pour passer de l'*index* au *symbole*, ou pour faire émerger le symbole de l'*index*, il est nécessaire d'abduire de l'énoncé « $af[(a,b)]+b=0$ pour tout élément (a,b) de Z^*xZ » une loi additive et une loi multiplicative sur $(Z^*xZ)/f$.

⁶ Le principe d'homogénéité énoncé par COMTE stipule que toute équation « doit jouir de cette propriété de n'être nullement altérée, quand on fait subir simultanément à toutes les quantités qui s'y trouvent le changement correspondant à celui qu'éprouveraient leurs unités respectives » (COMTE, p. 105). Nous regrettons que les commentateurs analystes des Leçons n'aient pas relevé l'analogie entre ce problème d'homogénéisation et le principe d'homogénéité, ils auraient dégagé, mieux que quiconque, la portée épistémologique de cette analogie et partant la grande fécondité de la distinction comtienne entre conception ternaire et conception binaire de l'équation. Signalons que ces derniers, commentaient d'un ton caustique l'énonciation du principe, en question, par COMTE : le principe d'homogénéité écrivaient-ils « a été exprimé par Leibniz qui l'a démontré de la même manière que celle dont COMTE se fait gloire » (COMTE, p. 105).

⁷ Voir PEIRCE cité par GRANGER dans (GRANGER G.-G., 2003, p. 106) : l'*icon* est une image de ce à quoi elle renvoie, et le lien du signifiant au signifié est de ressemblance ; l'*index* est lié à son signifié par « une connexion dynamique (éventuellement spatiale) entre, d'une part, l'objet individuel à quoi il renvoie et, d'autre part les sens et la mémoire de la personne qui l'utilise comme signe » ; le *symbole* enfin est une règle conventionnelle d'évocation du signifié.

Cette abduction doit être opérée à partir de la nature même du problème étudié ; ce problème consiste en la recherche d'un ensemble X^8 :

- qui contienne l'ensemble des entiers relatifs Z ,
- qui soit doté de deux lois, une loi additive et une loi multiplicative, ces lois doivent prolonger celles dont Z est doté,
- dans lequel une fonction f , définie sur $Z^* \times Z$, prend ses valeurs, de sorte que les énoncés qui suivent dénotent des propositions issues de calculs autorisés, en tant que calculs bâtis sur les mêmes règles que ceux que permet la structure algébrique de Z , ainsi : $(X, +, \cdot)$ et f doivent être tels que l'énoncé (S0) suivant :

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}) (af[(a, b)] + b = 0) \text{ (S0)},$$

dénote une proposition vraie, et que l'on puisse déduire:

* de (S0) :

$$\forall ((a, b); (x, y)) \in (\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z})^2, \begin{cases} ayf[(a, b)] + by = 0 \\ bx f[(x, y)] + by = 0 \end{cases} \text{ (S1);}$$

* de (S1) :

$$(\forall ((a, b); (x, y)) \in (\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z})^2), (f[(x, y)] = f[(a, b)] \Leftrightarrow ay = bx) \text{ (A0)}$$

* de (S0) :

$$\forall ((a, b); (c, d)) \in (\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z})^2, \begin{cases} af[(a, b)] + b = 0 \\ cf[(c, d)] + d = 0 \end{cases} \text{ (S'1)}$$

* de (S'1) :

$$\forall ((a, b); (c, d)) \in (\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z})^2, \begin{cases} ac.f[(a, b)] + bc = 0 \\ ac.f[(c, d)] + ad = 0 \end{cases} \text{ (S2)}$$

* de (S2) :

$$\forall ((a, b); (c, d)) \in (\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z})^2, \begin{cases} ac(f[(a, b)] + f[(c, d)]) + (bc + ad) = 0 \\ ac.f[(ac, bc + ad)] + (bc + ad) = 0 \end{cases} \text{ (S3)}$$

* de (S3) :

$$\forall ((a, b); (c, d)) \in (\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z})^2, f[(ac, bc + ad)] = f[(a, b)] + f[(c, d)], \text{ soit,}$$

$$(\forall ((a, b); (c, d)) \in (\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z})^2), (-f[(ac, bc + ad)] = (-f[(a, b)]) + (-f[(c, d)])) \text{ (A1);}$$

⁸ L'ensemble X est inconnu, mais il n'est pas inconnu au sens où l'est le nombre inconnu x de l'équation de premier degré à coefficients entiers, car, contrairement à x , X ne fait pas partie d'un sous-ensemble d'éléments d'un ensemble donné et ne peut donc être le résultat d'un choix, plus ou moins rationnel, entre des éléments connus de cet ensemble: il ne peut être que le résultat d'un processus d'objectivation.

* de (S1) :

$$\forall((a,b);(c,d)) \in (\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z})^2, \begin{cases} ac \cdot (-f[(a,b)]) \cdot (-f[(c,d)]) - bc \cdot (-f[(c,d)]) = 0 \\ c \cdot (-f[(c,d)]) = d \end{cases} \quad (S4)$$

de (S1) et de (S4) :

$$\forall((a,b);(c,d)) \in (\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z})^2, \begin{cases} ac \cdot (-f[(a,b)]) \cdot (-f[(c,d)]) - bd = 0 \\ ac \cdot (-f[(ac,bd)]) - bd = 0 \end{cases} \quad (S5)$$

de (S4) et de (S5) :

$$(\forall((a,b);(c,d)) \in (\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z})^2, (-f[(ac,bd)] = (-f[(a,b)]) \cdot (-f[(c,d)])) \quad (A2);$$

* de (S0) :

$$(\forall(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}) (\forall k \in \mathbb{Z}^*), (ak \cdot f[(ak,bk)] + bk = 0) \quad (S6);$$

* de (S0) et de (S6) :

$$(\forall(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}) (\forall k \in \mathbb{Z}^*), \begin{cases} af[(ak,bk)] + b = 0 \\ af[(a,b)] + b = 0 \end{cases} \quad (S7)$$

* de (S7) :

$$(\forall(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}) (\forall k \in \mathbb{Z}^*) (f[(a,b)] = f[(ak,bk)])$$

* de (S0) :

$$(\forall a \in \mathbb{Z}^*) (af[(a,0)] + 0 = 0),$$

$$\text{soit, } (\forall a \in \mathbb{Z}^*) (f[(a,0)] = 0);$$

* de (S0) :

$$(\forall a \in \mathbb{Z}^*) (-f[(1,a)] - a = 0$$

$$\text{soit, } (\forall a \in \mathbb{Z}^*) (-f[(1,a)] = a) \quad (A''0)$$

Posons $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$: $\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} / ay = bx\}$, on vérifie aisément que :

$(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}) (\forall (c, d) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z})$, on a:

$$(\forall (x, y) \in \overline{(a, b)}) (\forall (z, t) \in \overline{(c, d)}) \begin{cases} \overline{(xz, xt + yz)} = \overline{(ac, ad + bc)} \\ \overline{(xz, yt)} = \overline{(ac, bd)} \end{cases};$$

en outre de l'énoncé (A0) ci-dessus on abduit l'énoncé suivant:

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}) ((x, y) \in \overline{(a, b)} \Leftrightarrow f[(x, y)] = f[(a, b)]) \text{ (A'0)},$$

des énoncés (A'0), (A1) et (A2) ci-dessus on abduit, à propos de la loi additive

et de la loi multiplicative dont on pourrait doter $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} / f$, la loi + et la loi \times définies par:

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}) (\forall (c, d) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}), \begin{cases} \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(ac, ad + bc)} \text{ (A'1)} \\ \overline{(a, b)} \times \overline{(c, d)} = \overline{(ac, bd)} \text{ (A'2)} \end{cases};$$

on vérifie alors (A'3) :

que $(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} / f, +, \times)$ est un corps et que son sous-ensemble $Z = \{\overline{(1, a)} / a \in \mathbb{Z}\}$

est identique à \square , à un isomorphisme près,

isomorphisme dont la forme peut être abduite de (A'0).

en outre envisageant l'ensemble X et la fonction f cherchés à l'aune de la décomposition de f selon le schéma suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & f(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}) = X \\ \rho \quad \square & & \square \quad b \\ & & \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} / f \end{array}$$

où $(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}) \rho[(a, b)] = \overline{(a, b)}$ et $b[(a, b)] = -f[(a, b)]$;

on en abduit que $(X, +, \cdot)$ et $(\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} / f, +, \times)$ doivent nécessairement, via b , être isomorphes, Ainsi devait-on être conduit à considérer que X et $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} / f$ dénotent le même ensemble, et se faisant, à confondre b avec la fonction Identité et remplacer le schéma ci-dessus par le schéma suivant :

$$\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} / f$$

avec $(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}) f[(a, b)] = -\overline{(a, b)}$;

de sorte que, usant de (A'1), (A'2) et (A'3), on a :

$$\begin{aligned} (\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}) (a \cdot f[(a, b)] + b &= (-f[(1, a)]) \cdot f[(a, b)] + (-f[(1, b)]]) \\ &= \overline{(1, a)} \cdot (-\overline{(a, b)}) + \overline{(1, b)} \\ &= \overline{(1, a)} \cdot \overline{(a, -b)} + \overline{(1, b)} \\ &= \overline{(a, -ab)} + \overline{(1, b)} \\ &= \overline{(a, ab - ab)} \\ &= \overline{(a, 0)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Notons que si la réduction du plan de COMTE à celui de VIETE dénote d'une conception de l'algèbre, bâtie uniquement autour de la conception ternaire de l'équation et aveugle à la conception binaire, et que si cette réduction est attribuable aux érudits en analyse d'œuvres scientifiques parmi les commentateurs de COMTE, alors, a fortiori, cette conception de l'algèbre sera certainement celle de la noosphère, architecte de la transposition didactique; ainsi n'est-il pas nécessaire d'examiner de très près les objets d'apprentissages que les manuels scolaires actuels proposent aux élèves autour du thème d'équation, pour s'assurer que ces objets ne véhiculent comme conception de l'algèbre que celle qui associe la résolution d'équations exclusivement à la conception ternaire de l'équation.

Remarquons que la noosphère, en tant qu'organisme, dispose de savoirs qui, si COMTE en soupçonnait l'existence, son plan auraient pris une forme qui n'évoquerait celui de VIETE que pour en dévoiler les insuffisances et les dépasser.

Ceci est le second argument qui renforce le premier, comme nous l'annoncions plus haut.

Nous admettons alors que cette conception de l'algèbre, que nous qualifions de sténographique, est finalement une conception réductible à cette conception de l'équation qui, prisonnière de la conception ternaire, n'atteint jamais la conception binaire.

Aussi, à travers le plan, ou la distinction proposé par COMTE, si toutefois on ne l'assimile pas à celui de VIETE, voyons-nous les linéaments de problèmes et de questions mathématiques dont la dévolution à l'élève est nécessaire, dans le cas où l'on vise amener celui-ci à transformer la conception sténographique de l'algèbre en l'outil de structuration des nombres, de sorte que :

C'est cette même transformation qui n'aurait pas lieu si, interférant avec le contrat didactique classique, la dévolution de ces problèmes et de ces questions, à des étudiants, pourtant licenciés es mathématiques, se bloque, chaque fois, et provoque en retour la rupture de ce contrat. Cette dernière remarque nous a conduit à bâtir, sur les problèmes et les questions que délimite *la distinction comtienne*, les situations par lesquelles nous comptons révéler la nature du contrat didactique que le système didactique noue autour des structures algébriques élémentaires.

Ces problèmes et ces questions, nous les avons reformulés, mais au prix d'une réduction du plan de COMTE. Cependant, pour réduction qu'elle soit, nous estimons que cette reformulation n'en constitue pas moins le substrat mathématique de la Situation Fondamentale Caractéristique de la Structuration Algébrique des nombres.

2.2. Analyse épistémologique a posteriori de la SF(SAN)

2.2.1. Substrat mathématique de la SF(SAN)

Voici trois problèmes auxquels nous avons réduit le plan de COMTE quant à l'algèbre :

Dans ce qui suit, nous employons, à propos d'une fonction μ définie d'un ensemble E dans un ensemble F , l'expression « μ homomorphisme d'ensembles » pour designer la règle suivante, relatives aux calculs admis dans $\mu(E)$: pour qu'un calcul dans $\mu(E)$ soit admis, il est nécessaire que ce calcul soit établi comme calcul de l'image par μ d'un élément spécifié de E . Nous estimons que le 'Programme de Comte' consiste à faire dériver les structures de l'algèbre élémentaires des trois problèmes suivants :

Problème (ZCF) : 'reconstruction de Z via le Calcul de Fonctions' :

Pour tout $X \in P(IN)$, en posant: $E(X) = \{\mu \in X^{IN \times IN} / \mu \text{ est un homomorphisme d'ensembles partout défini dans } IN^2 \text{ et } (\forall (a,b) \in IN^2) (a + \mu[(a,b)]) = b\}$, on a $E(X) = \emptyset$. Il s'agit de construire un ensemble X vérifiant la propriété (p) suivante : $(X \supset IN)$ et $(E(X) \neq \emptyset)$.

Problème (QCF) :

Pour tout $X \in P(Z)$, en posant : $E(X) = \{g \in X^{Z \times XZ} / g \text{ homomorphisme d'ensembles partout défini dans } Z \times XZ \text{ et } (\forall (a,b) \in Z \times XZ) (a.g[(a,b)] + b = 0)\}$, on a $E(X) = \emptyset$, il s'agit là encore de construire un ensemble X vérifiant la propriété (p) suivante : $(X \supset Z)$ et $(E(X) \neq \emptyset)$.

