

I sistemi indeterminati nei "Nove Capitoli" di Liu Hui. Il ruolo del "contesto" per determinare l'"algoritmo fondamentale" come strumento argomentativo.

Di Paola Benedetto
dipaola@math.unipa.it

Spagnolo Filippo
spagnolo@math.inipa.it

University of Palermo, Department of Mathematics, Italy

Riassunto

Si analizza il problema 8.13 sui sistemi indeterminati dei “Nove Capitoli” nel commentario di Liu Hui confrontandolo con analoghi problemi della cultura occidentale. Si ipotizza la scelta del problema concreto sulla base della ricerca, nei Nove Capitoli, dell’algoritmo fondamentale come strumento argomentativo fondante per la matematica cinese classica. Si ipotizza che il contesto possa giocare un ruolo importante nella scelta delle questioni argomentative cinesi (Spagnolo, 2005). Il lavoro storico è corredato dall’appendice 2 riguardante una traduzione in italiano dell’intero capitolo 8 sui sistemi indeterminati dei Nove Capitoli (Chemla&Shuchun, 2004) e dall’appendice 3 riguardante una comparazione Gauss-Cramer sullo stesso argomento.

Abstract

We analyzes the problem 8.13 on the indeterminate systems of the "Nine Chapters" in the Liu Hui's commentary, comparing it with analogous problems of the western culture. We hypothesizes the choice of the concrete problem on the base of research, in the Nine Chapters, of a fundamental algorithm as foundational argumentative instrument for the classical Chinese mathematics. We hypothesizes that the context can play an important role in the choice of the argumentative Chinese questions (Spagnolo, 2005). The historical work is enriched by the appendix 2 regarding the translation in Italian of the whole chapter 8 on the indetetminate systems of the Nine Chapters (Chemla&Shuchun, 2004) and by the appendix 3 regarding a comparison Gauss-Cramer on the same subject.

Introduzione

La trattazione dei sistemi di equazioni si presenta nel trattato dei Nove Capitoli principalmente nel capitolo VIII, riferito allo studio delle matrici rettangolari.

I 18 problemi presentati nel capitolo considerato si occupano principalmente di sistemi di equazioni lineari ed eccetto del problema 13, gli altri si presentano come sistemi determinati, risolti secondo una tecnica di risoluzione *notevolmente moderna*¹: i coefficienti vengono estratti (secondo il metodo di eliminazione e di sottrazione) passo dopo passo dalla matrice, costruita ed associata al sistema, riconducendola ad una forma triangolare attraverso semplici operazioni elementari.

Tale regola viene chiamata all'interno del testo con il termine Fangcheng (dal termine *Cheng*: che significa “comparazione di quantità”)².

Nel testo non mancano, negli altri capitoli espliciti/impliciti riferimenti ai sistemi, nei capitoli II e VII si presentano ad esempio anche altri metodi di risoluzione che fanno appello a differenti metodi di risoluzione per le equazioni:

- metodo della proporzione semplice (Regola del Tre): capitolo 2,
- la regola “Qi lü”³ capitolo 2,
- Con il Determinante: capitolo 7,
- Doppia Falsa Posizione: capitolo 7,
- Metodo dell’Inversione: capitolo 7,

Interessandoci, in questo contesto ai problemi presentati nel capitolo VIII ed in particolare volendo analizzare nello specifico, il problema 13, come problematica “isolata” e di rottura del testo, riteniamo interessante dare inizialmente una panoramica generale delle problematiche presentate nel capitolo, evidenziando come il problema 13 sia appunto un elemento di apertura, di novità, all’interno del testo e per certi versi nella storia della matematica cinese ma non solo.

¹ Kanghen e talli. el 1999

² K.Chemla, 2004, pag. 922-923, così lo definisce nel glossario: “方程 (fangcheng). Nome dell’operazione che esegue l’algoritmo centrale del capitolo 8, che porta lo stesso nome. I dibattiti sul significato di questo termine ci ha condotto a non tradurlo, ma a conservarlo nella trascrizione pinyin durante tutta la traduzione dell’opera. Il lettore troverà un’interpretazione del suo significato nella introduzione al capitolo 8. Si può ugualmente avanzare l’ipotesi che si tratti di “misure al quadrato”. Il “cheng”, che è possibile interpretare come dei “divisori” (Vedi *cheng* “misura”), formeranno un quadrato di numeri che si opporranno ai “shi” “dividendi” (Vedi *shi*), messi in ordine nella linea di sotto (vedi le note 1 e 3 della traduzione del cap. 8. Rileviamo che, contrariamente alle operazioni come “supponiamo” (Vedi *Jin You*) ed “eccedente e deficit” (Vedi *ying buzhu*), non si incontra nei Nove Capitoli o negli altri commentari dell’uso verbale di questo termine di *fangcheng*, secondo lo schema “nome dell’operazione anafora” *zhi* “questo, questo qui”, che significherebbe “[applicare] a questo qui [l’operazione]”. L’operazione *fangcheng* è, al contrario, prescritta dall’enunciato 8.2: “segue (RU) *fangcheng*”. Segnaliamo, d’altronde, che parecchie procedure alternative sono in competizione per eseguire l’operazione *fangcheng*, come testimoniano le formulazioni come quella dell’8.18 : “Nuova procedura [per l’operazione] *fangcheng*.”

³ K.Chemla, 2004, pag. 969, così lo definisce nel glossario: “Lü di diversi tipi (procedura di). Questa procedura, inversa della procedura di “inversione dei lü di diversi tipi”. (vedi fan qi lü) permette di determinare i prezzi unitari (vedi uso verbale di lü) di due tipi di oggetti che si acquistano con due prezzi differenti.”

Schematizzando i problemi presentati nel capitolo dividiamo questi secondo il tipo di sistema analizzato:

- sistemi determinati ($m=n$) : $n=2$ (Problemi n. 2, 4-7,9-11)
 $n=3$ (Problemi n. 1,3,8,12,15,16)
 $n=4$ (Problemi n. 14,17)
 $n=5$ (Problema 18)
- sistemi indeterminati ($m<n$): $m=5, n=6$ (Problema 13)

Il problema 13, come già sottolineato precedentemente, è l'unico sistema indeterminato che si riscontra nel testo. Il problema enuncia cinque relazioni per determinare sei incognite. L'elemento di distacco dai restanti problemi proposti nel capitolo è sostanzialmente quello di ritenere incognite quantità che diversamente venivano presentate come termini costanti.

Un possibile contesto storico per i sistemi indeterminati

Uno sguardo alla storia della Matematica ed in particolare alla trattazione dei sistemi lineari indeterminati deve certamente tener in considerazione il contributo di Diofanto di Alessandria (considerato il primo algebrista) e quindi la trattazione, nell'*Arithmetica* (3rd secolo d.C), di alcuni casi specifici di equazioni lineari. Vengono affrontati dei sistemi lineari ed alcuni casi particolari di sistemi indeterminati ma la condizione delle soluzioni intere permette di risolvere i casi particolari. Da un valore determinato ad una delle incognite e risolve poi per un valore razionale positivo dell'altra, tenendo conto che questo è soltanto un caso tipico.

“La varietà di metodi usata da Diofanto per risolvere i diversi problemi colpisce più che convincere. Egli era un virtuoso sagace e intelligente, ma apparentemente non abbastanza profondo per cogliere l'essenza dei suoi metodi e per attingere così la piena generalità. (E' tuttavia ancor oggi vero che l'analisi diofantea è un dedalo di problemi separati). A differenza dei pensatori speculativi che vanno in cerca delle idee generali, Diofanto cercava soltanto le risposte corrette.” (M.Kline, 1991, p. 168)

Procedendo nell'analisi parallela delle conoscenze sull'argomento trattato, va considerato lo sviluppo della matematica indiana. In questo senso, restringendo fortemente il campo di analisi, va tenuto in considerazione il testo dal titolo *Aryabhatiya* (5th secolo d.C.) nel quale si evince una sorta di generalizzazione delle idee diofantee: *“Nelle equazioni indeterminate gli Hindu effettuarono dei progressi rispetto a Diofanto. Queste equazioni nascevano nel contesto di problemi astronomici e le loro soluzioni indicavano quando certe costellazioni avrebbero fatto la loro apparizione sulla volta celeste. Gli Hindu cercavano tutte le soluzioni intere, mentre Diofanto cercava una soluzione razionale.”* (M.Kline, 1991, p. 218)

Non si ritrovano comunque altre innovazioni nei lavori di Aryabhata, Bramagupta.

Problemi analoghi a quelli che ritroviamo nella cultura cinese vengono riportati da Alcuino e classificati da R. Franci (1999) come *“problemi dei cento uccelli”*: “Si tratta di quesiti la cui risoluzione equivale a quella di due equazioni lineari del tipo: $ax+by+cz=h$ e $x+y+z=k$, delle quali si cercano le soluzioni intere. Poiché il problema è indeterminato, spesso il quesito ammette più di una soluzione; il testo però ne fornisce

sempre solo una. Essi sono di due tipi: problemi dei cento uccelli e problemi di suddivisione di vettovaglie.” (R. Franci, introduzione del libro di Alcuino di York, 2005, p.20)

Per quanto attiene poi alla tradizione araba, un primo confronto parallelo evidenzia come nel testo cinese si ritrovino le stesse operazioni sulle matrici riportate nell’*Al-jabr w’al muqabala* di Al-Khwarizmi. In particolare, il problema 2 dell’ottavo capitolo dei Nove Capitoli e quindi la sua trattazione e risoluzione in termini di sostituzione (restoration), ci spingono a concludere come molto prima di Al-Khwarizmi la matematica cinese sia stata portatrice di un metodo di risoluzione, di una regola generale che si riscontra all’interno di tutti i problemi presentati e che essenzialmente è quella che in notazione moderna si presenta come metodo di eliminazione di Gauss.

Il grande matematico Gauss pubblicò la sua soluzione nel 1826, 2000 anni dopo i Nove Capitoli.

A questo proposito, per quanto riguarda quindi nello specifico la matematica cinese, esistono almeno due altre diverse trattazioni cinesi interessanti di problemi di analisi indeterminata; una è certamente quella relativa al problema dei cento uccelli, problematica presentata nel problema 38 del capitolo III del Zhang Qiujian’s *Mathematical Manual* (5th secolo d.C.):

Un gallo ha il valore di 5 monete, una gallina di 3 e tre polli 1 monete. Con 100 monete si comprano 110 di questi. Quanti galli, galline e polli sono?

che trascritta in termini algebrici moderni si presenta secondo il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + z/3 = 100 \end{cases}$$

ed ha quindi come soluzione : $x=4+4t$; $y=18-7t$; $z=78+3t$

nell’analisi della soluzione va considerato che si ottengono risultati positivi soltanto per $t=0, 1, 2$.

Zhang, da a questo proposito tre set di interi per galli, galline e polli: 4/18/78; 8/11/81; 12/4/84.

Come abbia ottenuto tali risultati resta comunque un mistero.

L’altra trattazione che riteniamo interessante si riferisce allo studio di Luo Tenfeng nel suo *The pleasant game of mathematical Art* che discute le relazioni tra le equazioni indeterminate e le congruenze.

Non volendo entrare nel dettaglio dell’esposizione delle due trattazioni, riteniamo comunque interessante accennare seppur brevemente ad un’analisi parallela riferita proprio a questa classe di problemi, particolarmente utilizzati nei trattati di matematica per lo studio dei sistemi di equazione.

Come riferimento principe da tener in considerazione come termine di paragone per quanto attiene alla tipologia di risoluzione va considerato certamente Leonardo di Pisa (Fibonacci) ed ancor prima il matematico Alcuino di York con il suo *Problems for quickening the mind* (8th secolo).

Tutto questo tiene conto dell’analisi che fa K Chemla sulle questioni argomentative nella tradizione Cinese:

“Il concetto chiave che organizza la descrizione dei nove capitoli è quello di “classe” o “categoria” (lei), gioca un ruolo primordiale nei commentari.

Le “procedure servono per comprendere le categorie.

Porre un problema (wen) relativo ad una categoria e, con questo sotterfugio, comprendere dieci mila situazioni, ciò che si chiama “conoscere la strada”. E’ dunque attraverso un lavoro sulle procedure che si determinano le classi di situazioni.

La perfezione si definisce in termini di semplicità e generalità.”

I Nove capitoli, il problema 8,13

Come detto precedentemente la scelta di analizzare l’ottavo problema del libro 13 è dettata dalla particolarità di questo in riferimento non tanto alla problematica trattata, problematica per certi versi comune a molti problemi presentati nei Nove Capitoli e in altri testi matematici ma piuttosto per l’elemento di novità che questo presenta all’interno del testo e quindi nella storia della matematica.

Il problema si presenta, come gli altri, espresso in lingua naturale sia per quanto attiene al testo che alla risoluzione. Interessanti sono le note riportate nel commentario di Liu Hui, che riportiamo sotto.⁴

Ora c’è un pozzo comune per cinque famiglie. Quello che manca (nella lunghezza dell’acqua) a due corde di A è una corda di B. Quello che manca a 3 corde di B è come una corda di C, quello che manca a 4 corde di C è come una corda di D, quello che manca a 5 corde di D, è come una corda di E, quello che manca a 6 corde di E è come una corda di A. Se ogni famiglia ha la corda corrispondente che gli manca, tutte arrivano (all’acqua). Si chiede quanto vale la profondità del pozzo e la lunghezza delle corde rispettivamente.

Risposta⁵:

La profondità del pozzo vale 7 ZHANG 2 CHI 1 CUN.

La Lunghezza della corda di Jia vale 2 ZHANG 6 CHI 5 CUN.

La Lunghezza della corda di Yi vale 1 ZHANG 9 CHI 1 CUN.

La Lunghezza della corda di BING vale 1 ZHANG 4 CHI 8 CUN.

La Lunghezza della corda di DING vale 1 ZHANG 2 CHI 9 CUN.

La Lunghezza della corda di WU vale 7 CHI 6 CUN.

Procedura:

Liu: Per prima cosa si introduce la matrice:

⁴ Per la traduzione, ci riferiamo alle versioni in Inglese di Kanghen et alii. del 1999 e in Francese Chemla del 2004 riportati in bibliografia.

⁵ Si tratta della corda per attingere l’acqua nel pozzo. Le corde associate ad una famiglia devono essere intese come aventi una lunghezza uniforme. Notare l’uso della serie astratta dei tronchi celesti. Jia, Yi, Bing, Ding e Wu sono i primi 5 della serie dei tronchi celesti, ai quali si ritorna per gli ordinali. Vengono utilizzati egualmente come lettere dell’alfabeto nel loro impiego di marcatori per la numerazione.

Di Paola&Spagnolo, I sistemi indeterminati nei Nove Capitoli di Liu Hui...

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(Le prime 5 righe riportano le lunghezze delle corde. La sesta la profondità del pozzo)}$$

in accordo alle specifiche condizioni secondo le quali ogni volta le corde raggiungono il fondo del pozzo.

Successivamente, si ottiene 721 come divisore e 76 come dividendo. Potrebbe essere considerato che la lunghezza totale di 721 è equivalente a 76 volte la profondità del pozzo.

Si divide questo per la profondità del pozzo. La lunghezza della corda E è 76/721 la profondità del pozzo. Allora la lunghezza della corda e la profondità del pozzo sono determinate, se la profondità del pozzo è 721 e quella della corda 76.

Si discute il problema in termini di percentuali.

In notazione moderna, indicati con x,y,z,u e v le lunghezze delle corde A,B,C,D e E e con t la profondità del pozzo, il sistema si presenta come:

$$\begin{cases} 2x + y = t \\ 3y + z = t \\ 4z + u = t \\ 5u + v = t \\ 6v + x = t \end{cases}$$

Secondo la regola per la divisione delle frazioni, presentata nel capitolo 1 dei Nove Capitoli la soluzione del sistema proposto è quindi x:y:z:u:v:t=k con k≠0 costante arbitraria.

Nei commenti di Liu Hui si ha v:t=76=721.

In generale si ha allora: x=265k, y=191k, z=148k, u=129k, v=76k, t=721k anche se i **Nove Capitoli riportano una particolare soluzione corrispondente a k=1.**

Alcune riflessioni su “Argomentare, Congetturare e Dimostrare” nella Cultura Cinese in relazione alla Cultura Occidentale.

Questo paragrafo analizza in modo schematico alcune differenze sostanziali riscontrate nella storia del pensiero cinese e nella storia del pensiero occidentale.

Nell’analisi comparativa tra la scienza nella Cina premoderna e l’occidente. Geoffrey E.R. Lloyd (2001, pag.574) dice che: *“Le aspirazioni dell’antica tradizione greca rappresentata da Euclide, che si proponeva di dedurre tutta la matematica da un solo insieme di assiomi indimostrabili ma evidenti non sono state condivise dalla matematica cinese, ameno fino all’Età moderna. In Cina, infatti, l’obiettivo non era la*

dimostrazione assiomatico-deduttiva, ma cogliere i principi unificatori dell'intera matematica.”

Le analogie con il lavoro di Fibonacci sono molto forti e riguardano sempre problemi concreti, analizzandoli per classi di problemi e con l'intento di costituire anche un'opera didattica. Nella storia della cultura in generale, i commenti ai Nove Capitoli ed al Liber Abaci hanno rappresentato anche uno stimolo ad indagare nuovi percorsi matematici.

La tabella che segue analizza alcuni differenze di schemi di ragionamento in una visione olistica.

<i>Occidente</i>	<i>Oriente</i>
1200 algebra: nessuna formalizzazione	200 a.c. algebra: nessuna formalizzazione
Paradigma della geometria, Equazioni	Sistema posizionale, matrici (sistema delle bacchette)
Formule a-piristiche che nascondo i processi privilegiando, con il risultato, il determinismo	Risoluzione di equazioni attraverso manipolazioni algebriche con le strategie: 1) rendere uguali, 2) rendere omogenei, 3) ricerca di algoritmi fondamentali.
Reductio ad absurdum in un infinito potenziale	Infinità attuali di operazioni

L'algoritmo come elemento portante dell'argomentare e dimostrare?

Nel pensiero matematico cinese il riferimento principale è l'algoritmo. Esso gioca un ruolo centrale nel Canone della matematica e rappresenta anche uno strumento per le dimostrazioni algebriche. Nella risoluzione di un problema che prevede la regola del tre (sostanzialmente si tratta dell'unicità del quarto proporzionale), per esempio, si considerano i dati iniziali come condizioni (se... allora) *“se ho una certa quantità di seta allora ho speso una certa cifra”*, e anche la soluzione del quesito *“quale quantità di seta posso comprare se ho una cifra diversa dalla precedente?”* si può esprimere allo stesso modo (iterando la precedente condizione) *“se ho una certa quantità di seta (che non conosco ancora) allora ho speso una certa cifra (che conosco)”*. Viene così individuata la variabile e con il procedimento di riduzione all'unità (attraverso le proprietà delle proporzioni, nel nostro modo di procedere) si ottiene il valore incognito. Il procedimento per la risoluzione è *standard* ed è quindi un algoritmo. Dimostrare la validità di quel ragionamento vuol dire dimostrare la correttezza delle procedure (uso delle proprietà delle operazioni) nei passi dell'algoritmo).

Quali gli schemi stabili di ragionamento nella cultura Cinese?

Ogni ragionamento è concluso con frasi del tipo: *“da qui il risultato”*.

L'algoritmo viene visto come strumento per dimostrare l'esattezza di un ragionamento.

Se vi sono delle divisioni successive, in geometria ad esempio, l’algoritmo si dichiara corretto soltanto quando si dimostra che nel procedimento seguito la grandezza non ancora trattata tende a zero. (Ricorda il metodo di Esaustione di Archimede)

Uno schema di ragionamento stabile (*meta regole*) è il seguente:

“Rendere omogenei e rendere uguali”: (dai commentari di Liu Hui, 263 d.c. (Chemla, 2001, pag. 142))

“Moltiplicare per disaggregarli, semplificare per unirli, rendere omogenei e rendere uguali affinché possano comunicare: come potrebbero non essere questi i punti fondamentali della matematica?”

La dimostrazione non è soltanto la correttezza del ragionamento entrano in gioco il “rendere uguale” e “rendere omogeneo” che rappresentano indicazioni concrete sulla manipolazione algebrica, ma anche strategie di riferimento per poter poi concretizzare la correttezza del ragionamento attraverso l’algoritmo.

Un esempio interessante del “Rendere omogenei e rendere uguali” è quello della regola del tre (dai commentari di Li Chunfeng, 656 d. c. (Chemla, 2001, pag. 142)). Questo algoritmo ancora una volta è un’operazione che ‘rende uguale’ e ‘rende omogeneo’ (nella riduzione all’unità). Quindi la regola del tre, come algoritmo fondamentale, è l’analogo nella cultura occidentale del postulato. L’algoritmo fondamentale può combinarsi più volte portando sempre ad un ragionamento certo.

Come osserva Liu Hui, applicando tali algoritmi i valori non avrebbero dovuto cambiare e questo ne garantiva la verità. Quindi veniva posta una attenzione particolare alla verifica dell’algoritmo su classi di problemi per poterne evidenziare la correttezza.

Un obiettivo strategico dei cinesi è stato quello di correlare i differenti procedimenti di calcolo impiegati in diverse aree della matematica per dimostrare la loro unità (ricerca di invarianti).

Needham (1981) sostiene che dopo il 1700 le due culture si sono fuse, mentre P.

Engelfriet (2001) sostiene che questo processo è stato più lungo e forse è ancora in atto.

In questa tabella viene presento uno schema di riferimento complessivo su di alcune differenze significative tra le due culture rispetto agli strumenti conoscitivi dell’argomentare. Naturalmente tale tabella è ancora uno strumento di lavoro da perfezionare e con interessanti problemi aperti da ridiscutere ancora.

	<i>Rivoluzione Scientifica tecnologica.</i>	<i>Inferenze</i>	<i>Come si conosce</i>	<i>Come affrontare oggi la questione nell’ottica della scienza della complessità</i>
Occidente	1600 rivoluzione scientifica: logica bivalente <i>Strumento della logica bivalente:</i> conoscenza a priori delle eventuali modellizzazioni scientifico-matematiche e tecnologiche.	1) Induttive 2) Deduttive 3) Abduitive	Schemi categoriali (Aristotele) Manipolazione di formule algebriche fuori dal contesto per costruire modellizzazioni astratte per prevedere fenomeni in modo deterministico	Semiotica? Approccio Sistemico?
Oriente	XXI secolo rivoluzione scientifica: logica fuzzy? <i>Strumento della logica</i>	Inferenze semiotiche. 1. Se...allora... 2. Abduitive	Conoscenza attraverso tutto il proprio corpo: moderne teorie neurofisiologiche,	La dimostrazione automatizzata. (ad esempio teorema dei quattro colori). Le applicazioni

	<i>fuzzy</i> : conoscenza a posteriori delle eventuali modellizzazioni scientifico-matematiche e tecnologiche. Logica delle analogie? Logica delle correlazioni?	3. Rendere uguali 4. Rendere omogenei 5. Algoritmo - Iterazione - Condizionali (Se...allora...) 6. Assegnazione di variabili	manipolazione di formule algebriche sempre riferite ad un contesto (come nella tradizione). Emboidment ?	tecnologiche dei sistemi fuzzy.. Possibile strumento di unificazione delle conoscenze: neurofisiologia, conoscenza attraverso il proprio corpo, superamento della divisione mente –corpo retaggio della filosofia cartesiana, olismo,
--	--	---	---	--

Esistono effettivamente molte analogie con il pensiero occidentale almeno rispetto ai recenti sviluppi delle neuroscienze. Presumibilmente il riferimento più importante è quello dell’acquisizione attraverso Modelli e la Gerarchizzazione dei Modelli corrisponde all’Argomentare per organizzare ragionamenti.

Conclusioni

La scelta del “pozzo” nel testo del problema non è quindi casuale. Quindi il “contesto” ha un ruolo fondamentale per poter determinare l’algoritmo fondamentale. In questo caso consente intanto di eliminare l’indeterminazione del sistema per poi permettere la ricerca dell’algoritmo fondamentale che permetterà di risolvere problemi analoghi.

La scelta del contesto in un lavoro sperimentale (Spagnolo, 2005) nel quale veniva prospettato un paradosso logico linguistico della tradizione cinese. L’analisi di due casi mette in evidenza la scelta del “contesto” come prioritaria:

Quesito 2: “Un cavallo bianco non è un cavallo”. Questa proposizione possiamo dichiararla vera o falsa?

2a) Soluzione

2b) Motiva la soluzione proposta

Le interviste fatte a due cinesi⁶:

“quale contesto? Senza il contesto non si può decidere, ci sono sempre più significati se non c’è un sottotesto”. Racconto di una storia come riferimento (una parabola?). per ogni situazione c’è una storia adatta che è propria della esperienza personale.”

I comportamenti nei diversi campioni utilizzati su questo quesito:

Quesito	Comportamenti dal punto di vista del pensiero fuzzy	Comportamenti dal punto di vista del pensiero bivalente
2	<i>Richiesta di un contesto concreto per analizzare l’adeguatezza della proposizione in oggetto³</i>	<i>Uso dei diagrammi di Venn⁴ per la deduzione (la proposizione viene così ad essere falsa)</i>

⁶ Tong (Nato a Canton 1954, ha frequentato le scuole cinesi sino alla scuola secondaria superiore sperimentale, non ha però completato gli studi, si è trasferito a Palermo nel 1978, ha conseguito la licenza media italiana nel 1985, attualmente gestisce un ristorante cinese a Palermo).

Jouzou (Nato a Palermo il 1986?, attualmente frequenta l’ultimo anno di un corso di studi sperimentale Liceo Europeo, ha studiato latino, greco, filosofia, matematica, etc...), si considera culturalmente Italiano, le sue conoscenze della lingua cinese e della cultura cinese sono state mediate dai genitori ambedue cinesi, Tong è il padre di Jouzou).

Di Paola&Spagnolo, I sistemi indeterminati nei Nove Capitoli di Liu Hui...

Bibliografia

- Karine Chemla & Guo Shuchun (2004), *Les Neuf Chapitres*, Ed. Dunod, Paris.
- Shen Kangshen, John N.Crossley & Antony W.-C. Lun (1999), *The Nine Chapters on the Mathematical Art*, Oxford University Press, Science Press – Beijing.
- Kline Morris (1991), *Storia del pensiero matematico*, Vol. 1, G. Einaudi Editore. (Mathematical Thought from Ancient to Modern Times)
- Takao Hayashi (2001), *La Matematica e l'astronomia nei testi vedici*, Storia della Scienza, Vol. II, Istituto Enciclopedia Italiana fondata da G. Treccani, Roma. (pp 727-729)
- Mario Casari (2001), *La scienza islamica in india*, Storia della Scienza, Vol.II, Istituto Enciclopedia Italiana fondata da G. Treccani, Roma. (pp 908-921)
- Alcuino di York, *Giochi matematici alla corte di Carlomagno* (a cura di R. Franci) (2005), Edizioni ETS, Pisa.
- Raffaella Franci (1999), Il ruolo della matematica nella istruzione carolingia e le *Propositiones ad acuendo juvenes di Alcuino*, Bollettino UMI (La Matematica nella società e nella cultura), 8, 3-A, p. 283-295.
- L.E. Sigler (2002), *Fibonacci's Liber Abaci* (A translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation), Springer.
- Spagnolo F. et alii , *Reasoning patterns and logical-linguistic questions in European and Chinese cultures: Cultural differences in scholastic and non-scholastic environments*, Mediterranean Journal for Mathematics Education, Cyprus Mathematical Society (ISSN 1450-1104), Vol. 4, N. 2, pp. 27-65, 2005.
- Spagnolo F. Reasoning patterns and logical-linguistic questions in European and Chinese cultures: Cultural differences in scholastic and non scholastic environments, The International Conference on School effectiveness and School improvement in China, University of Shenyang, China, 22-25 september 2005. (pag.76).
- Spagnolo F., M. Ajello, Z. Xiaogui, Cultural differences in scholastic and non-scholastic environments: reasoning patterns and logical-linguistic questions in European and Chinese cultures, *Johr Bahur* (Malasya), November 2005, International Conference on Mathematics Education into the 21st Century, pp.12-23. ISBN Number 83-919465-7-6. http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_malasya_2005
- K. Chemla (2001), I “Nove capitoli sui procedimenti matematici”: la costituzione di un canone nella matematica, *Storia della Scienza: Cina, India, Americhe*, Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani S.p.a.
- Cao Zhong-jun & Bishop Alan (2002), *Chinesestudents' approaches to learning of mathematics*, ICMI Comparative Study Conference, Hong Kong, 20-25 October.(Faculty of Education, University of Hong Kong, Pokfulam Road).
- U. D'Ambrosio (2002), *Etnomatematica*, Pitagora Editrice, Bologna.
- Marcel Granet (1988), *La pensée chinoise*, Editions Albin Michel, Paris.
- Hino K.-Kaiser G.-Knipping C.(2002), *Comparing teaching mathematics in eastern and western traditions – Looking at France, Germany, England and Japan*, ICMI Comparative Study Conference, Hong Kong, 20-25 October.(Faculty of Education, University of Hong Kong, Pokfulam Road).
- Hirabayashi Ichiei (2002), *A traditional aspect of mathematics education in Japan: mathematics as Gei (Art), Its Jutsu (Technique) and Do (Way)*. ICMI Comparative Study Conference, Hong Kong, 20-25 October.
- George Gheverghese Joseph, *C'era una volta il numero* (Original title: *The Crest of the Peacock. Non-European Roots of Mathematics*), Il saggiatore, 2000.
- Bart Kosko (1995), *Il Fuzzy Pensiero*, Baldini&Casoldi, Milano. (*Fuzzy thinking: the new Science of fuzzy logic*, B. Kosko, 1993).

³ Assegnare un contesto equivale a stabilire una relazione linguistica fuzzy (nel senso usato da Zadeh) e equivale anche alla definizione di qualità. In questo caso la qualità colore e la qualità forma sono all'origine del paradosso di Gongsun Long III secolo della nostra era. (Levi, 2002, pag. 72)

⁴ I diagrammi di Venn danno la possibilità di rappresentare con il linguaggio degli insiemi i connettivi logici della logica del primo ordine.

“Quaderni di Ricerca in Didattica”, n. 19, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

- Jean Levi (2002), *Tre scuole di pensiero*, Storia della Scienza: Cina, India, Americhe, Istituto della Enciclopedia Italiana Treccani, Roma, pagg 56-72.
- Radford, L. (1998) [On Signs and Representations. A Cultural Account](#), *Scientia Paedagogica Experimentalis*, 35 (1), 277-302.
- Roshdi Rashed (2002), Algebra e linguistica. Gli inizi dell'analisi combinatoria, Storia della Scienza: Cina, India, Americhe, Istituto della Enciclopedia Italiana Treccani, Roma, pagg 86-93.
- Joseph Needham (1981), *Scienza e Civiltà in Cina* (Original title: *Science and Civilisation in China*, Cambridge University Press, 1959), I e II Vol., Einaudi.
- Filippo Spagnolo (1986), Sull'impostazione di certi metodi risolutivi dei problemi nella tradizione cinese, *L'insegnamento della Matematica*, vol.9, n.8, sez. B.
- Spagnolo F. (2002), *History and Ethno-Mathematics in the Interpretation of the process of learning/teaching*, 13° ICMI Comparative Study Conference, University of Hong Kong. <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/articles.htm>
- Winslow Carl – Emori Hideyo (2002), Elements of a semiotic analysis of the secondary level classroom in Japan. ICMI Comparative Study Conference, Hong Kong, 20-25 October. (Faculty of Education, University of Hong Kong, Pokfulam Road).
- Lotfi A. Zadeh (2001), From computing with numbers to computing with words from manipulation of measurenebts to manipulation of perception, *Proceedings, Palermo 2000, “Human and machine perception”* (Thinking, deciding and acting), Edited by V. Cantoni, V. Di Gesù, A. Setti e D. Tegolo, Kluwer Academic, New York.
- Zheng Yu-xin (2002), Mathematics education in China from a cultural perspective. ICMI Comparative Study Conference, Hong Kong, 20-25 October. (Faculty of Education, University of Hong Kong, Pokfulam Road).

Appendice 1

[Problem 13]

Now there is a communal well for 5 households. The deficit [in length to the water] of A's 2 ropes is one of B's ropes. The deficit [in length to water] of B's 3 ropes is one of C's ropes. The deficit [in length to water] of C's 4 ropes is one of D's ropes. The deficit [in length to water] of D's 5 ropes is one of E's ropes. The deficit [in length to water] of E's 6 ropes is one of A's ropes. If each [household] gets the corresponding deficit rope, all reach [water]. Tell: the depth of well, [and] the length of ropes, how long is each?

Answer: Well 7 *zhang* 2 *chi* 1 *cun* deep. A's rope 2 *zhang* 6 *chi* 5 *cun* long. B's rope 1 *zhang* 9 *chi* 1 *cun* long. C's rope 1 *zhang* 4 *chi* 8 *cun* long. D's rope 1 *zhang* 2 *chi* 9 *cun* long. E's rope 1 *zhang* 7 *chi* 6 *cun* long.

Appendice 2

La traduzione della versione francese curata da K. Chemla

FANGCHENG

Presentazione del Capitolo 8

Guo Shuchun

Questo capitolo riunisce problemi che esigono la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari ed è per questo che prende come titolo il nome del metodo matematico elaborato a questo scopo: *fangcheng*. Questa procedura, altamente complessa, andava oltre le capacità, limiti, l'espressione matematica dell'epoca. In seguito, una volta descritta nel contesto del primo problema, la procedura è stata spiegata in riferimento a delle produzioni di cereali. Sarà più tardi, nel XI° secolo, che Jia Xian enuncia la procedura *fangcheng* in modo più astratto.

