"Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 19, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

QU'EST-CE QUI PERMET LE CONTRASTE ENTRE L'ANALYSE *A PRIORI* ET L'ANALYSE *A POSTERIORI* ? [1]

Eduardo Lacasta, José Ramón Pascual, Miguel R. Wilhelmi
Universidad Pública de Navarra, Espagne

ABSTRACT

Didactic engineering (Artigue, 1989) as a methodology of research allows to normative or technical applications of didactical results. For this purpose, it is necessary a *a priori* control of potential teaching projects and, *a posteriori*, it is also necessary to compare the theoretical study (*a priori* elaborate) with the effective carrying out tasks (*contingency proof*). This process required the establishment of "observables"; i.e., which will allow contrast between the analysis *a priori* and analysis *a posteriori*. The mean goal of this paper is the determination of observables in three theories in mathematics education: Theory of Didactical Situations, *Anthropological Theory of the Didactic* and Onto-semiotic Approach. Moreover, we will describe the nature and function of the observables according to these theories.

Key words: *a priori* analysis, *a posteriori* analysis, evolution of a theory, epistemological programs in mathematics education, continuous function.

RESUMEN

La *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989) como metodología de investigación permite la aplicación normativa o técnica de resultados didácticos. Para ello, se controla *a priori* la puesta en marcha de proyectos de enseñanza y, *a posteriori*, se compara el estudio teórico (elaborado *a priori*) con las realizaciones efectivas (*prueba de la contingencia*). En este proceso, es necesario determinar los "observables", es decir, aquellos aspectos identificables que permiten el contraste entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*. El objetivo de este trabajo es la determinación de los observables definidos en diferentes teorías de didáctica de las matemáticas: teoría de situaciones didácticas, teoría antropológica de lo didáctico y enfoque ontológico y semiótico. Asimismo se describirá la naturaleza y función de los observables según las teorías.

Palabras clave: análisis *a priori*, análisis *a posteriori*, evolución de una teoría, programa epistemológico en didáctica de las matemáticas, función continua.

RÉSUMÉ

L'*ingénierie didactique* (Artigue, 1989) comme méthodologie de recherche permet l'application normative ou technique des résultats didactiques. À cet effet, il faut contrôler *a priori* la mise en scène de projets d'enseignement et, *a posteriori*, il faut aussi comparer l'étude théorique (élaborée *a priori*) avec les réalisations effectives (*preuve de la contingence*). Dans tout ce processus, il est nécessaire de déterminer ce qui est « observable » ; c'est-à-dire, ce qui permettra le contraste entre l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori*. L'objectif de ce travail est la détermination des observables définis dans différentes théories en didactique des mathématiques : Théorie de Situations Didactiques (TSD), Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) et Approche Ontologique et Sémiotique (AOS). D'ailleurs, la nature et la fonction des observables seront mises en rapport à ces théories.

Mots-clés : analyse *a priori*, analyse *a posteriori*, évolution d'une théorie, programme épistémologique en didactique des mathématiques, fonction continue.

---

[1] Une version préliminaire de ce travail a été présentée dans le Colloque International « Didactiques : quelles références épistémologiques? » (Bordeaux, 25–27 mai 2005).

1. INGÉNIERIE DIDACTIQUE ET OBSERVABLES

Pour le programme épistémologique en didactique des mathématiques, l'évolution d'une théorie est déterminée par le biais du contraste entre l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori*. Le travail théorique vise la validation des hypothèses formulées (*a priori*). Les faits observés permettent (*a posteriori*) de valider ou de réfuter, totale ou partiellement, les hypothèses énoncées. Cette manière de faire évoluer la théorie didactique est une des caractéristiques définitoires des différentes perspectives que partagent les principes du *programme épistémologique* (Gascón, 1998) ; pour Kilpatrick (1994, 89–90):

> « Les didacticiens français ont recours à des analyses élaborées préalablement à l'expérimentation en classe. Ce passage de la pensée à l'action a été caractéristique de leur travail durant ces deux décennies. Conjointement au développement de l'ingénierie didactique […] a été accentué l'usage des études de cas et des analyses a posteriori dont la confrontation avec l'analyse a priori constitue un moyen de validation de l'hypothèse de recherche […] La didactique des mathématiques française possède une remarquable unité. Certes les travaux menés par différents didacticiens varient dans leurs centres d'intérêt mais ils paraissent tous relever d'une épistémologie commune et partager la même méthodologie. »

Il est donc nécessaire de déterminer ce qui est « observable » ; c'est-à-dire, les structures minimales représentatives d'un comportement du système didactique objet d'étude. La notion d'observable est cosubstantiel à chaque théorie : c'est un « objet ou fait qu'un observateur identifie par rapport à une théorie concrète» (Bencomo, Godino et Wilhelmi, 2004, 71). En particulier, nous voulons répondre aux questions : Quels sont les observables dans la Théorie de Situations Didactiques (TSD, Brousseau, 1998), Théorie Anthropologique du Didactique (TAD, Chevallard, 1999) et l'Approche Ontologique et Sémiotique (AOS, Godino, 2002) ? Ces observables ont-ils le même statut et jouent-ils un rôle similaire dans ces théories ?