Problème (CCF) :

Pour tout $X \in P(IR)$, en posant: $E(X) = \{g \in X^{IR \times XIR} / g \text{ un homomorphisme d'ensembles partout défini dans } IR^2 \text{ et } (\forall (a,b) \in IR^2) (\forall x \in g[(a,b)]) (x^2 + ax + b = 0)\}$, on a $(E(X) = \emptyset)$, il s'agit là encore de construire un ensemble X vérifiant la propriété (p) suivante : $(X \supset IR)$ et $(E(X) \neq \emptyset)$.

Chacun de ces trois problèmes représente un des états⁹ ou un sous état d'une même Situation Fondamentale. Celle caractérisant et inscrivant dans un continuum épistémique les connaissances relatives à la symétrisation de N , à la symétrisation de Z , et à la clôture de IR .

Le registre dans lequel replacer la Situation pour chacun de ces états est une variable didactique grâce à laquelle un type de calcul (ou une stratégie de solution) est privilégié(e) par rapport à d'autres possibles. Nous avons deux registres : le registre géométrique et le registre formaliste. Le premier donne lieu à un modèle géométrique pour chaque état de la Situation et le Second à un modèle formaliste.

Pour des raisons liées à l'espace réservé à l'article nous nous limitons, dans notre démarche, à l'emploi de la Situation dans son état 2 correspondant au troisième problème. Pour simplifier nous considérons que cet état de la Situation est son propre modèle formaliste. Celui-ci privilégie un type de calcul que nous exposons ci-dessous sous la dénomination de 'Calcul C1'. Le 'Modèle géométrique de la Situation dans son état 2 est présenté et analysé dans la suite sous la dénomination de 'Situation CCF' (CCF est l'acronyme de 'reconstruction du corps C via un

⁹ à chaque degré de l'expression polynomiale de l'équation fonctionnelle correspond un état de la Situation, au degré 1 correspond deux sous états représentés par les deux premiers problèmes.

Calcul de Fonctions). Ce Modèle privilégie un autre type de calcul que nous déroulons sous la dénomination de ‘Calcul C2’ immédiatement après l’exposition du modèle lui-même.

2.2.2. *Le « Calcul C1 » associé au Modèle Formaliste de La SF(SAN)*

A. *Présentation du ‘Calcul C1’*

Supposons qu’il existe un ensemble X tel que $E(X) \neq \Phi$,

on a alors:

$$(\forall g \in E(X))(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)(\forall x \in g[(\alpha, \beta)])(x^2 + \alpha x + \beta = 0)$$

$$\text{soit } (\forall g \in E(X))(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall x \in g[(-\alpha, 0)])(x^2 - \alpha x = 0)$$

$$\text{d'où: } (\forall g \in E(X))(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall x \in g[(-\alpha, 0)])(x = 0 \text{ ou } x = \alpha),$$

on considère alors l'axiome (A1) suivant:

$$(\forall g \in E(X))(\forall \alpha \in \mathbb{R})(g[(-\alpha, 0)] = \{0; \alpha\}) \text{ (A1);}$$

$$\text{il vient alors : } \mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} g[(-\alpha, 0)].$$

$$\text{En outre, on a aussi: } (\forall g \in E(X))(\forall \beta \in \mathbb{R})(\forall x \in g[(0, -\beta)])(x^2 - \beta = 0),$$

en vertu de quoi on considère l'axiome (A2) suivant:

$$(\forall g \in G) (\forall \beta \in \mathbb{R}^+) (g[(0, -\beta)] = \{\sqrt{\beta}, -\sqrt{\beta}\}) \text{ (A2).}$$

.

$$\text{En outre, on a aussi: } (\forall g \in E(X)) (\forall x \in g[(0, 1)])(x^2 + 1 = 0), \text{ soit: } (x^2 = -1);$$

en vertu de quoi on considère l'axiome (A3) suivant:

$$(\forall g \in E(X)) (g[(0, 1)] = \{i; -i\} \text{ avec } i^2 = -1) \text{ (A3);}$$

$$\text{il s'en suit: } (\forall g \in E(X)) (\forall \beta \in \mathbb{R}^-) (\forall x \in g[(0, -\beta)])(x^2 = -(-\beta) = i^2(-\beta)),$$

l'on considère alors l'axiome (A4) suivant:

$$(\forall g \in E(X)) (\forall \beta \in \mathbb{R}^-) (g[(0, -\beta)] = \{i\sqrt{-\beta}, -i\sqrt{-\beta}\}) \text{ (A4);}$$

on a en outre: $(\forall g \in E(X))(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)(\forall x \in g[(2\alpha, \beta)])(x^2 + 2\alpha x + \beta = 0)$,

soit: $(\forall g \in E(X))(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)(\forall x \in g[(2\alpha, \beta)])((x + \alpha)^2 = \alpha^2 - \beta)$,

il vient: $(\forall g \in E(X))(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)(\forall x \in g[(2\alpha, \beta)])((x + \alpha) \in g[(0, -(\alpha^2 - \beta))])$;

en vertu de quoi on considère l'axiôme (A5) suivant:

$$(\forall g \in E(X))(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)(g[(2\alpha, \beta)] = -\alpha + g[(0, -(\alpha^2 - \beta))]) \quad (A5)$$

d'où:

$$(\forall g \in E(X))(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \alpha^2 - \beta \geq 0)(g[(2\alpha, \beta)] = \{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}; -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}\})$$

$$(\forall g \in E(X))(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \alpha^2 - \beta < 0)(g[(2\alpha, \beta)] = \{-\alpha + i\sqrt{\beta - \alpha^2}; -\alpha - i\sqrt{\beta - \alpha^2}\})$$

B. Analyse du « Calcul C1 »

Tout en étant le résultat de décisions prises par l'auteur¹⁰ du calcul ci-dessus, les axiomes (A1), (A2), (A3), (A4) et (A5) n'en sont pas moins le produit de suggestions immanentes au genre de calcul effectué. Cet aspect des choses illustre l'idée, avancée plus haut, à propos de la dichotomie '*partie effectivement régulée/partie virtuellement régulée*' associé au système formel. Le « Calcul C1 », déroulé ci-dessus, s'appuierait exclusivement sur la partie *effectivement régulée* du système formel qui structure en un corps l'ensemble des réels. En s'y appuyant, ce calcul mobilise *la régulation syntaxique* comme outil sans en faire son objet d'étude à part entière.

En effet l'adoption a posteriori successivement des axiomes en question, procède de la détermination de proche en proche de la condition sous laquelle l'ensemble X en construction vérifie la propriété (p). Cette condition ne saurait alors être qu'une condition suffisante, au sens illustré par les motivations qui étaient derrière la formation de géométries non euclidienne : nous savons, grâce à ces géométries, que les axiomes de la géométrie d'Euclide ne sont pas tous nécessaires pour bâtir un édifice cohérent, mais, pris globalement, ils constituent une condition suffisante pour avoir comme édifice, tout à fait cohérent, la Géométrie voulue par Euclide. Car il ne faut pas confondre la nécessité heuristique qui dicte au mathématicien, entrain de monter une structure, l'énoncé à proposer comme un des axiomes de cette structure, avec le concept de Condition Nécessaire outil des démonstrations mathématiques, ce concept n'ayant de sens que mobilisé au sein d'une structure mathématique achevée.

La nécessité heuristique qui a dicté à l'auteur du « Calcul C1 » de considérer les axiomes (Ai), $1 \leq i \leq 5$, comme susceptibles de composer la condition suffisante cherchée est la manifestation du caractère régulé du système formel. Régulé, le système ne l'est que partiellement car si la nécessité heuristique est une manifestation typique de la régulation, il est possible d'arriver au même résultat avec d'autres type de calculs qui eux ne s'appuient pas sur cette nécessité, c'est le cas notamment du « Calcul C2 », qui sera le sujet de notre prochaine étude.

En outre si nous voulons que X hérite de IR sa structure de corps, il nous suffit de définir, à la fin de ce même calcul et donc a posteriori, sur l'ensemble des expressions « a+ib », obtenues comme résultat de ce calcul même, une loi additive et une loi multiplicative. Cette définition est obtenue en appliquant sur ces expressions les propriétés des deux lois dont IR est déjà doté, tout en tenant compte des axiomes (Ai), $1 \leq i \leq 5$, ci-dessus. La forme que va prendre cette définition

¹⁰ Remarquons que le fait d'être l'auteur particulier du « Calcul C1 », ne nous empêchera pas de parler d'un auteur générique de ce calcul, car du point de vue où nous nous plaçons ici, parler de l'auteur du calcul c'est parler de manière médiate du calcul lui-même.

est donc complètement déterminée. En fait, déroulant le « Calcul C1 », on se place, quant à la dualité opération/objet de GILLES-GASTON GRANGER (2003), du point de vue de la production d'objets, en l'occurrence les individus mathématiques 'a+ib' avec a et b des nombres réels et $i^2=-1$, par un système opératoire, en ce sens que, selon GRANGER :

« ...l'opératoire, apprenti sorcier, engendre des systèmes d'objets dont l'existence et les propriétés peuvent être établis sans que le système opératoire lui-même soit en état d'en achever l'exploration réglée. Il y a des énoncés vérifiables ni démontrables, ni réfutables, échappant donc à ce que nous appelons ici l'opératoire. Tel est le sens global des théorèmes de limitation, qui montre que l'opératoire est à un certain niveau débordé par l'objectal, exprimant donc en effet les limitations de leur dualité. Nous donnons à ce résidu objectal apparemment irréductible à l'opératoire le nom de « contenu formel ». Formel en effet, en tant qu'il apparaît au sein d'une théorie dont a été banni tout contenu empirique, et qu'il est loisible, en un sens large, d'axiomatiser. » (GRANGER G.-G. 2003, p 302)

La nécessité heuristique sur laquelle le « Calcul C1 » s'appuie et le caractère déterminé de la forme qui sera prise par la définition des deux lois finissent par nous faire dire que ce calcul évolue dans la zone d'influence d'un certain attracteur, celui-là même qui est prévu par l'étude épistémologique que nous avons déroulé plus haut. Rappelons que cette dernière avançait - entre autres - l'idée d'une bifurcation calculatoire qui met en jeu deux attracteurs, un premier et un second, se partageant des calculs en zones d'influences. Le « calcul C1 » et le « Calcul C2 » sont parmi ces calculs. Le premier évoluerait dans la zone du premier attracteur.

Cependant si nous nous trouvons devant une situation qui, pour chacune des deux lois, nous met devant plusieurs énoncés tous candidats valables pour une bonne définition de cette loi, cette situation nous met alors face à une indétermination qu'il nous faut lever. Si en plus cette situation rend la Condition Nécessaire, que nous avons opposée plus haut à la nécessité heuristique, mobilisable pour lever cette indétermination, alors nous nous trouvons devant une situation qui rend disponible un calcul qui lui évoluerait dans la zone d'influence du second attracteur. C'est justement le cas du « Calcul C2 » et du Modèle Géométrique de la Situation Fondamentale mentionnés plus haut et qui présentement sont les sujets de cette étude.

2.2.3. Le « Calcul C2 » associé au Modèle Géométrique de la SF(SAN)

A. Présentation de la Situation CCF

Consigne de la Situation CCF (première partie)

Dans la suite, nous emploierons, à propos d'une fonction μ définie d'un ensemble E dans un ensemble F, l'expression « μ homomorphisme d'ensembles » pour désigner la règle suivante, relatives aux calculs admis dans $\mu(E)$: pour qu'un calcul dans $\mu(E)$ soit admis, il est nécessaire que ce calcul soit établi comme calcul de l'image par μ d'un élément spécifié de E.

Données de la situation CCF

Dans le plan π on considère un carré OIQJ, Q' le symétrique de Q par rapport à I. Pour chaque point M de π on pose M_i et M_j les projections orthogonales de M respectivement sur (OI) et (OJ), M''_i le symétrique de M_i par rapport O et M'_i le milieu du segment (OM''_i), (m_i) la perpendiculaire à (OI) en M'_i , et (m_j) la perpendiculaire à (OJ) en M_j , (M_{ij}) est le point de rencontre des droites (m_i) et (m_j), (P), la parabole d'équation $y=x^2$, quand le plan est rapporté au repère orthonormé déterminé par le triangle OIJ, (OI) et (OJ) étant respectivement l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. (M_{ip}) le point de rencontre de (P) avec la droite (m_i). Deux cas se présentent alors: ou (M_{ip}) \notin (M'_i ; (M_{ij})) ou (M_{ip}) \in (M'_i ; (M_{ij})). On considère l'application g définie de π dans $IP(\pi)$ qui à tout point M fait correspondre la paire des points suivants :

Dans le cas où M est tel que $(Mip) \in [M'i ; (Mij)]$, à M , g fait correspondre la paire de points définie comme suit :

(Mjp) étant le point de (OJ) tel que $O(Mip)(Mij)(Mjp)$ est un parallélogramme, la perpendiculaire à (OJ) en (Mjp) coupe l'aile droite de la parabole (P) en un point (Mp) et la parallèle à (OJ) passant par (Mp) coupe (OQ) et (OQ') respectivement en (Mq) et en (Mq') . Posons $M1$ et $M2$ les projections orthogonales sur (mi) , respectivement de Mq et de Mq' , la paire $\{M1, M2\}$ est l'image de M par g . On pose alors $g1(M)=M1$ et $g2(M)=M2$.