Le condizioni descritte dagli enunciati di alcuni problemi di questo capitolo sono indiretti, complicati, e non danno sempre immediatamente le equazioni standard. Era dunque necessario disporre di metodi per stabilire questi ultimi. Tale era lo statuto della procedura “di diminuzione e aumento”, descritta in relazione al secondo problema.

In più, quando si impiega l'algoritmo *fangcheng* per risolvere dei sistemi di equazioni, arriva nei processi di eliminazione delle incognite, appaiono dei numeri negativi. Il completamento della risoluzione richiede allora di praticare addizioni e sottrazioni con questi numeri positivi e negativi. E' a questo fine che il terzo problema menziona la “Procedura del positivo e del negativo”. Si tratta di una regola astratta di addizione e di sottrazione tra numeri positivi e negativi. Si comprende dunque perché i primi tre problemi formano la colonna vertebrale del capitolo. Questo comporta in totale 18 problemi che si risolvono tutti con la procedura *fangcheng*. Alcuni devono utilizzare “l'aumento e la diminuzione” per stabilire le equazioni, altri hanno impiegato la “Procedura del positivo e del negativo” per eliminare le incognite, altri ancora ricorrono all'insieme di queste due procedure.

Il commentario di Liu Hui a questo capitolo propone una definizione di *fangcheng*, mette in opera il principio di uguaglianza e di omogeneizzazione per dimostrare questa procedura, e butta le basi teoriche dell'eliminazione delle incognite che l'algoritmo implica. Comunque, stabilisce il metodo di eliminazione per moltiplicazione reciproca e propone una “nuova procedura *fangcheng*”. Liu Hui mostra, infine, che il problema delle cinque famiglie che hanno in comune un pozzo (problema 8.13) non ha che un solo insieme di soluzioni.

I. Fangcheng

Il termine di *fangcheng* è stato costantemente designato, nella Cina antica, con quello che noi oggi chiamiamo i “sistemi di equazioni lineari”. Dalla metà del secolo passato, si comincia ad utilizzarlo per rinviare molto bene a quello che noi oggi chiamiamo semplicemente “equazione”. Nel XX° secolo, il termine è venuto poco a poco a specializzarsi per significare semplicemente “equazione”, mentre l'uso dell'espressione cinese corrispondente a “sistemi di equazioni lineari” in francese si è imposto per rinviare al primo significato di *fangcheng*. Infatti, la parola “equazione” è stata introdotta in Cina con le opere matematiche europee. E' stato tradotto con “espressioni uguali l'uno l'altro” (*xiangdengshi*), nel libro intitolato *a'errebala suanfa* (*Algorithmes de l'algèbre*) pubblicato all'inizio della dinastia Qing. E' a Li Shanlan (1811-1882) e a A. Wylie (1815-1887) che bisogna attribuire l'origine della confusione: nella loro traduzione, nel 1859, di Elementi di Algebra (*Daishuxue*) di De Morgan (1806-1871), hanno utilizzato il termine *fangcheng* per tradurre il termine “equazione”. In seguito, quando nel 1872,

Hua Hengfang (1833-1902) e J. Fryer (1839-?) tradurranno A. *Treatise of Algebra (Daishushu)* di Wallis (1616-1703), impiegheranno, per il termine “equazione”, ciò che noi possiamo prendere per “espressione *fangcheng*” (*fangchengshi*). Hua Hengfang mette quindi a profitto i due termini *fangcheng* e di *fangchengshi*, nel 1896, nel suo *Xuesuan bitan (Conversazioni al filo di piuma sull'apprendimento delle matematiche)*. *Fangcheng* riprende il suo primo significato, mentre il secondo termine traduce la parola di “equazione”. Negli anni 1950, le *Shuexue mingci (Termini di matematica)* pubblicata dall'Edizione delle scienze (*Kexue chubanshe*) finisce finalmente, per tradurre “equazione”, il termine di *fangcheng*. La cattiva moneta scaccia la buona, i matematici cinesi di oggi hanno in generale dimenticato il primo significato di *fangcheng*.

Questo, in verità, comincia a ingarbugliarsi a partire dalla dinastia Song. Il matematico dei Song del Nord Jia Xian dichiara nel suo *Huandi jiu zhang suanjing xicao (Dettagli delle procedure del Classico dei Nove Capitoli sulle matematiche di Huanhdi)*: “ciò che si chiama *fang*, è la forma delle quantità; quello che si chiama *cheng*, è il nome generale dell'operazione di misura⁷”. Così, ai suoi occhi, è la forma di matrice nella quale sono messi tutti i coefficienti dei termini delle equazioni che motiva il nome di *fangcheng*. Questa è la tesi che adotta su questo argomento, tra i nostri contemporanei, Qian Baocong. I matematici dei Qing, tra cui Mei Wending, giustificano questo nome di *fangcheng* sulla base di un'altra interpretazione: “*fang*, è comparare”. “Si appoggia sui numeri che si hanno affinché, per la loro comparazione, si trovino i *cheng*. Per Qu Zengfa, “*fang*, è “rapporto”; *cheng*, è una “forma””. In altri termini, si dispone di righe e colonne per ottenere una forma determinata e, per eliminazione, si trasforma in proposizioni: è, ai suoi occhi, la ragione per la quale l'argomento si chiamava *fangcheng*. Nessuno di questi punti di vista ne coglie il significato reale dell'espressione, nella misura in cui pescano con una interpretazione troppo letterale dei termini. La cosa è particolarmente manifesta nel caso dei Mei Wending e di Qu Zengfa. I Nove Capitoli non erano disponibili durante la dinastia Ming e questo, sino alla metà della dinastia Qing. Questi eruditi non avevano dunque alcun mezzo per consultare il capitolo di *fangcheng* per migliorare le definizioni che abbiamo ricordato: le loro opinioni si trovano contaminate da scappatoie.

Per scegliere in maniera corretta il significato originario di *fangcheng*, si possono esaminare i significati originari dei due caratteri *fang* e *cheng*. *Fang*, è “mettere fianco a fianco”. Si legge infatti nel *Shouwen jiezi (Interpretazione delle grafie, spiegazione dei concetti)* di Xu Shen, un erudito della dinastia Han: « Fang, è mettere fianco a fianco delle barche.” Il canto Hanguang della sezione Zhounan del Shijing (Canone della poesia) ne apporta, con i versi seguenti, un'altra conferma: “E' impossibile attraversare l'Han a guado, o di viaggiare sul Kiang in battello (*bu ke fang si*).”(Couvreur 1967, p.14) Il commentario di Mao dichiara: “*fang* è *fu*”. Ora questo ultimo *fu* prende lo stesso significato di un altro carattere che si legge egualmente *fu* e che designa una piccola zattera in legno. Nel capitolo “*Qiyu (Discorso del paese di Qi)*” del *Guoyu (Discorso dei reami)*, si legge sull'argomento: “mettendo fianco a fianco dei giunchi, si combina una zattera (*fang zhou she fu*).” Tutto questo sembra indicare che *fang* designava all'origine una zattera fatta di bacchette di legno o di bambù che si assemblava fianco a fianco, parallelamente le une alle altre. Ed ha acquisito in seguito il significato di “mettere fianco a fianco”.

Cheng rappresenta, da parte sua, all'origine, il nome di una misura. Il *Shuowen jiezi (Interpretazione dei grafi, Spiegazione dei caratteri)* di Xu Shen ne offre la testimonianza seguente: “10 *fa* fanno un *cheng*, 10 *cheng* fanno un *fen*, 10 *fen* fanno un *cun*.” E' per derivazione che ha acquisito il significato di “norme di cose”. Il capitolo “Zhishi (attirare gli

⁷ Vedi Yang Hui, Xiangjie jin zhang snanfa, Yijiatangcongshu, p. 21, riprodotto in Guo Shuchun ed, 1993. Zhongguokexue jihu dianji tonghui, Shuxuejian, tomo 1, p. 962.

eruditi)” di Xunzi, che dichiara: “*Cheng*, è la norma delle cose”. *I Nove Capitoli* comportano diverse occorrenze di questo termine *cheng*: “in inverno (o in primavera, in estate, in autunno), è una regola che una persona lavori (...)” (vedi p. 415), “le quantità di *chi* a lavorare secondo le regole” (vedi p.418), la quantità di *hu* che è della regola di camminare” (vedi p. 443), “*hu* della regola per il piccolo miglio” (vedi pag 451). Il *Suanshushu* (Libro delle procedure matematiche) parla egualmente di “regola per il miglio”. In tutte le occorrenze, *cheng* designa delle misure standard di lavoro, di *chi*, di *hu*, del piccolo miglio, o del miglio. *Cheng* può egualmente essere impiegato come verbo nel senso di “cercare le norme delle cose”.

Questa analisi suggerisce che *fangcheng* ha come significato principale quello di “cercare le norme delle cose assemblandole fianco a fianco”. L’espressione significa, più precisamente: mettere fianco a fianco l’insieme delle relazioni quantitative tra le cose per valutare le norme delle misure di ciascuno di loro. Una tale relazione quantitativa è disposta in una colonna, alla maniera di un ramo di bambù o di un bastone di legno, e l’insieme di queste colonne sono in seguito messe fianco a fianco, nella stessa maniera di una zattera che è montata a partire da tavole; uguale interpretazione fornisce precisamente la forma che prende *fangcheng*. Si può constatarlo sulla figura 8.1 che fa vedere le equazioni del primo problema - sottolineiamo che alla differenza delle tabelle alle quali rinviano i Nove Capitoli e dove i numeri sono rappresentati con l’aiuto delle bacchette, abbiamo optato per la scrittura oggi ordinaria dei numeri con l’aiuto delle cifre arabe:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Figura 8.1 – Rappresentazione del sistema di equazioni sulla superficie da calcolare

Si avvera dunque che la definizione di *fangcheng* proposta da Liu Hui è assolutamente esatta, quando scrive:

“ Delle cose di differenti gruppi sono riuniti in tutti gli eteroclit⁸; per ogni tipo, in una linea, si hanno delle quantità (*shu*), e si esprimono i loro dividendi (*shi*) in maniera globale. E’ fatto in modo che ogni colonna è costituita da *lü*. Se vi sono due tipi di cose, si misura due volte (ciascuna), se vi sono tre tipi di cose, si misura tre volte; in tutti i casi, si misura tante volte quante sono le quantità (*shu*) di tipi di cose. Poi si giustappongono le linee per fare le colonne, è per questo che si chiama *fangcheng*. A sinistra ed a destra di una colonna, non esiste (colonna) che gli sia identica; inoltre, non sono espresse se si ha di che fonderle.”

L’erudito Li Ji, della dinastia Tang, scrive da parte sua: «“*fang*, è destra e sinistra”. *Cheng*, è confrontare i *lü*. Si confrontano i *lü* di destra e sinistra, e si ricapitola globalmente tutte le cose, ecco perché si dice *fangcheng*.» La sua interpretazione sembrava ugualmente conforme al significato originale, perché giustapporre le linee per costituire delle colonne ha come conseguenza necessaria di far apparire destra e sinistra. Il capitolo Dashi li del Yili (Cerimoniale) afferma: «“destra e sinistra” è detto *fang*», che Zheng Zuan chiosa così: “*fang*, è quello che si produce sulle vicinanze”.

Liu Hui avanza un’idea che merita tutta la nostra attenzione quando dichiara: “ è fatto in modo che ogni colonna è costruita di *lü*.” Nelle equazioni, ogni cosa ha il suo proprio *lü*. Liu Hui lo precisa nel corso del suo commentario alla procedura *fangcheng*: “Ma sebbene non si elimini un *bing* di miglio di qualità inferiore che da la colonna di sinistra, ha per denominatore il divisore, dove, per quello che è dei *lü*, non comunicano.” (8.1) Designa con questa espressione il *lü* del

⁸ Aggiungere una nota del traduttore.

cereale di qualità inferiore. Lo stesso, quando nel problema dei passeri e delle rondini, commenta: “il *lü* dei passeri, in peso, è 4, il *lü* delle rondini, in peso, è 3”, questo che riguarda, sono i *lü* dei passeri e delle rondini. Questa interpretazione costituisce precisamente l’idea chiave sulla base della quale Liu Hui svilupperà la nuova procedura *fangcheng* nel problema del grano di canapa e del frumento (8.11). Tuttavia in realtà non è il senso profondo dell’enunciato: “è fatto in modo che ogni colonna è costituita da *lü*”. Questa affermazione ritorna a considerare ogni colonna come un tutto e a considerare come *lü* relativamente ad altre colonne. Ora la disposizione dei coefficienti delle incognite e del termine costante all’interno di una colonna si fa in un ordine ben determinato. In altri termini, rispetta un orientamento. Si può difendere la tesi che l’idea che esprime l’enunciato in questione presenta certi punti di similarità con il concetto di vettore colonna nella teoria contemporanea dei sistemi di equazioni lineari. Liu Hui intende così il concetto di *lü* sino all’equazione. Di conseguenza, questi tre tipi di trasformazioni di uguale importanza che sono “moltiplicare per disaggregare, semplificare per riunirli, omogeneizzare, eguagliare per farli comunicare” possono applicarsi alle equazioni. Questo è un punto sul quale ritorneremo nel seguito.

II La procedura del Fangcheng

Conformemente all’affermazione di Liu Hui, la procedura *fangcheng* data nel primo problema è un metodo generale, che prevale nell’insieme del capitolo. Non è perché è difficile da spiegare chiaramente in termini astratti che si fa uso di cereali per formularla. Le equazioni sono disposte come nella figura 8.1. Se x , y , z rappresentano rispettivamente la produzione di un bing di ciascuno dei cereali di qualità superiore, media ed inferiore, il problema equivale a quello che noi scriviamo oggi sotto la forma seguente:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 3x + 2y + z = 39 \\ \text{II} \quad 2x + 3y + z = 34 \\ \text{III} \quad x + 2y + 3z = 26 \end{array}$$

Si moltiplicano tutti i termini della colonna di mezzo per il coefficiente del cereale di qualità superiore della colonna di destra, poi si toglie la colonna di destra tante volte che sia necessario affinché il coefficiente del cereale di qualità superiore della colonna di mezzo si annulli, - è l’operazione che I Nove Capitoli designano con l’espressione della “eliminazione tra quantità che si fronteggiano”. Si moltiplicano di nuovo tutti i termini della colonna di sinistra per il coefficiente del cereale di qualità superiore della colonna di destra, e si toglie la colonna della destra fino a che il coefficiente del cereale di qualità superiore della colonna di sinistra si annulli. Si ottiene dunque, come nella figura 8.2:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 4 \quad 5 \quad 2 \\ 8 \quad 1 \quad 1 \\ 39 \quad 24 \quad 39 \end{array}$$

Figura 8.2 – Rappresentazione dello stato del sistema sulla superficie da calcolare.

Questa tabella di numeri è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 4y + 8z = 39 \end{array}$$

Liu Hui interpreta l’eliminazione tra numeri che si fronteggiano, per la quale, con l’aiuto della colonna di destra, si elimina la posizione superiore della colonna di mezzo, poi della colonna di destra, come un processo di omogeneizzazione e di egualizzazione. Moltiplicare, dalla posizione superiore della colonna di destra, la posizione superiore della colonna di mezzo e ciascuno dei termini messi in fila sotto essi, è omogeneizzare. In altri termini, l’operazione assicura che, in questa colonna, la posizione superiore e le altre sono omogenee le une alle altre. E le sottrazioni tra le colonne di destra e centrale finché la posizione superiore di questa ultima svanisce e ritorna ad egualizzare. Detto altrimenti, l’algoritmo procede in modo che le posizioni di testa delle due colonne siano uguali l’un l’altra, poiché è manifesto che, se la posizione superiore della colonna del mezzo si annulla, è che gli si toglie un montante uguale al suo valore iniziale. Ecco perché Liu Hui dichiara che esaminando la procedura con riferimento alle operazioni di egualizzazione ed omogeneizzazione, il suo significato è chiaro. Ma si pone allora la questione: questo tipo di trasformazione non può assumere la risoluzione di equazioni? Liu Hui risponde negativamente:

“Come si utilizzano tutti i *li* per sottrarli gli uni agli altri, questo non influenza la ricerca delle quantità (*shu*) restanti.”

Il commentatore sgombra il campo da ciò che costituisce la base teorica dell’eliminazione dell’incognita tra le equazioni. Liu Hui la tratta come una proposizione alla quale non si aggiunge la dimostrazione: cioè la considera come esatta.

Ritorniamo alla figura 8.2. Di nuovo, si moltiplicano per il coefficiente del cereale della qualità media della colonna di mezzo tutti i termini della colonna di sinistra, e si toglie questa colonna centrale dalla colonna di sinistra sino a che il coefficiente del cereale di qualità media della colonna di sinistra si annulla. La tabella si trasforma in quello che si vede nella figura 8.3:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 5 \quad 2 \\ 4 \quad 1 \quad 1 \\ 11 \quad 24 \quad 39 \end{array}$$

Figura 8.3 – Rappresentazione dello stato del sistema sulla superficie da calcolare

Il sistema corrispondente in notazioni contemporanee si scrive come segue:

$$\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 4z = 11 \end{array}$$

Il coefficiente associato al cereale di qualità inferiore della colonna di destra, 4, è, a questo punto dell’algoritmo, chiamato “divisore”; il dividendo 11 forma allora la produzione di 4 *bing* di cereale di qualità inferiore. Si moltiplica per il divisore, 4, il dividendo in basso della colonna di mezzo, 1, e si taglia la produzione del cereale di qualità inferiore, 11. Se si divide nuovamente per il numero di *bing* del cereale di qualità media, 5, resta 17 fornisce allora la produzione di 4 *bing* di cereale di qualità media. Infine, si moltiplica per il divisore, 4, il dividendo inferiore della colonna di destra, 39, e si taglia la produzione di cereale di qualità inferiore, 11, così che la produzione del cereale di qualità media, 17 volte 2. Dividendo di nuovo il numero di *bing* di cereale di qualità superiore, 3, il resto 37 si interpreta allora come la produzione di 4 *bing* del cereale di qualità superiore. Questo mostra la figura 8.4:

$$\begin{array}{r} 4 \\ 4 \end{array}$$

11 17 37

Figura 8.4 – Rappresentazione dello stato del sistema sulla superficie da calcolare

Questa tabella equivale al seguente sistema equivalente:

$$\begin{array}{rcl} 4x & = & 37 \\ 4y & = & 24 \\ 4z & = & 11 \end{array}$$

Dalla divisione del dividendo per il divisore, si ottengono le produzioni di un bing, rispettivamente, del cereale di qualità superiore ($x= 9 \frac{1}{4}$), del cereale della qualità media ($y= 4 \frac{1}{4}$) e del cereale di qualità inferiore ($z= 2 \frac{3}{4}$). Il metodo è equivalente al metodo contemporaneo per sostituzione.

Liu Hui nota che la trasformazione che porta dalla figura 8.3 alla figura 8.4 potrebbe essere ugualmente eseguita con il metodo d’eliminazione tra numeri che si fronteggiano. Ma aggiunge subito che procedendo così, le tappe sono leggermente più complicate; ora l’obiettivo da raggiungere, per seguirlo, quando si stabilisce un nuovo metodo, è di semplificare. E Liu Hui conclude: continuare a utilizzare il metodo dei Nove Capitoli, salvo assegnarsi un altro obiettivo che consiste nello sviluppare dei metodi di nuovo genere.

La procedura *fangcheng* può essere considerata come il risultato più elaborato dei Nuovi Capitoli. Il suo modo di descrizione è molto moderno. La sistemazione delle equazioni e le trasformazioni che accompagnano l’eliminazione di incognite ricorrono tutte ad una scrittura posizionale: l’esplicitazione del tipo di cosa alla quale rinvia un dato numero è allora inutile poiché basta esprimerla con la posizione dove si trova. Questa procedura è di fatto identica al metodo di separazione dei coefficienti delle matematiche moderne. In seguito, *fangcheng* equivale ad una notazione per matrice rettangolare, ed il suo processo di eliminazione delle incognite rileva delle trasformazioni di matrici. Così, di fatto le figure da 8.1 a 8.4 possono essere riscritte come segue:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 11 & 24 & 39 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 11 & 17 & 37 \end{array} \right|$$

III La procedura della diminuzione e dell'aumento

L'operazione “diminuire ed aumentare” designa un metodo che permette di stabilire le equazioni. La spiegazione viene fornita nel testo della seconda procedura, e questo metodo è ugualmente impiegato per sette problemi: il quarto, il quinto, il sesto, l'ottavo, il decimo, l'undicesimo e il quindicesimo. I termini di “diminuire” ed “aumentare”, che significano rispettivamente, aggiungere e sottrarre, sono costantemente utilizzati per il pensatore dell'epoca pre-Quin. All'esagramma sun (diminuzione) del Zhouyi (Classico del cambiamento), si legge: “Si diminuisce l'alto e si aumenta il basso. La sua strada sale.” Al capitolo 42 del Laozi, “Chi guadagna perde e chi perde guadagna” Gli autori dei Nove Capitoli hanno dunque improntato questi termini tecnici, ed hanno stabilito le equazioni ricorrendo all'operazione che designano. In termini matematici moderni, questo consiste nel cambiare un termine del membro. Con l'affermazione: “ciò di cui si diminuisce è detto aumentare”, I Nove Capitoli stabiliscono che diminuire di una quantità uno dei membri dell'enunciato di una relazione è equivalente ad aumentare di una quantità uguale l'altro membro. Al contrario, “ciò di cui si aumenta è detto diminuire” rinvia al fatto che aumentare di una quantità uno dei membri dell'enunciato di una relazione riporta a diminuire di una quantità uguale l'altro membro. Prendiamo l'esempio del secondo problema; se si scrive in simbolismo moderno gli enunciati descritti dalla relazione, si ha

$$\begin{aligned}(7x - 1) + 2y &= 10 \\ 2x + (8y + 1) &= 10\end{aligned}$$

Liu Hui esplicita l'operazione: “ciò di cui si diminuisce è detto aumentare”, cioè una volta che 1 *dou* tolto, il resto deve essere 10 *dou*, di conseguenza la produzione totale deve vedersi aggiunta di 1 *dou*. L'operazione equivale a far passare il “-1” dal membro di sinistra nel membro di destra, $10 + 1 = 11$. Parallelamente, “ciò di cui si aumenta è detto diminuire” si spiega con il fatto che una volta che la produzione aumenta di 1 *dou*, riempie 10 *dou*: è dunque che la produzione d'origine debba essere diminuita di 1 *dou*. In termini moderni, è la trasformazione che fa passare l'”1” al membro di sinistra nel membro di destra, $10 - 1 = 9$. Così, per “diminuzione ed aumento” si ottengono le equazioni:

$$\begin{aligned}7x + 2y &= 11 \\ 2x + 8y &= 9\end{aligned}$$

Quando una quantità passa da un membro all'altro di una relazione, l'addizione è trasformata in sottrazione e la sottrazione in addizione. L'operazione equivale ad un cambiamento di segno. Abbiamo osservato, in ciò che precede, un esempio di aumento e di diminuzione che porta sui termini costanti.

Il problema 8.4 non richiede solamente un aumento e diminuzione dei termini costanti, ma necessita egualmente che l'operazione porta alle incognite. Le relazioni date dall'enunciato del problema sono le seguenti:

$$\begin{aligned}5x - 11 &= 7y \\ 7x - 25 &= 5y\end{aligned}$$

I loro termini costanti sono in un membro, ed una delle incognite in un altro membro. Liu Hui prescrive: “con calcoli inversi, si fanno togliere l'uno dall'altro (...)”. In seguito, diminuzione ed aumento producono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}5x - 7y &= 11 \\ 7x - 5y &= 25\end{aligned}$$

Il risultato consiste dunque in equazioni che implicano dei coefficienti negativi. Le circostanze descritte dai problemi 8.5, 8.6, 8.8 e 8.15 conducono a delle relazioni che somiglino a queste. Il

problema 8.15 mette in opera tre incognite: diminuzione ed aumento portano unicamente sulle incognite. Il problema 8.6 merita una riflessione. Dopo l'enunciato si ha:

$$\begin{aligned}3x + 6 &= 10y \\ 5y + 1 &= 2x\end{aligned}$$

Invertendo i calcoli, si ottiene dunque:

$$\begin{aligned}3x - 10y &= -6 \\ 5y - 2x &= -1\end{aligned}$$

Le trasformazioni producono così delle equazioni a “produzione” negative. Il fatto apre una breccia: nel seguito le produzioni non saranno più necessariamente positive. Così il problema 8.8, per esempio, contiene ugualmente dei numeri negativi.

La situazione del problema 8.11 è un po' più complesso. Dopo l'enunciato del problema, si ha:

$$\begin{aligned}(2x+y) - 10000 &= \frac{1}{2} y \\ 10000 - (x+2y) &= \frac{1}{2} y\end{aligned}$$

Applicando diminuzione ed aumento si ottiene:

$$\begin{aligned}1 \frac{1}{2} x + y &= 10000 \\ x + 2 \frac{1}{2} y &= 10000\end{aligned}$$

Eliminando i denominatori, o, nei termini del Classico, “facendo comunicare le parti e incorporandole ai numeratori”, le equazioni sono trasformate nelle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}3x + 2y &= 20000 \\ 2x + 5y &= 20000\end{aligned}$$

La situazione fa vedere delle inversioni di calcolo che porta sulle incognite così bene che sulle costanti, il raggruppamento dei termini della stessa categoria per le incognite, e, infine, l'eliminazione del denominatore.

IV. La procedura “del positivo e del negativo”

L'introduzione dei numeri negativi e l'ampliamento consecutivo dell'insieme dei coefficienti costituiscono un altro aspetto molto importante del capitolo *fangcheng*. Nel corso dell'eliminazione delle incognite, possono apparire dei coefficienti negativi in equazioni a coefficienti all'origine tutti positivi: è il caso dei problemi 8.3, 8.12, 8.13, 8.14, 8.16, 8.17 e 8.18. Ma i Nove Capitoli propongono ugualmente dei problemi per i quali le equazioni stabilite contengono, esse stesse, dei coefficienti negativi: gli enunciati 8.4, 8.5, 8.6, 8.8 e 8.15 rilevano questi casi. Era dunque imperativo introdurre numeri negativi:

I *Nove Capitoli sulle procedure matematiche* propongono delle regole complete di addizione e di sottrazione di numeri positivi e negativi:

“Se dei numeri dello stesso nome sono eliminati l'uno dall'altro, i numeri dei nomi differenti si aumentano l'un l'altro; se il positivo non ha dove entrare, lo si rende negativo, se il negativo non ha dove entrare, lo si rende positivo. Se dei numeri di nomi differenti sono eliminati l'un l'altro, i numeri dello stesso nome si aumentano l'un l'altro; se il positivo non ha dove entrare, lo si rende positivo, se il negativo non ha dove entrare, lo si rende negativo.”

Il “nome”, un termine che designa normalmente lo “statuto di una persona”, rinvia qui al segno del numero. L'espressione “dello stesso nome” si applica così a dei numeri “dello stesso segno”, mentre, per la formula “di nomi differenti”, si rinvia a delle quantità “di segni differenti”. Le quattro prime proposizioni della procedura richiamata qui sotto, formano una regola di sottrazione dei numeri positivi e negativi. Se i due sono dello stesso segno, allora è prescritto di togliere i loro valori assoluti l'uno dall'altro:

$$\begin{aligned}(\pm a) - (\pm b) &= \pm(a-b) \quad a > b \\ (\pm a) - (\pm b) &= \mp(b-a) \quad a > b\end{aligned}$$

Se i due sono di segno opposto, i loro valori assoluti si aggiungono l'un l'altro:

$$(\pm a) - (\mp b) = \pm(b+a)$$

Quando il numero positivo non ha il valore del quale potrebbe essere sottratto, il risultato produce un numero negativo:

$$0 - a = -a \quad a > 0$$

Inversamente, quando il numero negativo non ha numero dal quale essere sottratto, il risultato consiste in un numero positivo:

$$0 - (-a) = a \quad a > 0$$

Inoltre, le quattro ultime proposizioni costituiscono una regola di addizione dei numeri positivi e negativi. Se le due quantità sono di segno opposto, allora i loro valori assoluti devono essere tagliati l'uno dall'altro:

$$\begin{aligned}(\pm a) - (\mp b) &= \pm(a-b) \quad a > b \\ (\pm a) - (\mp b) &= \mp(b-a) \quad a > b\end{aligned}$$

Se le due quantità sono invece, dello stesso segno, i loro valori assoluti si aggiungono l'un l'altro:

$$(\pm a) + (\pm b) = \pm(a+b)$$

Quando il numero positivo non ha numero al quale essere aggiunto, si ottiene un numero positivo:

$$0 + a = +a \quad a > 0$$

Quando questo si produce per un numero negativo, il risultato fornisce un numero negativo:

$$0 + (-a) = -a \quad a > 0$$

Una volta che si dispone di una regola per addizionare e sottrarre numeri positivi e negativi, la messa in opera della procedura *fangcheng* per risolvere dei sistemi di equazioni, comporta dei coefficienti negativi e non pone alcuna difficoltà. Ne prendiamo il problema 8.8 come esempio. La tabella alla quale corrispondono le sue equazioni è rappresentata dalla figura 8.5:

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 6 & -9 & 5 \\ 8 & 3 & -13 \\ 600 & 0 & 1000 \end{vmatrix}$$

Figura 8.5 – Rappresentazione dello stato del sistema sulla superficie da calcolare.

Si moltiplica la colonna di mezzo per il coefficiente superiore della riga di destra, 2, e si sottrae questa ultima 3 volte. Poi, si moltiplica, di nuovo, la colonna di destra per il coefficiente superiore della riga di destra, 2, e si addiziona questa ultima 5 volte. Al termine di queste operazioni, le equazioni ottenute sono conformi alla figura 8.6:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -27 & -33 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 39 & 45 & -13 \\ -1800 & -3000 & 1000 \end{array} \right|$$

Figura 8.6 – Rappresentazione dello stato del sistema sulla superficie da calcolare. Si semplifica la colonna centrale per -3, la colonna di sinistra per 3, e si ottiene il sistema

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ -9 & 11 & 5 \\ 13 & -15 & -13 \\ -600 & 1000 & 1000 \end{array} \right|$$

Figura 8.7 – Rappresentazione dello stato del sistema sulla superficie da calcolare.

Si moltiplica la colonna di sinistra con il coefficiente di mezzo della colonna centrale e si aggiunge questo 9 volte. Si ottiene una tabella conforme alla figura 8.8:

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 11 & 5 \\ 8 & -15 & -13 \\ 2400 & 1000 & 1000 \end{array} \right|$$

Figura 8.8 – Rappresentazione dello stato del sistema sulla superficie da calcolare.

Semplificando la colonna di sinistra per 8, le equazioni si trasformano nella figura 8.9:

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 11 & 5 \\ 1 & -15 & -13 \\ 300 & 1000 & 1000 \end{array} \right|$$

Figura 8.9 – Rappresentazione dello stato del sistema sulla superficie da calcolare.

Se si utilizzano le regole di addizione e di sottrazione dei numeri positivi e negativi, questi calcoli sono di routine. Costatiamo che questi necessitano ugualmente di moltiplicare e dividere con dei numeri positivi e negativi. La moltiplicazione si presenta quando si vuole eliminare la posizione di testa, poi la posizione di mezzo, della colonna di sinistra, mentre che si deve eseguire una divisione per trasformare la figura 8.6 nella 8.7. In seguito, anche se *I Nove Capitoli* non danno esplicitamente le regole di moltiplicazione e di divisione tra numeri positivi e negativi, di fatto vi ricorrono in modo corretto. E' dovuto a Zhu Shijie, nel XIII° secolo, nel suo *Suanxue qimeng (Introduzione allo studio delle matematiche)*, l'aver dato esplicitamente le regole della moltiplicazione tra numeri positivi e negativi.

Il commentario di Liu Hui alla “Procedura dei numeri positivi e negativi” sistematizza più avanti la teoria dei numeri positivi e negativi dei Nove Capitoli. Quindi, Liu Hui fornisce una definizione di numeri positivi e negativi:

“Se due tipi di numeri rappresentati dalle bacchette, ciò che si acquisisce e ciò che si perde, sono l'opposto l'uno dell'altro, bisogna servirsi del positivo e negativo per nominarlo.”

L'affermazione pone che numeri positivi e negativi dipendono gli uni dagli altri, sono relativi gli uni agli altri: il positivo è detto positivo relativamente al negativo, ed il negativo è detto negativo relativamente al positivo. Così, Liu Hui dichiara:

“Ogni volta che si utilizza positivo e negativo per esprimere che dei (numeri) sono dello stesso (nome) o di (nomi) differenti, si ha solamente che le due categorie si ottengono l'una a partire dall'altra per inversione. Un numero espresso come negativo non è necessariamente negativo nei piccoli valori, un numero espresso come positivo non è necessariamente positivo nei grandi valori.”

Di conseguenza, è possibile, in funzione dei bisogni del calcolo, modificare globalmente i segni di un numero, anche a numeri a lui legati: ed afferma Liu Hui, non influenzano per niente sui loro rapporti quantitativi all’interno dell’insieme. E questa possibilità è costantemente messa in opera, nel corso dell’eliminazione di incognite tra equazioni, al fine di trasformare, in numero di segni opposti, le posizioni di testa delle due colonne tra le quali si elimina.

Con questo ripiego, la sottrazione tra colonne è trasformata in addizione tra colonne. All’origine, come numeri positivi e negativi erano relativi, le regole per la loro addizione e loro sottrazione si completavano mutualmente. Si rivelano così costituire una sola ed unica regola.

