"Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 19, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Argomentare e dimostrare in registri semiotici diversi

Luigi Menna[1]

Sommario. Il presente lavoro espone i dati qualitativi e quantitativi di una sperimentazione condotta su studenti di una quinta classe di scuola media secondaria superiore (età 17-18), mirando a mettere in relazione le differenti argomentazioni di uno stesso problema all'interno di registri semiotici diversi (Duval, 1996). Più precisamente, si cercherà di analizzare le eventuali difficoltà generate dall'uso di un calcolatore (in particolare si farà uso del software Excel) per risolvere un dato quesito, esaminando, parallelamente, l'approccio degli studenti al problema attraverso un procedimento algebrico altamente formalizzato e mediante l'utilizzo di un software dinamico. La sperimentazione ha come riferimento teorico la Teoria delle Situazioni [Brousseau, 1997]; i dati sperimentali sono analizzati quantitativamente [R. Gras, 2000] e qualitativamente attraverso l'analisi dei protocolli.

Abstract: this essay deals with the qualitative data resulting from a research carried out on students of a fifth grade of high school (age 17-18). Its purpose is to establish a relationship between the different topics of a same issue arisen during the interviews in different semiotic registers (Duval, 1996).. More precisely this paper will try to analyse the possible epistemological difficulties generated by the use of a computer (in particulary of Excel) to resolve a given question, by examining simultaneously the students' approach to the problem through a highly formalised algebraic operation and the use of a dynamic software. The theoretical reference is the theory of didactical situations [Brousseau, 1997] and the experimental data are analyzed quantitatively [R. Gras, 2000] and qualitatively through analysis of the protocols.

---

[1] Component of G.R.I.M. and PhD student "Storia e Didattica delle Matematiche, della Fisica e della Chimica", University of Palermo. http://math.unipa.it/~grim/dott_HD_MphCh/dott_HD_index.htm

1. Introduzione.

Nel corso del tempo, il concetto di dimostrazione è cambiato diverse volte. Ciò che è stato ritenuto accettabile in un periodo storico può non essere ritenuto rigoroso in un altro.

Il concetto di ‘prova rigorosa’ risulta, dal punto di vista didattico, ancora problematica. Spesso la dimostrazione, intesa come lo strumento matematico principe, viene considerata addirittura come una barriera allo sviluppo dell’intuizione e delle capacità esplorative (Hanna, 2000). Molti insegnanti infatti sostengono che l’approccio più convincente per uno studente è quello che richiede l’investigazione e l’esplorazione, le quali stimolano alfine l’intuito. Addirittura, secondo il loro parere, la dimostrazione deduttiva potrebbe non essere più insegnata (Hanna, 2000).

Inoltre, l’uso sempre più massiccio di software didattici dinamici richiama l’attenzione verso l’esplorazione. È possibile letteralmente vedere varie rappresentazioni di ciò che si sta studiando anche attraverso grafici che gli studenti stessi possono facilmente realizzare.

Dal punto di vista dell’insegnamento della matematica, bisogna sottolineare che tutto ciò, oltre naturalmente ad incoraggiare la formulazione di congetture, comporta l’abbandono (intenzionale o meno), nei processi di insegnamento-apprendimento, della prova deduttiva e la completa adozione di un approccio totalmente sperimentale.

Grazie al software è possibile esaminare una quantità di dati enorme o, facendo leva sul concetto di continuità, addirittura infinita (Mason, 1991).

Dunque il computer incoraggia l’euristica, l’esplorazione e la visualizzazione, ma può anche generare ostacoli epistemologici. Dal punto di vista matematico, infatti, non è possibile accettare una dimostrazione elaborata mediante un procedimento prettamente euristico; dal punto di vista dello scienziato sperimentale, invece, la prospettiva appare completamente capovolta: questi, infatti, accetterebbe difficilmente una dimostrazione ottenuta sulla base di un puro ragionamento deduttivo.

È importante sottolineare il fatto che molti matematici oramai lavorano con metodi sempre più simili a quelli sperimentali e testano le congetture con l’aiuto del calcolatore. Alcuni hanno ipotizzato perciò di poter accontentarsi di dimostrazioni matematiche “quasi rigorose”. Viene affermato che “the computer has already started doing to mathematics what the telescope and microscope did to astronomy and biology” (Zeilbergger, 1993).