Dans le cas où M est tel que $(Mip) \notin [M'i ; (Mij)]$, à M , g fait correspondre la paire de points définie comme suit :

(Mjp) étant le point de (OJ) tel que $O(Mij)(Mip)(Mjp)$ est un parallélogramme, la perpendiculaire à (OJ) en (Mjp) coupe l'aile droite de la parabole (P) en un point (Mp) , la paire de points $\{M1 ; M2\}$ telle que $M'i(Mjp)MpM1$ et $M'iMp(Mjp)M2$ sont des parallélogrammes, est l'image par g de M . On pose alors $g1(M)=M1$ et $g2(M)=M2$.

On considère, en outre, l'application h définie de \mathbb{R}^2 dans π , qui à tout couple (a,b) de réels fait correspondre le point M dont les coordonnées sont : a et b , respectivement comme abscisse et comme ordonnée de M , quand π est rapporté au repère orthonormé déterminé par le triangle OIJ . On considère alors les fonctions $f=goh$, $f1=g1oh$ et $f2=g2oh$. On a, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f[(a,b)]=\{f1((a,b));f2((a,b))\}$; Si en plus $f[(a,b)] \subset (OI)$, $f1[(a,b)]=M1$ et $f2[(a,b)]=M2$, on convient aussi d'écrire $f1[(a,b)] = x_{M1}$ et $f2[(a,b)]= x_{M2}$, x_{M1} et x_{M2} étant les abscisses, respectivement, de $M1$ et de $M2$ dans l'axe $(O ; OI)$; dans ce cas on acceptera que $f_i[(a,b)]$, pour $i=1$ ou $i=2$, soit, suivant le contexte, un point ou, du moins provisoirement, un nombre réel. Toutefois on notera aussi que π est rapporté au repère orthonormé déterminé par le triangle OIJ uniquement lorsqu'il est considéré comme sur-ensemble de $h(\mathbb{R}^2)$, par contre, en tant que sur-ensemble de $f(\mathbb{R}^2)$, π n'est rapporté à aucun repère, tout en étant menu de la distance usuelle dont l'unité est OI .

On a alors :

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) / f[(a,b)] \subset (OI) \text{ ((} f_i[(a,b)]^2 + a f_i[(a,b)] + b = 0 \text{), pour } i \in \{1,2\} \text{) ,}$$

$$2. (\forall X \in P(\mathbb{R})) (E(X) = \emptyset) \text{ avec } E(X) = \{ \mu \in X^{IR \times IR} / \mu \text{ un homomorphisme d'ensembles et } (\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) (\forall x \in \mu[(a,b)]) (x^2 + ax + b = 0) \};$$

Objet de la Situation CCF

Il est alors question de construire un ensemble X vérifiant la propriété (p) suivante : $(X \supset IR)$, $(E(X) \neq \emptyset)$, et les propriétés des nombres 1 et 0 en tant qu'éléments du corps des réels IR , sont conservées dans X .

Consigne de la situation CCF (deuxième partie) :

Sachant que les points de l'axe $(O ; OI)$, constituent un ensemble structuré en le corps que modélise l'ensemble IR des nombres réels, les données de la situation doivent nous permettre de n'avoir recours qu'à la nécessité mathématique pour doter $\cup_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} f((a,b))$ de lois le structurant en un ensemble X , vérifiant la propriété (p). La structuration visée doit, en outre, découler aussi des remarques suivantes :

Pour tout $((x,y) ; (x',y')) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$:

$$f_1[(-2(x+x') ; (x+x')^2 + (y+y')^2)] = h[(x+x' ; |y+y'|)]$$

$$f_2[(-2(x+x') ; (x+x')^2 + (y+y')^2)] = h[(x+x' ; -|y+y'|)].$$

Ainsi si $h[(x ; y)] = f_i [(a,b)]$ et $h[(x' ; y')] = f_j [(c,d)]$ avec $(i=1 \text{ ou } i=2)$ et $(j=1 \text{ ou } j=2)$, deux cas se présentent :

i) cas où $f_i [(a,b)] \in (OI)$ et $f_j [(c,d)] \in (OI)$, dans ce cas on a :

$$f_i[(-2(x+x') ; (x+x')^2 + (y+y')^2)] = f_2[(-2(x+x') ; (x+x')^2 + (y+y')^2)] = f_i[(a,b)] + f_j[(c,d)] ;$$

ii) cas où $f_i [(a,b)] \notin (OI)$ ou $f_j [(c,d)] \notin (OI)$, dans ce cas, deux cas se présentent :

$y + y' \geq 0$, dans ce cas :
 $f_1[(-2(x+x') ; (x+x')^2+(y+y')^2)] = h[(x+x', y+y')]$,
 et $f_2[(-2(x+x') ; (x+x')^2+(y+y')^2)] = h[(x+x', -(y+y'))]$;
 $y+y' < 0$, dans ce cas :
 $f_1[(-2(x+x') ; (x+x')^2+(y+y')^2)] = h[(x+x', -(y+y'))]$,
 et $f_2[(-2(x+x') ; (x+x')^2+(y+y')^2)] = h[(x+x', y+y')]$;

Pour tout $((x,y) ; (x',y')) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$:
 si $a' = -2(xx' - yy')$ et $b' = (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2$ on a
 $f_1[(a', b')] = h[(xx' - yy' ; |xy' + x'y|)]$
 et $f_2[(a', b')] = h[(xx' - yy' ; -|xy' + x'y|)]$.
 D'où : si $h[(x ; y)] = f_i [(a, b)]$ et $h[(x' ; y')] = f_j [(c, d)]$ avec $i=1$ ou $i=2$ et $j=1$ ou $j=2$, alors deux cas se présentent :

i) cas où $f_i [(a, b)] \in (OI)$ et $f_j [(c, d)] \in (OI)$, dans ce cas on a :
 $f_1[(-2(xx' - yy') ; (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2)] = f_2[(-2(xx' - yy') ; (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2)] =$
 $= f_i [(a, b)] \times f_j [(c, d)]$;
 ii) cas où $f_i [(a, b)] \notin (OI)$ ou $f_j [(c, d)] \notin (OI)$, dans ce cas deux cas se présentent :
 $xy' + x'y \geq 0$, dans ce cas :
 $f_1[(-2(xx' - yy') ; (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2)] = h[(xx' - yy', xy' + x'y)]$
 et $f_2[(-2(xx' - yy') ; (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2)] = h[(xx' - yy', -(xy' + x'y))]$;
 $xy' + x'y < 0$, dans ce cas :
 $f_1[(-2(xx' - yy') ; (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2)] = h[(xx' - yy', -(xy' + x'y))]$
 et $f_2[(-2(xx' - yy') ; (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2)] = h[(xx' - yy', xy' + x'y)]$.

Travail à faire

- 1) Illustrer par des constructions géométriques adéquates les principales données de la Situation et expliciter les données particulières que la présentation adoptée de la Situation a omis d'expliciter;
- 2) Etablir la véracité des remarques a. et b. de la deuxième partie de la Consigne ;
- 3) Décrire les étapes de réalisation de l'Objet de la Situation qui respectent à la fois la première et la deuxième partie de sa consigne.
- 4) Dans certaines de ces étapes la Situation nous met devant plusieurs choix possibles, surtout quand on veut définir les lois dont il faut doter $\bigcup_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} f[(a, b)]$, afin qu'il vérifie la propriété (p), préciser ces choix et expliquer comment la décision qui consiste à faire conserver à 0 et à 1 dans X leurs propriétés en tant qu'éléments distingués du corps IR permet-elle de réduire ces choix à une seule possibilité valable?

B. Présentation du « Calcul C2 »

D'après les données de la situation on a:

$$(\forall (a, b) \in \square^2)$$

$M = h[(a, b)] \Leftrightarrow \{M1, M2\} = f[(a, b)]$ avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \frac{a^2}{4} - b \geq 0 \\ \text{si } \frac{a^2}{4} - b < 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} M1 = h\left[\left(\frac{-a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}; 0\right)\right] = f1[(a, b)] \\ M2 = h\left[\left(\frac{-a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}; 0\right)\right] = f2[(a, b)] \\ \\ M1 = h\left[\left(\frac{-a}{2}; \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}\right)\right] = f1[(a, b)] \\ M2 = h\left[\left(\frac{-a}{2}; -\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}\right)\right] = f2[(a, b)] \end{array} \right.$$

d'où:

$$\forall ((x, y); (x', y')) \in \square^2 \times \square^2 :$$

$$(M = h[(-2(x+x'), (x+x')^2 + (y+y')^2)] \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M1 = h[(x+x'; |y+y'|)] = f1[(-2(x+x'), (x+x')^2 + (y+y')^2)] \\ M2 = h[(x+x'; -|y+y'|)] = f2[(-2(x+x'), (x+x')^2 + (y+y')^2)] \end{array} \right.$$

$$(M = h[(-2(xx'-yy'); (xx'-yy')^2 + (xy'+x'y)^2)] \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M1 = h[(xx'-yy'; |xy'+x'y|)] = f1[(-2(xx'-yy'); (xx'-yy')^2 + (xy'+x'y)^2)] \\ M2 = h[(xx'-yy'; -|xy'+x'y|)] = f2[(-2(xx'-yy'); (xx'-yy')^2 + (xy'+x'y)^2)] \end{array} \right.$$

il vient: $(\forall ((a, b), (c, d)) \in \square^2) (\forall (i, j) \in \mathbb{I}^2, \text{ avec } \mathbb{I} = \{1, 2\},$

si $fi[(a, b)] = h[(x, y)]$ et $fj[(c, d)] = h[(x', y')]$ alors:

$$y = y' = 0 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f1[(-2(x+x'), (x+x')^2 + (y+y')^2)] = f2[(-2(x+x'), (x+x')^2 + (y+y')^2)] = fi[(a, b)] + fj[(c, d)]. \\ f1[(-2(xx'-yy'); (xx'-yy')^2 + (xy'+x'y)^2)] = f2[(-2(xx'-yy'); (xx'-yy')^2 + (xy'+x'y)^2)] = fi[(a, b)] \times fj[(c, d)] \end{array} \right.$$

d'où: $(\forall ((a, b), (c, d)) \in \square^2) (\forall (i, j) \in \mathbb{I}^2, \text{ avec } \mathbb{I} = \{1, 2\}),$

si $(fi[(a, b)] = h[(x, y)] \text{ et } fj[(c, d)] = h[(x', y')])$ alors pour définir une loi additive dans $\bigcup_{(a, b) \in \square^2} f[(a, b)]$

deux éventualités se présentent:

une 1ère éventualité: $fi[(a, b)] + fj[(c, d)] = f1[(-2(x+x'), (x+x')^2 + (y+y')^2)];$

ne 2ième éventualité: $fi[(a, b)] + fj[(c, d)] = f2[(-2(x+x'), (x+x')^2 + (y+y')^2)])$

et pour définir une loi multiplicative, deux éventualité se présentent aussi:

une 1ère éventualité: $(fi[(a, b)] \times fj[(c, d)] = f1[(-2(xx'-yy'); (xx'-yy')^2 + (xy'+x'y)^2)]$

une deuxième éventualité: $fi[(a, b)] \times fj[(c, d)] = f2[(-2(xx'-yy'); (xx'-yy')^2 + (xy'+x'y)^2)]) ;$

des contraintes restreignent ces choix en un seul pour l'addition et un seul pour la multiplication: la plus simple de ces contraintes est celle, formulée dans la consigne de la situation, prescrivant la conservation par les réels 0 et 1 de leurs neutralité dans la nouvelle structure en construction; le premier pour l'addition à définir et le deuxième pour la multiplication à définir aussi, comme $(\forall j \in I) ((f_j[(c,d)]=0 \text{ et } f_j[(c,d)]=h[(x',y')]) \Leftrightarrow ((x',y')=(0,0)))$ et $(\forall j \in I) ((f_j[(c,d)]=1 \text{ et } f_j[(c,d)]=h[(x',y')]) \Leftrightarrow ((x', y') = (1, 0)))$ en outre $(h[(x,|y)]= h[(x,y) \Leftrightarrow y \geq 0)$ et $(h[(x,-|y)]= h[(x,y) \Leftrightarrow y < 0)$ d'où: pour que 0 et 1 conservent leurs neutralité respectives, il devient nécessaire de choisir respectivement pour l'addition et pour la multiplication les définitions suivantes:

$$f_i[(a,b)]+f_j[(c,d)]=f_1[(-2(x+x'), (x+x')^2+(y+y')^2)] \text{ si } y+y' \geq 0,$$

$$\text{et } f_i[(a,b)]+f_j[(c,d)]=f_2[(-2(x+x'), (x+x')^2+(y+y')^2)] \text{ si } y+y' < 0;$$

$$f_i[(a,b)] \times f_j[(c,d)]=f_1[(-2(xx'-yy');(xx'-yy')^2+(xy'+x'y)^2)] \text{ si } xy'+x'y \geq 0,$$

$$\text{et } f_i[(a,b)] \times f_j[(c,d)]=f_2[(-2(xx'-yy');(xx'-yy')^2+(xy'+x'y)^2)] \text{ si } xy'+x'y < 0$$

C. Analyse du ‘ Calcul C2’

De quoi le « Calcul C2 » diffère-t-il du « Calcul C1 » ? Dans l’analyse que nous avons déroulé ci-dessus à propos du « Calcul C1 », nous avons entre autres choses répondu, sinon totalement du moins partiellement, à cette question. Rappelons tout de même que les deux calculs sont commandés par une même téléologie : doter un ensemble, contenant nécessairement IR, de deux lois, une loi additive et une loi multiplicative, pour qu’une certaine proposition, en l’occurrence la résolubilité de l’équation de second degré à coefficients réels, devienne toujours vraie.