Les conclusions que nous obtiendrons de ce travail seront, fondamentalement, métadidactiques, c'est-à-dire, par rapport à la nature des recherches en didactique, de ses propriétés, principes et causes premières. En fait, un des objectifs de ce travail est d'ouvrir un débat sur la nature des objets utilisés par la TSD, la TAD et l'AOS dans la formulation et le contraste d'hypothèse et dans le type d'explications du fonctionnement du système didactique qui peuvent être extraites dans le cadre de ces théories.

Pour atteindre les objectifs proposés, la section 2 contient une brève description de la progression de ces théories pour l'explication des faits et des phénomènes didactiques. De même sont identifiés, les observables utilisés par ces théories pour contraster l'analyse *a priori* avec les réalisations effectives. Ce contraste fournit des preuves (*preuve de la contingence*) pour accepter ou rejeter une hypothèse sur le fonctionnement du système didactique objet de la recherche.

La section 3 contient un exemple de la discussion théorique effectuée dans la section 2. En fait, nous répondons à la question: Comme est-ce que l'on mènerait des recherches sur la construction et communication du savoir "fonction continue", par rapport aux différentes théories ?

Finalement, dans la section 4, nous faisons une brève synthèse des processus de "contraste d'hypothèse" par rapport à la TSD, à la TAD et à l'AOS et des observables sur lesquels ces contrastes sont fondés. De même, nous ébauchons quelques implications théoriques et nous formulons quelques questions ouvertes. Les réponses à ces questions permettraient le contraste des ressources des théories pour faire évoluer la connaissance du fonctionnement des systèmes didactiques.

2. ANALYSE *A PRIORI* ET OBSERVABLES DANS LES DIFFÉRENTES THÉORIES

Nous partons donc d'un présupposé fondamental : la description d'un système didactique a besoin d'une analyse *a priori*. En fait, c'est cette analyse qui permet une description formelle du système ; c'est-à-dire, une description par rapport à une théorie, et non pas une pure interprétation « naturaliste » du système. En ce qui suit, nous préciserons les objets (observables) auxquels nous allons nous rapporter lors de l'élaboration de l'analyse *a priori*. Ces objets sont spécifiques des théories considérées (TSD, TAD et AOS) et vont permettre la preuve de la contingence.

2.1. Théorie de Situations Didactiques (TSD)

L'*ingénierie didactique* (Artigue, 1989) permet à la TSD d'obtenir des fonctionnements stables du « milieu » (reproductibilité de situations didactiques). Ceux-ci déterminent le progrès de la didactique comme instrument technique - pratique (*interventions critiques* dans les systèmes didactiques) et comme discipline scientifique (*preuve de la contingence*). De cette manière, pour la TSD, le progrès de l'élaboration des instruments techniques requiert la détermination des conditions qui régissent les interactions sujet - milieu.

> « La connaissance, l'homme el le milieu étant ce qu'ils sont, il est inévitable que cette interaction aboutisse à des conceptions 'erronées' (ou vraies localement mais non généralement). Toutefois, ces conceptions sont commandées par les conditions de l'interaction qu'on peut plus ou moins modifier. C'est l'objet de la didactique de connaître ces conditions et de les utiliser. » (Brousseau, 1998, 123).

L'évolution des stratégies d'action est déterminée par la capacité du milieu antagoniste pour restituer une information au sujet sur les « conséquences » d'effectuer certaines actions. La « boîte noire » n'est pas le sujet, mais le couple sujet - milieu, qui permet d'identifier et de décrire le comportement du système didactique et d'établir des relations de causalité entre les actions des sujets (des stratégies d'action des étudiants ou des interventions didactiques du professeur) et les informations que le milieu leur envoie (permettant, en particulier, la rétroaction ou *feed-back*). La didactique étudie alors la sensibilité du milieu à des « stimula », c'est-à-dire, les modifications des agents, du milieu - matériel, de l'institution, etc. La théorie permet d'identifier un phénomène quand il est possible d'établir une relation de type causal entre une intervention critique sur le milieu et une réponse que celui-ci donne aux sujets.

En ce sens, les *variables didactiques* agissent comme « contraste » ou « réactif » : elles provoquent des modifications contrôlées des stratégies d'action des sujets. Ces modifications visent l'adaptation des stratégies aux réponses données par le milieu. En fait, pour une observation reproductible donnée, la détermination des variables didactiques, qui provoquent des changements de stratégie, est un instrument de validation interne des conclusions extraites. En TSD, cette reproductibilité est strictement liée aux stratégies d’action (qui peuvent potentiellement être utilisées dans une situation concrète).

Il est donc nécessaire de définir théoriquement *a priori* sur une séquence de situations au moins deux patrons de réponse observables, qui représentent des manières de « faire » et de « savoir » propres de conceptions différentes. Ainsi on contribue à la prémisse de *falsabilité* de la preuve expérimentale, c’est-à-dire, qu’il est possible de réaliser une observation en contradiction avec cette preuve.