I numeri positivi e negativi, come la loro addizione e sottrazione, sono utilizzati, nei Nove Capitoli, nel quadro della procedura *fangcheng*. E’ probabile che Zu Chongzhi li impieghi più tardi nei suoi lavori per risolvere le equazioni ad una incognita di secondo o di terzo grado con coefficienti negativi. Comunque, all’epoca delle dinastie Song e Yuan, l’utilizzazione dei numeri positivi e negativi per estrarre delle radici si costituirà in un dominio al quale i matematici cinesi consacreranno importanti lavori. Il metodo per determinare le radici positive delle equazioni algebriche di grado superiore potrà svilupparsi pienamente in questo quadro.

V. Il metodo d’eliminazione per moltiplicazione reciproca.

L’eliminazione di incognite per sottrazione tra numeri che si fronteggiano implica delle sottrazioni ripetute. Quando i numeri sono molto importanti, suppongono calcoli particolarmente complessi. Nel corso del suo commentario al problema del valore dei buoi e delle pecore (8.7), Liu Hui elabora il metodo, alternativo, di eliminazione delle incognite per moltiplicazione reciproca. Ai suoi occhi, se bisogna praticare una egualizzazione ed una omogeneizzazione, è ugualmente possibile pervenirvi moltiplicando ciascuna delle colonne con la posizione di testa dell’altra. Le equazioni iniziali, nel problema del valore dei buoi e delle pecore, possono rappresentarsi con la figura 8.10:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 8 & 10 \\ \hline \end{array}$$

Figura 8.10 – Rappresentazione dello stato del sistema sulla superficie da calcolare.

Si possono egualmente esprimere in simbolismo matematico contemporaneo come segue:

$$\begin{array}{l} 5x + 2y = 10 \\ 2x + 5y = 8 \end{array}$$

Se la posizione di testa di una colonna moltiplica i termini dell’altra, si ottiene una tabella conforme alla figura 8.11:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 10 & 10 \\ \hline 25 & 4 \\ \hline 40 & 20 \\ \hline \end{array}$$

Figura 8.11 – Rappresentazione dello stato del sistema sulla superficie da calcolare.

Che equivale al sistema:

$$\begin{array}{l} 10x + 4y = 20 \\ 10x + 25y = 40 \end{array}$$

Tagliando la colonna più piccola dalla più importante, la posizione di testa si annulla a sinistra, e rimangono solo le posizioni seguenti: il numero delle pecore e la quantità globale d’oro (vedi figura 8.12).

$$\left| \begin{array}{cc} & 10 \\ 21 & 4 \\ 20 & 20 \end{array} \right|$$

Figura 8.12 – Rappresentazione dello stato del sistema sulla superficie da calcolare.

Si ottiene dunque la quantità d’oro che vale una pecora. Liu Hui ritiene questo altro metodo essere anche generale e potersi applicare a dei sistemi di equazioni di un numero qualunque di colonne. Disgraziatamente, parecchi secoli dopo la sua formulazione, questo miglioramento di Liu Hui non era stato sempre ripreso dai suoi successori. Delle opere come Zhang Qiujian suanjing (*Classico matematico di Zhang Qiujian*) utilizzano sempre il metodo della sottrazione tra numeri che si fronteggiano per risolvere i sistemi di equazioni lineari. Solo nella prima metà del XI° secolo che il matematico dei Song del Nord Jia Xian riprende il metodo di eliminazione per moltiplicazione reciproca per risolvere altri problemi di *fangcheng* contenuti nei Nove Capitoli, continuando a ricorrere ugualmente al metodo di sottrazione tra numeri che si fronteggiano. Bisogna attendere il Shushu jiuzhang (*Scritti sulle matematiche nei nove capitoli*) del matematico dei Song del Sud Qin Jiushao, alla metà del XIII° secolo, per vedere scartato il metodo della sottrazione tra numeri che si fronteggiano: Qin Jiushao ricorre ormai esclusivamente al metodo di eliminazione per moltiplicazione reciproca, che lo migliora.

VI. La “Nuova procedura Fangcheng

E’ un punto che abbiamo già evocato e sul quale adesso ritorniamo: le equazioni erano conosciute, nella Cina antica, come sistemare le “norme” delle cose o, in altri termini, i loro “*lü* propri”. Infatti, ogni colonna della procedura *fangcheng* rappresenta una relazione lineare tra il *lü* delle cose. E’ su questa base che Liu Hui si appoggia per creare la nuova procedura *fangcheng*. L’idea generale è la seguente: con delle sottrazioni tra colonne, da destra a sinistra, si eliminano subito le produzioni (*shi*) di tutte le colonne; poi si eliminano di nuovo, questa volta le incognite, in vista dell’esibizione dei “*lü* di equivalenze tra le cose a due a due (*xiang dang zhi lü*)”. Queste ultime permettono, dallo scambio dei loro valori, di ottenere i “*lü* dati in relazione gli uni con gli altri “ di cose a due a due. Una volta determinati, la procedura di egualizzazione e di omogeneizzazione è applicata per trovare i “*lü* dati in relazione gli uni con gli altri” di tutte le cose. E la risoluzione si compie ricorrendo alla Procedura del “supponiamo” (regola del tre) o alla “Procedura delle parti ponderate in funzione dei gradi” (*cui fen*). Nella misura in cui, nel suo commentario al capitolo 3, Liu Hui riporta questa alla “Procedura dei supponiamo”, i cammini differenti di cui si serve la nuova procedura *fangcheng* ritornano tutti alla “Procedura del supponiamo”.

Nel corso del suo commentario al problema dei passeri e delle rondini (8.9), Liu Hui aveva di fatti già utilizzato la nuova procedura *fangcheng*. Tuttavia è nel problema del grano di miglio e del frumento che ne fornisce una descrizione integrale. Appoggiamoci su questo ultimo esempio per illustrarne i punti chiave. Liu Hui determina, con l’eliminazione delle incognite, i “*lü* delle mutue equivalenze a due a due” del grano di canapa, del frumento, della soia, del fagiolo mungo e del miglio glutinoso: 4 di grano di canapa è equivalente a 7 di frumento; 3 di frumento è equivalente a 4 di soia; 5 di soia è equivalente a 3 di fagiolo mungo; 6 di fagiolo mungo è equivalente a 5 di miglio glutinata. Una inversione di queste quantità fornisce loro “*lü* dati in relazione l’uno con l’altro”. Così:

grano di canapa : frumento = 7 : 4; frumento : soia = 4 : 3; soia : fagiolo mungo = 3:5;
fagiolo mungo : miglio glutinato = 5:6

E di conseguenza:

Grano di canapa : frumento : soia : fagiolo mungo : miglio glutinato = 7:4:3:5:6

Si tratta dei “*lü* che fanno comunicare tutte le cose tra di loro”. In seguito Liu Hui utilizza alternativamente tre tipi di metodi per determinare i prezzi delle cose.

(1) **Risoluzione con la “Procedura del supponiamo”**. Quando si era ricorso all’eliminazione per sopprimere le produzioni, nelle posizioni inferiori delle colonne, era stata data la terza di queste, dopo la semplificazione:

grano di canapa + 4 soia – 3 fagioli mungo = 4

Con l’aiuto dei *lü* che fanno comunicare tutte le cose e la “Procedura del supponiamo”, Liu Hui trasforma soia e fagiolo mungo in grano di canapa, e scrive dunque:

grano di canapa + 4 $\frac{3}{7}$ grano di canapa – 3 $\frac{3}{7}$ grano di canapa = 4

sia $\frac{4}{7}$ grano di canapa = 4

Può concludere: grano di canapa = 7 (spechi, moneta)

In seguito può ottenere con l’aiuto dei “*lü* che fanno comunicare tutte le cose tra di loro” e della “Procedura del supponiamo”, l’insieme dei seguenti valori:

frumento = 4 sapechi; soia = 3 sapechi; fagiolo mungo = 5 sapechi; miglio glutinato = 6 sapechi.

(2) **Ricorrere ancora alla “Procedura del supponiamo” per risolvere**. Si utilizza una colonna qualunque dell’insieme delle equazioni iniziali. Prendiamo, per esempio, la colonna di sinistra del sistema:

grano di canapa + 3 frumento + 2 soia + 8 fagioli mungo + 5 miglio glutinato = 95

Sulla base dei “*lü* che fanno comunicare tutte le cose tra di loro” e della “Procedura del supponiamo”, si trasforma l’uguaglianza precedente in:

grano di canapa + 3 $\frac{4}{7}$ grano di canapa + 2 $\frac{3}{7}$ grano di canapa + 8 $\frac{5}{7}$ grano di canapa + 5 $\frac{6}{5}$ grano di canapa = 95

Sia $\frac{95}{7}$ grano di canapa = 95

Si ha dunque che il grano di canapa vale 7 sapechi e, si può, con l’aiuto, sempre, dei “*lü* che fanno comunicare tutte le cose tra di loro” e della “Procedura del supponiamo”, ottenere i prezzi delle altre categorie delle cose.

(3) *I lü che fanno comunicare tutte le cose sono presi come “un allineamento di coefficienti della ponderazione in funzione dei gradi” (liecui) e la risoluzione opera con la “Procedura delle parti ponderate in funzione dei gradi”*. Chiamiamo a_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$) i coefficienti della divisione disuguale, M la produzione nella posizione inferiore di una colonna data, m_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$) i coefficienti associati a tutte le cose in questa colonna. Si prendono allora, come dividendi, rispettivamente, i prodotti del dividendo in basso dai coefficienti della divisione

Di Paola&Spagnolo, I sistemi indeterminati nei Nove Capitoli di Liu Hui... 125

disuguale; si prende in seguito, come divisore, il risultato delle somme e delle differenze dei prodotti dei coefficienti di questa colonna con i coefficienti della divisione diseguale rispettivamente:

$$\frac{Ma_i}{\sum_{j=1}^n m_j a_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Forniscono di conseguenza il prezzo di ogni cosa.

In questo problema, Liu Hui sceglie di appoggiarsi ancora sulla terza colonna che, dopo l'eliminazione delle produzioni inferiori, è semplificata. Tuttavia il divisore che si calcola a partire da questa colonna, $\sum_{j=1}^n m_j a_j = 1 \times 7 + 4 \times 3 - 3 \times 5$, vale 4. Si ha che questo valore è

dunque per caso uguale alla produzione che si trova nella posizione inferiore ($M=4$). Si può semplificare, e non è così necessario moltiplicare i coefficienti della divisione diseguale con la produzione nella posizione inferiore: si può prendere direttamente i coefficienti della divisione diseguale come prezzo delle cose.

VII Il problema delle cinque famiglie che hanno un pozzo comune.

Il problema delle cinque famiglie che hanno un pozzo in comune comporta sei incognite (8.13), ma si può porre, nel sistema dei Nove Capitoli, come un sistema di equazioni lineari a cinque colonne, somigliante a quello che mostra la figura 8.13.

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & & & & 2 \\ & & & 3 & 1 \\ & & 4 & 1 & \\ & 5 & 1 & & \\ 6 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

Figura 8.13 – Rappresentazione dello stato del sistema sulla superficie da calcolare.

$$\left| \begin{array}{ccccc} & & & & 721 \\ & & & 721 & \\ & & 721 & & \\ & 721 & & & \\ 721 & & & & \\ 76 & 129 & 148 & 191 & 1275 \end{array} \right|$$

Figura 8.14 – Rappresentazione dello stato del sistema sulla superficie da calcolare.

Jia : Yi : Bing : Wu:
profondità del pozzo = 265 : 191 : 148 : 129 : 76 : 721

Si tratta dunque di un problema indeterminato. Ma gli autori dei Nove Capitoli sulle procedure matematiche non hanno scelto questa particolarità. Si rifanno alla procedura del *fangcheng* per eliminare le incognite, per trasformare la figura 8.13 nella tabella della figura 8.14. In conclusione, enunciano i risultati affermando che la profondità dei pozzi è di 721 cun, che la corda della famiglia Jia ha una lunghezza di 265 cun, quella della famiglia Yi una lunghezza di 191 cun, quella della famiglia Bing una lunghezza di 148 cun, quella della famiglia Ding una lunghezza di 129 cun ed infine quella della famiglia Wu una lunghezza di 76 cun. Che è Di Paola&Spagnolo, I sistemi indeterminati nei Nove Capitoli di Liu Hui...

“Quaderni di Ricerca in Didattica”, n. 19, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

effettivamente quello che si vede nella figura 8.14. E' chiaro che basta prendere una profondità del pozzo uguale a $721n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) per ottenere, in tutti i casi, dei valori interi, per la lunghezza delle corde di Jia, Yi, Bing, Ding, Wu, che soddisfino il problema originale. Infatti i Nove Capitoli enunciano, come soluzione, il più piccolo insieme di soluzioni intere. Liu Hui, da parte sua, ha coscienza di questo fatto, come lo mostra il suo commentario con la tabella dei numeri della figura 8.14: Se si divide il dividendo (shi) con il divisore, allora la quantità (shu) di quello che una corda di Wu che raggiunge il pozzo è determinato: lo raggiunge con $76/721$. Ecco perché se 721 è preso come profondità del pozzo, 76 come la lunghezza della corda di Wu, è che si instauri dei *lǚ* per esprimere questo (i risultati). L'affermazione mostra che con evidenza che, Liu Hui ha infatti già scelto questo problema come indeterminato e che dovrebbe avere infinite soluzioni. Indica dunque indirettamente un nuovo errore dei Nove Capitoli. Il commentario di Liu Hui costituisce, su questo fatto, la prima menzione esplicita di un tale problema indeterminato nella storia delle matematiche in Cina.

I Nove Capitoli sulle procedure matematiche Ottavo rotolo

Commentario di Liu Hui di Wei

Commentario su ordine imperiale di vostro servitore Li Chunfeng, grande maestro, occupante le funzioni di direttore del servizio astrologico, grande direttore generale dei carri da guerra, della dinastia Tang, e dei suoi associati.

Fangcheng¹

Per trattare quello che è mischiato così che il positivo ed il negativo⁹

(8.1)

Supponiamo che 3 Bing di miglio di qualità superiore, 2 Bing di miglio di qualità media, 1 Bing di miglio di qualità inferiore producano (shi)¹⁰ 39 Dou; che 2 Bing di miglio di qualità

¹ Il senso del termine *fangcheng* non è ancora unanimemente accettato ed è per questo che abbiamo scelto di non tradurlo qui. Ci si può riportare alla discussione della sua interpretazione nell'introduzione a questo capitolo. Vedi ugualmente *fang* « quadrato », *cheng* « misura ». Il fatto che *cheng* possa essere sinonimo di *fa* « divisore, norma » è in perfetto accordo con la divisione e l'algoritmo che da il suo nome al capitolo, in modo tale che la descrizione dei *Nove Capitoli* lo valorizzi (vedi problema 8.1). Questo parallelo aiuta a comprendere che l'algoritmo in questione, una specie di divisione a due dimensioni, dove, in termini moderni, possiamo chiamare procedura di risoluzione di sistemi di equazioni lineari, oppone ad una fila di dividendi (vedi *shi*) un quadrato di « divisori », la possibile traduzione del suo nome si può rendere con « procedura di misure in quadrato » (Chemla 1992b). Il nome *cheng* sarà allora in addegnamento con una concezione della sua funzione nell'algoritmo. Dopo tutto, la divisione risolve delle equazioni del tipo $ax=d$, mentre *fangcheng* tratta dei gruppi di equazioni del tipo $ax+by+cz=d$. Nel seguito dei *Nove Capitoli*, l'equazione corrisponderebbe all'enunciato di una relazione tra dividendo e divisore (Chemla 1994d). Il riferimento che da il nome alla procedura dalla forma di quadrato che compone i divisori, dove « coefficienti », potrebbe avere un valore prescrittivo : necessita di avere tante equazioni quanto incognite. Questa osservazione porta a preferire la traduzione di « misura in quadrato » con una alternativa : « mettere le misure in quadrato », anche se questa forma rappresenta ugualmente una organizzazione spaziale di dati che l'algoritmo utilizzerà proficuamente (vedi problema 8.1). Questa interpretazione di *fang* e *cheng* incontra la chiosa di *Cheng Dawei*, che, nella sua opera del 1592, scrive : « *Fang* è un quadrato ; *cheng*, sono delle quantità » (Vedi l'edizione di Mei Rongzhao e Li Zhaohua, *Edizione e spiegazione di Sorgente generale dei metodi matematici* (Suanfa tongzong jiaoshi, Anhui jiaoyu chuubanshe, 1990, 1020 p., p.711)). Nella loro nota 1, p.731, gli autori interpretano *cheng* troppo largamente, io penso, come rinviante all'insieme dei numeri disposti.

Malgrado la menzione introduttrice, il testo del capitolo come le edizioni antiche ce lo trasmettono non comporta alcun commentario attribuito a Li Chunfeng (Vedi Qian Baocong, 1921b), dove si troverà egualmente uno schema storico della trasmissione e delle trasformazioni della procedura in Cina. Su questo punto, vedi ugualmente (Chemla 1996c). Questo capitolo è stato riletto da A. Robadey, che ringrazio per le sue osservazioni.

⁹ Il positivo (vedi *zheng*) ed il negativo (vedi *fu*) sono introdotti nel contesto del problema 8.3, alle note del quale il lettore può riportarsi. Necessarie per condurre in porto l'algoritmo in certi casi, queste marche permetteranno in seguito di prendere in considerazione una varietà più grande di problemi (8.4 e seguenti). La « miscellanea » evoca senza dubbio – il commentario di Liu Hui nel problema 8.1 che ne parla in questi termini – la maniera in cui i multipli incogniti si trovano, insieme, nei termini costanti di equazioni. I commentatori identificano regolarmente, nelle situazioni matematiche sulle quali le procedure dovranno operare, un carattere di pari « miscellanea ». Vedi l'introduzione al capitolo 7, vedi *hu* « mescolato ».

¹⁰ Il termine *shi*, che rinvia alla produzione di grano, designa egualmente il dividendo, due significati attivi, Vedi *shi*. I valori di queste « produzioni/dividendi » saranno, l'algoritmo lo precisa, messi in fila in una linea in basso della superficie da calcolare, mentre le quantità di grano saranno disposte nello spazio

superiore, e Bing di miglio di qualità media, 1 Bing di miglio di qualità inferiore producano (shi) 34 Dou; che 1 Bing di miglio di qualità superiore, 2 Bing di miglio di qualità media, 3 Bing di miglio di qualità inferiore producano (shi) 26 Dou; si chiede quanto producono (shi) rispettivamente un Bing di miglio di qualità superiore, di qualità media, di qualità inferiore.

Risposta: Un Bing di miglio di qualità superiore 9 Dou $\frac{1}{4}$ di Dou;
 Un Bing di miglio di qualità media 4 Dou $\frac{1}{4}$ di Dou;
 Un Bing di miglio di qualità inferiore 2 Dou $\frac{3}{4}$ di Dou.

Procedura Fangcheng:

Misurare (cheng), è cercare le misure¹¹. Delle cose di differenti gruppi sono riuniti in tutti gli eteroclit¹²; per ogni tipo, in una linea, si hanno delle quantità (shu), e si esprime il loro

superiore. Quest’ultimo si espanderà in tre linee corrispondenti, dall’alto in basso, ai grani di qualità rispettivamente superiore, media, inferiore (vedi la figura 8.1): i marcatori della qualità di grani designano esattamente i posti concreti che occupano le loro quantità sulla superficie da calcolare (Chemla 1996a). E’ l’insieme dell’enunciato che si presta dunque ad una doppia lettura. Il problema 12 dell’ultimo capitolo del Classico matematico di Zhang Qiujian (*Zhang Qiujian suanjing, Qian Baocong* 1963, pp. 381-382) è identica a questo, dal punto di vista dei valori numerici e della struttura, ma tratta dei tessuti e del loro prezzo. Il commentario di Li Chunfeng (vedi sotto) riprende nondimeno il termine di *shi* per i termini costanti.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Figura 8.1

¹¹ Questa interpretazione di *cheng* solleva delle difficoltà. Si può interpretare la spiegazione di *kecheng* avanzata dal commentario, ponendo l’ipotesi che il termine *ke* riprende il senso di “confrontare” (Vedi *ke*) che riporta in generale al capitolo 7, traducendolo dunque: “Le misure (*cheng*), sono le misure che si confrontano” dove “Misurare, è confrontare delle misure.” Il “confronto” potrebbe rinviare a quello che, per noi, corrisponde all’enunciato sia di una equazione, sia dell’insieme del sistema che essi formano. *Ke* evocerebbe allora un senso vicino a quello che prende nel nome della “procedura di comparazione (*ke*) delle parti” (vedi 1.14). Curiosamente, sembra che questa eco sia significativa per le *Spiegazioni dettagliate dei Nove Capitoli sui Metodi matematici (Xiangjie jiuzhang suanfa)* di Yang Hui che, dopo la sua spiegazione di *fang*, seguita da *cheng*: “*Cheng*, è il nome generale dell’operazione di misura; questi sono egualmente i divisori ordinari che permettono di valutare (per comparazione delle quantità di) *zhang* e *chi*, *hu* e *dou* (i.e.: delle unità di misura di lunghezza o di contenenza); questo ancora di più il senso (*yi*) di comparare le parti per chiarire le differenti quantità” (edizione Yijiatang congshi, p.21). Questa ipotesi potrebbe rinviare a due interpretazioni di una equazione lineare: sia se è messa in guardia della determinazione dei componenti di una quantità su una data scala di unità, corrispondente ai suoi coefficienti (si comprenderà: “valutare i numeri di *zhang* e di *chi* (...)”, e si tratterebbe di altrettante parti); sia essa pensata come divisione che porta a determinare i valori incogniti delle diverse unità relativamente alle quali i coefficienti saranno al più misure (si comprenderà: “valutare i valori di *zhang* e di *chi*(...)”). In questo ultimo caso, le incognite potrebbero essere concepite come delle parti (vedi *fen*) di cui la taglia sarà determinata. Ma il passo di Liu Hui potrebbe ancora interpretarsi come: “*Cheng*, questi sono dei montanti determinati con saldo”.

¹² Vedi wu “cosa”. Si ritrova il tema del miscuglio che costituisce una equazione. Si può vedere qui un eco alla citazione del “Gran commentario” (*Xici zhuang*) di *Yijing* centrale nel commentario 1.9: “(...) si distinguono gli esistenti (wu, o i tipi di cose) secondo il gruppo”, che suggerisce una seconda lettura del passaggio: “Le cose di gruppi differenti, comunque riuniti, sono eteroclit.”

dividendo (shi) in modo globale¹³. E' fatto in modo che ogni colonna è costituita di *lǚ*¹⁴. Se vi sono 2 tipi di cose, si misura due volte (ciascuna); se vi sono 3 tipi di cose, si misura 3 volte; in tutti i casi, si misura tante volte fino a che vi sono delle quantità (shu) di tipi di cose¹⁵. Poi si giustappongono le linee per fare delle colonne, ecco perché questo si chiama *fangcheng*. A sinistra ed a destra di una colonna, non esiste (colonna) che sia identica¹⁶; in più, esse non sono espresse se non si ha di cosa fondarle¹⁷. Questa procedura è universale, ma è difficile farle comprendere con delle espressioni astratte; ecco perché si relega al (caso) del miglio per eliminare l'ostacolo¹⁸. Nuovamente, si dispone la colonna centrale e di sinistra come la colonna di destra¹⁹.

Si piazzano 3 Bing di Miglio di qualità superiore, 2 Bing di Miglio di qualità media, 1 Bing di Miglio di qualità inferiore, ed il dividendo (shi) 39 Dou a destra. I migli sono disposti nelle

¹³ Liu Hui commenta qui la tabulazione dei dati che descrive l'inizio dell'algoritmo del Classico: orizzontalmente, le righe registrano, ciascuna, i coefficienti relativi ad una incognita, mentre, verticalmente, il miscuglio di un insieme di realtà si traduce nell'unico dividendo (vedi shi, lie "riga", yan "esprimere"). Ma si può egualmente comprendere "quantità" così bene che "tutto" al singolare, e questi ultimi enunciati porterebbero al significato ed alla costruzione di una colonna. Il movimento d'insieme del testo considererebbe poi la composizione di una riga relativamente all'insieme, infine la costruzione della tabella per assemblaggio di righe.

¹⁴ Vedi *lǚ, hang* "colonna". Bisogna senza dubbio comprendere: le componenti di una colonna, seguendo l'esempio dei termini di una divisione, possono essere moltiplicati o divisi dallo stesso numero senza ostentare il risultato dell'operazione (Li Jimin, 1982d, p.234). L'algoritmo descritto dai Nove Capitoli mette in opera questa proprietà. Le due altre occorrenze del *lǚ* nel commentario a questo stesso problema sembrerebbero confermare questa interpretazione. Oltre 8.4 che riprende le stesse affermazioni di qua, il termine ritorna, in questo capitolo, nel corso del commentario a 8.3, 8.9, 8.13 e 8.18. In 8.9 e 8.18, la risoluzione si appoggia sul fatto che, poiché il termine costante è nullo, una colonna con i coefficienti delle due incognite forma un insieme di *lǚ* somigliante a quelli sui quali opera la regola del tre (2.0); in 8.13 il carattere di *lǚ* si intende alle soluzioni del problema.

¹⁵ Questa messa in relazione del numero di elementi in una riga – sia: del numero delle colonne – e del numero di incognite fa senza dubbio eco all'interpretazione del *fang* come "quadrato".

¹⁶ Se si interpreta così, sembra che bisogna comprendere l'enunciato in *lǚ* – non sono due colonne che siano identiche ad un fattore vicino – e che Liu Hui si preoccupa qui delle condizioni, che portano sulle colonne, che definiscono un "buon" problema. Ma si può egualmente tradurre: "non ci sono (colonne) che coesistono con essa" o "non ci sono delle (cose) che coesistono. " Se si considera la tabella dei numeri, le colonne rinviano alle realtà che coesistono in un fatto, mentre i rapporti tra colonne implicano un altro modo di simultaneità. Il commentatore farà allora allusione allo statuto, nei fatti, di tali enunciati, differenti ma relativi alle stesse cose, indipendenti ma tenuti assieme e, prosegue la frase, tutti fondati.

¹⁷ Nella prosecuzione della precedente, ma di interpretazione delicata, l'asserzione potrebbe mirare, nel quadro della prima ipotesi, a evitare i casi impossibili, dove due colonne riporterebbero a delle realtà contraddittorie, per esempio. Essa riferirebbe la condizione di possibilità di un problema, dove il problema dello statuto dei suoi enunciati, per il fatto che questi ultimi possiedono un riferimento nel reale, una preoccupazione in seguito ripresa sotto un altro angolo.

¹⁸ Dove: "ci si lega al disegno dei migli per farla passare". Vedi *Kong* "astratto". Liu Hui impiega l'espressione "procedura universale" a due riprese, qui per la procedura del "supponiamo" (2.0). Il confronto lo mette in evidenza, il modo di presentazione astratto, fuori dal contesto di tutto il problema, di questo ultimo contrasto con il contesto d'andatura concreta delle produzioni di grano. E' senza dubbio quello che porta Liu Hui a sollevare la questione delle motivazioni del Classico nelle loro scelte del quadro di un problema e, pertanto, ad enunciare un altro valore, in tensione con l'astrazione: "far comprendere". Per una lettura del capitolo 8, poggiata su di una analisi critica di ciò che era un problema nella Cina antica, vedi Chemla, 2000a.

¹⁹ Il teso che riporta l'insieme delle edizioni antiche non menziona la colonna di sinistra.

*colonne centrale e di sinistra come sono stati a destra. Si moltiplica l'insieme della colonna centrale per il miglio di qualità superiore della colonna di destra, poi, con (la colonna di destra), si elimina tra quantità che si fronteggiano*²⁰.

L'intenzione (*yi*) che presiede alla confezione della procedura, è che facendo in modo che la colonna più piccola sia sottratta dalla colonna più grande e che esse siano sottratte l'una dall'altra ripetutamente, allora la posizione di testa deve essere esaurita in primo luogo²¹.

²⁰ L'algoritmo designa una quantità, ad un punto dato del calcolo, dalla posizione che essa occupa nella superficie da calcolare: la sua colonna e la qualità del miglio al quale essa è legata. Gli stessi nomi rinviano dunque a dei valori distinti nel corso dell'algoritmo. Su questo ricorso ad una assegnazione di variabili, vedi il Capitolo D (Chemla, 1996a). Vedi *biancheng* “moltiplicare l'insieme di (...)”. Una volta così moltiplicata la colonna di mezzo, se l'operazione seguente, praticata tra posizioni che sono di fronte lungo le due colonne, equivalente ad una eliminazione al metodo del pivot di gauss, in materia di calcoli concreti sulla superficie da calcolare, può essere interpretata in due modi diversi. Sia che l'eliminazione rinvii ad una sottrazione (vedi *chu*), la quale sarà prescritta senza che sia precisato il numero di volte che l'operazione debba essere applicata, né il suo scopo: fare sparire la quantità che contiene la posizione di “testa”, la più alta, della colonna di cui si sottrae. Sia che s'interpreti come l'operazione centrale di una divisione, praticata tra le colonne che sono le equazioni l'immagine in modo in cui le righe possono essere dei numeri – preferirei allora la traduzione: “si elimina verticalmente (*zhi*)”, in parallelo, ma in opposizione, con l'eliminazione ordinaria, orizzontale (per l'algoritmo della divisione, il lettore può riferirsi al capitolo A, sezione II,2). La divisione della colonna centrale dalla colonna di sinistra – a partire dalla posizione la più elevata dalla posizione la più elevata, come nel corso di una divisione – produce un “quoziente” che si trova essere esattamente nel valore superiore d'origine della colonna centrale. Di conseguenza, come vuole la procedura della divisione una volta che il quoziente è determinato, il divisore (la colonna di destra) è moltiplicata per questo quoziente in modo che il prodotto sia eliminato (vedi *chu*) al dividendo provvisorio che costituisce la colonna centrale. Sembra che il fatto che *chu* si opponga a *yi* “aumentare” nella procedura del “positivo e negativo” (8.3) viene in aiuto della prima ipotesi. Forse che la seconda ipotesi condurrà *Qin Jiushao*, nel XIII° secolo, a modificare la presentazione della tabella e, mettendo i divisori sotto il dividendo, a ritrovare la sistemazione normale di una divisione (Libbrecht, 1973), capitolo 10?

La questione merita di essere approfondita. Per ritornare ai Nove Capitoli, secondo i casi, Liu Hui espliciterebbe allora il significato di *chu* o riscriverebbe l'operazione in una successione di sottrazioni ripetute di cui precisa lo scopo. Notare che i Nove Capitoli optano per una descrizione della procedura che ne fa una alternativa della moltiplicazione e della divisione (vedi Chemla, 1992b & 1996b).

²¹ Vedi *yi* “intenzione”. Sebbene a questo punto del testo, l'algoritmo sia ancora solamente in misura di incontrare la situazione dove tutte le posizioni di una colonna sono superiori rispettivamente a tutte le posizioni di un'altra, le espressioni di colonne “la più piccola” e “la più grande” rinviano, senza dubbio, alla relazione tra le quantità messe nelle posizioni superiori (vedi *wei* “posizione”, *jin* “esaurire”). Notare la generalità dell'espressione di “posizione di testa”. Nella sua giustificazione, Liu Hui segue passo passo la descrizione dell'algoritmo, e mette in evidenza la parte sistematica del suo svolgimento. I Nove Capitoli privilegiano in effetti un ordine unico delle operazioni per tutti i problemi, a scapito del sollievo che permetterebbe talvolta il fatto di tener conto dei valori concreti degli enunciati: qui una semplice sottrazione tra le colonne di destra e di sinistra, per esempio, elimina direttamente il grano di qualità media. Ma la redazione della procedura opta per la generalità. A due riprese, il commentario ritorna sulla questione dell'ordine nel quale eseguire le operazioni (8.9, 8.18). E' interessante che questi siano ugualmente i due soli posti dove l'algoritmo procedendo per eliminazione per primi dei “dividendi” siano evocati e poi descritti.

L'espressione “allora la posizione di testa debba essere eliminata in primo luogo” richiama un commentario. Rileviamo che il sistema $2x+y=4$, $3x+y=5$, di cui la risoluzione produce, rispettivamente, per valori di x e di y , 1 e 2, da l'esempio di un caso dove il posto centrale si annulla prima del posto superiore. Proseguendo, in questo caso, l'algoritmo conformemente a questo che sembrava prescrivere i Nove Capitoli, e nel modo in cui il commentatore lo comprende, si deve allora passare per dei coefficienti

Quando, in alto, una posizione non esiste, allora manca egualmente un tipo di cosa in questa colonna²². Se è così, come si utilizzano tutti i *lü* per sottrarli gli uni agli altri, questo non influenza la ricerca delle quantità (*shu*) restanti²³. Se, dunque, si fa sparire la posizione di testa, allora, in basso, si è eliminata la produzione (*shi*) relativa ad una cosa²⁴. In modo che, se si effettuano in maniera cumulativa le sottrazioni l'una dall'altra delle colonne di destra e di sinistra²⁵, se si esamina a fondo quello che è del positivo e del negativo²⁶, allora si può conoscere il risultato.

negativi per pervenire alla fine della risoluzione. La proposizione “la posizione di testa deve essere eliminata in primo luogo” può, in questo contesto, interpretarsi in due modi. Sia che essa rinvii ai sistemi somiglianti a quello del problema 8.1 dove tale è il caso – è quello che afferma il commentario. Il pezzo di frase enuncerebbe un criterio per riconoscere i sistemi ai quali si applica la procedura nello stato della sua descrizione a questo punto del testo. Sia l'espressione preciserebbe la descrizione del Classico, nel senso che enuncerebbe un criterio di arresto, affermando che le operazioni attenderebbero un tale punto.