Imre Lakatos è stato il primo a proporre il termine “quasi-empirico” anche se collegato alla sua filosofia del fallibilismo (Lakatos, 1979).

Di fatto è probabile che speculazione sperimentale e dimostrazione matematica rigorosa si integrino a vicenda, ma ritengo assolutamente pericoloso – a livello didattico – la non distinzione tra i due approcci. È per questo che si impone una seria riflessione sull’implementazione che, inevitabilmente, lo studio contemporaneo di matematica e fisica comporta anche in un ambiente informatico (Jaffe and Quinn, 1993).

2. Riferimenti storici

La matematica del XXI secolo riconosce lo stile euclideo come diretto antenato; il modo di procedere di quei matematici antichi viene ancora proposto come esempio di eleganza.

Vale la pena quindi spendere qualche parola sulla dimostrazione nell’antica Grecia. È un dato di fatto che nel mondo classico era attribuita grande importanza all’educazione nell’arte dell’argomentazione. Si può infatti intendere la dimostrazione come un’operazione “sociale”, nel senso che veniva utilizzata per convincere e risolvere problemi pratici anche in contesti politici ed economici. Platone racconta come Socrate, a partire da alcuni concetti convenuti preventivamente e non ulteriormente oggetto di argomentazione, fosse in grado di condurre gli interlocutori, attraverso una successione di domande e suggerimenti, a vere e proprie dimostrazioni di tipo matematico. Per esemplificare basterebbe citare il celebre dialogo all’interno del *Menone* in cui Socrate riesce a far dimostrare ad uno schiavo incolto che per costruire un quadrato di area doppia rispetto ad un quadrato dato, sia necessario utilizzare la diagonale di quest’ultimo.

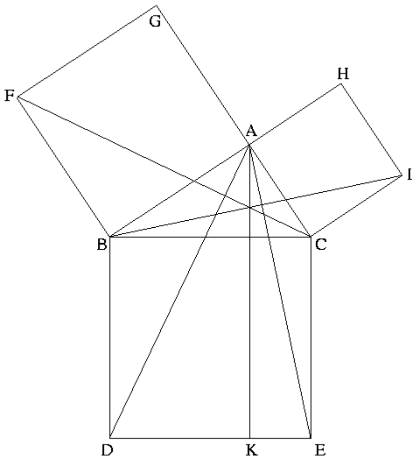


Figura 1

L’importanza della matematica greca e il grado di influenza che ancora oggi esercita sulla nostra cultura risultano ancora più chiari se si evidenzia che essa non può essere considerata come l’unico tipo di matematica esistente nei tempi antichi e soprattutto che la descrizione della matematica euclidea non può certo considerarsi esaustiva dell’intera matematica ellenica. A tal proposito può essere utile rimarcare le differenze presenti all’interno della stessa matematica greca che si riscontrano nelle versioni del cosiddetto teorema di Pitagora rintracciabili in testi di Euclide e di Nicomaco (matematico del I secolo d.C.). Quest’ultimo utilizza nella sua opera, *l’Introduzione aritmetica*, uno stile che potremmo definire colloquiale tanto che l’autore in alcuni punti usa la seconda persona singolare. Il testo citato inizia in effetti come un testo filosofico teso a valutare la matematica quale forma della conoscenza ed è ricco di esempi specifici di taglio didattico.

Specifici dello stile euclideo sono invece l’enunciato iniziale che deve essere ripetuto esattamente quando dimostrato e la sua generalizzazione (ad esempio: «tutti i triangoli rettangoli…»).

Il linguaggio degli *Elementi* è impersonale e non sconfina nel discorso filosofico, la dimostrazione non fa ricorso ad esempi con numeri ma è supportato dallo stratagemma del “diagramma”, caratteristica che per il tipo di discorso che sto trattando considero particolarmente importante (Cuomo, 2007).