2.2. Théorie Anthropologique du Didactique (TAD)

La TAD modélise l’activité mathématique par la détermination de *praxéologies*, qui représentent une structuration cohérente des manières de « faire » et de « savoir ».

> « En toute institution, l’activité des personnes occupant une position donnée se décline en différents *types de tâches* T, accomplis au moyen d’une certaine *manière de faire*, ou *technique*, τ. Le couple [T/τ] constitue, par définition, un *savoir-faire*. Mais un tel savoir-faire ne saurait vivre à l’état isolé : il appelle un *environnement technologique - théorique* [θ/Θ], ou savoir (au sens restreint), formé d’une *technologie*, θ, ‘discours’ rationnel (*logos*) censé justifier et rendre intelligible la technique (*tekhnê*), et à son tour justifié et éclairé par une *théorie*, Θ, généralement évanouissante. Le système de ces quatre composantes, noté [T/τ/θ/Θ], constitue alors une *praxéologie.* » (Chevallard, 1997, 37–38).

Mais cette structure perd totalement son sens si les praxéologies ne répondent pas à une question formulée, représentant la *raison d’être* de tout le processus d’étude et qui, en un certain sens, soit son générateur. Autrement dit, il est nécessaire d’établir la structure praxéologique qui permette la résolution, l’explication et les fondements d’une certaine question.

> « Ce qui manque, en effet, c’est l’indication des raisons d’être de ce type de tâches, qui expliquerait aux professeurs, aux élèves, à leurs parents même, pourquoi il serait pertinent de lui donner droit de cité dans l’activité de la classe […] La recherche de questions *q* génératrices de l’œuvre s’impose, sauf à accepter de n’avoir de l’œuvre qu’une connaissance toute extérieure, formelle, purement culturelle (et non pas mathématique). » (Chevallard, 1997, 40–50).

Les observables seront des indices ou des descripteurs qui montrent les désadaptations entre la praxéologie établie *a priori* (laquelle comprend les raisons d’être, les questions génératrices) et le processus d’étude qui a été en effet développé. Ces désadaptations sont classées comme *praxémiques* (par rapport à la *praxis*) et comme *discursives* (par rapport au *logos*). En général, les désadaptations ne relèvent pas des techniques, des technologies ou des théories comme des structures complètes. Normalement elles sont identifiées à quelques *gestes techniques* et à certains *moyens réglés* de justification - explication. De même, dans la reconstruction d’une praxéologie (en particulier, au moment du travail de la technique) l’évolution est souvent déterminée par la nature *ostensive - non ostensive* des objets mathématiques (Bosch et Chevallard, 1999), qui joue un rôle essentiel dans l’activité mathématique. En fait, l’efficacité et la cohérence des techniques utilisées, ainsi que leur justification, dépendent surtout des registres de représentation utilisés (et, par conséquent, des systèmes structurés de signes à travers lesquels les ostensifs sont montrés). Par suite, par rapport à la TAD, les types d'observable sont : *tâches*, *gestes techniques* et techniques, *moyens réglés de validation*, *utilisations des ostensifs* et systèmes structurés de signes.

2.3. Approche Ontologique et Sémiotique (AOS)

La notion de signifié est centrale pour l'AOS. Un sujet ou une institution déterminent un signifié d'un objet quand ils établissent une correspondance entre un *objet - antécédent* (expression ou signifiant) et un *objet - conséquent* (contenu ou signifié). Cette correspondance doit suivre des *règles* (explicitées ou non, convenues ou non, normalisées ou arbitraires, etc.). En même temps, par le biais des règles, les sujets et les institutions sont informés sur la cohérence des correspondances qu'ils effectuent. En général, ce type de correspondance reçoit le nom de *fonction sémiotique*. Ainsi, dans une première étape, il faut identifier le type d'objets précédents ou conséquents dans une fonction sémiotique. Godino (2002, 245–255) propose une ontologie mathématique basée sur les divers rôles joués par les objets mathématiques : *situations*, *actions*, *langage*, *concept - règles*, *propriétés* et *argumentations*.

Ensuite, dans une deuxième étape, une fois identifiées ces six entités primaires, celles-ci sont décrites, selon cinq facettes ou dimensions duales (Godino, 2002, 247–255) :

- *personnel – institutionnel*, puisque, par rapport au contexte et au jeu du langage, une même entité peut être associée à un sujet individuel ou à une institution ;
- *élémentaire – systémique*, selon que l'objet soit accepté comme unitaire —et, par conséquent, auto-expliqué et d'utilisation « non problématique » ou « transparent »—, ou qu'il soit considéré comme constitutif d'un système ;
- *ostensif - non ostensif*, selon que l'objet soit explicité dans un registre de communication, qui le rend perceptible, ou qu'il soit utilisé implicitement, en absence de signe, de geste ou de mot ;
- *exemplaire – type*, selon que l'objet soit référé à une situation concrète ou à une classe de situations descriptibles par un patron commun ; et
- *expression – contenu*, selon que l'objet joue le rôle d'antécédent ou de conséquent dans les différentes fonctions sémiotiques.