²² Liu Hui considera una colonna del tipo di quella che produce questa prima tappa dell'algoritmo, interpretandolo dal punto di vista delle “cose” (vedi *wu*), per opposizione alla sua interpretazione dal punto di vista dei dividendi che segue. La colonna non è allora interpretata positivamente, per quello che essa comporta, ma negativamente, come “mancante” di qualche cosa, e dunque relativamente agli altri enunciati. Le operazioni continueranno ad essere applicate a questa colonna concepita come intera: la posizione vuota entra dunque nei calcoli come un termine nullo. Notiamo che questo tipo di enunciato considerato come lacunoso, introdotto qui per rendere conto della procedura, è ripreso per porre dei problemi a partire dal 8.3.

²³ Si può egualmente comprendere: “Se è così, come si sono instaurati degli (insiemi *di*) *lü* per sottrarli gli uni agli altri, questo non altera il confronto delle quantità restanti”. L'espressione di *ju lü* “instaurare dei *lü*” ritorna nel commentario che fa seguito al problema 8.13 (vedi anche 8.18): la sfida dell'enunciato sembra essere qui d'appoggiare la correzione delle operazioni, la validità dei loro risultati, sul fatto, enunciato a monte, che “ogni colonna è costituita di *lü*”. Il termine di “confronto” (vedi *ke*) sembra rinviare al confronto che produce l'enunciato di una equazione (vedi nota 4). Il commentario si preoccupa dunque della conservazione di un legame adeguato tra le quantità che restano sulla superficie da calcolare, dopo operazioni che si applicano: che il “confronto” che da, come si corrispondono gli uni agli altri, le cose e la produzione restanti sia valida. La preoccupazione non è solamente indotta dal fatto che si sono viste vuotate delle posizioni. Lo si ritrova in 1.9, quando Lui Hui afferma che la procedura non ha, cammin facendo, perduto i valori delle frazioni d'origine. Ora l'argomento richiamato allora con l'appoggio di questa asserzione consiste nel mettere in evidenza che la procedura ha di fatto moltiplicato numeratore e denominatore di ogni frazione per lo stesso numero (vedi *fan* “complicare”). Questa operazione, la cui validità sulle frazioni era stata esplicitata, fa immediatamente dopo l'oggetto della seguente ricapitolazione: “Moltiplicare per disaggregare, semplificare per riunire, omogeneizzare, egualizzare per farli comunicare, come non possono essere questi i punti chiave delle matematiche? “Le prime due operazioni sono valide in modo più generale di quello che si abbia con dei *lü* (vedi *lü*), è la prima che la procedura *fangcheng* utilizza moltiplicando ogni colonna per uno stesso numero, le due ultime operazioni sono mostrate operativamente in quel che segue: sembra bene che questo passaggio generale rinvia, in particolare, a questo contesto del capitolo 8 e che il commentatore, così come per il caso delle frazioni, afferma la validità del risultato, riportando, alla qualità del *lü* dei termini, la correzione delle operazioni che gli sono applicate. Qui questa qualità è chiamata a giustificare una operazione supplementare: la sottrazione degli insiemi dei *lü* gli uni agli altri.

²⁴ All'interpretazione di quello che una posizione vuota significa per la parte superiore della superficie da calcolare, fa seguito l'esplicitazione del suo significato per i dividendi delle righe del basso – è senza dubbio l'insieme del nuovo “confronto” che si trova così considerata. Notare che la “sparizione” dei termini fa eco all'apparizione (vedi *xian*), più avanti, delle incognite.

²⁵ Si tratta qui della lezione della compilazione di Dai Zhen della grande enciclopedia Yongle. La lezione dell'edizione di Yang Hui, che comporta *zhi* “solamente” invece di *die* “in modo cumulativo”, può egualmente essere interpretato: “In modo che, se non si effettua che le sottrazioni l'una dall'altra delle colonne di destra e di sinistra (...)” dove “(...) se, verticalmente, si effettuano le sottrazioni l'una
Di Paola&Spagnolo, I sistemi indeterminati nei Nove Capitoli di Liu Hui...

Che si effettui prima la moltiplicazione della colonna centrale per il miglio di qualità superiore della colonna di destra, questo ha per intenzione (*shi*) di realizzare una omogeneizzazione-egualizzazione²⁷. Realizzare l’omogeneizzazione-egualizzazione, è sottrarre, tra quantità che si fronteggiano tra loro, la colonna di destra dalla colonna del centro²⁸. Sebbene, conformandosi alle (norme) di semplicità e facilità, non si esprime in termini di omogeneizzazione e di egualizzazione²⁹, se si considera (la procedura) dal punto di vista di una intenzione (*yi*) d’omogeneizzare ed egualizzare, il suo significato (*yi*) è proprio questo³⁰.

Nuovamente, moltiplicando (per il miglio superiore della colonna di destra) le (colonne) seguenti e si elimini egualmente con (la colonna di destra) tra quantità che sono di fronte. Nuovamente, si elimina la testa della colonna di sinistra³¹.

dall’altra delle colonne di destra e di sinistra (...)” *Tong* (identico” sembra invece essere una corruzione di *jian* “sottrarre”.

²⁶ Su questo complemento alla procedura vedi 8.3.

²⁷ Vedi *yi* (intenzione”, *qi* “omogeneizzazione”, *tong* “ugualizzazione”. La dimostrazione della correzione dell’algoritmo dei Nove Capitoli rilegge qui le motivazioni attribuite, nelle frasi precedenti, alle operazioni del Classico, mettendo in evidenza delle intenzioni formali che tengono conto del suo funzionamento, e formulando con questo fatto una procedura alternativa, effettivamente ripresa nel corso del commentario 8.7: moltiplicare la colonna di destra per il valore della posizione superiore della colonna centrale egualizza le posizioni superiori, omogeneizzando le altre posizioni della colonna, e una semplice sottrazione tra colonne produce lo stesso risultato al centro (vedi il dettaglio dell’analisi in Chemla 1992b, pp.102-106).

²⁸ Si può egualmente tradurre: “Se si realizza l’omogeneizzazione-egualizzazione, è perché si sottrae, tra quantità che sono di fronte, la colonna di destra dalla colonna di centro.” E cioè una volta preparato il terreno della prima operazione, è la sottrazione ripetuta tra colonne che egualizza il contenuto della posizione superiore della colonna centrale e di quello che si sottrae, come essa omogeneizza automaticamente quello che si toglie dalle sue altre posizioni. Ecco perché finisce per realizzare l’eliminazione. Eseguire la procedura ugualizzando ed omogeneizzando effettivamente lascerebbe nel posto della colonna di destra, una colonna multipla, per questa procedura alternativa, alcune ragioni più chiare della sua correzione, è dichiarata più complessa. Vedi *zhi jian* “sottrarre tra quantità che sono di fronte”.

²⁹ Si tratta qui della lezione della Compilazione di Dai Zhen a partire della Grande enciclopedia Yongle. La lezione dell’edizione di Yang Hui, che comporta *wei* “fare” invece di *yan* “esprimere”, fa egualmente significato: “(...) non si pratica una omogeneizzazione ed una egualizzazione (...)” Il commentario di Li Chunfeng al problema 12 dell’ultimo capitolo del *Classico matematico di Zhang Qiuqian (Zhang Qiuqian suanjing)* – identico a quello vicino alla discussione sui broccati – presenta uno sviluppo molto vicino a quello attribuito a Liu Hui, e comporta, su questo punto la lezione dell’edizione di Yang Hui: “Se ora (*jim* e non il carattere vicino *ling*) si moltiplica l’insieme della colonna centrale per il broccato della qualità superiore della colonna di destra, è che si vuole realizzare una omogeneizzazione-egualizzazione ed eliminare il broccato superiore della colonna di mezzo. Egualizzare ed omogeneizzare, questo significa che si egualizza la testa della colonna (di destra) e che si omogeneizzano i termini inferiori per sottrarre colonna a colonna della colonna di mezzo. Sebbene, si conformano alle (norme) di semplicità e di facilità, la procedura non pratica l’omogeneizzazione e l’ugualizzazione, se si considera dal punto di vista di una intenzione (*yi*) d’omogeneizzare e di ugualizzare, essa deve (*yi*) essere tale (...)” (Zhang Qiuqian suanjing, Qian Baocong 1963, pp.381-382).

³⁰ Vedi *jia* “semplice”, *yi* “facile”, *yi*’ “senso”.

³¹ All’iterazione delle operazioni, Liu Hui risponde riprendendo delle ragioni. Interpreta, come rapportandosi al problema particolare delle tre colonne, quello che nei Nove Capitoli potrebbe essere letto, a questo punto, come indeterminato.

In seguito, si moltiplica l'insieme della colonna di sinistra per il miglio della qualità media della colonna centrale, se non è stato esaurito, poi con (la colonna centrale), si elimina tra quantità che sono di fronte,

Si fa egualmente in modo che queste due colonne eliminino tra di esse il miglio di qualità media di una colonna³².

Se a sinistra il miglio di qualità inferiore non è stato esaurito, l'alto è preso come divisore, il basso come dividendo (*shi*). Il dividendo (*shi*) è allora il dividendo (*shi*) del miglio di qualità inferiore³³.

I migli di qualità media e superiore sono stati tutti e due eliminati; la quantità (*shu*) restante è dunque il dividendo/la produzione (*shi*) di questo miglio di qualità inferiore, ma questo non è solamente quello di 1 Bing. Se si vuole semplificare il dividendo (*shi*) che corrisponde all'insieme dei Bing, si deve prendere la quantità (*shu*) di Bing del miglio come divisore.

Avendo disposto questo, se si moltiplica, per la quantità (*shu*) di Bing del Miglio di qualità inferiore, le due (altre) colonne e che si eliminano tra quantità che sono di fronte, allora le posizioni del miglio di qualità inferiore sono tutte soppresse. Poi si divide rispettivamente, per il Bing della posizione unica restante corrispondente, il dividendo (*shi*) di sopra che gli corrisponde. Ma allora, se si fanno i calcoli (*shu*), i calcoli con le bacchette utilizzate sono troppo complicati e non economici³⁴. Ora la ragione per la quale confezionare metodi alternativi, è per semplificare. Tuttavia, anche se non l'utilizzano come (metodo) antico, questo sviluppa metodi differenti.

*Per cercare il miglio della qualità media, si moltiplica, per il divisore, il dividendo (*shi*) di sopra della colonna centrale e si elimina il dividendo (*shi*) del miglio della qualità inferiore³⁵.*

³² La frase sembra corrotta, nella misura in cui è con stupore ellittica. Vedi *qu* “eliminare”.

³³ Conviene, a questo punto, sottolineare una particolarità nel modo in cui l'algoritmo dei Nove Capitoli concluderà, in seguito, la risoluzione. I dividendi e divisori ottenuti qui non entrano abbastanza in una divisione. In modo correlato, a fine procedura, le tre incognite saranno prodotte a meno di una divisione per lo stesso divisore, quello che è calcolato. Nell'intervallo, l'algoritmo avrà determinato i dividendi corrispondenti ai migli di qualità media e superiore, e fornirà ciascuna delle tre incognite al termine di una divisione di questi tre dividendi dal valore qualificato di “divisore”. Non si può stabilire con certezza a quale altra posizione questo divisore è messo, se questo non è dove appare in primo luogo.

³⁴ Liu Hui avanza un'altra procedura, che viene a diagonalizzare la matrice del sistema. Presenta il vantaggio di aumentare l'omogeneità dell'algoritmo – un processo caratteristico dell'evoluzione degli algoritmi nella tradizione matematica nella Cina antica -, poiché procede ormai essenzialmente per iterazione della stessa routine tanto nella prima che nella sua seconda fase. Il commentatore si allontana in seguito, arguendo una complessità più grande, dal punto di vista dei calcoli, valorizzando la diversificazione dei metodi. L'omogeneità costituisce un valore in tensione con la semplicità. Si può egualmente tradurre: Comunque si valutino le quantità (*shu*), i calcoli con le bacchette (dove: i numeri rappresentati dalle bacchette) sono complessi e non economici. Vedi *shu* “calcolo, quantità”, *suan* “calcolo con bacchette, numeri rappresentati con bacchette”, *fan* “complicato”, *sheng* “economico”, *fa* “metodo”, *yue* “semplificare”. *Le Spiegazioni dettagliate dei Nove Capitoli sui metodi matematici* di Yang Hui (Xiangjie jiu Zhang suanfa, Yijiatang congshu, p.29) utilizzano questo metodo, necessario per la risoluzione del problema 8.6, dove la distribuzione dei segni “positivo” e “negativo” è per lo meno singolare (vedi 8.6). Si vede chiaramente che i numeri utilizzati sono più complicati del necessario.

³⁵ Si potrebbe essere tentati di interpretare “eliminare” (vedi *chu*) qui come “sottrarre”, di comprendere il “dividendo del miglio di qualità inferiore” come il valore portante questo nome che è ottenuto, e di concludere che l'algoritmo gestisce i valori particolari dell'esempio nel contesto dove è presentato: a questo punto del calcolo, il coefficiente della colonna di mezzo per il miglio di qualità inferiore si trova essere uguale ad 1. Dopo aver commentato la prima operazione di moltiplicazione, Liu Hui rinunciarebbe

Questo significa che come, tra i dividendi/produzioni (shi) di due migli della colonna centrale, la quantità (shu) che produce/(del dividendo di) (shi) 1 Bing di miglio della qualità inferiore appare per primo, allora, se con il Bing della qualità media si cerca il miglio di qualità media, il dividendo (shi) disposto corrispondente (al miglio di qualità inferiore) è sottratto dal dividendo (shi) di sopra³⁶; ma sebbene si elimina che 1 Bing di miglio di qualità inferiore dalla colonna di sinistra³⁷, ha per denominatore il divisore, da dove, per quello che è dei *lü*, non comunicano. Di conseguenza, se adesso “si moltiplica per il divisore”, che è che si egualizza (i denominatori) facendoli comunicare³⁸. Si fa in modo che essi abbiano tutti i divisori come denominatori e si elimina il dividendo (shi) del miglio di qualità inferiore. Se si effettua la moltiplicazione, con il dividendo (shi), apparso per primo, del miglio di qualità inferiore, della quantità (shu) di Bing del miglio di qualità inferiore, allora si ottiene il dividendo (shi) disposto che corrisponde ad

qui sotto al secondo modo più generale. Pertanto sembra che bisognerebbe scartare questa lettura: in questa tappa, di seguito, descrive la stessa operazione per la colonna di destra, I Nove Capitoli riimpiegherebbero la stessa espressione allora che il coefficiente della posizione centrale non è questa volta uguale ad 1. Bisogna interpretare l’enunciato in altro modo. Si hanno due ipotesi: (1) L’espressione del “dividendo del miglio di qualità inferiore” rinvia qui al prodotto del valore ottenuto prima sotto questo nome dalla qualità di bing corrispondente a questo grano nella colonna centrale – è dopo tutto il nome che Liu Hui conserva per questo secondo valore in conclusione del suo commentario qui sotto. In questo caso, *chu* deve effettivamente essere interpretato come “sottrarre”, e d’altronde Liu Hui lo riscrive così. (2) *chu* deve essere compreso per analogia con l’eliminazione che costituisce la tappa centrale della divisione: il quoziente che costituisce adesso il dividendo della colonna di sinistra moltiplica il divisore (*cheng*) che è la quantità di *bing* del miglio di qualità inferiore della colonna media, per costituire il prodotto da eliminare del dividendo di sotto. Notare che il “dividendo del miglio di qualità inferiore” che si distingue dalla sua “produzione”, non sarebbe un fattore uguale al divisore.

Più avanti, quando i numeri marcati positivamente e negativamente saranno stati introdotti, l’una delle clausole della “Procedura del positivo e del negativo” (8.3) preciserà come praticare questa eliminazione (*chu*) tra dividendi (vedi le note corrispondenti).

³⁶ Vedi *xian* “apparire”, *lieshi* “dividendo disposto”: Liu Hui introduce qui questo termine, che spiega in seguito. Il coefficiente dell’incognita, moltiplicato per il dividendo ormai determinato dall’incognita, diviene un termine costante, che sarà sottratto dal termine costante di sotto: l’analisi di questa tappa del calcolo porta Liu Hui a interpretare una nuova forma di relazione, ad introdurre una operazione, che fanno tutte e due l’oggetto del problema 8.2 del Classico. (Lam, Ang, 1987) avanzano una proposizione che apre su di un punto differente: “Questo costituisce il dividendo/produzione (*shi*), nella colonna centrale, dei due migli. Come la quantità (*shu*) che produce/(del dividendo di) (*shi*) 1 *bing* di miglio di qualità inferiore appare la prima, allora (...)”

³⁷ Questa parte di frase pone infatti un problema, che Dai Zhen, considerando il testo come corrotto, aveva cercato di risolvere (vedi la nota editoriale 16): l’espressione tradotta, per tentare di eliminare la difficoltà, dal “miglio di qualità inferiore che dà la colonna di sinistra” designa in generale il “miglio di qualità inferiore della colonna di sinistra”. (Li Jimin, 1993), Jiuzhang suanshu jiaozheng, nota 12, p.443, pensa di aggirarlo proponendo di comprendere *qu* qui non come “eliminare” ma come “dare in modo nascosto”.

³⁸ Vedi *lü*, *tong* “comunicare”, *tong* “egualizzare”. Una volta trasformato un coefficiente in termini costante, ed in seguito rinominato “dividendo”, i “dividendi” presenti suppongono, l’uno un denominatore, l’altro no. E’ la ragione per la quale, salvo a rimediare – questo che rende conto dell’operazione del Classico – vi è una predita della qualità del *lü* per i termini della colonna.

una posizione del miglio di qualità inferiore³⁹. E quando si sottrae dal dividendo (shi) di sopra, allora la quantità (shu) corrispondente è il dividendo (shi) del miglio di qualità media⁴⁰.

Il resto è diviso per la quantità (shu) di Bing del miglio di qualità media, che da il dividendo (shi) del miglio di qualità media.

Il resto, è il dividendo (shi) che corrisponde ad una posizione del miglio di qualità media. Dunque se si semplifica con la quantità (shu) di Bing di una posizione, allora si ottiene il dividendo (shi) associato ad un Bing.

Per cercare il miglio di qualità superiore, si moltiplica egualmente, per il divisore, il dividendo (shi) di sopra della colonna di destra e si eliminano i dividendi (shi) dei migli di qualità inferiore e medio⁴¹.

Il dividendo (shi) che divide i tre migli di questa colonna di destra è un dividendo (shi) che riunisce tre posizioni. Perché, se si semplificano con le quantità (shu) di Bing che corrispondono a 2 posizioni, allora si ottiene il dividendo (shi) associato ad un Bing⁴². Come le quantità (shu) corrispondono ai dividendi/produzioni (shi) di miglio di qualità media ed inferiore sono adesso tutte e due apparse, si effettua la moltiplicazione per i Bing di miglio della colonna di destra per sottrarli. Di conseguenza, è ancora come prima, per ognuna (delle posizioni) si cercano i dividendi (shi) disposti per sottrarli dal dividendo (shi) di sopra.

Il resto è diviso per la quantità (shu) di Bing di miglio di qualità superiore, che da il dividendo (shi) del miglio di qualità superiore. I dividendi (shi) sono tutti divisi per il divisore, che da i risultati rispettivamente in Dou.

I tre dividendi (shi) sono utilizzati nello stesso modo. Se non riempiono il divisore, li si nomina con l'aiuto del divisore. Denominatori e dividendi (shi) debbono tutti essere semplificati.

(8.2)

Supponiamo che diminuendo la produzione (shi) di 7 Bing di miglio di qualità superiore di 1 Dou ed aumentando di quella di 2 Bing di miglio di qualità inferiore, allora la produzione (shi)

³⁹ La posizione (vedi *wei*) comportava il coefficiente dell'incognita. Il moltiplicante dal dividendo dell'incognita che è stato determinato, si produce il “dividendo disposto corrispondente a questa posizione”.

⁴⁰ Notiamo che il “dividendo del miglio di qualità media” calcolata da Liu Hui differisce dalla produzione legata a questo grano: deve essere diviso per il divisore generale per dare il valore della contribuzione di questo grano alla colonna. In virtù dell'assegnazione delle variabili, questo stesso termine di “dividendo del miglio di qualità media” designa in seguito, dopo divisione per la quantità di *bing* corrispondente, il contributo di ogni *bing* di questo grano alla colonna.

⁴¹ Vedi la nota alla tappa anteriore corrispondente.

⁴² Le edizioni antiche riportano tutte, qui, il testo: “E' perché, se si semplifica con la quantità (*shu*) di *bing* che corrisponde ad 1 posizione, allora si ottiene il dividendo ((*shi*) associato ad un *bing*”. Il termine di “semplificare” (vedi *we*) presenta delle affinità più grandi con la situazione nella quale vi è una sola posizione nella zona superiore di una colonna. Tuttavia, se essa si rapporta alla colonna di destra, l'asserzione è enunciata troppo presto, e se rinvia alla colonna centrale, ripete la frase precedente. E' questa ultima ipotesi che riportano Qian Baocong e Li Jimin, che pensano di vedervi una interpretazione. Essa si trova sostenuta dal testo del commentario di Li Chunfeng nel Classico Matematico di Zhang Quijian (Zhang Quijian *suanjing*, op.cit.), di cui la lettera è molto vicina al nuovo commentario qui attribuito a Liu Hui.

(globale) sia di 10 Dou⁴³; che aumentandone la produzione (shi) di 8 Bing di miglio di qualità inferiore di 1 Dou e di quella di 2 Bing di miglio di qualità superiore, allora la produzione (shi) (globale) sia di 10 Dou. Si chiede quanto producono (shi) rispettivamente un Bing di miglio di qualità superiore ed inferiore.

*Risposta: Un Bing di miglio di qualità superiore produce (shi) 1 Dou 18/52 di Dou.
Un Bing di miglio di qualità inferiore produce (shi) 41/52 di Dou.*

Procedura: Si segue fangcheng. Ciò di cui si diminuisce è detto aumentare, ciò di cui si aumenta è detto diminuire⁴⁴.

Gli enunciati di questo problema, come (comprenderli)⁴⁵? Commentario attuale: Infatti dicono che 7 bing di miglio di qualità superiore e di 2 bing di miglio di qualità inferiore producono (shi) 11 dou e che 2 bing di miglio di qualità superiore e 8 bing di miglio di qualità inferiore producono (shi) 9 dou. “Ciò di cui si diminuisce è detto aumentare”, questo significa che poiché, quando si diminuisce di 1 dou, il resto debba essere 10 dou, se ora si vuole avere il dividendo/produzione (shi) corrispondente nel suo intero, si deve aggiungere quello di cui si è diminuito. “Ciò di cui si aumenta è detto diminuire”, questo significa che poiché, quando si aumenta il dividendo/produzione (shi) di un dou, allora questa riempie 10 dou, se adesso si vuole conoscere il dividendo (shi) d’origine, si deve sottrarre ciò che si era aggiunto, questo dà il risultato.

Se si diminuisce la produzione (shi) di 1 Dou, allora la produzione (shi) corrispondente supera 10 Dou. Se si aumenta la produzione (shi) di 1 Dou, allora la produzione (shi) corrispondente non riempie 10 Dou⁴⁶.

Qui si spiega nuovamente che, se si diminuisce o si aumenta una quantità (shi), rispettivamente con la quantità (shu) di cui si è aumentato o diminuito, la si diminuisce o la si aumenta.

⁴³ Il quadro semantico della produzione del grano, che lega i migli e loro produzioni dall’effetto di una trasformazione irreversibile, si presta bene ad una interpretazione concreta delle operazioni che implicano gli enunciati dei problemi come 8.1: i diversi migli, effettivamente mischiati, producono dei montanti di grano dati, questo sulla base di cosa si tratta di determinare la loro rispettiva produttività. Qui l’enunciato introdotto delle sottrazioni, che impediscono una lettura del rapporto che formula tra termini aventi una incognita e termini costanti sotto le specie di una produzione. Enuncia piuttosto una relazione di eguaglianza tra produzioni, la quale sarà trasformata in quanto tale. Su queste questioni, vedi (Chemla 1994a).

⁴⁴ Gli enunciati di uguaglianza che formula il problema implicano i termini di “diminuire” e di “aumentare”. La procedura propone di riscriverli come tali, trasformando la “diminuzione” con un montante determinato di 1 dou in “aumento” del dividendo globale di 10 dou dello stesso montante, e vice versa. Lo riporta alla forma standard di enunciati che il problema 8.1 ha mostrato come tradurla in colonna: stessa forma oppone un dividendo a dei divisori, come ogni equazione nella Cina antica, anche se le modalità del legame tra divisione ed equazione variano secondo il loro tipo (vedi Chemla 1994a). Questa trasformazione porta qui unicamente su dei termini costanti e produce come risultato dei dividendi positivi. Essa si avvera non essere che una delle modalità di operazioni più generali (vedi *sun* “diminuire”, *yi* “aumentare”). Il principio di queste riscritture di enunciati di eguaglianza come tali evoca le operazioni algebriche di Al-Khwarizmi, anche se esse non effettuano gli stessi raggruppamenti di trasformazioni.

⁴⁵ Dai Zhen, seguito in questo da Qian Baocong, pensava il testo qui corrotto. (Li Jimin 1993), Jiuzhang suashu jiaozheng, p.111, nota 19, propone una lettura differente: “Gli enunciati di questo problema, anche se adesso li si formula appoggiandosi sul reale, (danno): (...)”. I “significati” che il commentatore coglie dal seguito producono simultaneamente il “senso” e la “ragione”. Si vede un esempio chiaro di un modo in cui la dimostrazione della correzione serve all’esegesi di un Classico.

⁴⁶ Questo enunciato, dove Liu Hui identifica una ridondanza del Classico per rapporto alla prescrizione precedente, rileva del registro della giustificazione esplicita, fenomeno raro nei Nove Capitoli.

(8.3)

Supponiamo che si abbiano 2 Bing di miglio di qualità superiore, 3 Bing di miglio di qualità media, 4 Bing di miglio di qualità inferiore, di cui le produzioni (shi) ne riempiano in alcun caso il Dou. Se con (il miglio) di qualità superiore si prende (del miglio) di qualità media, con (il miglio) di qualità media si prende (del miglio) di qualità inferiore, e (con il miglio) di qualità inferiore si prende (del miglio) di qualità superiore, ad ogni volta con ragione di 1 Bing, allora la produzione (shi) riempie un Dou. Si chiede quanto producono (shi) rispettivamente 1 Bing di miglio di qualità superiore, media ed inferiore.

Risposta: Un Bing di miglio di qualità superiore produce (shi) 9/25 di Dou.

Un Bing di miglio di qualità media produce (shi) 7/25 di Dou.

Un Bing di miglio di qualità inferiore produce (shi) 4/25 di Dou.

Procedura: Si segue fangcheng. Si piazza rispettivamente ciò che è preso⁴⁷.

Si piazzano i 2 Bing di miglio di qualità superiore come (posizione) superiore della colonna di destra, i 3 Bing di miglio di qualità media come (posizione) centrale della colonna centrale, i 4 Bing di miglio di qualità inferiore come (posizione) inferiore della colonna di sinistra, gli 1 Bing che sono presi e le produzioni/dividendi (shi) di 1 dou si conformano ciascuno alla posizione che loro corrisponde. Tutti i (casi) dove delle colonne si fanno dare in prestito le une dalle altre i tipi di cose che sono prese si appoggiano su questo esempio⁴⁸.

E si introduce la procedura del positivo e del negativo⁴⁹.

Procedura del positivo e del negativo:

Se due tipi di numeri rappresentati dalle bacchette, ciò che si acquisisce e ciò che si perde, sono opposti l'uno all'altro, bisogna servirsi del “positivo” e “negativo” per chiamarli⁵⁰. I numeri

⁴⁷ I coefficienti situati fuori dalla diagonale della matrice sono designati dall'espressione di “ciò che è preso” (vedi *qu*), la quale fa riferimento al modo che l'enunciato li introduce: ma prenderà un significato formale più generale per rinviare a questo modo di costruzione delle equazioni. Le relazioni formulate tra quantità di grano distinte e produzione sono rilette come equazioni lacunose e rappresentate da colonne con posizioni vuote. Liu Hui aveva esplicitato il significato di tali colonne nel corso della sua giustificazione della procedura *fangcheng* (problema 8.1).

⁴⁸ Vedi *cong* “conformarsi”, *wei* “posizione” *jie* “prendere in prestito”. La colonna di sinistra prende in prestito per esempio alla colonna centrale il miglio di qualità media nel senso, tra l'altro probabilmente, che è per riferimento a questa altra colonna che essa riceve la struttura che le si vuole conferire.

⁴⁹ Vedi *wu* “introdurre”. La formulazione di questa procedura, che segue immediatamente, è generale nel senso dove essa non riflette direttamente le difficoltà che pone la risoluzione di 8.3. Il commentario di Liu Hui deve rendere conto dello iato, prima di giustificare la “procedura del positivo e del negativo”. Questo lo porta a esplicitare il quadro d'insieme del capitolo. Per contrasto con 8.2 che metteva in evidenza come altri tipi di enunciati potevano essere trasformati in enunciati standard, il commentario diversificherà qui gli enunciati ricevibili nel quadro di una forma standard e suscettibili di essere rappresentati direttamente da una colonna grazie all'ammissione di due tipi di contrassegni, positivo e negativo, per i numeri. Questo secondo ampliamento si presenta come una conseguenza della sistemazione della procedura *fangcheng*, necessaria per la risoluzione di certi casi e di cui si tratta di rendere conto per il commentatore. Le due estensioni saranno in seguito coniugate.

⁵⁰ Vedi *suan* “numeri rappresentati da bacchette”, *de* “acquisire”, *shi* “perdere”, *fan* “opposto”, *zheng* “positivo”, *fu* “negativo”, *ming* “nominare”. Notiamo che l'archeologia non ha sino ad adesso prodotto simili bacchette di colore, e che questi contrassegni non sono utilizzati che nel contesto del commentario Di Paola&Spagnolo, I sistemi indeterminati nei Nove Capitoli di Liu Hui...

rappresentati dalle bacchette positive sono incarnati, i numeri rappresentati da bacchette negative nere. Se no, si differenziano ricorrendo all’opposizione obliquo/diritto⁵¹.

Fangcheng consiste, per natura, in una procedura dove incarnato e nero sono ottenuti l’uno in funzione dell’altro, ed dove i valori (*shu*) dei divisori e dei dividendi (*shi*) si deducono gli uni dagli altri⁵². Ma il suo dispositivo (*shi*) di addizione e di sottrazione non può intendersi in tutta generalità⁵³. E’ perché si fa in modo che (bacchette) incarnate e nere si detraggono e si fanno sparire (*xiaoduo*) le une con le altre. Se per come sono i calcoli, talvolta si sottrae e talvolta si aumenta, in una stessa colonna, a delle posizioni distinte, si differenzia facendo due categorie, allora ciascuna ha una somma, si sottrae questo, e la differenza appare in basso⁵⁴. Si sono

a 8.3, mai nel Classico. Pertanto, tanto nel Classico che nei commentari, questi sono i termini di *zheng* e fu che sono ripresi (vedi Chemla 1992b).

⁵¹ Il testo può qui comprendersi in tutto rigore in due modi. 1. Le bacchette che rappresentano i numeri sono, secondo i casi, diritti o obliqui, per differenziare i numeri positivi e negativi. Tuttavia, se simile uso ha avuto corso, non ne resta alcuna traccia. 2. Si può comprendere *xie* come un verbo: “li si differenzia mancando di un obliquo il positivo (o: il diritto (*zheng*), per riferimento alle direzioni orizzontali e verticali che prendono le bacchette per rappresentare i numeri)”. Potrebbe trattarsi di un uso comparabile a quello delle opere del XIII° secolo che noi abbiamo conservato: barrare la cifra di unità indica che il numero è negativo. (Volkov, 2001) avanza una terza ipotesi: questa opposizione potrebbe rinviare al contrasto tra bacchette a sezione triangolare e bacchette a sezione quadrata che menziona la “Monografia sulla scala ed il calendario (*Lüli zhi*) della Storia dei Sui (*Suishu*).

⁵² *Fangcheng* resta il nome della procedura dopo la modificazione: non si limita più ad un lavoro sui “dividendi e divisori (*fa*)” – un modo interessante di rinviarvi – ma gestiscono la produzione dei numeri positivi e negativi. Il loro “conseguimento” può rinviare al loro apparire così bene che ai loro ulteriori cambiamenti sotto l’effetto dei calcoli incrociati. Si può dire altrimenti: “A partire dal momento che, nel *Fangcheng*, vi è una procedura nella quale incarnato e nero si ottengono uno in funzione dell’altro, ed i valori (*shu*) dei divisori e dei dividendi (*shi*) si deducono gli uni dagli altri, il suo dispositivo (*shi*) di sottrazione d’insieme non può in seguito intendersi in tutta generalità. “La menzione relativa ai dividendi ed ai divisori può rinviare alla fine della procedura, o al suo insieme si si adotta l’interpretazione per *cheng* “misura” è sinonimo di *fa* “divisore”. Un simile enunciato si incontra in 1.6 relativamente ai termini di una divisione.