Un esempio utile per marcare le differenze tra due “pezzi di matematica greca”, come dicevo, è la dimostrazione del teorema attribuito a Pitagora che conclude gli *Elementi*. Euclide si serve di una figura, il “diagramma” appunto, descritto come un mulino o come una coda di pavone (fig.1). Il diagramma risponde all’esigenza di visualizzare un oggetto matematico che non è specifico bensì incarna tutte le possibilità esistenti; contemporaneamente chi lo manipola deve essere consapevole del fatto che, una volta disegnato e quindi dotando le sue linee di spessore e i suoi punti di dimensione, perde le caratteristiche di generalità che lo rendono strumento utile per una dimostrazione (Cuomo, 2007).

Gli *Elementi* assunsero in seguito il ruolo di libro di testo e di riferimento per la matematica più avanzata. Oggi il testo di Euclide è una lettura (od almeno rappresenta uno stile) indispensabile nella formazione matematica degli studenti del primo e del secondo anno della scuola secondaria superiore.

3. Rappresentazioni semiotiche nella didattica della matematica

Il problema che voglio esaminare è quello della “traduzione” che gli studenti devono operare per passare da una rappresentazione ad un'altra di uno stesso oggetto matematico. Parlerò di rappresentazioni semiotiche perché farò riferimento ad almeno quattro sistemi semiotici: la lingua naturale, il formalismo algebrico, la rappresentazione grafica e quella tabulare.

In effetti, poiché non è possibile determinare un rinvio concreto di un oggetto matematico, colui che vuole manipolarlo è costretto a servirsi di rappresentazioni. D’altra parte, come sostiene D’Amore (2003), in matematica si parla più spesso di “oggetti matematici” che non di “concetti matematici”, in quanto si studiano preferibilmente i primi piuttosto che i secondi; «la nozione di oggetto è una nozione che non si può non utilizzare dal momento in cui ci si interroga sulla natura, sulle condizioni di validità o sul valore della conoscenza» (Duval, 1998).

Dunque sarebbe molto più importante curare la rappresentazione dei segni piuttosto che valutare l’eventuale acquisizione del concetto da parte dello studente. D’altra parte lo stesso Vygotskij afferma che non esiste concetto senza segno[2].

In effetti è molto comune riscontrare nei ragionamenti degli studenti quelli che Duval chiama *fenomeni di non congruenza* allorché non viene collegato correttamente un registro semiotico ad un altro.[3]

Dunque, per continuare a seguire i ragionamenti di Duval, «è considerando simultaneamente due registri di rappresentazione, e non ciascuno isolatamente, che si può analizzare il funzionamento cognitivo delle diverse attività matematiche».

La sperimentazione che segue ha l’intenzione di condurre gli studenti intervistati a gestire diversi registri, a scegliere quello che sembra più efficace o almeno più comodo, e ad operare le opportune conversioni.

4. La sperimentazione

La mia ricerca è stata condotta su venti ragazzi appartenenti a quinte classi di scuola media superiore (17-18 anni) ed ha lo scopo di indagare su come il concetto di dimostrazione venga acquisito dagli studenti. In particolare sono stati scelti solo studenti con un buon curriculum nello studio della matematica.

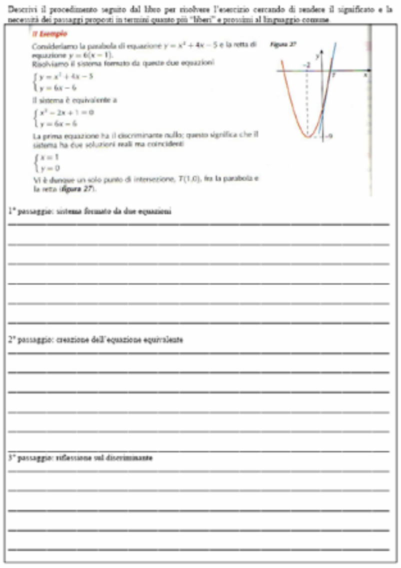
Gli allievi, attraverso situazioni/problema, sono stati invitati a lavorare su registri semiotici diversi (linguaggio naturale, rappresentazione grafica, rappresentazione tabulare, linguaggio algebrico), ad elaborare strategie e infine a stabilire quando un processo dimostrativo può dirsi concluso.

La sperimentazione è divisa in varie fasi in cui lo studente ha dovuto annotare, scrivere e documentare i passaggi logici operati nei suoi ragionamenti.