Cette téléologie fait produire, par le « Calcul C1 », une famille de « mots virtuels », que sont les expressions ‘a+ib’, à coté des « mots corrects », que constituent les expressions algébriques désignant des nombres réels. Il s’agit ensuite de transformer cette famille de « mots virtuels » en une famille de « mots corrects » qui sera adjointe à la famille originelle. Ce calcul est contraint par l’indisponibilité immédiate des objets sur lesquels les deux lois à construire doivent opérer. Quant à l’indisponibilité immédiate de ces mêmes lois, c’est un problème réel mais caché à l’auteur du calcul par le recours implicite de ce dernier aux propriétés formelles des deux lois dont IR est doté. Cette manière dont sont gérées ces deux contraintes dans le « Calcul C1 » fait de celui-ci un calcul du primat de l’objet (les « mots virtuels ») sur l’opération (les deux lois à construire) : le projet téléonomique du « Calcul C1 » porte presque entièrement sur la forme à donner aux éléments de l’ensemble X en construction, laissant provisoirement suspendue la recherche des deux lois dont X sera doté.

Le « Calcul C2 » est, quant à lui, un calcul où le primat de l’opération sur l’objet est renforcé. En effet le projet téléonomique de ce calcul porte exclusivement sur la forme à donner aux deux lois cherchées puisque la Situation rend disponible l’ensemble des objets à doter de ces lois. En effet ces objets, que sont les points M1 et M2, images par f des couples (a,b) de nombres réels, sont disponibles immédiatement. C’est la manière d’opérer sur eux qui ne l’est pas, du moins pas directement. Cette indisponibilité des opérations est d’ailleurs renforcée par la première partie de la consigne de la Situation. Le respect de cette consigne rend impossible tout recours implicite aux opérations formelles des deux lois du corps IR. Les « productions » téléologiques de ce calcul doivent être des opérations et non des objets. La conséquence en est que ce calcul se confond avec le déploiement des quatre manières de doter l’ensemble $\bigcup_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} f[(a,b)]$ de

lois additive et multiplicative.

Ces quatre manières sont le fait de ce calcul. Il s’agit des combinaisons des deux éventualités relatives à la loi additive avec les deux éventualités relatives à la loi multiplicative. Ainsi, si l’effectuation du « Calcul C1 » repose presque entièrement, et de manière implicite, sur les ressources syntaxiques qu’offre la structure algébrique de IR en tant que corps, l’effectuation du « Calcul C2 », par contre, se base sur une explicitation de ses ressources pour en étendre le domaine de validité. Les contraintes qui réduisent le choix entre les quatre manières mentionnées plus haut à un choix unique valable en sont la marque tangible.

Ces considérations nous ont conforté dans l’idée qui consiste à dire que si le « Calcul C1 » use de la régulation syntaxique comme outil, le « Calcul C2 », par contre, porte cette dernière au rang d’objet d’étude. En effet ce calcul vise la constitution d’un système opératoire, en l’occurrence les deux lois en question, à partir de la description d’objets empiriques que sont les points M1 et M2, images par f des couples (a,b) de nombres réels. On peut citer à ce propos GILLES-GASTON GRANGER lorsqu’il écrit :

« ... on constate à l’évidence le constant débordement de l’opérateur¹¹ par des contenus empiriques¹², les systèmes opératoires sont ici matériels autant que conceptuels, mais Gaston Bachelard a bien montré l’étroit enchevêtrement de ces deux aspects, en même temps qu’il décrivait le progrès de la sciences comme constitution toujours remise en chantier de types d’objets corrélatifs de systèmes opératoires. » (GRANGER G.-G. 2003, p 303)

Nous proposons au lecteur de retrouver par lui-même le « Calcul C1 » relatif à la symétrisation de N et celui relatif à la symétrisation de Z. Quant aux « Calculs C2 » relatif à chacune de ces deux symétrisations il faut d’abord disposer pour chacune d’elles d’un Modèle Géométrique de la Situation Fondamentale dans ses deux sous états de l’état 1. Le lecteur peut, bien entendu, s’essayer à retrouver par lui-même ces modèles géométriques. Quant à nous, la place réservée à cet article ne nous permet pas de les exposer. Toutefois ils sont à la disposition de tout lecteur qui en exprimera le désir en le nous signalant.

3. ANALYSE DIDACTIQUE DE LA SF(SAN)

Une situation fondamentale caractéristique d’une connaissance est reconnaissable :

- d’abord en ce qu’elle participe, en tant que ‘*situation d’analyse de la didactique*’ (voir Brousseau, 1986b), à l’élucidation du rapport du système didactique à cette connaissance, dans le sens où cette situation offre un point de vue à partir duquel on distingue, quant à une genèse provoquée de cette connaissance, les choix potentiels qui s’offrent au système et ceux effectivement effectué par lui ;
- en outre, une situation capable de faire émerger chez un apprenant une certaine connaissance peut a fortiori aider à délimiter la place que celle-ci occupe dans *le milieu institutionnel*, c’est-à-dire parmi les objets d’apprentissages qui apparaissent, non pas comme une intentionnalité affichée du système, mais comme une finalité vers laquelle ce dernier se dirige inexorablement ;
- elle l’est ensuite en ce qu’elle dévoile le fait que l’étendue de cette place, dans ce milieu, est immanente à des clauses déterminées, quoique implicites, du *contrat didactique* noué par le système autour d’un savoir donné ;
- elle l’est encore en ce qu’elle dévoile des *obstacles épistémologiques* et des *obstacles didactiques* qui rendent des variables didactiques ou de commandes un point aveugle de la relation didactique que le système d’enseignement construit autour d’un savoir ;

¹¹ Il s’agit du cas où : $f_i((a,b)) \in (OI)$ et $f_j((c,d)) \in (OI)$, dans ce cas, on a :
 $f_1((-2(x+x'); (x+x')^2+(y+y')^2)) = f_2((-2(x+x'); (x+x')^2+(y+y')^2)) = f_i((a,b)) + f_j((c,d))$; et du cas où :
 $f_i((a,b)) \in (OI)$ et $f_j((c,d)) \in (OI)$, dans ce, cas on a :
 $f_1((-2(xx'-yy'); (xx'-yy')^2+(xy'+x'y)^2)) = f_2((-2(xx'-yy'); (xx'-yy')^2+(xy'+x'y)^2)) = f_i((a,b)) \times f_j((c,d))$;

¹² ...les autres cas

- elle l'est enfin en ce qu'elle actualise, pour ce faire, *la méthode d'investigation préconisée par la TSD*.

Les trois premiers caractères ont trait à la compatibilité de la situation avec l'objet¹³ de la TSD, le troisième avec la méthode de cette dernière.

3.1. Compatibilité de la SF(SAN) avec l'objet de la TSD

3.1.1. La SF(SAN) et l'interrogation du Milieu Institutionnel

On peut s'intéresser de prime abord aux réactions éventuelles des étudiants face aux deux types de calculs, le « Calcul C1 » et le « Calcul C2 », en vue, par exemple, de savoir si la maîtrise du premier implique celle du second. Cependant, il importe de savoir, à l'aune de l'étude épistémologique que nous venons de dérouler, la place qu'occupent l'un et l'autre dans les manuels scolaires qui, à notre sens, représentent, dans l'acception diplomatique du terme, le milieu institutionnel.

En effet ces deux calculs constituent la grille de lecture des manuels, que nous avons mentionnée plus haut. Car il nous semble naturel de considérer comme argument fort en faveur d'une conclusion affirmant que ces manuels ont tendance à développer chez l'élève la conception sténographique de l'algèbre le fait que ces mêmes manuels cherchent à promouvoir dans le milieu scolaire des calculs proches du « Calcul C1 » seuls, en dehors de tout calcul proche du « Calcul C2 ». Par contre ce même argument devient d'autant plus faible que ces manuels cherchent, à travers les activités qu'ils proposent à l'élève, à promouvoir des calculs proches du « Calcul C2 ».

Or le milieu du « Calcul C2 » étant un milieu de nature géométrique, sa place ne saurait être aux côtés des objets d'apprentissage auxquels le système didactique réserve un environnement cognitif constitué exclusivement de formules arithmétiques qu'il porte, éventuellement, au niveau de l'expression formelle. Pour cette raison le « Calcul C2 » ne saurait être qu'une monstruosité par rapport aux objets d'enseignement et d'apprentissage habituels, fussent-ils rattachés aux savoirs voisins de ceux impliqués dans ce même calcul.

Ces considérations nous ont amenés à nous nous contenter de notre expérience d'enseignants de mathématiques pour porter un jugement sur les places respectives réservées aux calculs C1 et C2 dans le milieu didactique institutionnel. Cette expérience s'étire sur plus d'une vingtaine d'années. Pourtant nous n'avons jamais rencontré un seul manuel où il est question d'un calcul analogue au « Calcul C2 ». Seuls les calculs analogues au « Calcul C1 » seraient ceux que les manuels scolaires cherchent à promouvoir dans le milieu scolaire.

Cela ne suffit pourtant pas à considérer ce rapport des manuels scolaires avec les calculs du genre « Calcul C2 » comme argument fort en faveur de l'assimilation de ces derniers aux promoteurs de la conception sténographique de l'algèbre. Avant d'arriver à cette conclusion, il est nécessaire d'étudier les réactions des étudiants qui, mis devant la Situation CCF, doivent répondre par le « Calcul C2 ».

Par contre, du point de vue où nous les envisageons, cela suffit pour considérer les manuels scolaires et la conception sténographique de l'algèbre, sinon comme deux phénomènes d'enseignement corrélés, du moins comme faisant partie intégrante des phénomènes qui font l'objet de l'investigation de le cadre de la TSD : parmi les phénomènes d'enseignement identifiés dans le cadre précisément de la TSD (voir BROUSSEAU, 1986a), le plus proche des deux phénomènes qui nous occupent ici est sans aucun doute celui désigné par BROUSSEAU (1986a) par 'abus de l'analogie'.

¹³ Selon ce point de vue l'objet de la TSD est représenté par un ensemble de thèmes distinctifs abordés par BROUSSEAU G. dans ces différentes études et travaux, tels les thèmes de milieu didactique (et sa structuration), d'obstacle didactique, de contrat didactique ...etc.

3.1.2. *La SF(SAN) et l'interrogation du contrat didactique*

Une des clauses implicites des contrats didactiques que le système didactique noue autour du calcul en général, appelons-la ‘la clause O’, c’est que l’opération n’est pas à être produite par l’élève, le rôle de l’élève est d’appliquer correctement les opérations que le professeur met à sa disposition. En général, il n’a pas non plus à produire les objets sur lesquels il doit opérer, mais en opérant par des opérateurs mis à sa disposition sur des objets initiaux mis également à sa disposition, il peut obtenir de nouveaux objets sur lesquels il peut appliquer à nouveau ces opérateurs, faisant comme s’il a lui-même produit ces nouveaux objets.

En outre, si des ruptures répétées et répétables de ces contrats, provoquée sciemment par le chercheur, peuvent être reconnues et ramenées par des observateurs impartiaux à la violation de la ‘clause O’, comme la cause unique de ces ruptures, et si celles-ci concernent les niveaux supérieurs de l’Enseignement alors aucun doute ne subsiste quant à la véracité de l’omniprésence de cette clause comme constitutives des contrats didactiques en question.

Exiger des étudiants de répondre par le « Calcul C1 » pourrait provoquer une violation de la ‘clause O’, au cas où celle-ci serait réellement constitutive des différents contrats didactiques noués autour du calcul, pris dans son acception général. Par contre, s’il y a rupture de ces contrats quand on exige des étudiants de répondre par le « Calcul C2 », cette rupture ne peut s’expliquer que par la nature de ce calcul, car celui-ci a comme caractéristique celle de mettre la production de l’opération idoine sous la responsabilité exclusive de l’opérateur lui-même, de sorte que l’exigence de répondre par ce calcul ne peut provoquer la rupture du contrat que par violation de la ‘clause O’.

La situation CCF exige des étudiants de répondre par le « Calcul C2 », cette situation est potentiellement révélatrice de la nature des contrats didactiques noués par le système didactique autour du calcul. Car au cas où cette situation s’avère provocatrice de la rupture de ces contrats, il y aurait lieu d’en déduire que ces derniers comportent, parmi leurs clauses constitutives, la ‘clause O’.

La présence permanente de la ‘clause O’ serait le signe évident de choix didactiques malencontreux: ces choix voueraient le système didactique à une cécité devant tout type de calcul nécessitant la dévolution à l’élève d’une position épistémique à partir de laquelle la régulation syntaxique devient un objet d’étude à part entière. Cette cécité était prévisible à cause de la place trop réduite que les manuels scolaires auraient réservée aux calculs de type « le Calcul C2 ».