⁵³ Si può ugualmente comprendere: “Ma il suo dispositivo (*shi*) di sottrazione d’insieme (*bingjian*) non può comunicarsi (a queste diverse situazioni) in tutta generalità.” *Bing jian* designerebbe la sottrazione d’insieme che prende per termini delle colonne in *fangcheng*. La stessa espressione si ritrova nel commentario di Zhao Shuang al Classico matematico dello gnomone dei Zhou (*Zhoubi suanjing*, (Qian Baocong, 1963, p.14, c.7) a proposito di aree “sottratte insieme”. *Bing* è raramente in opposizione con *jian*, al quale segue l’opposta *yi* “aumentare”. Qui non è altro che la lezione della Compilazione di Dai Zhen a partire della Grande enciclopedia Yougle. L’edizione di Yang Hui contiene un’altra lezione, che fa egualmente significato: “il suo dispositivo (*shi*) che consiste nel sottrarre necessariamente (*bijian*) non può intendersi in tutta generalità”. In questo contesto, la sottrazione potrebbe rinviare non solamente alla sottrazione da colonna a colonna, ma ugualmente alla sottrazione tra dividendi alla fine dell’algoritmo. Che uno o due siano qui l’oggetto dell’enunciato, l’introduzione di numeri positivi e negativi esige di modificarne la pratica, e il seguito mostra come specificarli in addizione e sottrazione secondo i casi. L’operazione globale, che porta sui numeri contrassegnati, cambia allora di nome (*xiaoduo*). Vedi *shi*, *tong* “comunicare”. Si rileverà la concezione di un dispositivo, di una procedura, che si “comunicano” da una situazione all’altra.

⁵⁴ *Suan* può comprendersi qui sia come “calcolo” che come “numeri rappresentati da bacchette”. Si può puntualizzare l’insieme altrimenti: “E’ perché si fa in modo che (bacchette) incarnato e nere si detraggono e si “facciano sparire le une le altre (*xiaoduo*), e per quello che sono dei numeri rappresentati con delle bacchette, talvolta si sottraggono, talvolta si aumentano. In una stessa colonna, a delle posizioni distinte, si differenzia facendo due categorie (vedi *pin*), allora ognuna ha una somma, si sottraggono questi, e la differenza appare in basso.” Questo che, dal punto di vista dei numeri, è talvolta sottrazione, talvolta

composte queste 2 clausole; e si sono relegati al disegno al (caso) dei migli per elaborare il significato (yi) di queste due clausole⁵⁵. Di conseguenza il fatto che (bacchette) incarnate e nere siano mischiate le une con le altre⁵⁶, questo basta per determinare le misure dal basso verso l'alto; sottrarre ed aumentare, quale che sia in maniera diversa (di ciò che precede), bastano per far comunicare le quantità (shu) di destra e di sinistra⁵⁷; differenze e dividendi/produzioni (shi), quale che siano in modo distinto, bastano per farsi corrispondere i *lū* identici e differenti⁵⁸. Se è

addizione, è, dal punto di vista delle bacchette contrassegnate, una unica operazione di “eliminazione algebrica” (*xiaoduo*). Una volta introdotti questi numeri mancanti dalla necessità dei calcoli, le operazioni modificate di conseguenza, bisogna ancora, per porre la questione della loro correzione, rileggere le nuove unità prodotte in materia di colonne e interpretarle in termini di contesto. E’ l’oggetto della frase seguente. L’interpretazione di una colonna porta ad aggiungere le produzioni per i coefficienti dello stesso segno, a sottrarle per i segni opposti. Da dove un nuovo modo di significato per la produzione globale (notiamo che la differenza non è orientata e può rendere conto dei dividendi positivi come negativi). Da dove eguale interpretazione, in termini di operazioni, di marche introdotte per il calcolo: invertono il tentativo di 8.1, I Nove Capitoli assoceranno a degli enunciati di questa forma delle colonne così configurate, i segni non intervenendo più nei calcoli, ma per tradurre adesso di nuovo enunciati ricevibili in questo quadro. Si noterà che la frase di transizione: “ per quello che sono dei numeri rappresentati dalle bacchette (o: dai calcoli), talvolta si sottrae, talvolta si aumenta” è pertinente tanto orizzontalmente (per i calcoli tra colonne) che verticalmente (per interpretare una colonna di numeri di natura distinta), riunibili a monte tanto che a valle. Tuttavia parecchi argomenti sono a favore di un legame a monte qui, malgrado la citazione in 8.4 che l’associa all’enunciato a valle. Da una parte, le operazioni di “sottrazione” e di “aumento” si applicano ai calcoli tra colonne qui sotto (Vedi nota 54: Liu Hui impiegherà *jian* “sottrarre” in luogo e posto di *chu* “eliminare”, come più alto). D’altra parte, le situazioni qui e in 8.4 sono da distinguere. E’ in effetti qui questione di interpretare la colonna in termini di operazione; al contrario, le operazioni che costituiscono gli enunciati trasformati da 8.4 sono tradotti in segni: l’annuncio delle varie operazioni possibili viene prelude alla loro traduzione. Così che esplicitando il quadro che produce l’applicazione della procedura e relativamente alla quale deve essere stesa, Liu Hui aggiorna quello che costituisce un nuovo quadro di partenza per *fangcheng*: le equazioni prelevate sui calcoli ricevono una interpretazione che gli permette di divenire elementi dell’enunciato di nuovi problemi. La procedura del positivo e del negativo, che sistemava *fangcheng*, diviene in seguito un aggiunta alla procedura di base per un quadro rinnovato, relativamente al quale Liu Hui adesso lo considera.

⁵⁵ Il confronto con 8.1, dove il commentatore prova egualmente il bisogno di giustificare il contesto di un problema concreto per esporre il metodo, stabilisce un legame tra “far comprendere” una procedura e “produrre un significato (vedi yi)”. Si tratta qui di rendere conto di una procedura che specifica, in due passaggi opposti l’un l’altro –le due clausole-, la maniera di sistemare la tappa generale del *fangcheng* in funzione dei segni dei coefficienti di testa relativamente l’un l’altro.

⁵⁶ Al termine del percorso che fa passare la sistemazione della procedura all’estensione del quadro di riferimento, positivo e negativo non sono più i numeri “ottenuti”, ma gli ingredienti che entrano nel melange che costituisce una equazione (vedi *cheng*). Le tre proposizioni che costituiscono l’enunciato che inizia adesso riesaminano la procedura sotto l’angolatura, rispettivamente, dei coefficienti, delle operazioni e dei termini costanti. Perché a questo punto i termini costanti negativi non sono stati ancora introdotti? E’ difficile rispondere: alcuni, sembrano avere bisogno per questo il cambiamento di quadro semantico operato tra 8.6 e 8.7. Ma, d’altro canto, non sarebbe questo che quando più avanti Liu Hui esamina con identificazione di due clausole, introduce di fatto la possibilità di dividendi di segno qualunque.

⁵⁷ La modifica apportata in modo da far interagire le colonne gli permettono ormai di entrare in comunicazione (vedi *tong*).

⁵⁸ Si può egualmente tradurre: “dividendi delle differenze (vedi *cha shi*), sebbene in modo distinto, sufficiente a fare eco (a rispondere) ai *lū* identici e differenti”. *Cha shi* può effettivamente essere interpretato non come un binomio, ma come il termine tecnico che appariva per il seguito e che rendiamo per “dividendo della differenza” (vedi *cha shi*). Elargire il dominio dei “dividendi” ricevibili

così, allora se “quando il positivo non ha dove entrare, lo si rende negativo e che quando il negativo non ha dove entrare, lo si rende positivo”⁵⁹, i *li* corrispondenti non sono aberranti.

*Se dei numeri dello stesso nome sono eliminati l'uno dall'altro*⁶⁰.

Questo significa che si elimina incarnato da un incarnato, o un nero da un nero. Che si cerchi di sottrarre l'uno dall'altro le colonne⁶¹, è per eliminare la posizione di testa. Se è così, allora se le posizioni di testa hanno lo stesso nome, bisogna utilizzare questa clausola. Se hanno dei nomi differenti, bisogna utilizzare la clausola seguente.

I numeri di nomi differenti si aumentano l'un l'altro.

introducendo questi dividendi/produzioni che corrispondono a delle differenze di produzione tra grano distinti, basta che questi nuovi termini costanti “rispondono” alle diverse situazioni possibili create da dei *li* a segni differenti.

⁵⁹ Il commentatore menziona qui una delle clausole della procedura, citandola parzialmente (vedi qui sotto la sua interpretazione), Le edizioni antiche non comportano che la prima parte della citazione tale che gli editori moderni la restituiscono (cioè, non comportano la seconda proposizione: “che quando il negativo non ha dove entrare, lo si rende positivo”). Ora il ruolo che questa citazione gioca a questo punto del testo non è chiara. Bisogna comprendere che Liu Hui identifica, nel cambiamento di segno, il punto chiave grazie al quale le equazioni che sono delle colonne conservino la loro validità? E' in ragione del fatto che è precisamente la clausola che bisogna mettere in opera nell'operazione tra dividendo e divisore disposti, al momento preciso dove bisognerà introdurre delle marche negative per i dividendi? E' ad essa che rinvia la citazione di Liu Hui fatta in 8.8 del suo commentario? Il testo del commentario come li danno le differenti edizioni antiche potrebbe scegliere il punto dove, che questa sia una sottrazione tra colonne o in una operazione tra dividendi sulla stessa colonna, si è portata ad introdurre dei dividendi negativi. E' là il punto che rende i *li* non aberranti”.

⁶⁰ L'operazione cruciale della procedura *fangcheng* consiste, ricordiamolo, dopo aver moltiplicato una colonna di sinistra con il valore della posizione di testa di una colonna di destra, a “eliminare (*chu*) tra quantità che sono di fronte”, da colonna a colonna, per fare sparire il posto di testa della prima. Le due clausole della “procedura del positivo e del negativo” non portano a parlare propriamente delle regole dei segni, ma precisamente come praticare questa operazione secondo che l'eliminazione porta a far sottrarre delle posizioni di testa dello stesso segno – dello stesso nome (vedi *ming*) – o di segni differenti (vedi Chemla 1992b). Perché, Liu Hui lo comprende così, è sempre una eliminazione tra posizioni di testa, una sottrazione tra colonne, che guida l'insieme dell'operazione, quale che sia il caso di figura. E, secondo l'identità o la differenza dei loro segni, l'operazione si ripercuoterà in modo distinto sul resto della colonna: se si sottrae l'uno dall'altro dei termini dello stesso segno, i termini di segno opposto dovranno essere aggiunti l'uno all'altro; se al contrario si sottraeva l'uno dall'altro termini di segni opposti, i termini dello stesso segno dovrebbero essere aggiunti l'un l'altro (vedi l'esempio sviluppato alla nota 65). Restano da precisare i cambiamenti di segno: a priori, il segno del risultato di una addizione resta quello che aveva il termine della colonna-scopo; le mutazioni dei segni che causano le sottrazioni secondo i casi sono allora precisati dalla seconda parte dell'enunciato di ogni clausola (vedi qui sotto). Il primo di queste due clausole permette egualmente di praticare la “eliminazione” (*chu*) tra dividendi e dividendi disposti, nella seconda parte dell' algoritmo. Liu Hui insiste su questo punto più avanti. Notiamo che, quando nel XIII° secolo, queste marche algoritmiche che costituiscono i segni sono importate nel dominio della risoluzione delle equazioni algebriche, vi operano nello stesso modo. Nei due casi, il risultato delle procedure non comporta mai segno, questo implica che non dobbiamo parlare propriamente di numeri positivi o negativi. L'introduzione di queste marche oppone tuttavia questa algebra a quella che si elabora nei trattati in arabo dopo Al-Khwarizmi.

⁶¹ Qui ancora Liu Hui riscrive *chu* “eliminare” in *jian* “sottrarre”.

Di Paola&Spagnolo, I sistemi indeterminati nei Nove Capitoli di Liu Hui...

Che si aggiunga una colonna, che si sottragga una colonna, bisogna per ciascun (termine) fare secondo la sua categoria⁶². Quando l'uno (il termine aggiunto o sottratto) è di nome differente (di quello al quale si aggiunge o di cui si sottrae), non è della sua categoria. Se non è della sua categoria, tutto avviene come se non ci siano dei vis-à-vis, non si può sottrarli (l'uno dall'altro)⁶³. E' perché quando l'incarnato è confrontato con il color nero, l'eliminazione da nero, quando non è confrontato con niente (non dei vis-à-vis), l'eliminazione da nero; e quando il nero è confrontato con il color carne, l'eliminazione da color carne⁶⁴, quando non è confrontato con niente (non dei vis-à-vis), l'eliminazione da color carne. Allora color carne e nero sono aggiunti per quello che è di valori (shu) fondamentali. Se questo fa che essi siano aumentati l'un l'altro, in tutti questi casi è quello che si utilizza per fare detrarsi e scomparire (xiaodou)⁶⁵. Detrarre-farsi sparire (xiaodou), da una parte, sottrarre-aumentare, dall'altra, producono lo stesso dividendo (shi)⁶⁶.

⁶² Li Huang proponeva di vedere in *yi* “aumentare” una corruzione di *yi* “con” (vedi *jian* “sottrarre” e la sintassi *yi...jian*, suggerivano così che la frase originale iniziava con: “Quando si sottrae una colonna da una colonna (...). La proposizione mi sembra ragionevole nella misura in cui tutto il seguito discute in modo che, “eliminando le colonne”, si arriva a sommare i termini di segno opposto, costituendo un commentario di precedente prescrizione del Classico. Inoltre, come non si tratta da parte a parte che di sottrazione tra colonne, questo passaggio sarà, in caso contrario, il solo dove si menzionerebbe l'addizione tra colonne. Ultimo argomento in appoggio a questa suggestione infine, la sintassi di “aumentare” (vedi *yi*) e di “sottrarre” (vedi *jian*) sarà, se il testo non è corrotto, estremamente sorprendente. Vedi *lei* “categoria”, *ming* “nome”.

⁶³ Nel contesto dell'ipotesi di Li Huang, si può ugualmente tradurre: “Quando si sottrae una colonna da una colonna, bisogna, per ogni termine, (termine della colonna operatore) fare secondo la sua categoria. Quando non è di nome differente (del suo faccia a faccia), non è della sua categoria. Se non è della sua categoria, è come quando non c'è faccia a faccia (vedi dai “essere confrontato a, avere per faccia a faccia”); non c'è luogo da sottrarre. Effettivamente (*gu*) (...)”. La soluzione è dunque vista dal punto di vista del numero della colonna operatore. La prima parte di quello che segue compare effettivamente, in questo contesto, le situazioni dove i segni sono differenti con le situazioni di assenza di faccia a faccia, mentre la seconda parte discute il fatto che l'eliminazione algebrica non si traduce con una sottrazione, ma ritorna qui una addizione. Infatti, l'ultimo membro dell'enunciato può fare l'oggetto di un'altra interpretazione: “Quando è di nome differente (del suo faccia a faccia), (il risultato) non è della sua categoria. Che non sia della sua categoria, è come quando non c'è faccia a faccia, che non si può sottrarre”. L'enunciato comparava tre situazioni del punto di vista del numero della colonna operatore e dei segni del risultato (a e b essendo positivi): $a - (-b)$ (risp. $(-a) - b$), $0 - (\pm b)$ e $(\pm a) - (\pm b)$ (a essendo in questo ultimo caso inferiore a b). Nei tre casi, i segni del risultato e del termine della colonna operatore differiscono. Inoltre, nei tre casi, non ci può essere sottrazione direttamente. Questa doppia interpretazione riflette una doppia interpretazione della situazione *wuru* “non avere o entrare”, vedi qui sotto.

⁶⁴ Notare che, malgrado il fatto che l'operazione consiste concretamente in una addizione, è lo stesso nome di *chu* “eliminare” che vi rinvia. La fine del paragrafo oppone simile visione algebrica delle cose ad una concezione che ricorda la varietà delle operazioni praticate.

⁶⁵ Su questa operazione di eliminazione algebrica, vedi *xiaoduo*. Si può puntualizzare altrimenti questo enunciato dove Liu Hui ritorna sull'idea che, talvolta, per sottrarre, non c'è un luogo per sottrarre: “Quando incarnato e nero sono sommati, se, per quello che sono dei valori (*shu*) di base, questo fa che siano aumentati l'un l'altro, in tutti questi casi è quello che si utilizza per realizzare l'eliminazione algebrica (*xiaoduo*).

⁶⁶ Dove: “l'eliminazione algebrica (*xiaoduo*) e sottrarre-aumentare producono lo stesso contenuto (*shi*)”: questa comparazione fa eco a quella che, alla fine del commentario, conclude all'identità delle due clausole.

Se, della procedura, si prende essenzialmente il punto chiave, è che bisogna eliminare la testa delle colonne⁶⁷. Per quello che è di altre posizioni, non c'è da domandarsi quale è il loro numero e, di conseguenza, che li faccia talvolta sottrarsi l'uno dall'altro e talvolta sommarsi l'uno dall'altro, il principio (*li*) è unico, quali che siano dello stesso nome o di nomi differenti⁶⁸.

*Se il positivo non ha dove entrare, lo si rende negativo; se il negativo non ha dove entrare, lo si rende positivo*⁶⁹.

“Non avere dove entrare”, è quando non vi è dei vis-à-vis. Quando non c'è di cosa lo si possa sottrarre, allora si fa che quello che è da eliminare (*xiaoduo*) occupa la posizione⁷⁰.

⁶⁷ Dove, per essere più vicino al senso di *chu* “eliminare”: “(...) è che bisogna eliminare (ie: sottrarre l'uno dall'altro) le (posizioni) di testa delle colonne”. Questo porta alla mia interpretazione, secondo la quale l'algoritmo non descrive qui regola di segni: l'operazione di base, in tutti i casi della figura, consiste nel sottrarre tra posti di testa, e questa operazione si ripercuote, in funzione dei loro segni, in maniera distinta sul resto dei termini delle colonne.

⁶⁸ Dove: “(...) che effettivamente, non le faccia talvolta sottrarre l'una dall'altra e talvolta sommarsi l'uno all'altro, il principio (*li*) è invariabile e dunque unico”. Vedi *li* “principio”.

⁶⁹ Si rilevano due interpretazioni del significato che i Nove Capitoli danno all'espressione *wuru* “non avere o entrare”: (1) L'interpretazione corrente, supportata da una parte della tradizione, vi vede il caso dove il termine della colonna operatore ha per faccia a faccia una posizione vuota, una situazione che si rende con $0 - (\pm a)$. La prescrizione tratterà dunque un caso differente da quelli presi in considerazione dalla prima parte della clausola, e raccomanderebbe di dare per risultato il numero cambiato di marca. (2) Interpreto *wuru* come rinviante ai due tipi di situazioni $0 - (\pm a)$ e $(\pm a) - (\pm b)$, quando a è inferiore di b (a e b sono tutti e due positivi). Questa prescrizione porterà allora a precisare, in certi casi dove i due numeri sono stati sottratti l'uno dall'altro nel contesto di posizioni di testa dello stesso segno, il segno del risultato. Il pronome complemento, rispettivamente, “rendere negativo” e “rendere positivo” rinvierrebbero dunque al risultato dell'operazione (vedi Chemla 1992b e 1994a). Secondo l'interpretazione che gli dà, il commentario di Liu Hui di seguito opta o non per la stessa lettura.

⁷⁰ Si può puntualizzare altrimenti: “Non avere o entrare”, è quando non vi è faccia a faccia, quando non vi è di che si possa sottrarre, allora si fa in modo che si è da eliminare algebricamente (*xiaoduo*) occupa la posizione.” Secondo i casi l'interpretazione di “non vi è di che sottrarre” differisce: sia se si trattasse di non avere alcun faccia a faccia, e l'espressione ridicesse altrimenti il fatto precedentemente enunciato; sia se si trattasse di avere un faccia a faccia di cui il valore assoluto, inferiore a quello del numero che si spera di eliminare, non offre di che si possa sottrarre. L'espressione aggiungerebbe un secondo caso di figura al numero di questi che l'espressione *wuru* raggruppa. Il seguito può conseguentemente comprendersi in due modi: nel contesto della prima interpretazione, Liu Hui prescrirrebbe di mettere semplicemente, sulla posizione vuota della colonna operando, il numero faccia a faccia, cambiato di segno. Nel contesto della seconda, questa operazione sarebbe da applicare nei due casi al numero della colonna operatore, avanti o dopo la sottrazione se necessario. E' interessante ricordare qui che Liu Hui, nel suo calendario *Qianxiang* (206), riprende una pratica di calcolo frazionario, introdotta dal calendario *Sifen* (85), che presenta dei legami con le marche di cui qui discutiamo (Mei Rongzhao, 1984a, pp. 70-71). Liu Hong designa con *ruo* (leggero) e *qiang* (forte) frazioni particolari alle quali, rispettivamente, si sottrarre o si aggiunge una frazione più piccola, e lega esplicitamente il caso “forte” a *zheng* “positivo” ed il caso “leggero” a *fu* “negativo”. Descrivendo delle regole di addizione e sottrazione delle “leggere” e delle “forti”, riprende il termine di “nome” per rinviare alle due categorie di frazioni, aggiunte o sottratte (anche nome/nomi differenti), e raggruppare i differenti casi nelle stesse clausole. Formula dunque enunciati di fattura molto vicini a quello che si trova nei Nove Capitoli. Ora avremo argomenti per sostenere l'interpretazione seguente. In effetti, è solamente per la sottrazione, e non per l'addizione, che aggiunge la clausola: “Se non c'è faccia a faccia, lo si inverte (*bu*). “Questa sembra indicare che *wu dui* rinvia al caso dove una quantità del tipo $a - b/c$ è sottrarre di una quantità di tipo a' , il risultato essendo dunque come $(a-a') + b/c$.

Nei (casi) dove si debba sottrarre i dividendi (shi) disposti del dividendo (shi) di sopra e che, nella colonna, positivi e negativi sono mischiati, si utilizza egualmente questa clausola⁷¹. Essa consiste in quello che quelli dello stesso nome (che) sono sottratti dal dividendo (shi), questi di nome differente aumentano il dividendo (shi); “se il positivo del dividendo lo rende negativo, se il negativo non ha dove entrare, lo si prende positivo”.

Se dei numeri di nomi differenti sono eliminati l'uno dall'altro, i numeri dello stesso nome si aumentano l'un l'altro. Se il positivo non ha dove entrare, lo si rende positivo; se il negativo non ha dove entrare, lo si rende negativo.

In questa clausola, si considera il caso dove “dei numeri di nomi differenti sono eliminati l'uno dall'altro”, di conseguenza, si ottiene a partire dalla clausola precedente per inversione⁷².

Ogni volta che si utilizza positivo e negativo per esprimere che dei (numeri) sono dello stesso (nome) o di (nomi) differenti, si ha solamente che le due categorie si ottengono l'una a partire dall'altra per inversione.

Un numero espresso come negativo non è necessariamente negativo nei piccoli valori, un numero espresso come positivo non è necessariamente positivo nei grandi valori⁷³. E' perché,

⁷¹La sottrazione da colonna a colonna, orizzontalmente e, all'interno di una stessa colonna, verticalmente (vedi *lieshi* “dividendi disposto”, e calcoli che portano su essi lo schema di *fangcheng* in 8.1) rilevano delle clausole della stessa natura, Liu Hui vi insiste. Si tratta qui della lezione della Compilazione di Dai Zhen a partire della grande enciclopedia Yongle. La lezione dell'edizione di Yang Hui può anche può essere adottata: “(...) si deve egualmente prendere questa clausola”. Rileviamo che la forma dell'enunciato non esclude, a questo punto, che i “dividendi” possano essere negativi (vedi le note al problema 8.6). Inoltre, le operazioni della clausola non hanno in questo caso lo stesso statuto che nell'enunciato dei Nove Capitoli: le prime due proposizioni che compongono la classe indicano come, secondo i casi, operare una eliminazione tra numeri; essi non sono più logicamente legati, ma costituiscono delle alternative esclusive l'uno dell'altro. Ci si avvicina con questo fatto ad una regola dei segni. Notiamo che l'applicazione di questa clausola concorda con l'eliminazione dei dividendi, elargendo, con le operazioni di diminuzione ed aumentazione prescritte in 8.2.

⁷² Dove: “In questa clausola, si considera il caso dove “dei numeri dei nomi differenti sono eliminati l'uno dall'altro”. Infatti, si ottengono a partire della clausola precedente per inversione.” Vedi *bu* invertire. Il seguito argomenta questa affermazione. Le marche di positivo e negativo vi sono date per relative, e non per assolute: esse valgono per il semplice fatto della loro opposizione. Questo permette di non ricorrere sistematicamente che ad una clausola, ed inversamente (*bu*) se necessario ai segni dell'insieme di una colonna. Il commentario conclude dunque con l'identità delle due clausole, che si riconducono l'un l'altro per inversione. Notiamo che all'inversione dei “colori” delle bacchette: dei “segni” dei numeri, fa eco l'inversione dei calcoli. L'operazione mette in rilievo il carattere algebrico dell'attività algoritmica in Cina antica (Chemla 1991a). Il “caso”, una delle opzioni possibili, è trasformato in “paradigma” o in “esempio”, Vedi li. Yang Hui, in *Spiegazioni dettagliate dei Nove Capitoli sui Metodi Matematici (Xiangjie jiu Zhang suanfa, Yjatang congshu, p.29)* esplicita un esempio che mostra che legge questa seconda clausola come noi la proponiamo. Eliminare il termine in x, tra le due equazioni (*) $6x - 20y = 12$ e (**) $-6x + 15y = 3$, descrive l'operazione come una “sottrazione” di (**) di (*) e la dettaglia così: “I numeri di nomi differenti sono sottratti l'uno dall'altro: 6 negativo sottratto da 6 positivo, 15 positivo sottratto da 20 negativo; i numeri dello stesso nome sono addizionati l'uno all'altro: 3 *dou* (ndt: vi è qui un refuso, il testo comporta 2) è aggiunta a 12 *dou*” (io sottolineo). Si vede bene l'uso delle marche nella pratica dell'algoritmo, e non per rappresentare dei segni nel senso moderno del termine.

⁷³ Il senso di questo enunciato, che sembra rifiutare alle marche di “positivo” e “negativo” un significato assoluto, non è certo. Si può egualmente tentare l'interpretazione: “Quando si dice “negativo”, questo non è necessariamente negativo nel senso di mancanza (che bisogna sottrarre ad un valore reale, Vedi *shao*); quando si dice “positivo”, questo non è necessariamente positivo nel senso di eccesso (che bisogna aggiungere ad un valore reale, Vedi *duo*).”

anche se, in ogni colonna, i numeri rappresentati da bacchette color carne e nere sono trasformate di nuovo in numeri rappresentati da bacchette di (nomi) differenti, non c'è alterazione⁷⁴. Se è così, allora si può fare in modo che le posizioni di testa siano costantemente dei nomi differenti relativamente l'uno all'altro⁷⁵. I contenuti (shi) di queste clausole si corrispondono totalmente, di conseguenza di ciò si tengono queste 2 clausole, opposte l'una all'altra, come una sola procedura (*lū*)⁷⁶. Se si considera che esse (le clausole) gestiscono, ogni volta, il modo di cui le posizioni dall'alto in basso si ottengono le une dalle altre, allora, dal punto di vista del seguito dei calcoli, non vi è che una sola procedura (*shu*)⁷⁷.

Altrimenti, se si dispone all'origine di colonne, è che ci si vuole appoggiare sulle quantità (*shu*) ottenute per eliminarle le une alle altre⁷⁸; di conseguenza, quale che sia il loro numero, si fa in modo che restano di fronte un alto ed un basso, ed è tutto⁷⁹. Se positivo e negativo essendo sottratti l'uno dall'altro, tutte le quantità (*shu*) di una colonna sono, all'origine, delle sovrapposizioni (*zeng*) di un divisore, allora si può aggiustare ogni tale colonna⁸⁰ e non solamente procedere, per tutte le cose e tutte le quantità (*shu*), all'eliminazione tra colonne da destra a sinistra.

(8.4)

⁷⁴ Dove: “è perché, anche se, in ciascuna delle colonne, si scambia ripetutamente bacchette differenti incarnate e nere, non ci sono alterazioni.” Rileviamo questa preoccupazione ricorrente di non alterare il senso (vedi egualmente il commentario di 8.1).

⁷⁵ L'edizione di Yang Hui contiene qui, invece di *chang* “continuamente”, *dang* “dovere”.

⁷⁶ Dove: “I contenuti (*shi*) di queste clausole comunicano totalmente” (Vedi *tong*). Vedi *fanfu* “opposto”. *Lū* designa forse qui una procedura elementare relativamente alla procedura generale *shu*, di cui l'unicità è in seguito affermata: si ritrova così, per una svolta dell'analisi, l'unicità di *fangcheng*.

⁷⁷ Dove: “Se si considera che esse (le clausole) danno, ogni volta, il modo in cui si ottengono le posizioni dall'alto in basso le une a partire dalle altre per inversione, allora, dal punto di vista del flusso dei calcoli, non vi è che una sola procedura.” Dopo aver stabilito il fatto che le operazioni di sottrazione tra colonne erano una sola e stessa procedura, Liu Hui estende la conclusione alla procedura che gestisce le relazioni tra dividendi (in basso) e dividendi disposti (in alto), che ha trattato più avanti.

⁷⁸ Dove: “(...) affinché esse si eliminino (delle posizioni, che si facciano sparire delle posizioni, Vedi *qu*) le une dalle altre”. Il riferimento è qui fatto senza dubbio al modo in cui la procedura si appoggia sulla disposizione spaziale dei dati, in queste operazioni come nei suoi scopi, Vedi *she* “disporre”. Il termine di “quantità ottenute” è interessante per quello che sottolinea lo statuto sempre in trasformazione delle quantità sulle quali la procedura opera.

⁷⁹ Vedi *ming* “moltiplicare sul posto”, che noi rendiamo qui con “restare faccia a faccia”: l'insieme del passaggio non ha un senso certo. L'idea generale sembra essere qui di ricordare *fangcheng* lo scopo di eliminare fino a non avere che una incognita per colonna, quale che sia il numero di colonne o di incognite.

⁸⁰ La traduzione è congetturale: traducendo *zeng fa* per “divisori sovrapposti”, comprendendo *jun* “aggiustare” come rinviando ad una forma di semplificazione, la suggestione sarebbe che è raccomandato dividere talvolta le colonne con divisori comuni dei loro termini, e non d'applicare solamente la routine. (Li Jimin 1993), *Jiuzhang suanshu jiaozheng*, nota 33, pp.446, propone una nuova interpretazione, basata su di un'altra puntualizzazione: “Quando positivo e negativo sono sottratti l'uno dall'altro, si procede come prima quando si avevano dei numeri (ordinari) (*shu*) (si eliminano le incognite in un certo ordine). Il metodo generalizzato tratta tutte le colonne nello stesso modo e non procede (all'eliminazione tra le colonne) necessariamente secondo un ordine che andrebbe da sinistra a destra.” Aggiungerei che il termine di *zheng* che appariva qui si ritrova regolarmente nelle *Spiegazioni dettagliate dei Nove Capitoli sui metodi matematici (Xiangjie jiuzhang suanfa)* di Yang Hui per qualificare operazioni che portano su di una colonna, che suggerisce la seguente interpretazione: “Se, positivo e negativo erano sottratti l'uno dall'altro, si utilizza ripetutamente il metodo antico di operazioni per colonne, si può trattare ogni colonna nello stesso modo e non operare solamente da sinistra a destra sulle cose e loro quantità.”

Supponiamo che si abbiano 5 Bing di miglio di qualità superiore che, se se ne diminuisce la produzione (shi) di 1 Dou 1 Sheng, equivalente a 7 Bing di miglio di qualità inferiore⁸¹; e 7 Bing di miglio di qualità superiore che, se si diminuisce la produzione (shi) di 2 Dou 5 Sheng, equivalente a 5 Bing di miglio di qualità inferiore. Si chiede quanto producono (shi) rispettivamente un Bing di miglio di qualità superiore ed inferiore.

*Risposta: Un Bing di miglio di qualità superiore 5 Sheng;
Un Bing di miglio di qualità inferiore 2 Sheng.*

Procedura: Si segue fangcheng. Si piazzano i 5 Bing del miglio di qualità superiore in positivo, i 7 Bing del miglio di qualità inferiore in negativo, la procedura (shi) di cui si diminuisce, 1 Dou 1 Sheng, in positivo⁸².

Questo significa che la produzione (shi) di 5 Bing del miglio di qualità superiore presenta un surplus, e che se gli sottrae 1 Dou 1 Sheng, il resto è giustamente la quantità (shu) che è equivalente a 7 Bing del miglio di qualità inferiore. E' perché, invertendo il calcolo⁸³, si fa sottrarre l'uno dall'altro, e si prende 1 Dou 1 Sheng come differenza. Quello che fa la differenza, è la produzione (shi) che resta del miglio di qualità superiore⁸⁴.

Si mettono in seguito i 7 Bing del miglio di qualità superiore in positivo, i 5 Bing del miglio di qualità inferiore in negativo, la produzione (shi) di cui si diminuisce, 2 Dou 5 Sheng, in positivo. E vi si introduce la procedura del positivo e del negativo⁸⁵.

Commentario: Nella procedura del positivo e del negativo, si dispone all'origine delle colonne, la quantità (shu) delle misure delle cose⁸⁶ non è limitata; bisogna fare in modo che con i dividendi (shi), essi si seguono gli uni gli altri, dall'alto in basso, e che ogni colonna sia rispettivamente costituita di *lü*⁸⁷. Tuttavia, come talvolta si sottrae e talvolta si aumenta, nella

⁸¹ Il “confronto”, che porta all'enunciato di una equivalenza, porta su delle produzioni (Vedi *shi*). L'operazione di “diminuzione” (Vedi *sun*) fa eco al problema 8.2, non può essere effettuata sui migli, ma solamente sulle loro produzioni. La fattura degli enunciati differisce adesso: per opposizione a 8.2, non appariva qui il termine della stessa natura nelle due quantità poste come equivalenti. Pertanto, le trasformazioni che, nei due casi, produrranno una forma standard (un dividendo opposto a dei divisori/coefficienti), rappresentabili da una colonna, non sono descritte come identiche.