4.1 Prima fase

Agli studenti è stato somministrato un problema di intersezione tra una parabola e una retta. Il problema si è presentato già svolto e commentato (Figura 2). Lo svolgimento suggerito dal testo fornito agli studenti prevedeva: la formulazione del sistema dell’equazione della parabola e della retta; la creazione del sistema associato e la risoluzione dell’equazione di secondo grado; lo studio del discriminante e la relativa conclusione che il punto di intersezione è unico e che le due curve sono tangenti tra loro.

Il compito assegnato agli studenti è stato di commentare i tre passaggi già descritti. In altre parole la richiesta è stata quella di operare una “parafrasi” ovvero di traslare quanto elaborato nel linguaggio algebrico, altamente formalizzato, nel linguaggio naturale.


Descrivi il procedimento seguito dal libro per risolvere l'esercizio cercando di rendere il significato e la necessità dei passaggi proposti in termini quanto più "liberi" e prossimi al linguaggio comune.

Esempio

Consideriamo la parabola di equazione $y = x^2 + 4x - 5$ e la retta di equazione $y = 6(x - 1)$.
Risolviamo il sistema formato da queste due equazioni

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x - 5 \\ y = 6x - 6 \end{cases}$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 6x - 6 \end{cases}$$

La prima equazione ha il discriminante nullo; questo significa che il sistema ha due soluzioni reali ma coincidenti

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vi è dunque un solo punto di intersezione, $T(1,0)$, fra la parabola e la retta (**figura 27**).

1° passaggio: sistema formato da due equazioni

2° passaggio: creazione dell'equazione equivalente

3° passaggio: riflessione sul discriminante

Figura 2

[2] «Tutte le funzioni psichiche superiori sono unite da una caratteristica comune superiore, quella di essere dei processi mediati, cioè di includere nella loro struttura, come parte centrale ed essenziale del processo nel suo insieme, l’impiego del segno come mezzo fondamentale di orientamento e di dominio dei processi psichici... L’elenco centrale [del processo di formazione dei concetti] è l’uso funzionale del segno, o della parola, come mezzo che permette all’adolescente di sottomettere al suo potere le proprie operazioni psichiche, di dominare il corso dei propri processi psichici...» (Vygotskij, 1962; nell’ed. francese, 1985, alle pagg. 150, 151, 157).

[3] «Nell’analisi del funzionamento cognitivo è importante distinguere bene:

- le trasformazioni di rappresentazioni che sono dei **trattamenti** (si resta nello stesso registro)
- le trasformazioni che sono delle **conversioni** (si cambia registro)» (Duval 1996).

4.2 Seconda fase

È stato fornito un programma realizzato con il software Excel (Figura 3). Sono state considerate le due equazioni trattate nella prima fase e si è data la possibilità di visualizzare sotto forma di tabella le coordinate di 20 punti per ogni curva e contemporaneamente vedere rappresentati i complessivi 40 punti su un sistema di assi cartesiani. Il programma consente agli studenti unicamente di stabilire il valore minimo e il valore massimo da attribuire alla variabile indipendente *x* e, di conseguenza, gli intervalli tra due ascisse consecutive.