Finalement, dans une troisième étape, la nature essentiellement relationnelle des objets mathématiques structure l'ontologie proposée. Wilhelmi, Godino et Lacasta (2007) introduisent les notions de modèle et d'holosignifié d'une notion mathématique, pour l'égalité de nombres réels. Ces notions permettent la structuration, dans un complexe cohérent, de différentes définitions équivalentes de la notion d'égalité de nombres réels. En même temps, à partir des notions de modèle et d'holosignifié, les auteurs répondent à des questions génériques sur la compréhension et la relation entre une didactique explicative et une didactique normative : « Qu'est-ce que c'est comprendre une notion mathématique ? La description du signifié d'une notion comme ' totalité ', a-t-elle des conséquences sur l'élaboration du plan d'études et, en particulier, permet-elle d'analyser les applications des propositions éducatives par rapport à cette notion ? » (p.2).

Le contraste entre l'*analyse a priori* d'un processus d'étude et sa réalisation effective est décrit dans l'AOS en termes d'« idonéité » d'un processus d'étude, c'est-à-dire, d'adéquation entre ce qui est prétendu et ce qui est effectivement mis en jeu (Godino, 2003 ; Godino, Contreras et Font, 2006). À cet effet, il faut établir des critères d'idonéité pour l'évaluation des processus d'apprentissage et d'enseignement mathématiques. Wilhelmi, Godino et Bencomo (2004) synthétisent les critères d'idonéité, tenant compte de trois dimensions : épistémologique, cognitive et d'enseignement.

Pour l'évaluation de l'idonéité épistémologique il est nécessaire de déterminer l'adéquation et les désajustements entre le signifié institutionnel de référence et celui effectivement enseigné. Pour l'évaluation de l'idonéité cognitive il faut contrôler si les restrictions cognitives des élèves et des ressources humaines, matérielles et temporaires disponibles, permettent de surpasser les différences entre les signifiés personnels initiaux et les signifiés institutionnels à enseigner. Finalement, pour l'évaluation de l'idonéité institutionnelle il faut établir si les configurations et les trajectoires didactiques permettent l'identification et la résolution des conflits sémiotiques par la négociation de signifiés (en utilisant les ressources disponibles, qui déterminent des contraintes institutionnelles de caractère mathématique et didactique).

Ainsi, les observables sont les indices ou les descripteurs des adaptations ou des désajustements entre les états possibles des dimensions épistémologique, cognitive et d'enseignement et ceux-ci peuvent effectivement être identifiés dans un processus d'étude concrète. Ces adaptations et désajustements sont décrits en termes d'idonéité. Par conséquent, ils ont un caractère pragmatique —par rapport à des conditions institutionnelles concrètes— et ils sont identifiés avec une ou plusieurs entités primaires et une ou plusieurs facettes duales. De même, ces entités (avec leurs facettes) sont structurées en réseaux épistémologiques (*signifiés institutionnels*) et cognitifs (*signifiés personnels*). Très souvent, la constitution des réseaux répond à la nécessité du groupement des entités mathématiques primaires en trois groupes : *langage*, *entités praxémiques* (problèmes, actions), *entités discursives* (concepts, propriétés, arguments). En fait, ce groupement de base détermine un cadre pour la structuration du système global des observables mis en jeu dans l'activité mathématique.

3. UN EXEMPLE: LA FONCTION CONTINUE

La notion de fonction continue peut être définie différemment. Wilhelmi (2003) montre une structuration des définitions de fonction continue, tenant compte des contraintes des types de fonction étudiées, par rapport à la règle de correspondance et à la nature des ensembles initial et final. Ces contraintes visent la généralisation des fonctions et des situations analysées. Chacune des définitions est associée à un livre de texte (tableau 1).

Cet étude épistémologique peut être considérée comme une partie d'une analyse préalable sur les *savoir-faire* et les *savoirs* dans la *sphère savante* (Chevallard, 1985) par rapport à la notion « fonction continue ». Ensuite, nous montrerons comment la TSD, la TAD et l'AOS organiseraient, à partir de cette analyse préalable, la recherche des processus de production et de communication du savoir « fonction continue ». Suivant la méthodologie de l'ingénierie didactique, ces recherches doivent contraster l'analyse *a priori* avec la réalisation effective (*preuve de la contingence*). Pour cela, il faut déterminer les observables indicateurs de la relation entre l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori.* Ces observables sont donc les descripteurs de la dimension épistémologique, cognitive et d'enseignement du processus de production et de communication des savoirs (voir section 2).