⁸² Si constata come il commentario 8.3 rende conto del passaggio di 8.3 a 8.4 nel Classico. Si vedono i segni “positivo” e “negativo” permettere non solamente lo svolgimento dell'algoritmo in certi casi, ma la traduzione in tabella e la risoluzione per *fangcheng* di nuovi problemi.

⁸³ Vedi *bu* “invertire”, *suan* “calcolo”. L'operazione di “inversione di calcoli” trasforma un enunciato di uguaglianza in un'altro, nel quale si può riconoscere l'interpretazione data da Liu Hui di una equazione/colonna del tipo di quelle introdotte nei calcoli ordinari in 8.3: è dunque possibile associare, inversamente, a questo enunciato standard una rappresentazione sotto forma di colonna nel quadro di *fangcheng*. Sull'organizzazione di questo insieme di trasformazioni di enunciati sui quali riposa l'edificio del capitolo 8, vedi (Chemla 1994a). Sottolineiamolo: nel corso del commentario a 8.3, Liu Hui passa dal nuovo tipo della colonna prodotta alla loro interpretazione sotto la forma di un enunciato. E' il passaggio inverso che si opera qui: dall'enunciato della relazione verso la colonna che la rappresenta.

⁸⁴ I “dividendi” associati a questo tipo di equazione sono di natura differente da quella che ricoprivano sino a qui, e Liu Hui lo spiega. Sottoliniamo che i due sensi *shi*, “produzione” e “dividendo”, sono qui attivi: il commentario a 8.15 riprende l'espressione in un contesto dove non è una questione di grano.

⁸⁵ La stessa procedura, Liu Hui l'ha mostrata, permette di risolvere questi nuovi problemi.

⁸⁶ Dove: “(...) di misure ed i cose (...)” L'enunciato non è senza evocare la fine del commentario in 8.3.

⁸⁷ Rileviamo l'opposizione tra lo *shi* e i *cheng* “misura”. L'insistenza sull'ordine stabilito nel quale cose e dividendi devono seguirsi dall'alto in basso in una colonna rinvia senza dubbio all'assenza di regolarità

stessa colonna, a delle posizioni distinte, si differisce facendo due categorie; allora ognuna ha rispettivamente una somma, si sottrae questa, e la differenza appare in basso⁸⁸.

(8.5)

Supponiamo che si abbiano 6 Bing di miglio di qualità superiore che, se si diminuisce la produzione (shi) di 1 Dou 8 Sheng, equivalente a 10 Bing di miglio di qualità inferiore; e 15 Bing di miglio di qualità inferiore che, se se ne diminuisce la produzione (shi) di 5 Sheng, equivalente a 5 Bing di miglio di qualità superiore: Si chiede quanto producono (shi) rispettivamente un Bing di miglio di qualità superiore e inferiore.

*Risposta: Un Bing di miglio di qualità superiore produce (shi) 8 Sheng;
Un Bing di miglio di qualità inferiore produce (shi) 3 Sheng.*

Procedura: Si segue fangcheng. Si mettono i 6 Bing del miglio di qualità superiore in positivo, i 10 Bing del miglio di qualità inferiore in negativo, la produzione (shi) di cui si diminuisce, 1 Dou 8 Sheng, in positivo; in seguito i 5 Bing del miglio di qualità superiore in negativo, i 15 Bing del miglio di qualità inferiore in positivo, la produzione (shi) di cui si diminuisce, 5 Sheng, in positivo. Si introduce la procedura del positivo e del negativo.

Questo significa che la produzione (shi) di 6 Bing di miglio di qualità superiore presenta un surplus, e che se la si diminuisce di 1 Dou 8 Sheng, il resto è giustamente la quantità (shu) che è equivalente a 10 Bing di miglio di qualità inferiore. E' perché si invertono ugualmente i calcoli⁸⁹, e si prende 1 Dou 8 Sheng come dividendo (shi) della differenza. Il dividendo (shi) della differenza, è la produzione (shi) che resta del miglio di qualità superiore⁹⁰.

(8.6)

Supponiamo che si abbiano 3 Bing di miglio di qualità superiore che, se si aumenta la produzione (shi) di 6 Dou, equivalente a 10 Bing di miglio di qualità inferiore; e 5 Bing di miglio di qualità inferiore che, se se ne aumenta la produzione (shi) di 1 Dou, equivalente a 2 Bing di miglio di qualità superiore. Si domanda quanto producono (shi) rispettivamente un Bing di miglio di qualità superiore ed inferiore⁹¹.

*Risposta: Un Bing di miglio di qualità superiore produce (shi) 8 Dou;
Un Bing di miglio di qualità inferiore produce (shi) 3 Dou.*

Procedura: Si segue fangcheng. Simettono i 3 Bing del miglio di qualità superiore in positivo, i 10 Bing del miglio di qualità inferiore in negativo, la produzione (shi) di cui si aumenta, 6 Dou,

con la quale si presentano ormai nell'enunciato. Per quello che è dei *lü*, vedi 8.1 di cui l'enunciato costituisce qui una citazione.

⁸⁸ L'enunciato cita qui il commentario 8.3, vedi le note corrispondenti.

⁸⁹ Vedi *bu* "invertire", l'"egualmente" rinvia veritabilmente al problema 8.4. Dopo un problema 8.4 dove i calcoli richiamano la prima clausola della "Procedura del positivo e del negativo", il problema 8.5 necessita l'applicazione della seconda clausola. Sottoliniamo che i coefficienti relativi al miglio detto di qualità superiore sono sempre messi nella linea superiore della tabella.

⁹⁰ Vedi *shi* "dividendo, produzione", *cha shi* "dividendo della differenza". Tutte le edizioni antiche riportano "inferiore" invece di "superiore". Può esserci stato un salto che ha portato all'omissione di un secondo enunciato, parallelo a quello e relativo alla seconda equazione?

⁹¹ Il termine di "aumentare" (Vedi *yi*), tutto come quello di "diminuire" (Vedi *sun*) in 8.4 e 8.5, fa eco al problema 8.2.

in negativo⁹². Si mettono in seguito i 2 Bing del miglio di qualità superiore in negativo, i 5 Bing del miglio di qualità inferiore in positivo, la produzione (shi) di cui si aumenta, 1 Dou, in negativo. Si introduce la procedura del positivo e del negativo.

Questo significa che la produzione (shi) di 3 Bing di miglio di qualità superiore è troppo piccola, ma che se la si aumenta di 6 Dou, allora essa è equivalente a 10 Bing di miglio di qualità inferiore. Questo perché si invertono ugualmente i calcoli⁹³, e si prende 6 Dou come dividendo (shi) della differenza. Il dividendo (shi) della differenza, è la produzione (shi) che resta del miglio di qualità inferiore⁹⁴.

(8.7)

Supponiamo che 5 buoi e due pecore valgono 10 Liang d'oro, che 2 buoi e 5 pecore valgono 8 Liang d'oro. Si chiede quanto oro valgono rispettivamente un bue ed una pecora.

Risposta: Un bue vale 1 Liang 13/21 di Liang d'oro
Una pecora vale 20/21 di Liang d'oro.

Procedura: Si segue fangcheng.

Se si suppone che si fa una omogeneizzazione/egualizzazione, le posizioni di testa essendo costituite da buoi, si deve moltiplicare l'uno per l'altro⁹⁵. Una volta determinata la colonna di destra⁹⁶, vi mettono in cambio 10 buoi, 4 pecore, e l'oro che essi valgono, 20 Liang; e nella

⁹² Qui, come nel seguente enunciato parallelo, tutte le edizioni antiche danno la produzione/dividendo (Vedi *shi*) in “positivo”. Lungi dal vedere qui una corruzione del testo, il *Jieti* (Spiegazione del problema) delle *Spiegazioni dettagliate dei Nove Capitoli sui metodi matematici (Xiangjie jiuzhang suanfa)* edizione Yjatang congshu, p.29) considera che questo esprime i limiti di un quadro semantico in termini di produzione di grano, nel quale i termini costanti non possono essere che positivi: “non si può applicare la diminuzione/aumento (Vedi *sun*, *yi*). L'autore vi oppone il quadro di scambio, verso il quale I Nove Capitoli vanno immediatamente dopo. Sempre nella parte *Jieti*, *Spiegazioni dettagliate dei Nove Capitoli sui metodi matematici (Xiangjie jiuzhang suanfa)* proporrà allora una interpretazione di numeri positivi e negativi come “quello che si vende” – può essere in relazione con il suo significato di “imposta” che si leva – e “ciò che si compra”, il “debito” (p.31). Per l'ora in 8.6, Yang Hui dà il dettaglio di una risoluzione che guarda alle produzioni/dividendi positive: il problema è tale che, la procedura ritenuta operante per diagonalizzazione della matrice, dimenticando poi alla fine del percorso i segni dei dividendi e divisori, non ha influenza nell'inversione. Può questa essere l'ipotesi di una corruzione dovuta ad una concezione a priori di relazioni tra colonne di equazioni. I Nove Capitoli non esprimono lì al contrario la ragione di cambiare un quadro semantico di cui Liu Hui ha sottolineato i meriti in 8.1 e 8.3, ma che diviene troppo stretto (Vedi Chemla 1994a) ? E' qui che *shi* si dissocia dal suo secondo senso di “produzione” per non guardare più che al senso formale di “dividendo”.

⁹³ Come in 8.5, l'“ugualmente” rinvia senza dubbio a 8.4. Vedi *bu* “invertire”, *cha shi* “dividendo della differenza”.

⁹⁴ Sottoliniamo che Liu Hui dà il significato del dividendo quando è positivo. L'interpretazione mostra che la trasformazione degli enunciati del problema avrebbero potuto praticarsi altrimenti, in modo da avere dei dividendi effettivamente positivi. Vi sono delle indicazioni da trovare sulle modalità di trasformazione degli enunciati.

⁹⁵ Le operazioni di egualizzazione (Vedi *tong*) e di omogeneizzazione (Vedi *qi*) erano apparsi quando il commentario rendeva conto della correzione della procedura *fangcheng* (8.1). Rivedendo il contesto della dimostrazione verso quello delle procedure, viene proposto così come un algoritmo alternativo. Lo si ritroverà in una tradizione di scritti in Cina, per opposizione ad un'altra che conserverà l'eliminazione ai Nove Capitoli (Vedi una bibliografia in Chemla 1992a & 1996c). Vedi *wei* “posizione”.

⁹⁶ Vedi *ding* “determinato”. Tale è il testo che danno tutte le edizioni antiche, e che dopo Dai Zhen, l'insieme dei filologi ha considerato come vittima di una omissione: la moltiplicazione dell'uno per Di Paola & Spagnolo, I sistemi indeterminati nei Nove Capitoli di Liu Hui...

colonna di sinistra, 10 buoi, 25 pecore, e l'oro che essi valgono, 40 Liang. Siccome le quantità (shu) di buoi sono identici, il surplus d'oro di 20 Liang, è la differenza relativa alle pecore, 21, che la rende tale⁹⁷. Si sottrae la colonna più piccola dalla colonna più grande; allora la quantità (shu) di buoi è esaurita, ed appaiono solo le quantità (shu) di pecore e la quantità d'oro (shu) che essi valgono, da dove si può conoscere il risultato⁹⁸. Si deduce il (caso) di un più grande (numero di colonne, di incognite di casi) del più piccolo: anche se si hanno 4 o 5 colonne, questo non è differente⁹⁹.

(8.8)

Supponiamo che, se si vendono 2 buoi e 5 pecore per comprare 13 maiali, restano 1000 sapechi, che se si vendono 3 buoi e 3 maiali per comperare 9 pecore, si abbiano abbastanza spechi, e che se si vendono 6 pecore ed 8 maiali per comperare 5 buoi, si abbia un deficit di 600 sapechi. Si chiede quanto valgono rispettivamente i prezzi dei buoi, di una pecora e di un maiale.

*Risposta: Il prezzo di un bue vale 1200;
 Il prezzo di una pecora vale 500;
 Il prezzo di un maiale vale 300.*

Procedura: Si segue Fangcheng. Si piazzano i 2 buoi e le 5 pecore in positivo, i 13 maiali in negativo, la quantità (shu) di sapechi restano in positivo. In seguito i 3 buoi in positivo, le 9 pecore in negativo, i 3 maiali in positivo. In seguito i 5 buoi in negativo, le 6 pecore in positivo, gli 8 maiali in positivo, i sapechi del deficit in negativo¹⁰⁰. E si introduce la procedura del positivo e del negativo.

Qui, nella colonna centrale, quello che si compra e quello che si vende si compensano l'un l'altro, vi sono abbastanza sapechi; di conseguenza si cambiano solamente i numeri rappresentati dalle bacchette di quello che si compra e di quello che si vende, ed è tutto¹⁰¹;

l'altro (Vedi *xiang* “l'un l'altro”, *cheng* “moltiplicare”) non rinvia che alle posizioni di testa. L'assegnazione di nuovi valori nelle variabili che sono le posizioni è qui esplicitata.

⁹⁷ Si noterà il ragionamento, distinto da quello formulato in 8.1. E' evocato il commentario “altre procedure” (Vedi *qi yi shu*) del capitolo 7. L'algoritmo è qui trasparente sulle ragioni della sua correzione.

⁹⁸ Vedi *jin* “esaurire”, *xian* “apparire”.

⁹⁹ Vedi *tui* “dedurre”, nel senso di una deduzione per analogia.

¹⁰⁰ Notiamo che i Nove Capitoli, contrariamente al commentario, non designano qui i termini costanti delle equazioni del nome di *shi* “dividendo”. Questi termini possono essere, in questo nuovo contesto di compra vendita, positivi, negativi ed anche nulli: presentano dunque l'insieme degli stati prima riservati ai coefficienti nella parte superiore della superficie da calcolare. Come in 8.3, il termine nullo non è menzionato: sembra che sia rappresentato da un vuoto, questo corrisponde alla parola (*kong*) per la quale rinviano le *Spiegazioni dettagliate dei Nove Capitoli sui metodi matematici (Xiangjie jiuzhang suanfa)*. I Nove Capitoli associano questi diversi tipi di traduzioni sotto forma di segni ai termini di “restante” (*youyu*), “abbastanza” “*shizu*” e “deficit” (*huzu*), del capitolo 7, per i quali i montanti costanti sono qualificati dall'enunciato.

¹⁰¹ Vedi *zhe* “compensare”. Si può egualmente pensare che il termine di *hu*, qui reso da “cambiare”, prende lo stesso senso di “invertire” che precedentemente (Vedi *hu*), e tradurre questo enunciato con: “Di conseguenza, si inverte (*hu*) semplicemente la compera, la vendita è così calcolata (*suan*) ed è tutto”. E' qui la lezione della Compilazione di *Dai Zhen* a partire della Grande Enciclopedia Yongle. L'edizione di Yang Hui: (...) si inverte semplicemente la compera, la vendita gli è eguale (*deng*) ed è tutto”, un testo ugualmente suscettibile di interpretarsi così: “la compera invertita e la vendita sono eguali, ed è tutto”. Comunque sia, si inverte quello che è comperato in scambio, e questo basta per ottenere l'equivalente di quello che si vende. Notiamo questa trasformazione di un enunciato di equivalenza in un enunciato di forma standard traducibile da una colonna a “dividendo nullo”. L'interpretazione dell'operazione non è

questo perché in basso non ci sono valori in sapechi. Supponendo che si voglia con una tale colonna seguire il metodo fangcheng, si effettua prima la moltiplicazione nel suo insieme della colonna centrale con i 2 buoi, poi con la colonna di destra si elimina di questo tra le quantità che sono di fronte, allora in questo, alla fine, il dividendo (shi) di sotto è una lacuna¹⁰². E' per questo che il commentario dice: “se il positivo non corrisponde ad alcun dividendo (shi), lo si rende negativo; se il negativo non corrisponde ad alcun dividendo (shi), lo si rende negativo; se il negativo non corrisponde ad alcun dividendo (shi), lo si rende positivo”¹⁰³, è tutto per questa categoria (di situazioni)¹⁰⁴. Se si prende un altro dividendo (shi) per aggiungerlo, le quantità (shu) per le quali cade bene e le cose corrispondano a questo dividendo (shi) fanno questo dividendo (shi)¹⁰⁵.

Il (problema) sull'oro giallo e l'argento bianco del capitolo “Eccesso e deficit” è equivalente a questo¹⁰⁶. Si suppone che 9 (steli) di oro giallo ed 11 di argento bianco, “alla pesata, hanno dei pesi uguali. Se si scambiano tra loro uno dei loro steli, l'oro diviene più leggero di 13 liang. Si chiede quanto pesa rispettivamente uno stelo d'oro ed uno stelo d'argento.” E' identico a questo.

(8.9)

Supponiamo che 5 passeri e 6 rondini si riuniscano su di una bilancia e che l'insieme dei passeri sia più pesante dell'insieme delle rondini. Se un passero ed una rondine cambiano il

identica a quelle dei risultati precedenti l'inversione, ed immediatamente in modo essenziale della nuova semantica. Si ritroveranno delle colonne simili in 8.9, poi soprattutto il 8.18, in un nuovo tipo di procedura. Una volta esplicitata l'inversione, la forma ed il significato della colonna precisata, il commentario si orienta verso l'esame del modo in cui essa entra nell'algoritmo, per i calcoli ed i loro significati.

¹⁰² Dove: “allora in questi, alla fine, il dividendo (shi) di sopra, da vuoto, è divenuto mancanza”. Il termine costante negativo ottenuto è trattato del dividendo (shi) ed interpretato come una quantità d'argento dovuto. Vedi *fa* “metodo”.

¹⁰³ Il commentario non comporta un tal enunciato. Rimpiazzando *shi* con *ru* “entrare”, si ottiene l'ultima parte della prima clausola della “procedura del positivo e del negativo”, come è enunciata nei Nove Capitoli (Vedi 8.3), ed è bene adattare qui. Bisogna interpretare qui *shi*, per opposizione a *xu* “vuoto”, come “pieno”, dove bisogna concludere ad una omissione di *ru*? Vedi la nota alla traduzione 52.

¹⁰⁴ Dove: “E' perché, quando il commentario dice: “Se il positivo non incontra alcun dividendo (shi), lo si rende negativo; se il negativo non incontra alcun dividendo (shi), lo si rende positivo”, questo costituisce la sua categoria”, Vedi *lei* “categoria”, che riprenderebbe il suo senso in 8.3: la regola, data più avanti in un altro contesto, si applica ai dividendi munendoli di categorie conformi, dal punto di vista dell'interpretazione che si può dare all'insieme della colonna risultato. La frase seguente avanza una spiegazione in termini di trasformazione di eguaglianza.

¹⁰⁵ L'enunciato è notevole per l'interpretazione globale dell'addizione delle due colonne che corrispondono a delle uguaglianze in termini della nuova eguaglianza così stabilita. Notiamo che il “dividendo” è qui menzionato senza che il suo segno sia precisato. Quindi, l'espressione *bieshi* qui reso da “altro dividendo” si incontra regolarmente nel commentario attribuito a Li Chunfeng del Classico matematico di Zhang Qiuqian (Zhang Qiuqian suanjing, op. cit.).

¹⁰⁶ Supponendo che apra una comparazione con il problema 8.9, che la somiglianza tra i loro enunciati lasci pensare, si attenderebbe che il problema 7.17 sia piuttosto citato nel corso del commentario al problema seguente. Infatti, i due problemi presentano leggere differenze. Inoltre, se la fine del commentario a 8.9 introduce le premesse di una nuova procedura di risoluzione per il capitolo 8, che richiama l'algoritmo generale del capitolo “eccedenza e deficit”, la prima parte di questo commentario tratta il problema senza richiedere in prestito strade che sottolineano l'analogia con 7.17. Ora il confronto con 8.8 sembrerebbe ugualmente interessante al commentatore. Sottoliniamo la riscrittura dei due primi caratteri dell'enunciato in *jialing*, tipico dei testi posteriori ai Nove Capitoli.

Di Paola & Spagnolo, I sistemi indeterminati nei Nove Capitoli di Liu Hui...

loro posto, l'ago della bilancia è in orizzontale. Se si mettono assieme passereri e rondini, il peso è di 1 Jin. Si chiede quanto pesano rispettivamente un passero ed una rondine.

Risposta: Un passero pesa 1 Liang $13/19$ di Liang;
 Una rondine pesa 1 Liang $5/19$ di Liang.

Procedura: Si segue Fangcheng. Se si pesano (insieme) dopo aver cambiato posto, pesano ciascuno 8 Liang.

Qui, 4 passereri ed 1 rondine, da una parte, 5 rondini ed 1 passero, dall'altra, mettono l'ago in posizione orizzontale e, insieme, pesano 1 Jin; di conseguenza ognuno (degli insiemi) fa 8 Liang¹⁰⁷. Si dispongono i valori (shu) misure di due colonne¹⁰⁸. Nei casi dove la posizione di testa della colonna di sinistra contiene il valore (shu) 1, si fa in modo che, la colonna di destra, si elimini nel suo insieme¹⁰⁹. Si può anche fare con la colonna di sinistra ed ottenere i divisori e dividendo (shi) corrispondenti a sinistra¹¹⁰. Se i valori (shu) della colonna di sinistra sono troppi importanti, si ottengono questi valori (shu) con la colonna di destra¹¹¹. Quando è la posizione di testa della colonna di sinistra per sottrazione si elimina, alle posizioni del centro e dal basso, i numeri rappresentati con le bacchette devono corrispondere alle rondini ed al dividendo (shi)¹¹². La colonna di destra non è modificata, l'altezza della colonna di sinistra è vuota, al centro, si ha il divisore e, in basso, il dividendo (shi), allora si può sapere in modo comodo il peso che deve avere ogni rondine¹¹³.

Commentario: Poiché qui, 4 passereri ed 1 rondine, da una parte, 5 rondini ed i passero, dall'altra parte, hanno pesi uguali, vuol dire che 3 passereri e 4 rondini hanno dei pesi equivalenti l'uno

¹⁰⁷ L'enunciato del problema è tradotto in due modi, che aprono, ognuna, su delle tabelle differenti. I pesi di 8 liang dei due insiemi di uccelli danno una prima risoluzione per *fangcheng* nel corso della quale l'ordine di effettuazione delle operazioni è ripensata in funzione di valori numeri particolari. E' la sola che porta avanti I Nove Capitoli. La seconda parte del commentario esplicita i *li* di pesi che si possono dedurre dall'enunciato, ed evoca una seconda procedura di risoluzione, pienamente esposta in 8.18.

¹⁰⁸ Vedi *lie* "disporre", *cheng* "misura".

¹⁰⁹ Ecco un primo caso particolare per il quale si potrebbe fare economia della moltiplicazione della colonna di sinistra, e procedere in un ordine inverso eliminando, per semplice sottrazione, il termine superiore della colonna di destra- la sintassi del testo come la trasmettono le edizioni antiche è tuttavia inconsueto, se bisogna intenderla così (Vedi *chu* "eliminare", *biancheng* "moltiplicare l'insieme di (...)"). Il seguito del commentario sembra raccomandare questa soluzione in particolare quando gli altri valori della colonna di sinistra sono importanti. E' sbalorditivo che il resto del commentario, se bisogna credere all'edizione del testo, riprende delle considerazioni elementari sull'algoritmo ordinario. Su questi punti, vedi le note seguenti.

¹¹⁰ Il testo della Compilazione di Dai Zhen a partire della Grande enciclopedia Yongle potrebbe, per quello che è questa frase, non essere corrotto, ed essere tradotto come segue, modificando: "Nei casi dove la posizione di testa della colonna di sinistra contiene il valore (*shu*) 1, se si può fare in modo che la colonna di destra elimini nel suo insieme, si può egualmente far operare la colonna di sinistra ed ottenere i divisori e dividendi corrispondenti a destra.

¹¹¹ Bisogna senza dubbio intendere: i valori del divisore e del dividendo producono l'incognita cercata.

¹¹² Vedi *jin* "spostare", *wei* "posizione", *suan* "numeri rappresentati con bacchette", *shi* "dividendo".

¹¹³ Questo ultimo passaggio presenta un certo numero di singolarità terminologiche: il "dividendo" si vede qualificato con la posizione di sotto per opposizione al divisore che occupava la posizione centrale. Questa descrizione è differente da quella del problema 8.1, per la quale il dividendo di sotto, si oppone allo spazio dei divisori di sotto, lui stesso scisso in alto/medio/basso. E si ritrova in 8.18 un modo simile di procedere. D'altronde, abbiamo qui la sola occorrenza del termine di *kong* per designare una posizione vuota, capitolo 8.

all’altro e, quindi, che il *lū* dei passeri, in peso, è 4 quanto il *lū* delle rondini, in peso, è 3¹¹⁴. I *lū* delle (cose) che sono misurate a due riprese possono, in tutti i casi, essere cercati con l’aiuto di una procedura straordinaria¹¹⁵, che danno i valori (*shu*) corrispondenti.

(8.10)

*Supponiamo che, 2 persone, Jia e Yi, possiedono dei sapechi e non si sa quale quantità (shu), se Jia ottiene la metà di quello che ha Yi, allora vi sono 50 sapechi e, se Yi ottiene i due terzi di quello che ha Jia, allora ha anche 50 sapechi*¹¹⁶. *Si chiede quanti sapechi possiedono rispettivamente Jia e Yi.*

*Risposta: Jia possiede 37 sapechi e mezzo;
Yi possiede 25 sapechi.*

*Procedura: Si segue Fangcheng. Se si diminuisce, si aumenta*¹¹⁷.

Questo problema significa¹¹⁸ che 1 Jia e $\frac{1}{2}$ Yi fanno 50, che $\frac{2}{3}$ Jia e Yi fanno ugualmente 50. Se, rispettivamente (per ciascuno degli enunciati), si moltiplicano le sue parti intere per il denominatore e si incorpora ai numeratori¹¹⁹, questo determina le colonne: 2 Jia e 1 Yi fanno 100 sapechi, 2 Jia e 3 Yi fanno 150 sapechi. A partire da questo, si segue fangcheng. Tutti i (problemi) dove le cose comportano delle parti che imitano questo¹²⁰.

(8.11)

¹¹⁴ Notiamo il primo uso del termine di “equivalenti l’uno all’altro”, che annuncia il termine tecnico di *xiandang zhi lū* in 8.18, così come l’inversione di cui sono oggetto i valori di 3 e 4.

¹¹⁵ Dove: “(...) di una procedura differente” (8.18). Questo uso classico di *lū*, che ci rinvia al capitolo 2, si trova così articolato con la concezione dei termini ove “misure” di una colonna come *lū*, nel quadro di *fangcheng*. Vedi *lū, cheng* “misurare”.

¹¹⁶ Questo problema impiega i nomi astratti dei tronchi celesti (Vedi *Jia, Yi*) così che il verbo “ottenere” (Vedi *de*) ed una operazione di “metà” (Vedi *han*), per costituire un enunciato che il commentario potrebbe riprendere in termini questa volta totalmente astratti: vi restano solo le incognite, designate dai tronchi celesti e le operazioni. Sono gli stessi ingredienti che si trovano nelle rappresentazioni simboliche di *Li Ye* dei sistemi di equazioni lineari (Vedi Chemla 1982, capitolo 6).

¹¹⁷ Dove: “I diminuire-aumentare”. Vedi *sun* “diminuire, *yi* “aumentare”, *sunyi* “trasformare”. Queste due operazioni, introdotte in 8.2 relativamente all’addizione ed alla sottrazione al fine di praticare delle trasformazioni di enunciati di eguaglianza in quanto tali, sono ripresi relativamente alla divisione e moltiplicazione (vedi Chemla 1994a). Portando su enunciati astratti, che non sono standard in quanto comportano frazioni, queste operazioni li trasformano in enunciati ai quali si può, per contrasto, direttamente associare delle colonne sulle quali applicare *fangcheng*. Bisogna comprendere qui il binomio *sunyi* come il nome di una operazione generale (diminuire-aumentare) che trasforma gli enunciati di eguaglianza che cambia addizione e sottrazione, moltiplicazione e divisione? Oppure bisogna prendere atto del fatto che solo le divisioni sono ritornate moltiplicazioni, e tradotto, nello spirito del problema 8.2, come noi lo facciamo? La scelta è aperta, sebbene la sintassi faccia propendere per la seconda ipotesi.

¹¹⁸ La riscrittura dell’enunciato “*Jia* $\frac{1}{2}$ *Yi* *er* 50” evoca, con l’uso della particella *er*, l’espressione di una divisione (Vedi *er yi*).

¹¹⁹ L’espressione ricorda quella, più standard, di “far comunicare l’intero e incorporare al numeratore” (Vedi *tong quan na zi*). Riscrive la trasformazione della diminuzione in aumento nel contesto del problema concreto. Tuttavia, contrariamente a questa ultima operazione, porta su di una equazione, e non su di un numero: moltiplicare le parti intere implica dunque di operare sugli altri termini dell’equazione; quanto all’incorporazione, rinvia alla costituzione del nuovo enunciato.

¹²⁰ Vedi *ding* “determinato”, *wu* “cosa, tipo di cosa”.

Supponiamo che il prezzo di 2 cavalli e di un bue superi 10000 come il prezzo di un mezzo cavallo, e che il prezzo di un cavallo e di 2 buoi non riempie 10000 come il prezzo di un mezzo bue. Si chiede quanto valgono rispettivamente i prezzi di un bue e di un cavallo.

Risposta: Il prezzo di un cavallo vale $5\ 454$ sapechi $\frac{6}{11}$ di sapeco;
Il prezzo di un bue vale $1\ 818$ sapechi $\frac{2}{11}$ sapeco.

Procedura: si segue fangcheng. Ciò di cui si diminuisce, si aumenta¹²¹.

Qui, un cavallo e mezzo ed un bue hanno come prezzo il valore 10000, 2 buoi e mezzo ed un cavallo hanno egualmente il valore di 10000. Se un cavallo e mezzo ed un bue valgono 10000 sapechi, che si fa comunicare le parti e che si incorpora ai numeratori¹²², la colonna di destra fa: 3 cavalli e 2 buoi valgono 20000 sapechi. Se 2 buoi e mezzo cavallo valgono 10000 sapechi, che si fa comunicare le parti e che si incorpora ai numeratori, la colonna di sinistra fa: 2 cavalli e 5 buoi valgono 20000 sapechi.

(8,12)

Supponiamo che 1 cavallo da guerra, 2 cavalli di qualità media, 3 cavalli di qualità inferiore, ogni gruppo porta 10 Dan, arrivano ad una salita, che nessun gruppo può scalare. Se un cavallo da guerra è aiutato da un cavallo di qualità media, i cavalli di qualità media sono aiutati da un cavallo di qualità inferiore, i cavalli di qualità inferiore sono aiutati da un cavallo da guerra, possono allora, in ogni caso, scalare¹²³. Si chiede quanta forza può tirare rispettivamente un cavallo da guerra, un cavallo di qualità media, un cavallo di qualità inferiore.

Risposta: Un cavallo da guerra con la sua forza tira 22 Dan $\frac{6}{7}$ di Dan;
Un cavallo di qualità media con la sua forza tira 17 Dan $\frac{1}{7}$ di Dan;
Un cavallo di qualità inferiore con la sua forza tira 5 Dan $\frac{5}{7}$ di Dan.

Procedura: Si segue il fangcheng. Si mettono rispettivamente quello di cui sono aiutati, e si introduce la procedura del positivo e del negativo.

(8,13)

¹²¹ Dove: “I diminuire-aumentare”. Lo stesso problema si pone per tradurre *sunyi* in 8.10. L’operazione rinvia qui alla sola trasformazione che fa sparire le frazioni, come più in alto? O rinvia all’insieme delle trasformazioni applicate qui agli enunciati per conferire loro forma standard? La traduzione opta per il primo caso. Optare per il secondo ritornerebbe a vedere in *sunyi* una operazione più generale alla quale si potrebbe ricorrere in contesti variati. Notiamo che le operazioni di aumento e di diminuzione, introdotte nel corso del problema 8.2 per non portare sui termini costanti, si rivelerebbero dunque poter agire ugualmente su altri tipi di termini. Vedi Chemla 1994a.

¹²² Ci si può riportare alle note del problema precedente, tenendo conto della leggera differenza che costituisce il fatto che gli enunciati, invece di frazioni pure, comportano adesso degli interi aumentati da frazioni.

¹²³ Come in 8.3, il termine *qu* “prendere”, al quale l’enunciato ricorre con un valore concreto, era utilizzato più generalmente per designare il modo in cui delle equazioni incorporano le incognite, inoltre il termine *jie*, che prende qui il senso concreto di “aiutare”, ad usi più astratti, nel capitolo 8 come altrove (vedi *jie* “chiedere in prestito”). Notiamo che le due ultime qualità sono sempre qualità per i marcatori centrale/basso, il primo attinge ad un altro registro.

Supponiamo che cinque famiglie debbano dividersi un pozzo, quello che manca a due corde di Jia (per arrivare al fondo del pozzo), è come una corda di Yi¹²⁴, quello che manca a 3 corde di Yi, è come una corda di Bing, quello che manca a 4 corde di Bing, è come una corda di Ding, quello che manca a 5 corde di Ding, è come una corda di Wu, quello che manca a 6 corde di Wu, è come una corda di Jia e che, se ciascuna otteneva la corda che gli manca, tutte sarebbero arrivate (al fondo del pozzo). Si chiede quanto vale la profondità del pozzo e la lunghezza delle corde rispettivamente¹²⁵.