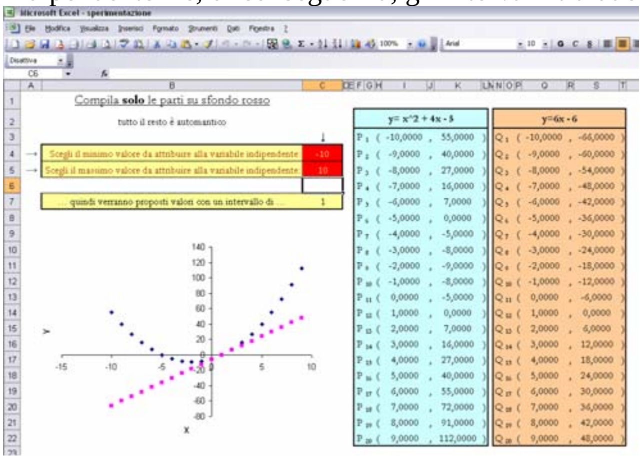


Figura 3

Questa volta è stato chiesto loro di risolvere il problema – già letto, svolto e commentato nella prima fase – mediante l'esclusiva manipolazione di questi due valori e di giungere, se possibile, alla stessa conclusione: esistenza del punto di intersezione e sua unicità. È da notare che il programma elaborato e fornito agli studenti consente ben poca libertà: le equazioni sono stabilite a priori, è possibile visualizzare solo venti punti per ogni curva sia in modo tabulare sia grafico e, fattore non meno importante, non è possibile agire sull'approssimazione che opera il foglio di calcolo (ogni cella del foglio elettronico è impostata per mostrare solo quattro cifre decimali). Tutto questo nell'intenzione di focalizzare l'attenzione esclusivamente sul processo argomentativo, cercando, quanto possibile, di eliminare variabili che a noi in questo momento non interessano, quali l'abilità di calcolo, la prontezza mnemonica nel ricollegarsi a concetti studiati anni prima, ecc.

4.3 Terza fase

Lo studente deve risolvere un problema nuovo, del tutto analogo al primo, in cui individuare gli eventuali punti di intersezione tra una retta e una parabola. La novità in questo esercizio è che il punto di intersezione esiste, è ancora una volta unico, ma le sue coordinate presentano numeri irrazionali. Finalmente si può scegliere autonomamente il procedimento e la strategia.

Dunque gli studenti si sono trovati a lavorare su registri semiotici diversi e necessariamente hanno dovuto operare conversioni dall'uno all'altro. Nella prima fase hanno avuto a disposizione un procedimento totalmente algebrico da loro perfettamente conosciuto. Gli studenti intervistati, infatti, sono in grado di risolvere senza alcuna difficoltà problemi analoghi. Nonostante ciò, sembra, dall'analisi dei dati di cui dispongo, che il significato dei passaggi formalizzati algebricamente sia per loro sconosciuto. Infatti, pur essendo capace di riprodurli, di gestire correttamente questo registro semiotico e di operare trattamenti all'interno di esso, non sono in grado di operare la conversione richiesta nel linguaggio naturale (Duval, 1996). Gli studenti nella quasi totalità dei casi si limitano ad una banale descrizione dei passaggi algebrici già applicati.

Se nella prima fase gli studenti non "vedono" nulla di ciò che stanno manipolando attraverso le operazioni algebriche, nella seconda fase esplorano letteralmente un altro ambiente. Attraverso i due valori sui quali è possibile agire, si è in grado di preferire una visione ampia del piano ma poco precisa, oppure una maggiormente dettagliata ma locale. Gli studenti hanno avuto la duplice possibilità di determinare il punto di intersezione o attraverso il grafico, notando che retta e parabola si incontrano, oppure mediante i dati in tabella notando che un punto della parabola coincide con uno della retta.

Durante la seconda fase tutti gli studenti sono riusciti a trovare il punto di intersezione, alcuni limitandosi ad indicare il grafico, altri utilizzando anche la tabella; il problema dell’unicità è quasi taciuto. È da precisare che gli studenti intervistati non hanno ancora studiato né le successioni, né il concetto di continuità della funzione e nemmeno possono ancora parlare di funzione monotona. Di fatto i dati forniti da grafico e tabella (cioè i punti sul piano e le coppie di coordinate nelle tabelle) potrebbero essere interpretati come dati ricavati in laboratorio da “sensate esperienze”.

L’ultima fase rappresenta quella più problematica: la determinazione del punto di intersezione, avendo come coordinate numeri irrazionali, non risulta semplice nonostante il buon uso del software. Il grafico non viene affatto in aiuto, essendo troppo grossolana la rappresentazione dei punti (i punti in Excel sono quadratini tutt’altro che adimensionali). Ancora, la tabella può visualizzare cifre approssimate con un numero di cifre decimali ben definito.

5. Analisi dei dati sperimentali

I protocolli sono stati raccolti e analizzati in base all’analisi a priori descritta di seguito e i dati sono stati elaborati con lo CHIC.