3.1.3. *La SF(SAN) et le dévoilement d’obstacles didactiques*

Dans le sous-chapitre ‘Conception comtienne de l’algèbre comme calcul de fonctions’, nous avons distingué deux conceptions quant à la résolution d’équations : la conception ternaire et la conception binaire. Nous avons montré comment la première s’est constituée, chez les commentateurs de COMTE, en un obstacle à l’émergence de la seconde, et comment il s’agirait, dans ce cas précis, d’un obstacle épistémologique. Cependant, ce qu’on peut concevoir comme étant un obstacle épistémologique pour des individus, agents connaissant et agissant, ne saurait se concevoir comme telle pour un système d’enseignement, pour la noosphère (CHEVALLERD Y., 1991) prise dans son ensemble : en effet, en tant que promoteur attiré de conceptions dans le milieu scolaire, le système doit être interpellé à propos de la conception de l’équation chez l’élève, et de la possibilité, offerte ou non à celui-ci, de l’élever de la conception ternaire à la conception binaire.

Reprenons notre exemple de l’équation de premier degré à coefficients entiers relatifs non nuls, $ax+b=0$. Le statut des coefficients a et b est une variable didactique qui prend, entre autres valeurs, les valeurs suivantes :

- la valeur (1), quand ces coefficients sont des nombres déterminés, fixés ;
- la valeur (2), quand ils sont des indéterminées ;
- la valeur (3), quand ils sont des variables.

Sachant que la signification des valeurs (2) et (3) est celle développée par Jacqueline BONIFACE dans (BONIFACE J. 2003), notamment quand elle écrit:

Contrairement à l'inconnue qui désigne simplement la (ou les) solution(s) de l'équation, et n'est utilisée que pour faciliter le calcul, l'indéterminée permet de considérer l'expression algébrique en *elle-même*. La théorie algébrique des formes ne commence donc, réellement, qu'avec la considération de lettres comme *indéterminées*. La notion de variable, quant à elle, apparaît explicitement, au début du XIX^{ème} siècle, avec la théorie des fonctions. Le terme « variable » succède au terme « quantité variable », et cette notion prend son sens actuel avec l'utilisation des quantificateurs. Dire qu'une variable « parcourt un domaine de valeurs » ou « tend vers une limite », ne veut plus dire désormais que la variable désigne une quantité qui *varie*, mais qu'elle désigne chaque valeur du domaine, ou, respectivement, chaque valeur d'un intervalle, aussi petit que l'on veut, contenant la limite. (Jacqueline BONIFACE, 2003, p. 113-114)

Cette citation montre clairement que la conception ternaire de l'équation procède de la prise, successivement, de la valeur (1) puis de la valeur (2) par la variable didactique en question ; tandis que la conception binaire procède de la prise par cette même variable, successivement, de la valeur (2) et de la valeur (3).

Le système didactique fait prendre à cette variable didactique la valeur (1), puis la valeur (2). Ce faisant, il passe d'une position épistémologiquement moins élevée à une autre plus élevée. Ensuite, avec les objets d'enseignement intitulés : 'équations de premier (respectivement, de second degré) avec paramètre', on s'attend à ce que le système utilise la notion de paramètre comme relais entre la valeur (2) et la valeur (3), dans la perspective de passer de cette dernière position, qui devient alors une position épistémologiquement intermédiaire, à la position plus élevée ; or l'examen des objets d'apprentissage associés à ces objets d'enseignement montre que les premiers consistent en l'apprentissage, par l'élève, du calcul de la valeur numérique du paramètre donnant lieu à une équation qui n'admet pas de solutions ou qui en admet une infinité ou un type particulier de solutions. Ainsi, au lieu que le système didactique fasse passer les coefficients de l'équation du statut d'indéterminée à celui de variable et passer ainsi de cette position intermédiaire à la position plus élevée épistémologiquement, il fait régresser le statut de ces coefficients du statut d'indéterminée au statut de nombres fixés et, ce faisant, il régresserait, lui-même, de la position intermédiaire vers la position initiale moins élevée épistémologiquement. Cette manière avec laquelle le système mobilise le statut des coefficients de l'équation serait, à notre sens, un choix didactique malencontreux, ce serait donc un obstacle didactique (BROUSSEAU G. 1983) ; nous en saurons d'avantage quand, dans les chapitres et sous-chapitres qui vont suivre, nous aurions spécifié ces positions épistémologiques dans lesquelles il est possible de positionner le système didactique, et ce via le Schéma de la Structuration du Milieu Didactique autour duquel s'articule la TSD.

3.1.4. La SF(SAN) comme Situation d'Analyse de la Didactique

Dans le chapitre consacré à la conception comtienne de l'algèbre, nous avons pointé des obstacles épistémologiques dont le franchissement est nécessaire pour un déploiement du plan de COMTE pour l'algèbre. Certains de ces obstacles sont intrinsèques à ce plan, comme celui qui se dresse devant la nécessité de faire comme si on ne connaissait pas les nombres rationnels. D'autres lui sont extrinsèques, comme ces obstacles qui ont conduit des commentateurs de COMTE à assimiler son plan à celui de VIETE. La SF(SAN) reprend le plan de COMTE pour mettre en perspective et les moyens de franchissement de ces obstacles, et les possibilités que le système didactique se donne pour organiser ce franchissement.

La SF(SAN) montre, rétrospectivement, que le système se trouve devant un double problème :

- veiller à ce que la transposition dans le milieu scolaire des concepts d'algèbre tienne compte des moyens en question;

- veiller à ce que cette même transposition tienne compte aussi de la nécessité de la dévolution à l'élève d'une position épistémologique à partir de laquelle la régulation syntaxique devienne pour lui un objet d'étude à part entière.

Ce double problème est constitutif d'une situation d'enseignement au sens de BROUSSEAU : il met le système didactique dans une position épistémologiquement équivalente à celle du **professeur réfléchissant à son activité d'enseignement ou la préparant** : dans le *Schéma de la structuration du Milieu Didactique* développé par BROUSSEAU dans (BROUSSEAU, 1986a) cette position est *la position P1* ; celle-ci se trouve au dessus de quatre positions similaires dont la plus basse est S5, vient ensuite dans l'ordre S4, puis S3, S2 (avec P2), S1 (avec P1) et enfin S0 ; dans une genèse provoquée d'une connaissance mathématique donnée, chacune de ces positions décrit un niveau d'implication différent d'un sujet épistémologique ; chaque niveau d'implication est moins fort, ou moins profonds, par rapport aux niveaux qui se trouvent au dessus. Nous reprendrons les niveaux inférieurs de ce système de positions dans le sous-chapitre suivant avec beaucoup plus de détails. Nous pouvons nous contenter ici d'une utilisation sommaire de ses niveaux supérieurs S2, P1 et S0.

Ainsi, via la SF(SAN), l'action du système didactique va pouvoir être jaugé à l'aune du Schéma de la Structuration du Milieu Didactique, et cela, rétrospectivement, selon l'évolution du système à partir de la position P1. En effet il est loisible de convenir que :

- tant qu'il tient compte de l'un des deux aspects, sans tenir compte de l'autre, relatifs au problème mentionné ci-dessus, (Evolution P1-P1), le système reste dans la position P1 ;
- s'il ne tient compte ni de l'un ni de l'autre aspect de ce même problème (Evolution P1-S2), le système bascule de la position P1 vers une position épistémologiquement inférieure, une position qui correspondrait à *la position S2* dans le Schéma de BROUSSEAU : dans ce schéma la position *S2 est la position de l'élève qui regarde sa propre situation d'apprentissage*, ici S2 est la position du système lorsque il fonctionne sous l'hypothèse erronée selon laquelle « *il suffit de connaître le sujet cognitif pour résoudre les problèmes de l'élève* » : sous cette hypothèse, l'intentionnalité que le système affiche décrit un profil de l'élève *résolveur de problèmes*, alors que la finalité vers laquelle il se dirige, de manière inexorable, en tant que système, est un élève dont le profil est celui d'un *algorithme de production de démonstrations selon les règles, il est vrai, de la logique mathématiques*.
- quand il aura tenu compte des deux aspects à la fois (Evolution P1-S0), le système bascule de la position P1 vers une position épistémologiquement supérieure, une position qui correspondrait à *la position S0* dans ce même schéma.

Du point de vue que constitue *la position S0*, le sujet cognitif et l'élève ne sont pas, a priori, assimilables : on cherche à provoquer la genèse du premier sous forme de connaissances du second ; et pour cela, on pose la nécessité de connaître le premier et *de se donner les moyens didactiques et socioculturels* à même de provoquer cette genèse.

La SF(SAN) permet de montrer comment le rapport de l'élève avec la structuration algébrique des nombres change selon que l'évolution du système didactique, mis dans la position P1 par cette situation même, est assimilable à P1-P1, à P1-S2 ou à P1-S0.

3.2. Compatibilité de la SF(SAN) avec la Méthode de la TSD

L'étude d'épistémologie historique, que nous avons conduite à propos de notions clefs de l'algèbre, nous a permis d'avancer des arguments en faveur d'une vision consacrant les manuels scolaires, dans leurs formes actuelles, et la conception sténographique de l'algèbre, comme deux phénomènes d'enseignement étroitement corrélés : les premiers étant à la fois vecteurs et promoteurs de la seconde.

Pour confronter ces arguments à la contingence et mesurer leur force, nous nous appuyons sur une méthode dérivée du Schéma de la Structuration du Milieu Didactique. Cette méthode préconisée par la TSD résulte des travaux de thèse de M. BAHRA (1995), sous la direction de

Guy BROUSSEAU, portant notamment, entre autres sujets, sur une actualisation de ce schéma. De cette méthode dérivent les cinq étapes suivantes :

3.2.1. Etape 1

Dans une première étape il s’agit de déterminer l’ensemble des comportements envisageables « au sens de Brousseau », au sein des comportements pertinents¹⁴ des étudiants, lorsque ceux-ci seront mis devant les situations adidactiques, élaborées pour servir de moyen pour cette confrontation: il s’agit de situer les comportements sollicités à travers ces situations par rapport aux niveaux de la hiérarchie des positions épistémiques qui composent le schéma en question, ce schéma étant alors vu comme un système de règles d’interprétation : à chaque comportement pertinent d’un des protagonistes de la relation didactique, ces règles font correspondre une position épistémique, parmi un système de positions graduées. Chacune de ces positions est caractérisée par une classe de situations cognitives spécifiques. Et chacune de ces situations génère la classe de niveau supérieur, et peut se dégénérer en la classe de niveau inférieur ; chacune de ces règles est en fait une règle de passage d’une position à la position de rang supérieur ou inférieur, à peu près de la manière suivante: un comportement dans une position donnée se dévoile par la nature des réponses apportées (par le Sujet) à la situation cognitive caractérisant ce niveau et par la nature des questions que ces réponses génèrent et suscitent (chez ce même sujet), de sorte qu’une réponse qui génère et suscite toutes les questions constitutives de la situation de niveau supérieur ferait passer le Sujet, auteur de ce comportement, c’est-à-dire de cette réponse et de ces questions, de la position épistémique actuelle à la position de niveau supérieur, une réponse qui n’en suscite aucune chez lui le ferait passer au niveau inférieur et une réponse qui en suscite, mais pas toutes, lui ferait garder la position originelle actuelle.

A notre sens, cette interprétation du Schéma serait le principe même du concept de dévolution. Mais nous nous contenterons ici d’une utilisation moins serrée de ce schéma, en partant du postulat suivant :

« Tout système de comportements, d’un des protagonistes de la relation didactique, dont les éléments peuvent être positionnés rationnellement par rapport à une section commençante des niveaux hiérarchiques du Schéma de Brousseau, fait partie du domaine de validité des règles d’interprétation posées par ce schéma, et ce positionnement des comportements peut suppléer à une application catégorique de ces mêmes règles sur ces derniers».

Pour distinguer ce positionnement opéré pour des éléments d’un système de comportement, de celui qu’on pourrait obtenir, pour les éléments de ce même système, par une application franche des règles, nous convenons, en hommage à Guy Brousseau, d’appeler ce système dont les éléments sont ainsi positionnés, « *système (de comportements) envisageable au sens de Brousseau* » et de le noter **SEB**, arguant par là que le schéma en question est d’une profondeur méthodologique telle qu’il permet une application aussi détendue de ses règles sans que cela puisse en violenter le principe.

3.2.2. Etape 2

Dans la deuxième étape il s’agit de pondérer les éléments du SEB spécifié dans l’étape1, par leurs fréquences d’apparition, en se basant sur une « distribution de fréquence plausible » au sens où il serait plausible que les hypothèses de recherche auxquelles le phénomène étudié donne lieu, soient nécessairement réductibles à un système implicite de pondération qu’actualise cette distribution. Rendue effective, une réduction de cette sorte, bien que de nature spéculative, ne saurait être arbitraire, puisque elle doit être dérivée de la recherche en cours, le système

¹⁴ Un comportement est pertinent par rapport un système de comportements spécifié préalablement s’il fait partie de ce système, tels ceux spécifiés par la consigne d’une situation didactique ou adidactique.

implicite de pondération en question devant apparaître comme étant le fil d’Ariane de cette dernière. En outre, suite au postulat ci-dessus, on acceptera qu’une telle réduction sera d’autant plus légitimée que l’ensemble des comportements impliqués satisfait aux stipulations qui délimitent un SEB. Nous appellerons cette pondération ‘*pondération plausible*’ ;

3.2.3. Etape 3

Dans la troisième étape il s’agit de reprendre le même ensemble pour pondérer à nouveau ses éléments, toujours par leurs fréquences d’apparition, mais en se basant cette fois-ci sur une distribution de fréquences empirique tirée de la contingence, sachant que par une bonne intelligence du fait que cette dernière est une actualisation des systèmes de pondération applicables aux systèmes de comportements, on peut rendre cette nouvelle distribution suffisamment proche de la réalité pour l’y confondre. Nous appellerons cette pondération ‘*pondération circonstanciée*’;

3.2.4. Etape 4

Dans la quatrième étape il s’agit d’appliquer le test d’indépendance du χ^2 aux deux variables discrètes du tableau croisé obtenu par les deux pondérations pour confirmer ou infirmer le rejet de l’hypothèse nulle de ce test. Sachant que le résultat de la réduction mentionnée ci-dessus prend après l’étape 3 la forme de l’hypothèse suivante : ***Que l’on choisisse la première ou la deuxième manière de pondérer, le poids qui sera affecté à chacun des éléments du système (de comportements) envisageable au sens de Brousseau (SEB) sera sensiblement le même***, cette hypothèse est donc confondue avec l’hypothèse nulle du test.