Table 1. Définitions de la notion « fonction continue » (Wilhelmi, 2003, 140–145)

Niveau	Texte	Description succincte
1. Représentation graphique	Alson (1996)	Tous les courbes connexes sont continues
2. Formalisation arithmétique de l'analyse graphique	Rey Pastor et al. (1952)	Petites variations en *x* représentent petites variations en *y*
3. Définition (ε-δ)	Fernández Viña (1976)	Énoncé formel de la définition ε-δ
4. Définition par suites	Ross (1980)	Énoncé formel de la définition par suites
5. Définition par ensembles ordonnés	Beardon (1997)	Énoncé formel de la définition par ensembles ordonnés
6. Définitions métrique et topologique	Aliprantis & Burkinshaw (1998)	Énoncé formel de la continuité en espaces métriques et topologiques
*Analyse non standard	Deledicq et Diener (1989)	Notion de S - continuité ou continuité non standard

3.1. Théorie de Situations Didactiques (TSD)

La détermination d'un *milieu* conditionne tout projet de recherche. À partir du savoir à enseigner, il est nécessaire de déterminer le milieu qui va permettre l'évolution des connaissances initiales des étudiants (présentes dans les *stratégies de base*) vers la connaissance mathématique à enseigner (qui fonde la *stratégie optimale de résolution*).

> « Il faut donc construire ou choisir une séquence de situations de divers types où les connaissances apparaissent sous les formes différentes —telles que modèle implicite d'action, langage ou preuve— mais où ces connaissances doivent essentiellement être reconnues comme le moyen optimal de résoudre ces situations […] Il faut donc pouvoir définir sur cette séquence au moins deux patrons 'théoriques' de comportements observables correspondant aux deux conceptions attendues. » (Brousseau et Lacasta, 1995, 54–55).

De cette manière, si le chercheur vise un processus d'enseignement - apprentissage sur la notion « ε-δ » de continuité ponctuelle d'une fonction réelle de variable réelle (tableau 1), il proposera aux sujets une situation ou une séquence de situations pour permettre l'évolution d'une conception *numérique* (par exemple, d'approximation avec calculatrice) vers une conception *symbolique* (qui explicitera la méthode de comparaison par majoration et par minoration). Cette conception symbolique doit être acceptée comme la manière la plus efficace, fiable et ergonomique de résoudre le type de situations auxquelles le sujet est confronté.

La situation ou la séquence de situations doivent permettre au sujet de produire une réponse à ses connaissances initiales. Les connaissances initiales pourront évoluer vers la connaissance mathématique à enseigner si le milieu donne des informations au sujet sur l'insuffisance (partielle ou totale) des connaissances initiales. En même temps, ces informations doivent être utiles au sujet pour adapter ses réponses ultérieures. La nécessité d'« amélioration de la stratégie » exige que les situations d'apprentissage aient pour but que le sujet construise et soit capable de communiquer un savoir-faire ou un savoir non routinier ni transparent ; en cas contraire, nous parlerons d'une *situation algorithmique*.

> « Un sujet se trouve dans une situation algorithmique si, pour résoudre un problème, il est obligé de construire, à partir d'un objet A, un objet B qui résout le problème. En plus, l'objet B n'est pas construit au hasard ; le sujet doit être capable de reproduire les gestes, les techniques, les procédés, etc., nécessaires pour obtenir B à partir de A, sans qu'il n'ait besoin de résoudre des problèmes aux données précises. La capacité du sujet de construire l'objet B entraîne qu'il soit capable d'imaginer la fonction de cet objet ; ceci représente une véritable connaissance de l'utilité de l'objet B. » (Wilhelmi, 2003, 95).

Le chercheur agit sur le couple sujet - milieu. Le milieu se manifeste par le biais de :

a) un *milieu - matériel* (calculatrice numérique, graphique ou programmable, ordinateur, crayon et papier, etc.) ;

b) les autres sujets enseignés (les membres d'un même équipe ou « adversaires » dans les phases de validation et formulation) ; et, finalement,

c) les interventions critiques du professeur (souvent contrôlées par de variables didactiques ; par exemple, approximation numérique, erreur admissible, précision de la calculatrice, type de fonction étudiée, type de discontinuité, etc.).

3.2. Théorie Anthropologique du Didactique (TAD)

La praxéologie locale représente l'unité minimale d'analyse des processus didactiques (Bosch et Gascón, 2004). Pour la tâche « étudier la continuité d'une fonction donnée dans son domaine de définition », il faut : a) introduire une technique valable pour un ensemble restreint de fonctions ; b) justifier cette technique par une technologie ; c) déterminer une théorie admise comme « globale » dans l'institution.

Soit par exemple une institution dans laquelle nous visons l'introduction de la notion de fonction continue pour résoudre le type de *tâches* « analyse des fonctions polynomiales de deuxième degré » (univers d'étude). L'institution peut accepter : comme *technique*, la représentation graphique *point par point* ; comme *technologie* « faible », la vérification numérique (avec la calculatrice) du fait que petites variations de « x » entraînent petites variations d'« y » ; comme *technologie* « forte », le calcul de bornes des différences en « y », étant donnée la taille de la différence en « x ». Par le biais de la technologie « forte », la justification du fait que $f(x) = x^2$ est continue en $[0, \infty)$, se ferait par des raisonnements du type :

> Soit $x_0 \in [0, \infty)$, $x_0 < x$, et soit la différence $(x - x_0)$ "petite" (en particulier, $(x - x_0) < 1$). Sous ces conditions nous avons :
>
> $$x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0) = (x - x_0 + 2x_0)(x - x_0) < (1 + 2\,|\,x_0\,|)(x - x_0)$$
>
> Et, par conséquent, la différence $(x^2 - x_0^2)$ doit être aussi petite, car elle est contrôlée par la différence $(x - x_0)$.