Risposta:

La profondità del pozzo vale 7 ZHANG 2 CHI 1 CUN.

La Lunghezza della corda di Jia vale 2 ZHANG 6 CHI 5 CUN.

La Lunghezza della corda di Yi vale 1 ZHANG 9 CHI 1 CUN.

La Lunghezza della corda di BING vale 1 ZHANG 4 CHI 8 CUN.

La Lunghezza della corda di DING vale 1 ZHANG 2 CHI 9 CUN.

La Lunghezza della corda di WU vale 7 CHI 6 CUN.

Procedura: Si segue FANGCHENG. E si introduce la procedura del positivo e del negativo.

Se questi *lü* sono in un primo tempo trattati seguendo FANGCHENG, essi rinviano ogni volta al fatto che si raggiunge il fondo del pozzo una volta¹²⁶. Dopo ciò (dopo la risoluzione), quando si ottiene come divisore 721, come dividendo (shi) 76, questo corrisponde al fatto che con 721 corde, si raggiunge 76 volte il fondo del pozzo, sia: si mette insieme la quantità (shu) di volte di cui si ottiene (il fondo del pozzo)¹²⁷. Se si divide il dividendo (shi) con il divisore, allora la quantità (shu) di quello che una corda di WU raggiunge del pozzo è determinata¹²⁸: essa raggiunge 76/721. E' perché se 721 è preso come profondità del pozzo, 76 come Lunghezza della corda di WU, si instaurano dei *lü* per esprimere ciò (i risultati)¹²⁹.

¹²⁴ Si tratta della corda per attingere l'acqua nel pozzo. Le corde associate ad una famiglia devono essere intese come aventi una lunghezza uniforme. Notare l'uso della serie astratta dei tronchi celesti.

¹²⁵ Il problema enuncia cinque relazioni e richiede di determinare sei incognite. Quello che prima era termine costante è qui ugualmente incognito. Dopo aver esplorato, a partire da 8.8, la possibilità per questi termini costanti di presentare la stessa varietà di valori che gli altri termini dell'equazione, I Nove Capitoli mettono in evidenza un'altra affinità tra dividendo e divisore che compongono una equazione lineare.

¹²⁶ La qualità del *lü* dei termini che entrano nella composizione di una colonna si trasmettono qui ai risultati: sarà così che Liu Hui leggerà i risultati di questo problema indeterminato. Invece di dare infinite soluzioni, la soluzione presentata si comporrà di numeri di altra natura (Vedere *lü*). Liu Hui enuncia in un primo tempo il significato, nel contesto della situazione, di questo carattere, per i numeri dell'enunciato, di essere dei *lü*. Il commentario sostituisce le sei incognite con le cinque incognite che sono i rapporti delle lunghezze delle corde rispetto la profondità del pozzo.

¹²⁷ Dove: « - è il numero di volte (*shu*) che si attende (il fondo del pozzo) utilizzando l'insieme ». L'espressione farà eco alla seguente: Tale era l'interpretazione che si trasmette all'ultima colonna, alla fine della risoluzione, quando essa non comporta che due termini, l'uno associato a una incognita dell'altro, costante.

¹²⁸ Il risultato fornito da *fangcheng* è interpretato come un problema determinato (Vedi *DING*) della lunghezza del pozzo (notare l'espressione senza unità della frazione). Dove ogni decisione su questa lunghezza risulta in un insieme numeri assoluti, per le diverse corde.

¹²⁹ Si può puntualizzare in modo leggermente diverso: « E' perché se 721 è preso come profondità del pozzo, 76 è preso come lunghezza della corda di WU. Si instaurano dei *lü* per esprimere questo (i risultati). » E' interessante che questa espressione di “instaurare dei *lü*” faccia eco alla stessa espressione, in 8.1, relativa questa volta ai coefficienti della colonna rappresentante una equazione.

(8.14)

Supponiamo che si abbiano 2 Bu di miglio bianco, 3 Bu di miglio bleu-verde, 4 Bu di miglio giallo, 5 Bu di miglio nero, di cui le produzioni (shi) non riempiono in alcun caso un Dou. Se con il bianco si prende del blu-verde e del giallo, con il blu-verde si prende del giallo e del nero, con il giallo si prende del nero e del bianco, con il nero si prende del bianco e del bleu-verde, ogni volta con ragione di 1 Bu, allora la produzione (shi) riempie il Dou¹³⁰. Si chiede quanto producono (shi) rispettivamente un Bu di miglio bianco, di bleu-verde, di giallo e di nero.

Risposta: un Bu di miglio Bianco produce (shi) 33/111 di Dou;
un Bu di miglio Bleu-verde produce (shi) 28/111 di Dou;
un Bu di miglio Giallo produce (shi) 17/111 di Dou;
un Bu di miglio Nero produce (shi) 10/111 di Dou.

Procedura: Si segue Fangcheng. In ogni caso, si mette quello che è preso, e vi si introduce la procedura del positivo e del negativo.

(8.15)

Supponiamo che i pesi di 2 Bing di miglio di Jia, di 3 Bing di miglio di Yi, di 4 Bing di miglio di Bing superi tutti 1 Dan, i pesi di 2 (Bing di) Jia come quello di 1 di Yi, i pesi di 3 (Bing di) Yi come quello di 1 di Bing, i pesi di 4 (Bing di) Bing come quello di 1 di Jia¹³¹. Si chiede quanto pesano rispettivamente un Bing di miglio di Jia, di Yi e di Bing.

Risposta: 1 Bing di miglio di Jia pesa 17/23 di Dan;
1 Bing di miglio di Yi pesa 11/23 di Dan;
1 Bing di miglio di Bing pesa 10/23 di Dan.

Procedura: Si segue Fangcheng. Si mettono le cose per le quali i pesi superano il Dan come negativo¹³².

Questo problema significa che il peso di 2 Bing di miglio di Jia supera 1 Dan. Come si esprime ciò che supera? Come il peso di un Bing di Yi. Se si invertono i calcoli, che si fanno (questi numeri) detrarre l'uno dall'altro¹³³, allora si prende uniformemente un Dan come dividendo (shi) delle loro differenze. Il dividendo (shi) della loro differenze¹³⁴, è come il dividendo (shi) che

¹³⁰L'enunciato evoca immancabilmente 8.3, ed il termine di *qu* « prendere » vi riveste lo stesso carattere doppio, concreto e astratto.

¹³¹ Per contrasto con la figura del « non riempire » (vedi *human*) precedente, si trova qui quella del sorpasso (*guo*).

¹³² Vedi *wu* « cosa, tipo di cosa ».

¹³³ Vedi *wu* « invertire ». Sebbene non riprenda l'espressione considerata in casi simili, può essere l'enunciato che danno, per l'inizio della frase, le edizioni antiche potrebbe essere conforme all'originale se lo si interpreta come : « Se si esprime (*yan*) questi calcoli (*suan*) invertendoli (...) » (*Li Jimin* 1993), *Jiuzhang suanshu jiaozhaeng*, nota 61, p.450, propone di considerare che i caratteri *hu* e *yan* saranno stati invertiti nel corso della trasmissione, e restituisce il testo originale così : « Questo significa che invertendo i calcoli e facendosi togliere (...) ».

¹³⁴ Vedi *shi* « dividendo », *cha shi* « dividendo della differenza ». la ricorrenza di questo ultimo termine in un contesto dove non é questione di produzione di grano, ma di pesi, sottolineandone la generalità. Il fatto che sembra qui commentare in rapporto con il suo primo enunciato rende sorprendente la menzione di questo « uniformemente » (*yi*) nel quale Dai Zhen vedeva una interpolazione. (Bai Shangshu 1982b, nota 72, p.22) seguito in questo da Li Jimin 1993, *Jiuzhang suanshu jiaozheng*, nota 62, p. 450, fa Di Paola&Spagnolo, I sistemi indeterminati nei Nove Capitoli di Liu Hui...

resta del miglio di Jia. In seguito, i numeri rappresentati dalle bacchette che si mettono sono uguali l'uno l'altro¹³⁵.

Si introduce la procedura del positivo e del negativo.

Questa introduzione rinvia al fatto che delle posizioni di testa ai “nomi differenti sono eliminati l'uno dall'altro”, allora “se il positivo non ha dove entrare, lo si rende positivo, se il negativo non ha dove entrare, lo si rende negativo”¹³⁶.

(8.16)

Supponiamo che un direttore, 5 ufficiali secondari e 10 attendenti mangiano 10 polli; 10 direttori, 1 ufficiale secondario e 5 attendenti mangiano 8 polli; 5 direttori, 10 ufficiali secondari ed un attendente mangiano 6 polli. Si chiede quanti polli mangiano rispettivamente un direttore, un ufficiale secondario ed un attendente.

*Risposta: Un direttore mangia 45/122 di pollo;
Un ufficiale secondario mangia 41/122 di pollo;
Un attendente mangia 97/122 di pollo.*

Procedura: Si segue Fangcheng. Vi si introduce la procedura del positivo e del negativo.

(8.17)

Supponiamo che 5 pecore, 4 cani, 3 galline e 2 conigli valgono 1496 sapechi; 4 pecore, 2 cani, 6 galline e 3 conigli valgono 1175 sapechi; 3 pecore, 1 cane, 7 galline e 5 conigli valgono 958 sapechi; 2 pecore, 3 cani, 5 galline ed un coniglio valgono 861 sapechi. Si chiede quanto valgono i prezzi rispettivamente di una pecora, di un cane, di una gallina e di un coniglio.

*Risposta: Il prezzo di una pecora vale 177;
Il prezzo di un cane vale 121;
Il prezzo di una gallina vale 23;
Il prezzo di un coniglio vale 29.*

Procedura: Si segue Fangcheng. Vi si introduce la procedura del positivo e del negativo.

(8.18)

Supponiamo che 9 Dou di grano di canapa, 7 Dou di grano, 3 Dou di Soia, 2 Dou di fagioli mungo e 5 Dou di miglio glutinato valgono 140 sapechi; 7 Dou di grano di canapa, 6 Dou di grano, 4 di Soia, 5 di fagiolo mungo e 3 Dou di miglio glutinato valgono 128 sapechi; 3 Dou di grano di canapa, 5 Dou di grano, 7 Dou di soia, 6 Dou di fagioli mungo e 4 Dou di miglio

l'ipotesi che questo carattere ed il seguente sono stati invertiti, questo darebbe il testo originale seguente :
« (...) allora si prende 1 (yi) dan come dividendo (shi) della loro differenza ».

¹³⁵ Dove : « per ciò che è di mettere (vedi zhi) le bacchette che rappresentano numeri (vedi suan), sono identici l'uno all'altro ». E' possibile che questa comparazione porti sui diversi enunciati del problema, o su questo problema qui ed un altro : il precedente o un problema del tipo 8.4.

¹³⁶ Dove : « Come questo rileva (vedi ru) della (clausola per il caso dove) delle posizioni di testa ai « nomi differenti sono eliminati l'un l'altro », allora « se il positivo non ha dove entrare, lo si rende positivo, se il negativo non ha dove entrare, lo si rende negativo ». Il commentario cita una parte della « procedura del positivo e del negativo » (8.3) che sarà qui utile.

glutinato valgono 116 sapechi; 2 Dou di grano di canapa, 5 Dou di grano, 3 Dou di Soia, 9 Dou di fagioli mungo e 4 Dou di miglio glutinato valgono 112 sapechi; 1 Dou di grano di canapa, 3 Dou di grano, 2 Dou di soia, 8 Dou di fagioli mungo e 5 Dou di miglio glutinato valgono 95 sapechi. Si chiede quanto vale 1 Dou.

*Risposta: 1 Dou di grano di canapa, 7 sapechi;
 1 Dou di grano, 4 sapechi;
 1 Dou di soia, 3 sapechi;
 1 Dou di fagiolo mungo, 5 sapechi;
 1 Dou di miglio glutinato, 6 sapechi;*

Procedura: Si segue Fangcheng. Vi si introduce la procedura del positivo e del negativo. Questo problema, così come la “ponderazione reiterata in funzione dei gradi” e le “parti del prodotto” (*jifen*) dei capitoli “pagamento dell’imposta in modo egualitario in funzione del trasporto” e “piccola larghezza” sono tutte delle grandi realizzazioni¹³⁷. Gli individui che, maldestri nello scegliere le sottili costituzioni interne (*li*), non fanno che appoggiarsi sulla procedura d’origine e talvolta svolgono un tappeto di feltro per utilizzare delle bacchette, ma amano quello che è complicato, si compiacciono degli errori¹³⁸. Infine, non sanno che questo (comportamento) non è corretto e considerano, al contrario, che la complessità (dei loro calcoli) gli varrà la considerazione altrui¹³⁹. E’ perché non è alcun loro calcolo che sia suscettibile di variazione e che non porti ad strada chiusa¹⁴⁰. Per quel che riguarda questa maniera di fare, è possibile che porti per caso alla riuscita, ma non è detto che ci riesca, e non può dire ciò che è l’essenziale e il più semplice¹⁴¹.

¹³⁷ IL « problema » é, nel testo cinese, designato dal nome dei due primi tipi di grano menzionati nell’enunciato. Vedi *chong* « reiterato », *cui fen* « parti ponderate in funzione dei gradi », *jifen* « parti del prodotto ». Queste due procedure matematiche alle quali il commentario fa riferimento si distinguono per semplificazione, ma egualmente l’integrazione algoritmica che apportano relativamente ad altri metodi considerati o esistenti. Le introduzioni ai capitoli 4 e 6 discutono del loro tenore e del giudizio che formula qui Liu Hui. Il commentario ritorna più lontano sul termine di « grandi realizzazioni » su questo angolo. Ed é in questa direzione che si impegnerà qui per proporre un’altra procedura invece ed al posto del *fangcheng*.

¹³⁸ Vedi *li* « costituzione interna », *suan* « bacchette da calcolare ». La « procedura d’origine », rinvia senza dubbio all’algoritmo *fangcheng* dei Nove Capitoli, che un lettore ordinario metterebbe qui in opera « direttamente » e che il commentatore si appresta al contrario a ripensare in seguito. Può essere che bisogna comprendere che questo problema mette in rilievo, per Liu Hui, certi limiti, in materia di pesantezza, del metodo, se si prende alla lettera la sua esposizione nel Classico.

¹³⁹ Si può egualmente comprendere : « Non rendono assolutamente conto dei loro errori e, all’indietro, valorizzano di proposito la complessità ».

¹⁴⁰ Si può ugualmente comprendere : « In materia di calcoli, ciascuno ha l’intelligenza richiesta per stabilire delle comunicazioni (*tong*) ed unificare in un solo principio (*viduan*). » Questa ultima espressione di *viduan* si ritrova nella prefazione, in relazione con l’obiettivo di unificazione che gli é associato (vedi le note corrispondenti) e che si manifesta regolarmente tanto nel Classico che presso i commentari.

¹⁴¹ Dove : « Per quello che riguarda questa categoria (Vedi *lei*) (dei problemi), é possibile che essa (la procedura d’origine) condotta per caso alla riuscita, ma arriva che induce in errore, e non si può dire che essa sia la più concisa e la più semplice ». Se effettivamente il soggetto rinvia alla « procedura d’origine », é sorprendente che sia con essa che il commentario (vedi qui sotto « se lo si fa con l’antica procedura (...) ») cerca in seguito di fare semplice e conciso. E’ l’uso meccanico della destra alla sinistra della procedura che il commentatore qui valuta niente ? Certo, il dettaglio dell’applicazione del metodo che qui sotto mostra che prende su questo rapporto di libertà. E le linee che seguono potranno confermare Di Paola & Spagnolo, I sistemi indeterminati nei Nove Capitoli di Liu Hui...

Vi è per altro una procedura straordinaria¹⁴²: quando il cuoco Ding tagliava il bue, faceva andare il suo coltello negli interstizi della struttura (li), e poteva di conseguenza guardare il coltello come nuovo. Ora le procedure matematiche (*shu*) sono somiglianti al coltello: se li si utilizza conformandosi alle (norme) di facilità e semplicità, allora si soddisfa costantemente il principio (li) del cuoco Ding¹⁴³; ecco perché se si è capaci di armonizzarsi con il suo proprio spirito (shen) proteggendo il coltello¹⁴⁴, allora si è rapidi ma gli errori sono rari.

Tutto quello che I Nove Capitoli hanno come grandi realizzazioni, se si sa il metodo, non si utilizza più di 100 passi di calcolo¹⁴⁵. Anche se i calcoli svolti non sono numerosi, questo basta a quello che i calcoli (effettuati) siano complessi. Vi sono molte persone che considerano *fangcheng* difficile; ve ne sono che pensano che le configurazioni (*xiang*) nei quali svolgono l'insieme dei calcoli non costituiscono che un assemblaggio di positivi e negativi¹⁴⁶. Hanno passato del tempo a discutere il fatto che le loro trasformazioni non obbediscono ad una regola determinata¹⁴⁷. E' come armonizzare una chitarra dove le corde fossero incollate.

questa interpretazione. Il valore di semplicità ritorna frequentemente nei commentari dove essa riveste differenti significati tecnici (vedi *yue*) e prende delle varie espressioni. Il seguito li evoca, giustificando il prezzo che gli è accordato.

¹⁴² Dove : « (...) una procedura differente » ; l'espressione riprende quella del commentario al problema 8.9, dove sembra annunciare la nuova procedura *fangcheng*. L'aneddoto del cuoco *Ding* rinvia a *Zhuangzi* (capitolo 3, « *Yanghengzhu* (I punti principali per nutrire la vita) », edizione di Guo Qingfan, vol. 1, p.119 ; traduzione in (Graham 1986a, pp. 63-64), (Liou Kia-hway 1969), pp. 46-47), (Cheng, Anne, 1994a, pp.61-62) : dopo anni di esercizi, il cuoco non tagliava più il manzo guardandolo, ma, temendolo « per la scappatoia demoniaca » (é così che Graham rende *shen*, che noi ritroveremo qui sotto), ne conosceva così intimamente la struttura interna (*tianli*, vedi *li*) che egli poteva passeggiare (*you*) il suo coltello negli interstizi (*jian*).

¹⁴³ Vedi *yi* « facile », *jian* « semplice », *li* « costituzione interna, struttura, principio ».

¹⁴⁴ Dove : « é perché, venendo in accordo con il demoniaco (shen) si risparmia il taglio, e di conseguenza (...) ». Shen, di cui Graham dà le due occorrenze in questo passaggio del *Zhuangzi* per « daimonique », può rinviare ad una capacità del Saggio, così bene che alla dimensione insondabile del reale. Riportarsi alla nota 3 della prefazione. Si può in seguito comprendere che Liu Hui evoca qui il fatto sia di trovare una capacità interiore, sia di mettersi di taglio con una capacità del reale, in occorrenza matematico. Il seguito dà ragione alla seconda ipotesi.

¹⁴⁵ Vedi *fa* « metodo », *suan* « non calcolo, calcolo, bacchette per calcolare ».

¹⁴⁶ Il senso della frase non é certo. Senza dubbio *xiang* rinvia alle configurazioni dei numeri della superficie da calcolare sui quali la procedura *fangcheng* opera, che essa trasforma. Si può egualmente tentare la traduzione : « (...) che le configurazioni (*xiang*) che spiegano l'insieme dei numeri rappresentati con le bacchette (*suan*) fanno raggiungersi continuamente (in un certo senso meccanicamente) (numeri) positivi e negativi ».

¹⁴⁷ Si può egualmente tradurre : « non hanno preso il piacere di discutere il fatto che le trasformazioni (*dong*) delle (configurazioni di numeri) disposti (*she*) non conoscerebbero alcun limite (nella loro variabilità, nei luoghi dove operano, le direzioni che prendono – o : né incontrano alcuna restrizione , né sono determinati in alcun modo) ». Questa ultima espressione di *wufang* caratterizza lo shen in *Xici zhuan*, o « Grande commentario » di *Yijing* (primo capitolo, paragrafo 4). Si incontra ugualmente nella prefazione di Liu Hui. Il commentatore sembra opporre qui l'applicazione rigida e meccanica del *fangcheng* ad una applicazione più adatta alle circostanze dei problemi da risolvere, attingendo la sua ispirazione ad una comprensione dei principi che la fondano. Che contemporaneamente, come in 8.9, il commentatore considera le questioni dell'ordine nel quale eseguire le operazioni e le posizioni sulle quali far portare le prime eliminazioni sembra indicare che nessuna regola determinata avrebbe ristretto la libertà di movimento nei calcoli su ciascuno di questi due assi. Questa ipotesi rende conto del fatto che la nuova procedura conserva lo stesso nome dell'antico, allora che ne condivide con essa l'idea dell'eliminazione dei termini tra colonne.

Per il momento, l’ho largamente sviluppato per fare una nuova procedura, che ho redatto qui sotto¹⁴⁸. Ho come scopo quello di dare una ispirazione che possa servire da guida sui punti (yi) dubbiosi. I punti sottili del metodo (dao) che prende nella sua rete, come sarebbe possibile trasmetterli con espressioni vuote di senso¹⁴⁹? Se si da un esempio della sua utilizzazione, che se ne notino le procedure (shu) di calcolo, è sempre per proporre un angolo¹⁵⁰.

Nuova procedura fangcheng: Si introduce la procedura del positivo e del negativo¹⁵¹. Lo si fa in modo che le (colonne di) sinistra e di destra si sottraggono l’una dall’altra, per eliminare prima i dividendi (shi) del basso, poi per eliminare, a turno, le posizioni corrispondenti ai tipi di cose¹⁵²; bisogna cercare di avere, in una stessa colonna, (i valori) per 2 tipi di cose con un (numero) positivo e negativo che si prendono in prestito l’un l’altro – questi sono i *lü*, corrispondenti (a questi tipi di cose), che danno l’equivalenza dell’uno con l’altro¹⁵³. Inoltre, si fa in modo che questi 2 tipi di cose si eliminano mutuamente l’un l’altro con le altre colonne, dove, a turno, le quantità (shu) di 2 di questi tipi di cose quando si prendono in prestito mutuamente, siano, in tutti gli altri casi, i *lü* che danno delle equivalenze dell’una con un’altra¹⁵⁴. Appoggiandosi

¹⁴⁸ Dove : « In tutti i casi, l’ho estesa e generalizzata (la procedura del *fangcheng* del Classico) per fare una nuova procedura (...) ».

¹⁴⁹ Si potrà puntualizzare altrimenti : « Ho come obiettivo quello di dare una ispirazione che serva da guida ai punti che sollevano delle difficoltà e a prendere i punti sottili del metodo (*dao*). Ma come era possibile trasmettere questi (elementi) con delle espressioni astratte (*kong yan*) ? » La formula sembra oppore la descrizione di una procedura fuori da ogni contesto, alla sua presentazione nel quadro di un problema, ed anche, qui, al lavoro su questo problema. Liu Hui ricorreva alla stessa espressione in 8.1 per giustificare la presentazione, per il Classico, di *fangcheng* nel contesto del problema del grano. Vedi *kong* « astratto ».

¹⁵⁰ Dove : « Ho dunque dato un esempio (*li*) della sua utilizzazione, e ne ho notato le quantità (*shu*) che formano le bacchette per calcolare (*ce*), in modo che, per ogni punto, si presenta un angolo. « Si ritrova la citazione dei Seguaci di Confucio, relativa al modo con cui il maestro si aspetta che le discipline lavorino alle quali accorda il beneficio del suo insegnamento (*Lunyu*, « *Shu'er* », 7.8, Shisanjung zhushu, p.2482) : « Se gli presento un angolo (di un quadrato) e che non risponde con gli altri tre, allora non mi torna. » La citazione precisa senza dubbio lo statuto dell’esempio : « il lettore deve poter estrapolare, da questo caso, il trattamento dell’insieme dei problemi analoghi, come i tre angoli di un quadrato con il quarto. Vedi 2.0.

¹⁵¹ Vedi *ru* « introdurre ».

¹⁵² Si può fare l’ipotesi che una volta eliminati (*qu*) tutti i dividendi (vedi *shi*) con l’eccezione di uno di essi, la procedura riprende l’idea della procedura dei Nove Capitoli di eliminare sino ad ottenere che un’altra colonna contiene unicamente due termini, relativi questa volta a 2 incognite, di cui una positiva ed una negativa (Vedi *wu* « cosa, tipo di cosa », *wei* « posizione »). Anche se questo non sembra corrispondere alla ricostruzione dell’applicazione della procedura al problema, qui sotto, non si può escludere che l’indicazione vada più lontano : che bisogni ottenere una colonna che non comporta che 2 posizioni, un’altra 3 posizioni, ... , un’ultima n posizioni, senza che sia assegnato alcun ordine. Notiamo che non è specificato, per contrasto con quello che precede, che le sottrazioni si effettuano tra colonne.

¹⁵³ Si può ugualmente tradurre : « se si cerca allora di avere, in una stessa di queste colonne, 2 tipi di cose, l’una (a coefficiente) positivo e l’altro negativo, che si prendono a prestito l’un l’altro, che sono i *lü* corrispondenti (a questi tipi di cose) che danno una equivalenza dell’uno con l’altro ». Rileviamo il ruolo chiave che giocano qui numeri positivi e negativi nell’estensione della procedura, e come la semantica formale dello scambio fornisce una interpretazione di questo tipo di colonne (vedi *jie* « prendere a prestito »). I coefficienti delle incognite sono rilette come una forma di *lü* – un termine che prende ugualmente il senso della norma – (Vedi *xiangdang zhi lü* « i *lü* che danno l’equivalenza dell’una con l’altra »), e *fangcheng* sarà adesso concepito nelle sue relazioni con la procedura del « supponiamo ».

¹⁵⁴ Vedi *jie* « prendere a prestito ». L’idea chiave sembra essere, una volta che si dispongono dei *lü* corrispondenti a due tipi di cose, di metterli in opera per fare sparire uno di questi tipi, quando appaiono simultaneamente, in vista di determinare i *lü* corrispondenti a delle altre coppie di tipi di cose. Si può

rispettivamente sui *lü* che danno le equivalenze di 2 tipi di cose l'una con un'altra, si scambiano i loro valori (*shu*) (a due a due) per avere i *lü* che convengano per ciascuno¹⁵⁵. Si mette, inoltre, una colonna definita, con il suo dividendo (*shi*) di sopra¹⁵⁶, e vi si (applichi) rispettivamente (a ciascuno dei positivi) (l'operazione) del “supponiamo”, con i *lü* fondamentali di cose che gli corrispondono¹⁵⁷, per cercare la (quantità equivalente nell'una che sarà) la stessa per tutti. Si sommano (i risultati) e si prende questo come divisore. Se bisogna sommare gli uni agli altri e che nella colonna positivi e negativi sono mischiati, allora i numeri dello stesso nome si raggiungono gli uni agli altri, questi dei nomi differenti sono detratti gli uni agli altri, ed il resto è preso come divisore¹⁵⁸. Si prende questo che è messo in basso come dividendo (*shi*). Effettuare la divisione del dividendo (*shi*) con il divisore da quello che è conforme a quello che si chiede¹⁵⁹. Si (applica) rispettivamente ad ogni cosa (l'operazione) del “supponiamo” con i *lü* fondamentali, questo che da in tutti i casi ciò che è conforme a quello che era chieso. I *lü* che non comunicano, li si omogeneizzano¹⁶⁰.

Altra procedura: Si mettono i *lü* che mettono in comunicazione tutti i tipi di cose come file di coefficienti della ponderazione in funzione dei gradi¹⁶¹. Si mettono di nuovo le quantità (*shu*) associate a tutti i tipi di cose nella colonna definita¹⁶²; esse sono rispettivamente moltiplicate per il *lü* che gli corrisponde, e li si sommano (i risultati), quello che è preso come divisore. Se bisogna sommarli gli uni agli altri e nella colonna positivi e negativi sono mischiati, allora i numeri dello stesso nome si raggiungono gli uni agli altri, questi dei nomi differenti sono detratti gli uni agli altri, ed il resto fa il divisore. Si moltiplica, per il dividendo dal basso della colonna definita, la fila dei coefficienti della ponderazione in funzione dei gradi; ciascuno fa rispettivamente un dividendo (*shi*). Effettuare le divisioni dei dividendi (*shi*) per il divisore da i risultati.

puntualizzare altrimenti: « Inoltre, si fa in modo che questi 2 tipi di cose si eliminino (Vedi *qu*, si facciano sparire) mutualmente l'un l'altro nelle altre colonne, dove si ottiene (*qu*) le quantità (*shu*) di questi due tipi di cose quando si prendono a prestito (*jie*) mutualmente, i *lü* che danno delle equivalenze dell'uno con un altro”. La figura di « farsi sparire mutualmente l'un l'altro » comporta probabilmente la sfumatura che far sparire uno dei termini porta a far sparire l'altro.

¹⁵⁵ Dove: « (...) si scambiano i loro valori (*shu*) due a due per avere i *lü* che sono equivalenti a ciascuno ». Lo scambio fa passare dei *lü* che associano *a* ad *x* e *b* a *y* in virtù della relazione: $ax=by$ ai *lü* che associano *b* ad *x* e *a* ad *y* in virtù della stessa relazione ($x/b = y/a$).

¹⁵⁶ (*Guo Shuchun* 1990), *Huijiaoben*, nota 160, p.413. Dove: « Si mette nuovamente una colonna che si è ottenuta, con il suo dividendo al di sotto. » Idem qui sotto. Il « nuovamente », che si ritrova qui sotto quando la procedura è in opera sul problema, rinvia al fatto che si riprende, a monte, il valore di una colonna che il flusso dei calcoli ha trasformato e che comporta un dividendo di sotto.

¹⁵⁷ Vedi *benlü* « *lü* fondamentali ». La regola del tre che si enuncia in 2.0 – con i *lü* di ciò che si ha e di ciò che si cerca – dovrebbe essere applicato qui ai *lü* che danno l'equivalenza dei tipi delle cose tra di loro, contrariamente al seguito.

¹⁵⁸ Rileviamo che il modo di effettuare una somma tra numeri marcati è qui specificato in funzione dei segni. La struttura della clausola richiama le clausole in 8.3, e il risultato è designato come « resto ».

¹⁵⁹ Il valore dell'incognita corrispondente alla cosa in funzione della quale si sono espresse tutte le altre.

¹⁶⁰ Vedi *tong* « comunicare », *qi* « omogeneizzare ». Se $ax = by$ e $a'x = b'z$, *b* e *b'* non comunicano, ma *ba'* e *ab'* comunicano: mettere in comunicazione insieme di *lü* per l'effetto dell'omogeneizzazione-egualizzazione ritorna lo stesso all'applicazione di queste operazioni alle equazioni che sono le colonne.

¹⁶¹ Vedi *tong* « mettere in comunicazione », *liecui* « ordinare dei coefficienti della ponderazione in funzione dei gradi ». La procedura *cuifen* si applica qui con i *lü* inversi, che mettono i tipi di cose in relazione gli uni con gli altri.

¹⁶² Vedi sotto.

Se si fa con l'antica procedura, si devono mettere in tutto cinque colonne. Si vuole adesso l'essenziale ed il più semplice¹⁶³.

Si mette adesso la terza colonna, sottraendone la quarta colonna, ed inoltre si sottrae (il risultato) della quinta colonna.

In seguito si mette la seconda colonna, si sottrae la seconda colonna dalla prima colonna, ed inoltre si sottrae dalla quarta colonna, che elimina la sua posizione di testa. Si può dividere il resto per 2.

In seguito si mette la colonna di destra e la seconda colonna, e si elimina la loro posizione di testa.

In seguito con la colonna di destra, si elimina la posizione di testa della quarta colonna.

In seguito con la colonna di sinistra, si elimina la posizione di testa della seconda colonna.

In seguito con la quinta colonna, si elimina la posizione di testa della prima colonna.

In seguito con la seconda colonna, si elimina la posizione di testa della quarta colonna.

Si può dividere il resto per 2.

Con la colonna di destra, si elimina la posizione di testa della seconda colonna; con la seconda colonna, si elimina la posizione di testa della quarta colonna.

Si semplifica il resto per fare il divisore ed il dividendo (shi), e se si effettua la divisione del dividendo (shi) per il divisore si ottiene 6; che da il prezzo del miglio glutinato.

Se con l'aiuto del divisore si genera la seconda colonna, si ottiene il prezzo del fagiolo mungo, con la colonna di destra, si ottiene il prezzo della soia, con la colonna di sinistra, il prezzo del grano, con la terza colonna il prezzo del grano di canapa.

In modo che si utilizza in tutto 77 tappe di calcolo.

Se si fa questo con la nuova procedura¹⁶⁴: Prima si sottrae la quarta colonna dalla terza. In seguito con la terza colonna, si eliminano le posizioni di sopra della colonna di destra, della seconda colonna e della quarta colonna.

Inoltre, la si sottrae dalla posizione di sopra della colonna di sinistra, e ci si ferma quando non c'è più niente da sottrarre. In seguito, si sottrae la colonna di sinistra della posizione di sopra

¹⁶³ Dove : « i più concisi e più semplici », riprendono due valori enunciati più avanti. Sottoliniamo che la comparazione che segue tra procedure *fangcheng* antica e nuova sembrano concludersi in favore dell'antica. Le ricostruzioni dei calcoli che seguono differiscono sostanzialmente da un autore all'altro. Notiamo che la descrizione procede con l'aiuto delle due operazioni fondamentali : eccetto alcune semplificazioni per 2, la sottrazione tra colonne, e con l'aiuto di una colonna, eliminare la posizione di testa di un'altra colonna. Ricordiamo che questa posizione designa il valore non nullo più alto di una colonna ad un momento dato del calcolo.