Notons que l’étape 4 est justifié par le fait suivant : si la réduction opérée est légitime, alors les deux pondérations sont censées décrire avec le même langage la même réalité, de sorte que les poids obtenus pour chacun des comportements envisagés doivent être indépendants de la manière de pondérer. Ainsi, l’hypothèse nulle associée au test et l’hypothèse ci-dessus, étant confondues, l’hypothèse « de dépendance », alternative à la première, et celle alternative à la seconde sont donc elles aussi confondues.

3.2.5. Etape 5

Dans la cinquième étape il s’agit d’examiner les deux pondérations du tableau croisé à la lumière des résultats du test d’hypothèse tout en tenant compte de l’hypothèse alternative à l’hypothèse ci-dessus, et ce, bien évidemment, dans le cas du rejet de l’hypothèse nulle.

3.2.6. Remarques générales

Quels seraient les facteurs qui pourraient biaiser le recours au test d’indépendance du khi2, et dont il faudrait tenir compte avant toute analyse des résultats? L’un des facteurs pourrait être la nature de la pondération plausible : celle-ci ne serait pas assez plausible, voire franchement invraisemblable; l’autre, la nature de la situation utilisée comme outil de confrontation à la contingence des arguments retenus : celle-ci pouvant donner lieu à une pondération circonstanciée qui, pour des raisons diverses serait sujette à caution. Or toute la recherche étant tendue de part en part, et par la première et par la deuxième pondération, on ne peut rejeter l’une d’elles sans rejeter l’intégralité de la recherche. Par contre, accoudées qu’elles sont à un travail de recherche qui ne saurait qu’être perfectible, les deux pondérations constituent plutôt un thème à creuser toujours d’avantage.

Hormis cela, nous considérons que, du point de vue où nous nous sommes placés, ***une situation fondamentale caractéristique d’une connaissance est reconnaissable en ce qu’elle provoque un SEB***. Aussi, l’analyse didactique a priori et a posteriori d’une situation potentiellement fondamentale consiste en la réalisation des étapes 1 et 2, pour la première analyse et les étapes 3, 4 et 5 pour la seconde, et ce lorsque cette situation, prise dans un de ces états, est destinée à

servir d’outil de confrontation à la contingence de certaines hypothèses de recherche, à l’instar des différents hypothèses qui nous occupent ici.

Le plan d’expérience qui se dégage dans ces cinq étapes est, de notre point de vue, celui que suggère la Méthode de la TSD. La Situation CCF constitue un moyen de réalisation de ce plan, en tant qu’elle représente un état parmi les états de la Situation Fondamentale autour de laquelle cette étude est construite.

3.3. Analyse didactique a priori de la Situation CCF

3.3.1. La Situation CCF, une situation munie d’un SEB

Dans cette partie, nous montrons que les comportements sollicités à travers la Situation CCF forment un SEB (un système (de comportements) envisageable au sens de Brousseau).

En effet, la première partie du ‘Travail’ que la Situation CCF exige de l’étudiant, met celui-ci devant la question suivante : « *comment illustrer par des constructions géométriques adéquates les principales données de la Situation tout en explicitant toutes les configurations particulières que la formulation de la Situation a omis de faire ?* »¹⁵. Cette question fait suite à la mise à disposition de l’étudiant, par la Situation, d’un système d’opérations concrètes et d’un système d’objets concrets sur lesquels ces opérations sont applicables : ce sont les opérations et les objets constitutifs du système symbolique physique (ou programme) calculant la fonction f , autour de laquelle cette Situation est construite. Mais si le système symbolique physique en question se confond avec le procédé de génération, triplet par triplet de points, du graphe de cette fonction, il ne permet nullement à l’opérateur qui l’exécute d’appréhender celle-ci à travers son graphe, car ce système, bien que la calculant, ne présente f que comme une opération donnant un résultat et non comme un graphe. Ainsi, l’activité de l’élève est d’abord absorbée entièrement par *l’effectuation d’une procédure* et cela positionne l’étudiant dans la position S5, de l’acteur objectif, dans le Schéma de BROUSSEAU (1986a).

En effet, du point de vue où nous nous plaçons, le Milieu Matériel M5 est formé de cet ensemble d’opérations concrètes que contient le système symbolique physique calculant la fonction f , et de cet ensemble d’objets concrets sur lesquels l’étudiant doit agir via ces opérations. Ce système positionne l’étudiant dans la position de l’actant S5 en tant qu’il effectue, sur le Milieu M5 ainsi entendu, des actions. *Et ces dernières sont non seulement formulables simplement mais aussi culturellement repérés et répertoriés*, comme l’exige le Schéma. En effet le recours de la Situation, de manière conjointe, au vocabulaire de la géométrie euclidienne et à celui de la géométrie analytique de Descartes, comme registre de formalisation du système symbolique physique en question, réunit les conditions de satisfaction de cette exigence.

On l’aura compris, l’abord de la fonction f par ce système symbolique physique la calculant ne permet pas de former immédiatement une image globale de son graphe, et donc d’appréhender celle-ci en tant qu’objet d’étude. Il faut préalablement ‘faire tourner’ suffisamment de fois ce système et surtout adopter vis-à-vis de son fonctionnement une attitude réflexive ; cependant, au cas même où l’étudiant prenne cette attitude, jusqu’où pourra-t-il pousser l’investigation ?

Ira-t-il jusqu’à substituer au calcul immanent au système symbolique physique un calcul qui, bien que déterminée formellement par ce système en fonction de sa syntaxe, lui est pourtant extrinsèque ?

Pour cela l’étudiant doit associer à la fonction f un domaine d’interprétation que le système ne fait que suggérer. La Situation va certainement le seconder dans ce sens, réussira-t-il pour autant à concevoir un tel domaine ?

En effet, la deuxième partie de ce même ‘Travail’ met l’étudiant devant la question suivante : ‘comment établir la véracité des remarques a. et b. exposées dans la deuxième partie de la Consigne ?’ : cette question positionne l’étudiant dans la position du *sujet connaissant et*

¹⁵ Se rapporter au texte de la Situation CCF dans le corps de l’article.

agissant ; c'est la Position du Sujet S4, selon la Schéma de BROUSSEAU (1986a), car, comme le sujet S4, l'étudiant entrain d'établir cette vérité *se trouve devant le milieu objectif M4 composé du couple (S5, M5)* puisque les énoncés dont il s'agit d'établir la vérité ne font que porter à l'expression formelle les actions de l'actant S5 sur le Milieu M5, l'actant peut être l'étudiant lui-même ou tout opérateur, envisagé par ce dernier, exécutant le programme auquel le système symbolique physique est associé.

La Situation contraint l'étudiant à lier cette expression aux actions qu'elle formalise, l'obligeant ainsi à adopter une position réflexive vis-à-vis de ces mêmes actions. Cependant, bien que ces dernières consistent en l'exécution mécanique des instructions du système calculant f , et malgré cette attitude réflexive, il n'est pas certain que l'étudiant saura former une image globale du graphe de cette fonction de sorte que celle-ci se métamorphose, entre ses mains, de l'outil qu'elle était à l'objet d'étude à part entière qu'elle devrait devenir.

Cette métamorphose est cruciale quant aux comportements de l'étudiant face à la Situation. En effet les énoncés a. et b. préfigurent les configurations potentielles du Milieu M4 et, ayant pris cette attitude réflexive par rapport aux actions qu'il accomplissait naguère quand il était dans la Position S5, l'étudiant cherche, par la force des choses, à anticiper ces configurations à partir de la Position S4. Mais y arrivera-t-il ? Il faut qu'il arrive d'abord à former cette image globale du graphe de la fonction f tout en arrivant à lire ces mêmes configurations dans les énoncés qui les suggèrent. Notons que ces dernières procèdent d'une structuration du graphe de f .

On l'aura bien remarqué, ce sont là, autour de ce système symbolique physique calculant la fonction f , les linéaments d'une situation d'action dont la solution est la connaissance du pourquoi et comment clôturer IR.

En effet, une fois placé dans la Position S4, l'étudiant verra son comportement basculer vers l'un ou l'autre des comportements suivants :

- rétrograder vers un comportement similaire à celui de l'Acteur S5, sans plus, car, incapable de concevoir globalement le graphe de la fonction f , l'anticipation reste hors de sa portée (**Comportement S4-S5**);
- ou faire preuve d'un comportement assimilable à celui du Sujet Epistémique, occupant la position S3, car, ayant pu concevoir le graphe de la fonction f , l'anticipation est devenue à sa portée et dans ce cas une des deux attitudes suivantes sera prise :
 - bien que l'anticipation semble être à la portée elle n'est pas réalisée sinon de manière incomplète (**Comportement S4-S4**) ;
 - l'anticipation étant devenue à la portée, elle est complètement réalisée et de manière effective (**Comportement S4-S3**) ;

C'est seulement dans cette deuxième attitude où l'étudiant peut, *envisageant les actions de S4, communiquer des renseignements sur l'action et débattre de son adéquation*. Ce par quoi, dans son Schéma, BROUSSEAU caractérise le Sujet Epistémique S3.

Plus précisément, c'est dans cette étape de la Situation, grâce notamment à la formation d'une image globale du graphe de la fonction f , que l'étudiant doit reconnaître, dans les actions qu'il accomplissait naguère quand il occupait la position de l'acteur S5, une actualisation géométrique potentielle d'un domaine de résolution des équations de second degré à coefficients réels, où toute équation de ce genre serait résoluble, et qui serait structurable en un corps dont IR est un sous corps : à tout couple de réels (a,b) la fonction f faisant correspondre « dans ce domaine en espérance », de manière constructive, les racines de l'équation $x^2+ax+b=0$.

En outre, à propos de cette structure de corps, c'est dans l'étape qui suit la question relative à l'établissement de la vérité des Remarques a. et b. où il y a lieu de définir les lois dont il faut doter $\bigcup_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} f[(a,b)]$ afin qu'il vérifie la propriété (p) ; la Situation met l'étudiant devant

plusieurs choix possibles et il s'agit alors non seulement d'expliciter ces choix mais aussi d'expliquer comment une certaine décision réduit-elle ces choix à une seule possibilité valable (rappelons que cette décision est celle qui consiste à faire conserver à 0 et à 1 dans X leur propriétés en tant qu'éléments distingués du corps IR).

Cette explicitation et cette explication exigent un travail direct sur le sens à donner à la contrainte qu'impose la première partie de la Consigne de la Situation CCF relative aux calculs admissibles : *cette contrainte stipule qu'à propos d'une fonction μ définie d'un ensemble E dans un ensemble F , n'est admissible comme résultat valide de calcul dans $\mu(E)$ que celui établi comme calcul de l'image par μ d'un élément spécifié de E* . C'est là un code de communication que la Situation met en jeu : le code s'articule autour de ce procédé de construction qui à tout couple (a,b) de nombres réels affecte successivement le point M de coordonnées (a,b) et la paire de points {M1,M2}, image par f de (a,b) : ce procédé est lui-même un code en tant qu'il rend communicable cette résolution constructive des équations de second degré, mentionnée ci-dessus, comme il rend communicable la façon avec laquelle cette résolution jette les bases d'une construction tout aussi constructive du corps C des complexes, mais ce code ne peut rendre communicable cette construction sans l'aide de cet autre code dont il était question ci-dessus et qu'installe la Première Partie de la Consigne de la Situation.

Fait important, remarquons que ce dernier code rend hors sujet tout code basé sur une construction ad hoc du corps C. Ainsi dans ce niveau **les codes de communication font l'objet d'un travail direct**, ce par quoi BROUSSEAU caractérise aussi le niveau épistémique S3 de son Schéma : l'étudiant qui arrive à reconnaître en le procédé et en la partie de la consigne en question les codes de communication décrit ci-dessus, ainsi que le genre de messages qu'ils permettent de véhiculer, et surtout les messages qu'ils s'interdisent de véhiculer (penser aux constructions ad hoc de C), n'a pas seulement le Milieu M5 face à lui, il se trouve devant le Milieu M3 constitué du couple (S4, M4) que d'ailleurs il maîtrise parfaitement, ce qui signifie que de la position S4, cet étudiant a basculé en s'élevant vers la Position S3.

Ainsi, la situation CCF est munie du système (de comportements) envisageable au sens de Brousseau suivant : $SEB = \{S4-S5 ; S4-S4 ; S3-S4\}$.