L’analisi quantitativa dei dati conferma quanto detto finora. L’analisi a priori ipotizzata è la seguente:

(A1a)1. Non commenta
(A1a)2. Si limita a descrivere le operazioni proposte dal testo.
(A1a)3. Coglie parzialmente il significato dei passaggi proposti dal testo e argomenta in modo vago.
(A1a)4. Spiega dettagliatamente i passaggi e argomenta correttamente i procedimenti.
(A1b)1. Non riesce a determinare il punto e non scrive nulla.
(A1b)2. Non riesce a determinare il punto e conclude che non ci sono punti di intersezione.
(A1b)3. Riesce a determinare il punto in comune ma non aggiunge altro.
(A1b)4. Riesce a determinare il punto in comune e conclude che è il punto K determinato nel passaggio precedente.
(A2)1. Non risponde.
(A2)2. Prova nuovamente a risolvere l’esercizio analiticamente senza giungere ad una risposta pertinente.
(A2)3. Dichiara di avere provato diverse volte il programma con diversi “range” e di aver determinato altri punti in comune.
(A2)4. Si limita ad osservare che nella tabella visualizzata dal calcolatore era determinato un solo punto in comune.
(A2)5. Dichiara di avere provato diverse volte il programma con riversi “range” e di non aver determinato altri punti in comune.
(A2)6. Risponde che lo studio del discriminante è sufficiente ad affermare che esiste un unico punto di intersezione.
(A2)7. Attribuisce Xmin e Xmax molto prossimi tra loro e vicini al punto di ascissa 1 in modo da avere una visione più dettagliata in una porzione di spazio ben precisa. Deduce che non ci sono altri punti in comune.
(A2)8. Attribuisce Xmin e Xmax molto prossimi tra loro e vicini al punto di ascissa 1 in modo da avere una visione più dettagliata in una porzione di spazio ben precisa. Deduce che ci sono altri punti in comune.
B1. Non risponde.
B2. Svolge l’esercizio analiticamente senza giungere a conclusione corretta
B3. Svolge l’esercizio analiticamente giungendo a determinare il punto di intersezione
B4. B3 + aggiunge, argomentando, che il punto di intersezione è unico.
B5. Prova ad utilizzare il programma ma non giunge a risposte corrette.
B6. Utilizzando il programma, mediante la sola osservazione del grafico, deduce che devono esserci intersezioni.
B7. Utilizzando il programma, osservando il grafico e i valori nelle tabelle, deduce che devono esserci intersezione ma non è possibile determinarne il numero.
B8. Utilizzando il programma, poiché non riesce a trovare due punti uguali nelle due tabelle, deduce che le due curve non si incontrano.
B9. Utilizzando il programma, interagendo con il “range”, osservando il grafico e le tabelle, deduce ed argomenta che si determina un punto di intersezione e ne dà un valore approssimato.

B10. Utilizzando il programma, interagendo con il "range", osservando il grafico e le tabelle, deduce ed argomenta che probabilmente esiste un punto di intersezione, ponendosi però il problema dell'approssimazione del calcolatore.

Nella figura 4 è rappresentato l'albero delle similarità dal quale si evincono le seguenti considerazioni:

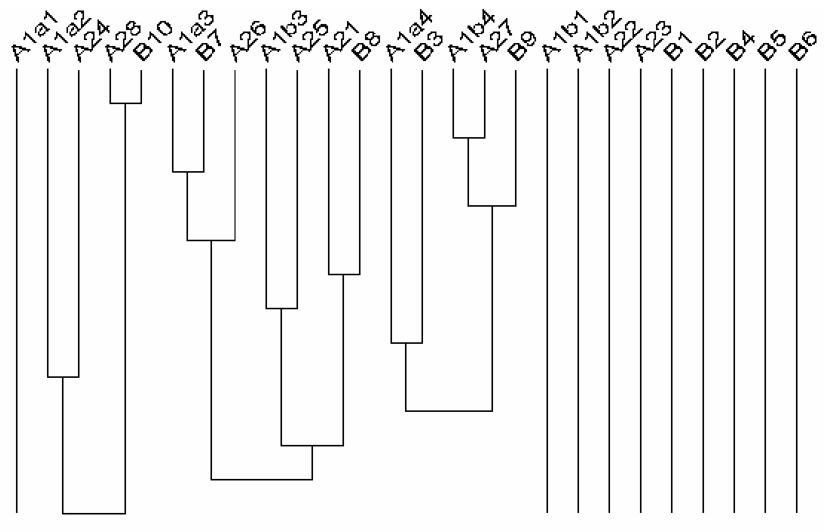


Figura 4

- le variabili (A1a)2 e (A1a)3 dividono quasi esattamente a metà il campione scelto. Quasi nessuno fra gli studenti è stato in grado di "tradurre" ciò che era stato formalizzato dal linguaggio algebrico al linguaggio naturale.
- (A1a)3, (A2)6, B7; ha ignorato la richiesta di dimostrare l'unicità del punto di intersezione nel quesito A sia algebricamente sia con Excel e per le risposte successive non ha voluto utilizzare il software preferendo rimanere all'interno dell'ambito algebrico.
- (A1b)4, (A2)7, B9; gli studenti hanno individuato correttamente il punto di intersezione del test A mediante il software; si sono convinti quasi subito della sua unicità (ricordando d'altra parte l'esercizio svolto algebricamente poco prima). Nel test B hanno ritenuto l'esplorazione mediante software sufficiente per affermare che esiste un solo punto di intersezione e ne hanno dato un valore approssimato.
- (A2)8, B10; chi ha utilizzato meglio il software informatico, argomentando correttamente le varie operazioni svolte, è stato in grado di avvicinarsi maggiormente alla soluzione del problema delle approssimazioni.

6. Conclusioni

Ciò che ho potuto osservare analizzando i dati acquisiti è che gli studenti preferiscono di gran lunga “vedere” le rappresentazioni del loro oggetto di studio. Il computer fornisce loro questa possibilità. Gran parte degli studenti si sente dunque perfettamente soddisfatto e gratificato dall’uso del calcolatore durante la seconda fase.

Nella terza fase, forti della buona manualità acquisita per l’esercizio precedente, tutti gli studenti si sono affidati di nuovo al software loro proposto, ma, non essendo riusciti a determinare il punto di intersezione, le strategie da loro attuate sono state molteplici: qualcuno si è affidato nuovamente al linguaggio algebrico formale anche se aveva dimostrato poco prima di non riuscire a cogliere il significato dei trattamenti che egli stesso aveva operato. Altri hanno valutato i dati di cui disponevano nelle tabelle talmente accurati da poter stabilire con gran sicurezza che le due curve si intersecano; tutti loro quindi hanno ritenuto dimostrata l’esistenza del punto di intersezione rinunciando a determinarne precisamente le coordinate.

È interessante notare che i trattamenti all’interno del registro algebrico vengono elaborati senza alcuna difficoltà. Tuttavia, nella maggior parte dei casi, risulta piuttosto complicato tradurre nel linguaggio naturale quanto svolto mediante il linguaggio algebrico. In effetti la disinvoltura nell’elaborazione di un procedimento algebrico che tratta l’intersezione di due curve potrebbe essere attribuibile semplicemente ad una sorta di automatismo acquisito dagli studenti o di abitudine a svolgere tali problemi.

Tale conclusione, secondo me, sarebbe confermata dal fatto che nel passaggio successivo gli studenti accolgono con interesse la “novità” dello strumento informatico in quanto permette loro di manipolare meglio l’oggetto retta e l’oggetto parabola visualizzandoli sullo schermo. La terza fase della ricerca rivela però che la conversione da una rappresentazione algebrica ad un’altra tabulare o grafica non avviene sviluppata correttamente da tutti gli studenti. In effetti l’oggetto che compare sullo schermo, con tutte le limitazioni legate al supporto informatico, è una rappresentazione, sebbene evidente dell’oggetto matematico, molto imprecisa. Occorrerebbe, per trattarla correttamente, la contemporanea gestione della rappresentazione tabulare, grafica ed algebrica. Ciò avviene raramente e indica come sia necessario, ancorché insistere sui trattamenti di singoli registri semiotici, enfatizzare le problematiche connesse alle conversioni.