¹⁶⁴ La descrizione della procedura ricorre questa volta, eccetto la semplificazione, a tre gruppi di operazioni fondamentali : (1) «Con una colonna, eliminare una posizione da un'altra colonna. » Questo può essere una posizione designata dal nome del grano che gli è attaccato, o il termine della posizione di sotto che, per simmetria con quello della « posizione di testa », designa il valore non nullo più basso di una colonna. (2) « Sottrarre una colonna di una posizione ad un'altra colonna e fermarsi quando non vi è altro da sottrarre. » La sottrazione tra colonne è controllata da una posizione della colonna che si sottrae, e deve essere fermata quando la sottrazione non è più possibile in numeri assoluti ; questo passaggio costituisce la principale parte del commentario, se non la sola, dove questa operazione è messa in opera. (3) Sottrarre tra colonne. Questa operazione, usuale in questo capitolo, è qui designata dal semplice nome della sottrazione. Si ritrova in questo paragrafo una variante, sorprendente a priori : « sottrarre una colonna da una posizione data di un'altra colonna ». Per (Li Jimin 1993), *Jiuzhang suanshu jiaozheng*, (vedi per esempio nota 84, p. 455) il nome della posizione costituisce là una interpolazione. Il fenomeno si riproduce ogni volta con dei multipli ripresi in qualche linea.

della terza colonna, in seguito con la terza colonna si elimina la posizione di sopra della colonna di sinistra. Quando è finito, ci si libera della terza colonna¹⁶⁵.

In seguito con la quarta colonna, si elimina la posizione di sopra della colonna di sinistra, inoltre la si sottrae dalla posizione di sopra della colonna di destra.

In seguito con la colonna di destra, si elimina la posizione di sopra della seconda colonna e della quarta colonna.

In seguito, si sottrae la seconda colonna della posizione di testa della quarta colonna e della colonna di sinistra.

In seguito, si sottrae la quarta colonna della posizione della soia della colonna di sinistra, e ci si ferma quando non c'è altro da sottrarre.

In seguito, si sottrae la colonna di sinistra della posizione di testa della seconda colonna; si può a due riprese dividere il resto per 2.

In seguito con la quarta colonna si elimina la posizione di testa della colonna di sinistra e della seconda colonna.

In seguito con la seconda colonna si elimina la posizione di testa della colonna di sinistra. Se si semplifica quello che rimane, in alto si ottiene 5, in basso 3, ciò che fa che 5 di soia equivalgono a 3 di fagioli mungo¹⁶⁶.

In seguito con la colonna di sinistra si elimina la posizione della soia della seconda colonna, inoltre, si sottrae la posizione della soia della quarta colonna e della colonna di destra, e ci si ferma se non c'è più nulla da sottrarre.

In seguito, si sottrae la colonna di destra della posizione di testa della seconda colonna, e ci si ferma quando non c'è più nulla da sottrarre.

In seguito con la seconda colonna si elimina la posizione di testa della colonna di destra.

In seguito con la colonna di sinistra, si elimina la posizione di testa della colonna di destra.

Come resto, in alto si ottiene 6, in basso 5, che corrisponde al fatto che 6 di fagioli mungo equivalgono a 5 di miglio glutinato.

In seguito con la colonna di sinistra, si elimina la posizione del fagiolo mungo della colonna di destra. Se si semplifica quello che resta, in alto questo fa 2, in basso 1.

In seguito con la colonna di destra, si elimina la posizione di sopra della seconda colonna, con la seconda colonna, si elimina la posizione di sopra della quarta colonna, inoltre, si sottrae la posizione di sopra della colonna di sinistra.

In seguito la colonna di sinistra elimina la posizione di sopra della seconda colonna.

Come resto, in alto si ottiene 3, in basso 4, che corrisponde al fatto che 3 di grano equivale a 4 di soia.

In seguito, si sottrae la seconda colonna della posizione di sopra della quarta colonna.

In seguito con la quarta colonna, si elimina la posizione di sopra della seconda colonna.

Come resto, in alto si ottiene 4, in basso 7, che corrisponde al fatto che 4 di grano di canapa equivale a 7 di grano. Questo corrisponde al fatto che sono istaurati i *lū* che danno l'equivalenza degli uni con gli altri¹⁶⁷.

Essendo dati che 4 di grano di canape equivalente a 7 di grano, allora il *lū* del prezzo del grano di canapa è 7 mentre il *lū* del prezzo del grano è 4. D'altro canto, se 3 di grano equivalente a 4 di soia, allora questo fa che il *lū* del prezzo del grano è 4 mentre il *lū* del prezzo della soia è 3. D'altro canto, se 5 di soia equivalente a 3 di fagioli mungo, allora questo fa che il *lū* del prezzo

¹⁶⁵ Eliminata questa colonna momentaneamente, servirà, nella sua versione originale, da base con la quale si opererà per la seconda parte della procedura.

¹⁶⁶ Bisogna comprendere che 5 *dou* di soia valgono lo stesso prezzo di 3 *dou* di fagioli mungo. Idem qui sotto.

¹⁶⁷ Vedi *xiangdang zhi lū* « *lū* che danno l'equivalenza degli uni con gli altri ».

Di Paola&Spagnolo, I sistemi indeterminati nei Nove Capitoli di Liu Hui...

della soia è 3 mentre il *lü* del prezzo del fagiolo mungo è 5. D'altro canto, se 6 di fagioli mungo equivalente a 5 di miglio glutinato, allora questo fa che il *lü* del prezzo del fagiolo mungo è 5 mentre il *lü* del prezzo del miglio glutinato è 6. E questi *lü* comunicano¹⁶⁸.

Si mette di nuovo la terza colonna; si sottrae la quarta colonna, si ha come resto 1 Dou di grano di canapa, 4 Dou di soia, in positivo, 3 Dou in negativo di fagioli mungo e 4 in positivo al dividendo (shi) dal basso. Se si cercano le quantità (shu) che fanno tutto in grano di canape, si moltiplica per 3, il *lü* di soia, per 5, il *lü* di fagioli mungo, rispettivamente le quantità (shu) di Dou corrispondenti, si dividono (i risultati) per 7, il *lü* di grano di canape, e si ottiene, per la soia, 1 Dou $\frac{5}{7}$ di Dou, in positivo, per il fagiolo mungo, 2 Dou $\frac{1}{7}$ di Dou in negativo¹⁶⁹. Allora, la soia ed il fagiolo mungo essendo stati trasformati in grano di canapa, per sommare questi termini, si fa in modo che i numeri dello stesso nome si raggiungono gli uni con gli altri, che questi nomi differenti siano detratti gli uni agli altri, dove, come resto, si ottiene $\frac{4}{7}$ di Dou, come grano di canape determinato¹⁷⁰, che lo si prende come divisore. Si mette 4 come dividendo (shi)¹⁷¹ e lo si moltiplica per il denominatore, si ottiene come dividendo (shi) 28, e il numeratore è trasformato in divisore. Se lo si divide per il divisore, si ottiene 7, che da il prezzo di un Dou di grano di canapa.

Se si mette il *lü* di grano, 4, il *lü* di soia, 3, il *lü* di fagioli mungo, 5, il *lü* di miglio glutinato, 6, e che si moltiplica tutto per il grano di canapa¹⁷², ciascuno fa rispettivamente un dividendo (shi). Prendendo 7, il *lü* di grano di canapa, come divisore, quello che si ottiene fa allora rispettivamente il prezzo.

Si può ugualmente mettere il dividendo (shi) ed i tipi di cose di una colonna d'origine, farli comunicare uguagliandoli¹⁷³; vi si (applica) rispettivamente (a ciascuna posizione) (l'operazione) del “supponiamo”, con i *lü* fondamentali, per cercare quello che i *lü* fondamentali corrispondenti ottengono. Si sommano (i risultati) e si prende questo come divisore. In modo

¹⁶⁸ Vedi *tong* « comunicare ». Si tratta qui di inversione di valori a due a due, la quale produce i *lü* che mettono in relazione i tipi di cose le une con le altre, secondo la modalità inversa. Vedi più in alto.

¹⁶⁹ Si constata che i *lü* dei prezzi sono utilizzati, e dunque che si divide per il *lü* di quello che si cerca, qui per contrasto con quello che segue. Sebbene la regola del tre è ben applicata su numeri marcati da segni. Vedi *hua* « trasformare ».

¹⁷⁰ Vedi *ding* « determinato ».

¹⁷¹ Dove : « Il 4 è preso come dividendo », secondo una suggestione di (Li Jimin 1993), *Jiuzhang suanshu jiaozheng*, nota 103, p.458. Si tratta del dividendo dal basso della colonna sulla quale si opera.

¹⁷² Il prezzo di questo grano (Li Jimin 1993), *Jiuzhang suanshu jiaozheng*, nota 106, p.458, avanza l'ipotesi che questo *jia* « prezzo », all'origine nel testo, è stato vittima di una omissione. Tutte i valori rinviano qui ai prezzi.

¹⁷³ Il fatto di riprendere una delle colonne d'origine assicura che si ha solo coefficienti positivi. Il commentatore rinvia alle colonne particolari di questo problema. Dove *tong* « far comunicare » e *tong* « egualizzare » non designano delle operazioni che si applicherebbero a dei coefficienti frazionari. Senza dubbio bisogna comprendere che esse presentano, in modo formale, l'effetto di regole di tre enunciati: « questi esprimono i termini in funzione di una stessa incognita e li mettono così in comunicazione. Una relazione formale sarà così stabilita tra questa operazione su di una colonna, e la messa in comunicazione per egualizzazione dei denominatori su di un insieme di frazioni. La frase seguente è stata l'oggetto di varie restituzioni. (Bai Shangshu 1982b, nota 80, p.25), proponeva una modifica del testo come lo davano le edizioni antiche che ammettevano di interpretarlo nel seguente modo : « vi si (applica) rispettivamente (ciascuna delle posizioni) (l'operazione) del « supponiamo », con i *lü* fondamentali, per cercare la (quantità equivalente nell'una che sarà la) stessa per tutti. Si somma questo che si ottiene e si prende questo come divisore . » (Li Jimin 1993), *Jiuzhang suanshu jiaozheng*, nota 108, p.440, rigetta questa ipotesi e restituisce il testo così : « si (applica) rispettivamente (a ciascuna delle posizioni) (l'operazione) del « supponiamo », con i *lü* fondamentali. Si somma quello che si ottiene (...) » La traduzione che diamo ha come ipotesi che il testo come è dato dalle edizioni antiche ha senso.

che non ci sia distinzione (da effettuare) tra positivi e negativi; basta scegliere (la categoria di cosa che sarà) comune ed è tutto.

Altrimenti si può farlo con l'altra procedura: Si mettono i *lii* che comunicano nelle cinque colonne, che fa 7 per il grano di canapa, 4 per il grano, 3 per la soia, 5 per i fagioli mungo, 6 per il miglio glutinato, e li si prende come file dei coefficienti della ponderazione in funzione del grado. La colonna definita è 1 Dou di grano di canapa, 4 Dou di soia, in positivo, 3 Dou in negativo di fagioli mungo; ciascuno è moltiplicato per il *lii* che gli corrisponde. Quando è finito, si fa in modo che i numeri dello stesso nome si raggiungano gli uni con gli altri, questi dei nomi differenti siano detratti gli uni dagli altri, ed il resto fa il divisore. Di nuovo, si metta il dividendo (shi) dal basso, e si moltiplichi la fila dei coefficienti della ponderazione in funzione dei gradi; quello che si ottiene fa rispettivamente un dividendo (shi). Qui¹⁷⁴, si può semplificare il divisore per quello che è stato messo, dove non si moltiplica di nuovo la fila dei coefficienti della ponderazione in funzione dei gradi, ma si prende rispettivamente la fila dei coefficienti della ponderazione in funzione dei gradi come prezzo. In modo che, si utilizza allora in tutto 124 tappe di calcolo¹⁷⁵.

Bibliografia

- Karine Chemla & Guo Shuchun, *Les Neuf Chapitres*, Ed. Dunod, Paris, 2004.
Shen Kangshen, John N. Crossley & Antony W.-C. Lun, *The Nine Chapters on the Mathematical Art*, Oxford University Press, Science Press – Beijing, 1999.

¹⁷⁴ La procedura generale si semplifica nel contesto dell'esempio numerico particolare che costituisce il problema.

¹⁷⁵ E' ancora difficile sapere a quello che questo conto rinvia. La comparazione di tutte le procedure elaborate opportunamente su di un problema, che costituiscono la fine di questo testo, non sembrano compiersi in favore di nuove procedure. Hanno tuttavia il vantaggio di rendere il metodo generale più flessibile, e di mettere in evidenza ai suoi legami con altri algoritmi fondamentali.

Glossario

Lü

Vedere l'introduzione al capitoli I, sezione II. Liu Hui introduce il concetto in questi termini (1.18): “Ogni volta che delle quantità sono date in relazione le une con le altre, le si chiamano dei Lü”. Le diverse occorrenze sia nei Classici che nei commentari permettono di precisare quello che è:” ogni volta che i rapporti tra entità, in numeri indeterminati, sono espressi nel loro insieme per via traversa di quantità che sono rispettivamente attaccate a ciascuna di queste entità e che non sono, esse stesse, definite che relativamente le une alle altre, cioè a dire a un fattore moltiplicativo vicino, queste quantità sono suscettibili di vedersi designati come Lü. Il termine di Lü non esprime che il fatto, per tali quantità, di variare nello stesso sotto insieme; ma il modo con cui sono collegati agli oggetti che essi rappresentano è suscettibile di prendere delle forme variate, e i rappresentanti effettivamente ritenuti possono essere sottomessi a dei criteri.

Jia

Il primo della serie dei tronchi celesti, alla quale si ritorna per gli ordinali. Giocano egualmente il ruolo delle lettere dell'alfabeto nel loro impiego di marcatori per la numerazione.

Yi

Il secondo della serie dei tronchi celesti, alla quale si ritorna per gli ordinali. Giocano egualmente il ruolo delle lettere dell'alfabeto nel loro impiego di marcatori per la numerazione.

BING

Il terzo della serie dei tronchi celesti, alla quale si ritorna per gli ordinali. Giocano egualmente il ruolo delle lettere dell'alfabeto nel loro impiego di marcatori per la numerazione.

DING

Il quarto della serie dei tronchi celesti, alla quale si ritorna per gli ordinali. Giocano egualmente il ruolo delle lettere dell'alfabeto nel loro impiego di marcatori per la numerazione.

WU

Il quinto della serie dei tronchi celesti, alla quale si ritorna per gli ordinali. Giocano egualmente il ruolo delle lettere dell'alfabeto nel loro impiego di marcatori per la numerazione.

ZHANG

Dilatare. Si riporta a chang “lunghezza”, altra lettura : “dilatare”.

Misura di lunghezza equivalente a $3 \frac{1}{3}$ di metri.

CHI

Misura di lunghezza equivalente a $\frac{1}{3}$ di metro

CUN

Misura di lunghezza equivalente a $\frac{1}{30}$ di metro.

Appendice 3

Comparazione Gauss-Cramer per la risoluzione di sistemi di equazioni. La nascita della “matrice”.

Il metodo di eliminazione di Gauss

L'idea di Gauss si basa sulla semplice osservazione che se la soluzione verifica tutte le equazioni del sistema lineare verificherà anche le equazioni ottenute combinandone linearmente due tra di loro. E' quindi possibile passare da un sistema "completo" ad uno equivalente triangolare in $n-1$ passi eliminando al j -esimo passo l'incognita x_j da tutte le equazioni dalla $(j+1)$ -esima fino alla n -esima. Schematicamente scriviamo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

1° passo

Si moltiplica la prima riga per $(-\frac{a_{21}}{a_{11}})$ e si sostituisce la seconda riga con la somma delle prime due, si moltiplica la prima riga per $(-\frac{a_{31}}{a_{11}})$ e si sostituisce la terza riga con la somma fra la prima e la terza, si moltiplica la prima riga per $(-\frac{a_{n1}}{a_{11}})$ e si sostituisce la n -esima riga con la somma fra la prima e la n -esima, giungendo a

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \dots \dots a_{22}^1x_2 + \dots + a_{2n}^1x_n = b_2^1 \\ \dots \\ \dots \dots \dots a_{n2}^1x_2 + \dots + a_{nn}^1x_n = b_n^1 \end{cases}$$

2° passo

Si opera analogamente sul sottosistema

$$\begin{cases} a_{22}^1x_2 + \dots + a_{2n}^1x_n = b_2^1 \\ \dots \\ a_{n2}^1x_2 + \dots + a_{nn}^1x_n = b_n^1 \end{cases}$$

usando come moltiplicatori $(-\frac{a_{32}^1}{a_{22}^1}) \dots (-\frac{a_{n2}^1}{a_{22}^1})$ si otterrà

$$\begin{cases} a_{22}^1x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2^1 \\ \dots \dots \dots a_{33}^2x_3 + \dots + a_{3n}^2x_n = b_3^2 \\ \dots \\ \dots \dots \dots a_{n3}^2x_3 + \dots + a_{nn}^2x_n = b_n^2 \end{cases}$$

j-esimo passo

Si opera analogamente sul sottosistema

$$\begin{cases} a_{jj}^{j-1}x_j + \dots + a_{jn}^{j-1}x_n = b_j^{j-1} \\ \dots \\ a_{nj}^{j-1}x_j + \dots + a_{nm}^{j-1}x_n = b_n^{j-1} \end{cases}$$

usando come moltiplicatori $(-\frac{a_{j+1}^{j-1}}{a_{jj}^{j-1}}) \dots (-\frac{a_{nj}^{j-1}}{a_{jj}^{j-1}})$.

In n-1 passi si arriva (se tutti gli $a_{jj}^{j-1} \neq 0$) ad un sistema equivalente triangolare superiore.

L' algoritmo di Gauss si basa su due importanti principi.

Il primo è che due sistemi lineari $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ e $\mathbf{Ux}=\mathbf{c}$ sono uguali se \mathbf{U} si ottiene sostituendo le righe e le colonne di \mathbf{A} con loro combinazioni lineari e gli elementi di \mathbf{c} sono combinazioni lineari degli elementi di \mathbf{b} in base ai coefficienti di \mathbf{U} .

Il secondo è che per risolvere un sistema triangolare (dove cioè la matrice dei coefficienti gode della proprietà di triangolarità) è sufficiente utilizzare l'algoritmo di sostituzione in avanti o all'indietro (la complessità computazionale è $O(n)$).

Si dimostra che per trasformare il sistema in triangolare occorre un algoritmo la cui complessità è $O(\frac{n^2}{3})$. Applicando a questo sistema l'algoritmo di sostituzione diretta si trovano le soluzioni

esatte del sistema, e si dimostra che la complessità totale dell'algoritmo di Gauss è $O(\frac{n^3}{3})$.

Per quanto riguarda la complessità spaziale:

- *l'algoritmo basato sulla regola di Cramer richiede soltanto una variabile aggiuntiva, dove memorizzare il determinante della matrice dei coefficienti, dunque la sua complessità è minima: $O(n^2)$*
- *l'algoritmo di Gauss permette di sovrascrivere, ad ogni passo, la matrice dei coefficienti, pertanto la complessità spaziale è sempre minima: $O(n^2)$*

Pertanto l'algoritmo risolutivo di un sistema lineare è decisamente l'algoritmo di Gauss.

Matrici e determinanti

Le origini delle matrici e dei determinanti risalgono al II secolo a.C. anche se alcune tracce si trovano già nel IV secolo a.C. Comunque le idee riapparvero, con conseguente sviluppo, non prima della fine del XVII secolo.

Non sorprende il fatto che lo studio delle matrici e dei determinanti derivi dallo studio dei sistemi lineari di equazioni. I Babilonesi studiarono vari problemi che portano ad equazioni lineari simultanee e alcuni di questi sono riportati nelle tavolette di argilla pervenute fino a noi. Per esempio una tavoletta risalente al 300 a.C. contiene il seguente problema:

Ci sono due campi la cui area totale è 1800 iarde quadre. Uno produce grano per 2/3 di staio per iarda quadra mentre l'altro produce grano per 1/2 di staio per iarda quadra. Se il raccolto totale è 1100 staia, qual è la grandezza di ciascun campo?

I Cinesi, fra il 200 a.C. ed il 100 a.C., si avvicinarono molto di più alle matrici rispetto ai Babilonesi. Certamente è corretto dire che il testo *Nove Capitoli dell'Arte Matematica* scritto durante la Dinastia Han fornisce il primo esempio noto di metodi matriciali. Un problema è simile all'esempio dei Babilonesi dato sopra:-

Ci sono tre tipi di granturco, di cui tre fasci del primo, due del secondo ed uno del terzo fanno 39 misure. Due del primo, tre del secondo ed uno del terzo fanno 34 misure. Uno del primo, due del secondo e tre del terzo fanno 26 misure. Ogni fascio di ciascun tipo quante misure di granturco contiene?

Ora l'autore fa qualcosa di piuttosto notevole. Pone i coefficienti del sistema delle tre equazioni lineari nelle tre incognite come una tabella su una "tavola per contare".

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Inoltre l'autore invita il lettore a moltiplicare la colonna in mezzo per 3 e a sottrarre da essa la colonna destra quante più volte è possibile, lo stesso è fatto sottraendo la colonna destra quante più volte è possibile dalla prima colonna moltiplicata per 3. Questo dà

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

Ora la colonna più a sinistra è moltiplicata per 5 e poi la colonna in mezzo è sottratta quante più volte è possibile. Questo dà

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

da cui la soluzione può essere determinata per il terzo tipo di granturco, poi per il secondo, poi per il primo mediante sostituzione all'indietro. Questo metodo, ora noto come *eliminazione di Gauss*, sarebbe stato conosciuto in Occidente solo all'inizio del XVIII secolo.

Cardano, in *Ars Magna* (1545), fornisce una regola per risolvere un sistema di due equazioni lineari che chiama *regula de modo* cioè madre delle regole! Questa madre delle regole è essenzialmente la regola di Cramer per risolvere un sistema 2 x 2 anche se Cardano non fa il passo finale. Cardano cioè non raggiunge la definizione di determinante ma, con il vantaggio del senno di poi, possiamo vedere che il suo metodo porta alla definizione.

La prima apparizione di un determinante in Europa fu nel 1683. In quell'anno Leibniz scrisse a de l'Hôpital spiegandogli che il sistema di equazioni

$$\begin{array}{l} 10 + 11x + 12y = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 \end{array}$$

aveva una soluzione perché

$$10 \cdot 21 \cdot 32 + 11 \cdot 22 \cdot 30 + 12 \cdot 20 \cdot 31 = 10 \cdot 22 \cdot 31 + 11 \cdot 20 \cdot 32 + 12 \cdot 21 \cdot 30$$

che è esattamente la condizione che la matrice dei coefficienti abbia determinante 0. Notate che qui Leibniz non sta utilizzando coefficienti numerici ma

due caratteri, il primo indica in quale equazione appare, il secondo indica a che lettera appartiene.

Leibniz era convinto che una buona notazione matematica fosse la chiave per progredire, così sperimentò diverse notazioni per i coefficienti dei sistemi. I suoi manoscritti non pubblicati contengono più di 50 modi diversi di scrittura dei coefficienti su cui lavorò per 50 anni iniziando nel 1678. Solo due pubblicazioni (1700 e 1710) contengono risultati sui coefficienti dei sistemi e la notazione è quella usata nella sua lettera a de l'Hôpital.

Leibniz usò la parola 'risultante' per certe somme combinatorie dei termini di un determinante. Provò vari risultati sui risultanti includendo ciò che è essenzialmente la regola di Cramer. Egli sapeva anche che un determinante può essere sviluppato secondo una qualsiasi colonna – ciò che ora è chiamato sviluppo di Laplace. Leibniz studiò anche i coefficienti di sistemi di forme quadratiche che portano naturalmente alla teoria delle matrici.

Di Paola&Spagnolo, I sistemi indeterminati nei Nove Capitoli di Liu Hui...

Nel 1730 Maclaurin scrisse *Trattato di algebra* anche se fu pubblicato solo nel 1748, due anni dopo la sua morte. Esso contiene i primi risultati pubblicati sui determinanti che provano la regola di Cramer per sistemi 2×2 e 3×3 e che indicano come il caso 4×4 dovrebbe lavorare. Cramer dette la regola generale per sistemi $n \times n$ in un articolo *Introduction to the analysis of algebraic curves* (1750). Essa derivò dal desiderio di trovare l'equazione di una curva piana passante per un fissato numero di punti dati. La regola apparve in un'Appendice dell'articolo, ma senza alcuna dimostrazione:-

Si trova il valore di ogni incognita formando n frazioni in cui il denominatore comune ha tanti termini quante sono le permutazioni di n oggetti.

Cramer spiega precisamente come si calcolano questi termini, come si determina il segno e come si valutano i numeratori. Da questo momento i lavori sui determinanti iniziarono ad apparire regolarmente. Nel 1764 Bezout fornì dei metodi per calcolare i determinanti, come fece Vandermonde nel 1771. Nel 1772 Laplace affermò che i metodi introdotti da Cramer e Bezout erano impraticabili e, in un articolo dove studiava le orbite dei pianeti interni, egli discusse la soluzione di sistemi di equazioni lineari senza realmente calcolarla, usando i determinanti. Piuttosto sorprendentemente Laplace usava la parola 'risultante' per ciò che ora chiamiamo determinante: sorprendente poiché è la stessa parola usata da Leibniz ma Laplace doveva essere ignaro del lavoro di Leibniz. Laplace fornì lo sviluppo del determinante che da quel momento porta il suo nome.

Il termine determinante fu introdotto per primo da Gauss nel *Disquisitiones arithmeticae* (1801) dedicato allo studio di forme quadratiche. Egli usò tale termine perché il determinante determina le proprietà della forma quadratica. Comunque il concetto è diverso da quello nostro. Nello stesso lavoro Gauss dispone i coefficienti delle sue forme quadratiche in schieramenti rettangolari. Egli descrive la moltiplicazione di matrice (che pensa come composizione non raggiungendo quindi il concetto di algebra matriciale) e l'inversa di una matrice nel particolare contesto degli schieramenti di coefficienti delle forme quadratiche.

L'eliminazione Gaussiana, che apparve dapprima nel testo cinese *Nove Capitoli dell'Arte Matematica* scritto nel 200 a.C., fu usata da Gauss nel suo lavoro dedicato allo studio dell'orbita dell'asteroide Pallas. Usando le osservazioni di Pallas fra il 1803 ed il 1809, Gauss ottenne un sistema di sei equazioni lineari in sei incognite. Gauss fornì un metodo sistematico per risolvere tali equazioni che è precisamente l'eliminazione Gaussiana sulla matrice dei coefficienti.

Fu Cauchy nel 1812 che usò il termine 'determinante' in senso moderno. Il lavoro di Cauchy è il più completo rispetto ai precedenti lavori sui determinanti. Egli dimostrò di nuovo i precedenti risultati e dette nuovi risultati sui minori e gli aggiunti. Nel lavoro del 1812 provò per la prima volta il teorema di moltiplicazione dei determinanti anche se, allo stesso meeting dell'Institut de France, Binet presentò un articolo che conteneva una dimostrazione del teorema di moltiplicazione (questa era meno soddisfacente di quella fornita da Cauchy).

Nel 1826 Cauchy, nel contesto delle forme quadratiche in n variabili, usò il termine 'tableau' per la matrice dei coefficienti. Trovò gli autovalori e dette risultati sulla diagonalizzazione di una matrice nel contesto della conversione di una forma in una somma di quadrati. Cauchy introdusse anche l'idea di matrici simili (ma non il termine) e mostrò che se due matrici sono simili esse hanno le stesse equazioni caratteristiche. Egli, di nuovo nel contesto delle forme quadratiche, provò anche che ogni matrice simmetrica reale è diagonalizzabile.

Jacques Sturm generalizzò il problema degli autovalori nel contesto della risoluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Infatti il concetto di autovalore era apparso 80 anni prima, di nuovo in un lavoro sui sistemi di equazioni differenziali ordinarie di D'Alembert, nel contesto dello studio del moto di un filo con masse attaccate ad esso in varie parti. Dobbiamo sottolineare che né Cauchy né Jacques Sturm realizzarono la generalità delle idee che essi stavano introducendo.

Anche Jacobi dal 1830 circa e poi Kronecker e Weierstrass nel 1850 e 1860 si dedicarono allo studio delle matrici ma di nuovo in un contesto speciale, questa volta la nozione di trasformazione lineare. Jacobi pubblicò tre trattati sui determinanti nel 1841. Questi furono importanti poiché per la prima volta la definizione di determinante fu data in modo algoritmico e gli elementi del determinante non furono specificati, cosicché i suoi risultati si potevano applicare sia al caso in cui gli elementi fossero numeri che funzioni. Questi tre articoli di Jacobi resero l'idea di determinante ampiamente nota.

Anche Cayley, in un suo scritto del 1841, pubblicò il primo contributo inglese alla teoria dei determinanti. Nel suo articolo usò due linee verticali su ogni lato dello schieramento per denotare il determinante, una notazione che ora è diventata standard.

Eisenstein nel 1844 denotò le sostituzioni lineari con una singola lettera e mostrò come sommarle e moltiplicarle come numeri ordinari eccetto per la perdita della commutatività. È giusto dire che Eisenstein fu il primo a pensare che le sostituzioni lineari formassero un'algebra come si evince dal suo articolo del 1844:-

Un algoritmo per il calcolo si può basare su ciò, esso consiste nell'applicare le usuali regole per le operazioni di moltiplicazione, divisione ed elevamento a potenza ad equazioni simboliche fra sistemi lineari, le equazioni simboliche corrette si possono sempre ottenere, l'unica considerazione è che l'ordine dei fattori non può essere alterato.

Il primo ad usare il termine 'matrice' fu Sylvester nel 1850. Sylvester definì una matrice essere una disposizione rettangolare di termini e la vide come qualcosa che conduceva a vari determinanti da schieramenti rettangolari contenuti all'interno di essa. Dopo aver lasciato l'America ed essere ritornato in Inghilterra nel 1851, Sylvester diventò un avvocato ed incontrò Cayley, un collega che condivideva i suoi interessi nella matematica. Cayley immediatamente vide l'importanza del concetto di matrice e nel 1853 pubblicò una nota che per la prima volta forniva l'inversa di una matrice.

Cayley nel 1858 pubblicò *Memorie sulla teoria delle matrici* che è significativo poiché contiene la prima definizione astratta di matrice. Egli mostra che gli schieramenti di coefficienti studiati precedentemente per le forme quadratiche e per le trasformazioni lineari sono casi speciali del suo concetto generale. Cayley fornì un'algebra matriciale definendo la somma, la moltiplicazione, la moltiplicazione scalare e le inverse. Egli dette una costruzione esplicita dell'inversa di una matrice in termini del determinante della matrice. Cayley provò anche che, nel caso di matrici 2×2 , una matrice soddisfa la propria equazione caratteristica. Egli affermò che aveva provato il risultato per matrici 3×3 , indicando la dimostrazione, ma dice:

Non ho ritenuto necessario assumermi l'onere di una dimostrazione formale del teorema nel caso generale di una matrice di grado qualsiasi.

Il fatto che una matrice soddisfi la sua equazione caratteristica è chiamato teorema di Cayley-Hamilton quindi è ragionevole chiedersi che cosa abbia a che fare con Hamilton. In effetti anche egli provò un caso speciale del teorema, il caso 4×4 , nell'ambito del suo studio sui quaternioni. Nel 1870 la forma canonica di Jordan apparve nel *Trattato sulle sostituzioni ed equazioni algebriche* di Jordan. Essa appare nel contesto della forma canonica per sostituzioni lineari su un campo finito avente come ordine un primo.

Frobenius, nel 1878, scrisse un importante lavoro sulle matrici *Sulle sostituzioni lineari e forme bilineari* sebbene sembrasse ignaro del lavoro di Cayley. Questo articolo di Frobenius riguarda i coefficienti delle forme ma non usa il termine matrice. Comunque egli provò importanti risultati sulle matrici canoniche come rappresentanti di classi di equivalenza di matrici. Egli cita Kronecker e Weierstrass che hanno considerato casi speciali dei suoi risultati rispettivamente nel 1874 e 1868. Frobenius provò anche il risultato generale che una matrice soddisfa la sua equazione caratteristica. Questo articolo di Frobenius del 1878 contiene anche la definizione del

rango di una matrice, che egli usò nel suo lavoro sulle forme canoniche, e la definizione di matrici ortogonali.

Nel 1896 Frobenius lesse l'articolo del 1858 di Cayley *Memorie sulla teoria delle matrici* e quindi iniziò ad usare il termine matrice. Nonostante il fatto che Cayley avesse provato il teorema di Cayley-Hamilton solo per matrici 2×2 e 3×3 , Frobenius generosamente attribuì il risultato da lui determinato per matrici di ordine qualsiasi a Cayley.

Una definizione assiomatica di determinante fu usata da Weierstrass nelle sue lezioni e, dopo la sua morte, fu pubblicata nel 1903 nella nota *Sulla teoria del determinante*. Nello stesso anno anche le lezioni di Kronecker sui determinanti furono pubblicate, di nuovo dopo la sua morte. Con queste due pubblicazioni la moderna teoria dei determinanti era a posto ma per la teoria delle matrici dovette passare ancora un po' di tempo affinché diventasse una teoria pienamente accettata.

Testi importanti riguardanti le matrici furono scritti da Bôcher nel 1907, da Turnbull e Aitken negli anni '30 e da Mirsky nel 1955.