Pour le chercheur, ce SEB est assimilable à un système d'objets ou à un système d'opérations selon le point de vue où il se place, car il existe au moins deux positions qui constituent chacune un point de vue différent à partir duquel le SEB apparaît sous une forme différente: la situation munie de ce SEB, en l'occurrence la situation CCF est une de ces positions, le système didactique en est une autre.

Du point de vue la situation munie du SEB, celui-ci est, pour le chercheur, assimilable à un système d'objets qu'il manipule ou dont il dévoile l'existence, la portée, l'importance ...etc. ; du point de vue que constitue le système didactique comme position à partir de laquelle le chercheur examine les éléments du SEB, ceux-ci sont alors assimilable, pour ce dernier, à des opérations qu'effectue le système didactique en tant qu'acteur ; aussi est-il naturel d'associer au SEB un système duale noté (SEB)* (le duale du SEB) et nous estimons que les évolutions P1-S2, P1-P1 et P1-S0, envisageables comme évolutions possibles du système didactique, comme nous les avons introduites dans le sous-chapitre précédent, sont constitutives de ce (SEB)*, de sorte que (SEB)*={P1-S2 ; P1-P1 ; P1-S0} avec P1-S2=(S4-S5)*, P1-P1=(S4-S4)* et P1-S0=(S4-S3)*. Ainsi, au comportement S4-S5 de l'élève générique, correspond l'évolution P1-S2 du système didactique, à S4-S4 correspond P1-P1 et à S4-S3 correspond P1-S0. Du reste, ces deux points de vue à partir desquels le chercheur peut examiner un SEB donne de la position S0 de Sujet Universel dans le Schéma de la Structuration du Milieu Didactique une interprétation qu'il serait intéressant d'explorer :

La réalisation d'une pondération plausible d'un SEB serait une réalisation de l'identification (SEB)*={P1-S2 ; P1-P1 ; P1-S0}, dans les conditions indiquées ci-dessus.

3.3.2. Pondération plausible des éléments du SEB

Au terme de cette analyse didactique a priori de la Situation CCF, il nous est loisible d'associer à la Situation Fondamentales Caractéristique de la Structuration Algébrique des Nombres, comme « ensemble (de comportements) envisageable au sens de Brousseau », les trois comportements dont chacun donne lieu à l'une des trois performances suivantes, considérant

que cette situation fondamentale place l'étudiant d'emblée dans la Position S4, celui-ci verra sa position:

1. basculer en rétrogradant vers la position S5, quand, devant les Modèles, Formaliste puis Géométrique, de la Situation Fondamentale, il n'arrive à produire :
 - o ni un calcul pour qui des corrections relativement peu profondes suffisent pour qu'il devienne assimilable au « Calcul C1 »,
 - o ni un calcul pour qui des corrections relativement peu profondes suffisent pour qu'il devienne assimilable au « Calcul C2 » ;
2. inchangée tant que, devant ces mêmes situations, cet étudiant n'arrive à produire qu'un seul type de calcul parmi les deux types indiqués ci-dessus;
3. basculer en s'élevant vers la position S3 quand, devant ces mêmes situations, cet étudiant est capable de produire à la fois les deux types de calculs en question.

Le comportement sous-jacent à la première performance rejoint le comportement désigné dans le paragraphe ci-dessus par S4-S5, celui sous-jacent à la deuxième rejoint quant à lui celui désigné par S4-S4, et celui sous-jacent à la troisième celui désigné par S3-S4.

L'hypothèse selon laquelle :

la conception sténographique de l'algèbre doit évoluer, chez l'élève, qui progressivement et spontanément saura la transformer pour en faire l'outil de structuration des nombres, en le monoïde \mathbb{N} des entiers naturels, l'anneau \mathbb{Z} des entiers relatifs, le corps \mathbb{Q} des rationnels, le corps \mathbb{R} des réels et le corps \mathbb{C} des complexes, est une hypothèse sous laquelle le système didactique fonctionne, par manuels scolaires interposés.

D'après l'analyse que nous venons de dérouler, et eu égard à l'ensemble (de comportements) envisageable au sens de Brousseau qui en découle, il apparaît, comme un fait nécessairement plausible, que l'hypothèse ci-dessus soit réductible à l'assertion suivante :

Devant les deux Modèles, formaliste puis géométrique, de la Situation Fondamentale Caractéristique de la Structuration algébrique des nombres, les trois quart des élèves qui viennent de réussir le baccalauréat Mathématique seraient capables de réaliser la deuxième performance : ils garderaient la position S4. Le reste des élèves se partageraient la deuxième et la première performance sans aucun avantage de l'une sur l'autre (on se réfère ici à la distribution Normale).

Par contre, Devant les deux Modèles, la majorité des étudiants licenciés es mathématiques seraient capables de réaliser la troisième performance : ils verraient leur position épistémique basculer de la position S4 vers la position S3. Le reste des étudiants se partageraient la deuxième et la première performance avec un net avantage pour la deuxième (on tient compte ici de l'évolution supposée des apprentissages).

En d'autres termes :

Si l'on choisit chaque fois au hasard un étudiant parmi ceux qui viennent d'obtenir la licences es mathématiques, et que l'on répète cette opération un nombre de fois assez grand, alors on verrait se réaliser dans les conditions indiquées, la troisième performance, dans 50% de cas approximativement, la deuxième, dans 35%, et la première, dans 15%.

Par contre si l'on choisit un élève parmi ceux qui viennent d'obtenir leur baccalauréat Mathématiques, on verrait se réaliser la deuxième performance, dans 75% de cas approximativement, la première dans 12,5% et la troisième dans 12,5%.

Ainsi, sur la base de 200 étudiants licenciés es Mathématiques, la pondération plausible du SEB à leur sortie de l'Enseignement Secondaire, immédiatement après l'obtention du baccalauréat est :

SEB	Poids plausibles
S4-S5	25
S4-S4	150
S4-S3	25

Tandis que la pondération plausible du SEB les concernant à leur sortie de l'Enseignement Supérieur, après l'obtention de la licence est :

SEB	Poids plausibles
S4-S5	30
S4-S4	70
S4-S3	100

Remarquons que ces pondérations seraient celles que se donnerait le système didactique, affichant son intentionnalité en terme de performances de développeur, qu'il est, de connaissances chez l'élève ; ce qui signifie qu'il serait plus juste de dire qu'elles concernent le (SEB)* plutôt que le SEB.

L'examen des performances effectivement observées chez un groupe d'étudiants montrera la convergence ou la divergence de cette intentionnalité affichée du système avec la finalité vers laquelle il se dirige inexorablement en tant que système, cette finalité est décrite par les résultats de la pondération circonstanciée. L'analyse didactique a posteriori de la Situation CCF est dédiée à cet examen.

3.4. Analyse didactique a posteriori de la Situation CCF

3.4.1. Pondération circonstanciée des éléments du SEB

A. Profil des étudiants auxquels la Situation CCF a été dévolue

Les candidats au concours de l'Ecole Normale Supérieure de Casablanca, pour l'année universitaire 2005/2006 Section Math.V, proviennent des facultés des sciences marocaines parmi les étudiants ayant obtenu la licence es Mathématiques à l'issue de deux cycles d'études de deux années chacun dans ces facultés. Les lauréats de ce concours reçoivent une formation d'une année universitaire à l'ENS à l'issue de laquelle ceux qui ont réussi aux examens de fin d'année seront affectés aux différents lycées du royaume en tant qu professeurs de mathématiques titulaires. Ils s'occupent en général des classes de la Section Science Mathématique. Pendant leur année de formation à l'ENS, ces élèves-professeurs suivent un cours de didactique des mathématiques dont le volume horaire est de quatre heures hebdomadaires sur toute l'année. C'est dans le cadre de ce cours, en tant que professeur de didactique des mathématiques à l'ENS, que j'ai envisagé de leur proposer d'étudier les problèmes (ZCF), (QCF) et (CCF). Ces élèves-professeurs sont au nombre de quarante.

B. Les étapes du processus de dévolution de la Situation CCF

Etape 1

Dans cette étape j'ai proposé aux 40 étudiants de réfléchir aux problèmes (ZCF), (QCF) et (CCF), et de me rendre les solutions qu'ils proposent sur feuille comme devoir à la maison, dans un délai de deux semaines, renouvelables une fois pour ceux qui rencontrent des difficultés à trouver les réponses qu'ils estiment adéquates aux problèmes posés. Ce n'est qu'au bout d'un mois que les premières propositions ont commencé à me parvenir, la quasi majorité des étudiants demandent plus de temps pour réfléchir d'avantage, arguant qu'ils conçoivent bien les réponses, mais qu'ils ne savent comment s'y prendre pour les mettre noir sur blanc.

Etape 2

Arguant que les travaux qui me sont rendus sont tous inconsistants et qu'un tiers de la classe n'a rien rendu, il était nécessaire de donner plus d'indications sur les problèmes proposés pour permettre à tous de rendre un travail convenable. J'ai, par conséquent, fait participer la classe à dérouler, au tableau noir, le « Calcul C1 » relatif au problème (ZCF) et j'ai proposé comme exercices de dérouler les calculs de même type que le « Calcul C1 » relatifs aux problèmes

(QCF) et (CCF) et comme devoir à la maison, l'étude de la Situation CCF présentée ci-dessus, accompagnées des situations analogues ZCF et QCF. Concernant les réponses aux deux exercices, et à la fin de la correction exécutée collectivement par la classe au tableau, 75% des étudiants approximativement ont tous déclaré avoir déroulé un calcul pour lequel des corrections relativement peu profondes suffisent pour qu'il devienne assimilable à celui qui est déroulé sur le tableau,

Etape 3

Passées deux semaines les étudiants peinent encore à me rendre les travaux demandés à propos des situations CCF, ZCF et QCF. Ils estiment qu'au lieu de leur simplifier les choses les situations proposées ne font que les compliquer d'avantage, des essais sont pourtant faits mais tous infructueux : en effet ces travaux sont irrecevables car les étudiants commencent par se donner une construction ad hoc de C, en se référant à l'une ou l'autre des constructions classiques connues, pour ensuite vérifier qu'elle répond aux exigences demandées. J'ai commencé à y voir de la mauvaise volonté de leur part, la suite m'a montré que mes craintes étaient tout simplement infondées. J'ai donc fait participer tout le monde à faire dérouler, au tableau noir, le type de « Calcul C2 » pour les situations ZCF et QCF, et j'ai gardé secret le projet de leur donner la situation CCF comme contrôle surveillé et noté, et qui leur sera compté dans l'évaluation finale. Le contrôle est d'une durée de quatre heures, les conditions sont celles de l'examen de fin d'année. La date du contrôle de didactique leur été officiellement annoncé pour fin juin 2006.

C. Point d'achèvement du processus de dévolution

La passation du contrôle s'est passée dans des conditions habituelles, les étudiants étaient invités à faire de leur mieux pour rendre un travail complet et soigné. Ils ont fait individuellement ce qu'ils ont pu. A la fin du contrôle, avant même que je puisse regarder leurs copies, les étudiants sont venus me redire ce qu'il me disait tout le temps à propos de ce genre de situations: ils ont toujours l'impression de bien connaître ce qui est demandé, mais ils ont des difficultés à trouver la bonne formulation pour rédiger une réponse. Effectivement les réponses les plus attendues font défaut, sur les 40 copies rendues seules 5 comportent un calcul pour qui des corrections relativement peu profondes suffisent pour qu'il devienne assimilable au « Calcul C2 ».

Une toute première conclusion s'impose à nous, même si elle déborde sur le plan expérimental suivi, cette conclusion stipule qu'au vu de ces résultats : on ne peut pas affirmer que la maîtrise du « Calcul C1 » implique nécessairement celle du « Calcul C2 », ou que ce dernier puisse être transférable par l'étudiant d'une situation à une autre ; or ces situations naturalisent, en quelque sorte, le passage de l'arithmétique élémentaire à l'algèbre élémentaire, de sorte qu'admettre cette naturalisation c'est admettre que les étudiants interrogés sont incapables de la pointer et, insensibles à celle-ci, ils ne sauraient avoir de l'algèbre une conception autre que la conception sténographique.

En tenant compte des observations de l'étape 2, sur les 40 observations que sont les étudiants mis en position S4, la distribution des fréquences est donc 5, 25 et 10 respectivement pour la troisième, la deuxième et la première performance.