Finalement, la définition « ε-δ » représenterait l'instrument théorique (pas toujours explicité) justificatif de toute l'étude effectuée.

La mise en marche dans un processus d’étude effectif de cette praxéologie supposerait la détermination du type de *tâches* qui vont être abordées, les *gestes* admis pour valider et justifier et aussi les *techniques* dominantes pour les différents *moments d’étude* (Chevallard, Bosch et Gascón, 1997). Toute cette analyse est effectuée en tenant compte des contraintes institutionnelles qui déterminent autant la représentativité de la praxéologie par rapport au savoir institutionnel de référence, que les critères de base pour la description de processus d’étude au sein de l’institution.

Les tâches, gestes et techniques représentent les descripteurs des ajustements et des ruptures entre la praxéologie décrite et l’organisation mathématique institutionnelle. De cette manière, un projet de recherche peut suivre les démarches suivantes :

a) identification dans le texte du savoir (fonctionnaire dans l’institution) des éléments praxéologiques (composants de la praxéologie sage dans l’institution, non nécessairement explicitée) ;

b) détermination, à partir de ces éléments praxéologiques d’une organisation mathématique adaptée aux besoins et aux contraintes institutionnelles.

Les tâches, gestes, techniques et le discours justificatif sont donc les observables qui permettront de contraster l’analyse *a priori* avec un processus d’étude effective.

Il ne faut pas croire qu’il soit possible d’établir des relations causales entre un observable « isolé » et un processus d’étude mathématique, puisque les observables sont expliqués forcément par rapport à une praxéologie dans une institution concrète. Autrement dit, *la praxéologie locale représente l’unité minimale d’analyse des processus didactiques* (Bosch et Gascón, 2004).

Il faut absolument déterminer *a priori* une praxéologie locale qui tienne en compte des niveaux de codétermination institutionnelle et un processus d’étude potentiel par rapport à cette praxéologie. Le contraste *a posteriori* permet de :

a) décrire le processus d’étude,

b) valoriser les contraintes institutionnelles considérées *a priori* et

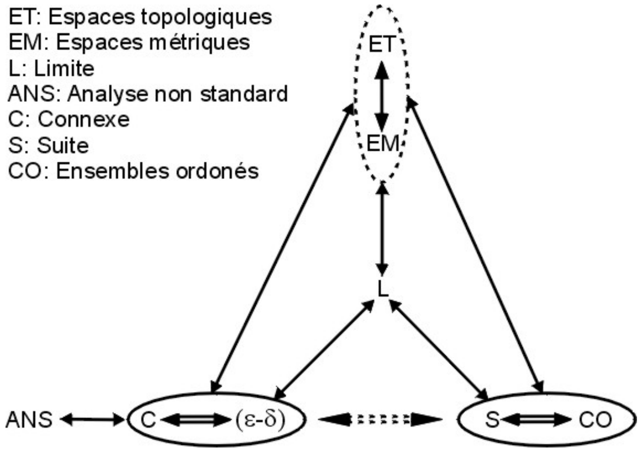
c) identifier les actions didactique dans d’autres processus d’étude.

3.3. Approche Ontologique et Sémiotique (AOS)

À partir de l’identification des définitions de fonction continue (analyse préalable), il faut les structurer dans un tout cohérent, permettant d’évaluer la représentativité d’un système de pratiques (opérationnelles et discursives) associées à la notion visée dans un contexte d’utilisation déterminée. Wilhelmi (2003, 146-154) propose une structure des modèles[2] associés aux définitions de fonction continue en termes de « proximité d’interaction », mesurée comme intervalle : a) de *temps*, c’est-à-dire, deux modèles sont proches si leur introduction peut être effectuée de manière pertinente dans une même unité temporaire du processus d’étude ; b) d’*espace*, deux modèles restent proches dans la mesure où ils sont simultanément utilisés dans une vaste classe de situations. La figure 1 représente cette structuration.

[2] La notion de modèle proposée par Wilhelmi (2003) représente soit les « conceptions mathématiques liées à des situations » (Perrin, 1992, pp.380–381), soit les « praxéologies » (Chevallard 1997, 1999).

Figure 1. Schéma de l'holosignifié du savoir « fonction continue » (Wilhelmi, 2003, 145).



Cette structuration permettrait de déterminer les systèmes de pratiques associés aux définitions. Celles-ci sont donc acceptées comme des produits culturels régularisés du signifié de la notion dans les institutions. En d'autres termes, il faut choisir un ensemble de situation - problèmes dont la résolution requerrait des actions, un langage, des concept – règles et certaines propriétés et argumentations qui, d'une part, caractériseraient un modèle particulier de fonction continue et qui, d'autre part, seraient représentatives de cette notion en tant que structure formelle. Cette double nécessité (de caractérisation et de représentativité) détermine le progrès dans les processus d'étude.

> « El significado comienza siendo pragmático, relativo al contexto, pero existen tipos de usos que permiten orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos. Estos tipos de usos son objetivados mediante el lenguaje y constituyen los referentes del léxico institucional. » (Godino, 2003, 38).

Finalement, tout processus d'étude est soumis aux contraintes institutionnelles et, par conséquent, la caractérisation et la représentativité sont évaluées selon certains critères d'idonéité définis a priori par le chercheur. Ces critères sont décrits en fonction :

- de l'ontologie mathématique associée à la notion de fonction continue dans les différents contextes d'utilisation,
- des cinq facettes duales qui déterminent les utilisations et la nature des objets mathématiques insérés ; et
- des fonctions sémiotiques établies entre ces objets (avec un intérêt spéciale dans ces relations normées dans les institutions insérées).

4. SYNTHÈSE, CONCLUSIONS ET QUESTIONS OUVERTES

Dans le programme épistémologique en didactique des mathématiques, l'évolution d'une théorie est déterminée par le contraste entre une analyse *a priori* et une analyse *a posteriori*. Ce type d'évolution est caractéristique du programme épistémologique. Toutefois, les processus de contraste sont consubstantiels aux théories sous-jacentes. La théorie détermine les éléments identifiés dans le système (éléments primaires) et les instruments d'observation et de recueil de données. Quand l'observateur analyse un système concret, il essaie d’identifier les éléments primaires (observables) comme des parties de ce système et il construit à partir d’eux un réseau objectif qui modélise le système observé. Dans la figure 2 ce processus est schématiquement représenté. Le tableau 2 explicite les composantes qui déterminent l’évolution de la théorie pour la TSD, la TAD et l’AOS.

Figure 2. Processus d’évolution d’une théorie.

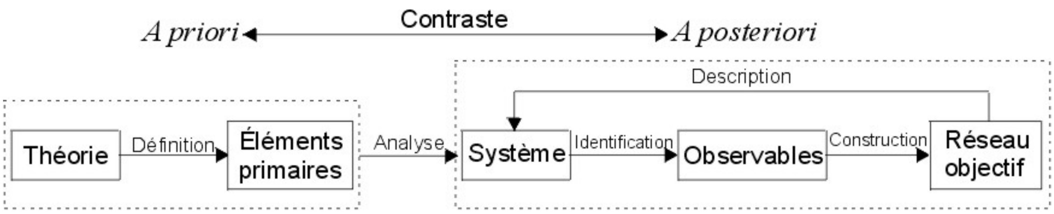


Table 2. Composantes du processus d’évolution des théories : TSD, TAD et AOS

Théorie	Éléments primaires	Système	Observables
TSD	Connaissances, rapport connaissance - savoir	Couple sujet - milieu	Réponses du milieu antagoniste et changements de stratégie des sujets
TAD	Praxéologies (tâches, techniques, technologies, théories)	Processus d’étude mathématique	Tâches, gestes techniques, instruments réglés de validation, usages d’ostensifs à l’institution
AOS	Composantes et facettes de la cognition et de l’enseignement des mathématiques	Processus d’étude mathématique	Couples composante - facette activés par un agente dans un contexte donné

Les résultats et conclusions que les chercheurs élaborent ont pour base les observables. D’une part, en TSD, la plupart des résultats sont obtenus des « régularités stochastiques », à partir d’analyses cliniques et statistiques. Autrement dit, un résultat est déterminé par une relation causale entre une intervention sur le système didactique et la réaction du couple sujet - milieu. Les résultats sont donc de nature *endogène*, relatifs au fonctionnement du système didactique lui-même.

D’autre part, pour la TAD, les résultats en didactique suivent un critère générique de *codétermination institutionnelle*, qui suppose « une exigence méthodologique selon laquelle l’analyse (et jusqu’à la simple formulation) des problèmes didactiques doit prendre en considération toutes les étapes de la transposition didactique » (Bosch et Gascón, 2004). Cette exigence détermine, selon les mêmes auteurs, deux types de résultats :

a) *endogènes*, qui établissent un schéma de fonctionnement relatif à une dynamique transpositive endogène ou intra - institutionnelle (qui a lieu à l’intérieur de chacune des institutions) et

b) *exogènes*, qui déterminent des règles de fonctionnement d’une dynamique transpositive exogène ou inter - institutionnelle (qui a lieu entre les différentes institutions).

L'identification et la description des phénomènes didactiques, suivant cette analyse, obéissent principalement à des contrastes qualitatifs entre le fonctionnement effectif des *communautés d'étude mathématique* (dont les textes du savoir sont acceptés comme représentants d'une manière de faire et de savoir) et les *propositions potentielles plausibles*, qui déterminent des critères de fonctionnement de l'institution par rapport au savoir.