D'où la pondération suivante :

SEB	Poids circonstanciels
S4-S5	10
S4-S4	25
S4-S3	5

3.4.2. Soumission des deux pondérations au test du χ^2

Les pondérations plausibles et la pondération circonstanciée donnent lieu aux tableaux croisés suivants :

- Tableau Elèves-Etudiants, les fréquences observées et théoriques dans le tableau croisé

SEB	Poids plausibles	Poids circonstanciés	
S4-S5	25 (29,16)	10 (5,8)	35
S4-S4	150 (145,8)	25 (29,16)	175
S4-S3	25 (25)	5 (5)	30
	200	40	240

Le calcul de la statistique χ^2 pour ce tableau croisé donne le résultat suivant : $\chi^2=4,34$;

- Tableau Etudiants-Etudiants, les fréquences observées et théoriques dans le tableau croisé

SEB	Poids plausibles	Poids circonstanciés	
S4-S5	30 (33,33)	10 (6,66)	40
S4-S4	70 (79,16)	25 (15,83)	95
S4-S3	100 (87,5)	5 (17,5)	105
	200	40	240

Le calcul de la statistique χ^2 pour ce tableau croisé donne le résultat suivant : $\chi^2=19,06$

3.4.3. Analyse des résultats

Nous avons montré plus haut que, dans le contexte des variables étudiées, l’hypothèse nulle, stipulant que la valeur de χ^2 dans la population est égale à zéro, est confondue avec l’hypothèse suivante : **« que l’on choisisse la première ou la deuxième manière de pondérer, le poids qui sera affecté à chacun des éléments du système (de comportements) envisageable au sens de Brousseau (SEB) sera toujours sensiblement le même ».**

Ainsi l’hypothèse nulle associée au test du χ^2 et l’hypothèse ci-dessus, étant confondues, l’hypothèse « de dépendance », alternative à la première, et celle alternative à la seconde sont donc elles aussi confondues ; comme le degré de liberté de chacun des deux tableaux croisés est 2, et que pour ce degré de liberté **$prob(\chi^2 > 5,991) = 0,05$** , alors, pour le premier tableau croisé (Tableau Elèves-Etudiants), l’hypothèse nulle de non-relation ne peut pas être rejetée en faveur de l’hypothèse que la relation existe, et cela au seuil de signification de 0,05. Notons que l’hypothèse nulle stipule, ici, l’indépendance des poids, affectés aux éléments du SEB, du choix effectué entre les deux manières de pondérer.

Par contre, pour le deuxième Tableau (Tableau Etudiants-Etudiants), l’hypothèse nulle est rejetée: la dépendance des poids affectés du choix effectué entre les deux manières de pondérer est, dans ce cas, statistiquement significative au seuil de 0,05.

Quelle implication cela aura-t-il pour notre analyse ?

- Commençons par le premier tableau :

Deux points de vue s’offrent à nous, le point de vue du système didactique est celui de l’observateur extérieur :

Selon le premier, il est du domaine certain le fait que les connaissances de l’étudiant, à sa sortie de l’université, relatives aux structures mathématiques en général et aux structures algébriques en particulier, sont beaucoup plus fines, beaucoup plus profondes et mieux affirmées que celles qu’il possédait à sa sortie du lycée ; surtout quand il s’agit d’un étudiant assujéti à une des sections à dominante mathématique, comme c’est le cas pour nos étudiants.

Selon le second point de vue, celui de l’observateur, la situation CCF n’implique comme connaissances que des connaissances officiellement exigibles d’un bachelier de section mathématique, la pondération circonstanciée, des éléments du SEB, issue de cette situation et celle plausible renvoyant aux résultats des épreuves de mathématiques de ce diplôme sont donc deux façons de pondérer que l’on peut considérer a priori comme équivalentes.

Selon les deux points de vue ci-dessus, l’indépendance des résultats de la pondération du choix effectué entre les deux manières de pondérer est irrecevable, puisque, les deux manières de pondérer entre lesquelles le choix s’effectue étant équivalentes, d’après le second point de vue, l’application de l’une à un moment puis de l’autre à un autre sur la même population, revient à

appliquer, sur cette population, une seule des deux manières à des moments différents : à la sortie du lycée puis à la sortie de la faculté. Comme cette population est constituée de bons élèves en mathématiques, devenus ensuite de bons étudiants dans cette même discipline, les succès remportés par ces derniers le long de leurs parcours scolaires et universitaire laissent entendre, d’après le premier point de vue, que les résultats de la pondération doivent être nettement meilleurs à leur sortie de l’université qu’à leur sortie du lycée.

Les poids affectés aux éléments du SEB vont finalement dépendre, non de la façon de pondérer mais du moment choisi pour effectuer la pondération, ce qui revient au même; or l’hypothèse nulle ne pouvant pas être rejeté, on ne peut donc pas considérer avec la confiance nécessaire l’hypothèse alternative de dépendance.

Se pose alors pour le système didactique la question cruciale suivante:

« Par quels moyens convaincre un observateur sceptique qui, s’appuyant sur le non rejet, dans ce cas précis, de l’hypothèse nulle, viendrait à soutenir que les succès attribués officiellement à ces étudiants seraient illusoires, comme il serait illusoire de croire que les connaissances de ces étudiants en algèbre aient connu une évolution quelconque depuis ce que ces derniers ont appris au collège ? »

Le non rejet de l’hypothèse nulle ôte au système didactique tout moyen de se défendre contre ce scepticisme.

Cette position de ‘sans défense contre le sceptique’ dans laquelle le système didactique se trouve est le fait de la situation CCF. C’est le signe évident d’une rupture du contrat didactique noué par ce système autour de la structuration algébrique des nombres, rupture provoquée par cette situation. Nous avons expliqué longuement plus haut la signification d’une telle rupture quant au rapport du système didactique avec l’algèbre.

- Qu’on est-il du second tableau croisé?

Vue comme un simple test de connaissances, la situation CCF porterait sur des connaissances en algèbre qui sont officiellement exigibles, au plus, des élèves du lycée de la Section dite « Science Mathématique » ; or cette situation est proposée à des étudiants qui ont obtenu non seulement le diplôme du baccalauréat spécifique à cette section, mais aussi le diplôme de la licence es mathématiques sanctionnant leur passage avec succès aux examens des deux cycles des facultés des sciences dont le cursus donne aux structures algébriques une place non négligeable; cela veut dire donc que les poids obtenus par les éléments du SEB ne doivent pas dépendre du choix effectué entre les deux manières de pondérer, dans la mesure où ces diplômes garantissent largement le succès de ces étudiants au test de la situation CCF, or ce test renvoie à la pondération circonstanciée et ces mêmes diplômes renvoient à la pondération plausible; cette nécessaire indépendance signifie que l’hypothèse nulle ne doit pas être rejeté. Le rejet de l’hypothèse nulle signifierait la certitude qu’un hiatus sépare les connaissances en algèbre qui sont officiellement exigibles des élèves, puis officiellement attribuées à ces mêmes élèves comme acquises par eux, des connaissances que ces mêmes élèves ont réellement acquises ou montrées comme telles.

Or il y’a effectivement rejet de l’hypothèse nulle. A notre sens ce hiatus existe bel et bien, et c’est ce que révèle la confrontation des étudiants avec la situation CCF. Cette situation a révélé ce hiatus en provoquant la rupture du contrat didactique que le système didactique noue autour des structures algébriques, et particulièrement autour de la structuration algébrique des nombres. Avant de conclure remarquons que ces ruptures provoquées de ce contrat didactique nous signalent que l’intentionnalité affichée du système didactique, à propos de la structuration algébrique des nombres, et sa finalité sont loin de converger ; que la cause en est, d’une part, sa gestion didactique de la régulation syntaxique dont l’algèbre classique élémentaire est doté, étant un système symbolique formel, et, d’autre part, la non prise en compte par le système de certains obstacles épistémologiques anciens à propos de la résolution des équations comme calcul de fonctions.

4. CONCLUSION

L'esquisse de la situation fondamentale caractéristique de la structuration algébrique des nombres, que nous avons élaborée, reprend le plan d'Auguste COMTE pour l'algèbre. Des commentateurs de COMTE, et non des moindres, assimilent, à tort, ce plan à celui de VIETE ; cette esquisse dévoile les obstacles épistémologiques qui ont conduit ses commentateurs à commettre cette confusion.

En outre, le substrat de l'esquisse est un système d'énoncés mathématiques dont les vertus épistémologiques et didactiques sont indéniables. Mais, bien qu'ils le soient, ces vertus ne semblent guère attirer l'attention de la noosphère, architecte de la transposition, dans le milieu scolaire, des notions algébriques.

Cette esquisse implique de façon minimale, de la part des acteurs de la relation didactique, le recours à l'usage fixé des concepts d'algèbre. Or la confrontation des conditions effectives d'enseignement à cette même esquisse s'est soldée par une rupture du contrat didactique noué autour de ces mêmes concepts, une rupture qui en révèle la véritable nature : étant un système symbolique formel syntaxiquement régulé, le recours à un usage déjà bien installé des concepts de l'algèbre classique élémentaire n'en est que d'avantage exacerbé dans ce contrat; il a suffi que cette même régulation soit promue au rang d'objet d'étude pour qu'en même temps le recours habituel à l'usage devienne, tout à coup, impraticable. Ainsi, à l'opposée de la situation fondamentale qui érige la régulation syntaxique en objet d'étude à part entière, le contrat didactique classique laisse cette même régulation intervenir, de manière insidieuse, en tant qu'outil uniquement ; ceci ne fait qu'exacerber, de la part des acteurs de la relation didactique, le recours aveugle à cette usage fixé des concepts d'algèbre.

C'est pourquoi, à la place d'une véritable activité mathématique, autour d'une véritable structuration algébrique des nombres, l'activité du professeur se trouve astreinte à porter, de manière ostensive, des formules arithmétiques à l'expression formelle.

Les vertus épistémologiques et didactiques de l'esquisse proposée de la situation fondamentale caractéristique de la structuration algébrique des nombres ne s'arrêtent pas à cette caractérisation du rapport des protagonistes de la relation didactique avec les structures algébriques. Cette esquisse suggère, à propos de l'histoire récente de l'enseignement de l'algèbre, une approche explicative qui se déploierait en les deux phases suivantes :

1. expliciter, à l'aune du structuralisme mathématique à la BOURBAKI, encore inconnu quand Auguste COMTE proposait son plan, les obstacles épistémologiques qui font que ce plan est, dans les faits, encore assimilable par la noosphère à celui de VIETE, alors que les questions mathématiques que sa réalisation soulève recèlent les moyens de dépasser ces obstacles.
2. la liste explicite de ces obstacles étant établie, préciser dans quelle mesure cette liste permettrait de donner de l'histoire récente de l'enseignement de l'algèbre l'interprétation suivante :
 - immédiatement avant la Réforme des Mathématiques Modernes, le structuralisme encore naissant n'aurait pas pu empêcher le système didactique de promouvoir une conception de l'algèbre basée sur une actualisation du plan de VIETE; mais, pressenti par le système, les obstacles épistémologiques inhérents à ce plan seraient alors une des causes essentielles de l'avènement de cette réforme.
 - pendant la Réforme, certaines des questions mathématiques que la réalisation du programme de COMTE soulève feraient l'objet d'une transposition didactique qui allait tenir compte des moyens rendant possible le franchissement des obstacles en question ; mais cette transposition n'aurait pas prévu l'intervention insidieuse de la régulation syntaxique au niveau du travail mathématique de l'élève. Ce faisant, cette même transposition porterait en elle les germes de l'échec de la Réforme ;
 - ignorant les effets d'une mauvaise gestion didactique de la régulation syntaxique, cette transposition n'aurait pas su exploiter à bon escient les novations que le structuralisme triomphant des années soixante dix offrait, et qui lui permettrait de tenir effectivement

compte des moyens en question ; le système aurait alors fatalement repris une conception analogue à celle d’avant la Réforme, et ceci serait la cause de l’abandon des principes organisateurs de cette dernière.

Références bibliographiques

- BAHRA M. (1995), *Problème de didactique de la numération échecs et succès de la remathématisation*, Thèse de l'université Bordeaux I.
- BAHRA M. (2005), *La théorie des situations comme outil d'analyse a priori de la transformation d'une étude d'épistémologie historique en question d'enseignement*. In Marie-Hélène Salin, Pierre Clanché, Bernard Sarrazy (éds.), *Sur la théorie des situation question, réponses, ouvertures HOMMAGE A GUY BROUSSEAU*, Grenoble : La Pensée sauvage.
- BROUSSEAU G. (1983), *les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, Recherche en didactique des mathématiques, 4/2.
- BROUSSEAU G. (1986a), *Fondements et méthodes de la didactique de la didactique des mathématiques*. Recherche en didactique des mathématiques, 7/2, 33-15.
- BROUSSEAU G. (1986b), *La relation didactique : le milieu*, in Actes de la IVème Ecole d'été de Didactique des Mathématique et de l'Informatique, IREM de Paris VII, Université de Paris VII.
- BROUSSEAU G. (1987), *Les différents rôles du maître*, Colloque des P.E.N. Angers – mai 1987.
- BROUSSEAU G. (1989), *Que peuvent apporter les différentes approches de, la didactique des mathématiques aux enseignants ?* in Actes du III Congreso Internacional sobre la investigación en la didactica de las ciencias y las matematicas, Santiago de Compostela, 20-22 septembre 1989.
- BONIFACE J. (2003), *CALCULS & FORMES de l'activité mathématique*, ouvrage collectif coordonné par Jacqueline Boniface, Ellipses Edition.
- CHEVALLERD Y. (1991), *la transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble : La Pensée sauvage, 2^e édition augmentée.
- COMTE A. (1975), *Philosophie première, cours de philosophie positive, leçons de 1 à 45*, présentation et notes par Michel SERRES, François DAGOGNET et Allal SINACEUR, Ed. H1975ermann.
- GRANGER G.-G. (1994), *Formes, opérations, objets*, Mathesis : Blay M. Sinaceur H. (dir.), J. Vrin éditeur.
- GRANGER G.-G. (2003), *Philosophie, langage, science* EDP sciences.
- DESANTI J. T. (1975), *la philosophie silencieuse ou critique des philosophies des sciences*, Editions du Seuil, 1975.
- DOUADY R. (1986) jeux de cadres et dialectique outil/objet, Recherche en didactiques des mathématiques, 7/2.
- POLYA G. (1945), *How to solve it*, Ed. Princeton University Press. Traduction française, *Comment poser et résoudre un problème*, (1965), Paris : Dunod.