Finalement, les moyens utilisés par l'AOS pour établir des résultats en didactique sont similaires aux moyens proposés par la TSD et la TAD (des analyses stochastiques, des études cliniques et des descriptions qualitatives). Cependant, il y a des différences entre le type d'explications données. Pour l'AOS, les régularités trouvées ne sont pas utilisées pour établir des relations causales formulées en termes de lois empiriques, mais comme descripteurs qui guident des interventions ponctuelles, l'élaboration de plans d'études et la planification de recherches.

En tout cas, pour les trois théories, le schéma décrit suppose :

1) la *définition* des observables ;
2) l'*identification* des observables dans un processus de construction et de communication des objets mathématiques ;
3) la *description* des processus par chacune des théories ; et, très souvent,
4) l'*évaluation* de processus et, par conséquent, tant l'élaboration de méthodes d'enseignement et apprentissage, que de nouvelles méthodes d'évaluation des processus.

Il convient alors d'analyser les observables au moins par rapport aux critères de définition, aux instruments de registre et de mesure, à leur puissance descriptive - explicative des systèmes didactiques et à l'influence des observables cités sur les méthodes d'enseignement.

Finalement, l'analyse effectuée nous a permis de formuler quelques questions ouvertes sur :

- *Les instruments de registre et d'analyse des donnés*. Comment est-ce que nous pouvons identifier, enregistrer et analyser les données empiriques ? Quel est le « poids » des observables dans ces processus ?
- *La puissance descriptive - explicative*. Quels phénomènes didactiques permet d'identifier et de décrire un observable ? Est-il possible d'évaluer l'adéquation d'un observable à un phénomène identifié et décrit ? Est-il possible de déterminer la relation entre les déclarations théoriques et les données empiriques, par le biais des propositions équivalentes dans les différentes théories ?
- *La puissance normative*. Quel est le rôle des observables dans la description de la *mémoire didactique de l'enseignant* (Centeno, 1995) ? Est-ce que l'analyse d'un observable peut déterminer des règles d'action dans les systèmes didactiques ?

Les réponses à ces questions pourraient permettre une meilleure connaissance du fonctionnement des instruments d'obtention de résultats en didactique des mathématiques. L'importance de cette connaissance pour l'élaboration de ressources d'enseignement mieux adaptées aux projets éducatifs est indéniable.

RÉFÉRENCES

Alson P. (1996). *Métodos de graficación*, 3ª edición. Caracas: Erro.

Artigue M. (1989), Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 282–307.

Beardon A. F. (1997). *Limits: a new approach to real analysis*. New York: Springer-Verlag.

Bencomo D., Godino J. D., Wilhelmi M. R. (2004). Elaboración de redes ontosemióticas de configuraciones didácticas con ATLAS/ti. En A. Cañas, J. Novak & F. González (Eds.), *Concept Maps : Theory, Methodology, Technology*. *Proccedings of the First International Conference on Concept Mapping* (14-17 Sept., Pamplona, ESP). p 71–74.

Bosch M., Gascón J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. En C. de Castro y M. Gómez, *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas* (135–159). Barcelona : Edebé.

Brousseau G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau G., Lacasta E. (1995), L’analyse statistique des situations didactiques. En R. Gras, *Actes du Colloque “Méthodes d’analyses statistiques multidimensionnelles en didactique des mathématiques”*, ARDM et IUFM de Caen (France). (27–29 Janvier, Caen). pp. 53–90.

Bosch M., Chevallard Y. (1999), La sensibilité de l’activité mathématique aux ostensives. Objet d’étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77–124.

Centeno J. (1995). *La mémoire didactique de l’enseignant*, Thèse posthume inachevée (Textes établis par C. Margolinas). Bordeaux : LADIST, Université Bordeaux 1.

Chevallard Y. (1999), L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266 .

Chevallard Y. (1997), Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 17–54.

Chevallard Y., Bosch M., Gascón J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, ESP: Horsori, ICE-Universitat de Barcelona.

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Fernández Viña J. A. (1976). *Lecciones de Análisis Matemático I*. Madrid: Tecnos.

Gascón J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 7–33.

Godino J. D., Contreras A., Font V. (2006), Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 26(1), 39–88.

Godino J. D. (2003), *Teoría de las funciones semióticas. Enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. [http://www.ugr.es/~jgodino]

Godino J. D. (2002), Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237–284.

Kilpatrick J. (1994), Vingt ans de didactique française depuis les USA. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Perrin, M. J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté au CM6*. Thèse de doctorat d'état, Université de Paris VII.

Rey Pastor J., Pi Calleja P., Trejo C. A. (1952). *Análisis Matemático (vol. I)*, 4ª edición. Buenos Aires: Kapelusz, 1959.

Ross K. A. (1980). *Elementary analysis: the theory of calculus*. New York: Springer-Verlag, 2000.

Wilhelmi M. R., Godino J. D., Lacasta E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 27(1), 77–120.

Wilhelmi M. R. (2003). *Análisis epistemológico y didáctico de nociones, procesos y significados de objetos analíticos*. Sección 2: Tesis doctorales, 23. Pamplona: Universidad Pública de Navarra.