Lo sviluppo di questa ricerca dovrebbe proseguire, dunque, riflettendo ulteriormente sul rapporto che intercorre tra l’abilità argomentativa matematica e la capacità di gestire simultaneamente più linguaggi. Riassumendo, ritengo il seguente lavoro significativo nei seguenti punti:

- gli studenti intervistati non hanno ancora studiato i teoremi legati al concetto di continuità di una funzione. Per questo motivo ritengo che, per una interpretazione assolutamente corretta delle operazioni svolte con il calcolatore, fosse necessario una consapevolezza piena del procedimento algebrico;
- gli studenti che hanno ben interpretato il ruolo del software proposto, hanno saputo gestire i diversi registri messi a loro disposizione sono riusciti a raggiungere questa consapevolezza;
- le limitazioni strutturali del programma di Excel che gli studenti hanno dovuto affrontare sono state di stimolo per coloro che hanno potuto coglierle attraverso la corretta e simultanea interpretazione delle rappresentazioni tabulare e grafica;
- quegli studenti che non hanno operato un’opportuna conversione dal linguaggio algebrico al linguaggio naturale si sono limitati al procedimento algebrico – per loro abituale – ignorando quasi del tutto le consegne legate all’utilizzo del mezzo informatico.

Riferimenti bibliografici

Acerbi F., 2007, *Una scuola matematica Alessandrina?*, La matenatica i luoghi e i tempi (a cura di C. Bartocci e P. Odifreddi), Einaudi, Torino

Barbin E., 1899, *La démonstration mathématique: significations èpistemologiques et questions didactiques*, Bulletin APMEP, 366, 591-620

Brousseau G., 1997, *Theory of Didactical situations in mathematics. 1970-1990*, (304 pages) traduction M. Cooper, N. Balacheff, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield. (Kluwer Academic Publishers)

Cuomo S., 2007, *Una scuola matematica Alessandrina?*, La matenatica i luoghi e i tempi (a cura di C. Bartocci e P. Odifreddi), Einaudi, Torino

D’Amore B., 2003, *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Pitagora: Bologna.

Duval R., 1996, *Quel cognitive reteniren didactique des mathèmatiques?*, Recherche en Didactique des Mathèmatiques, 16, 3, 349-382.

G. Brousseau, 1997, *Theory of Didactical situations in mathematics. 1970-1990*, (304 pages) traduction M. Cooper, N. Balacheff, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield. (Kluwer Academic Publishers).

Gras R., 2000, *Les fondements de l’analyse implicative statistique*, Quaderni di Ricerca in Didattica, Palermo, http://dipmat.math.unipa.it/~grim/ quaderno9.htm

Gras R., Suzuki E., Guillet F., Spagnolo F. (Eds.), 2008, *Statistical Implicative Analysis - Theory and Applications*, Springer.

Hanna G., 2000, *A critical examination of three factors in decline of proof* , Interchange, vol. 31/1, 21-33.

Hanna G., 2000, *Proof, explanation and exploration: an overview*, Educational studies in mathematics, 44, 5-23.

Jaffe A. and Quinn F., 1993, *Theoretical mathematics: toward a cultural syntesis of mathematics and theoretical physics*, Bulletin AMS, 29, 1-13

Lakatos, I.., 1979, *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica*, Feltrinelli, Milano, trad. it. Di *Proof and refutation* , a cura di D. Benelli.

Mason J., 1991, *Question about geometry*, in D.Pimm and E. Love (eds) teaching and learning mathematics: a reader, holder and Stoughton , London, 77-99.

Spagnolo F., 2000, *The role of history of mathematics in research in Mathematics Education, Proceeding*, "The Mathematics Education into the 21st Century Project", November 2000, Amman, Jordan. (http://math.unipa.it/~grim/21project.htm)

Spagnolo F., 2001, *Semiotic and hermeneutic can help us to interpret teaching/learning?*, Proceeding "The Mathematics Education into the 21st Century Project", Palm Cove (Cairns, Australia). (http://math.unipa.it/~grim/21project.htm).

Spagnolo F. et alii, 2004, *L’analisi implicativa per lo studio di una esperienza didattica in statistica*, Quaderni di Ricerca in Didattica n.13, Palermo

Spagnolo F., 1997, *L’analisi a-priori e l’indice di implicazione statistica di Gras*, Quaderni di Ricerca in Didattica GRIM, n.7, Palermo

Vygotskij L.S., 1962, *Thought and language*. Cambridge, MIT Press.

Zeilberger, D., 1993, *Theorem for a price: tomorrow’s semi-rigorous mathematical culture*, Notices of the American Mathematican Society, v.40 n. 8, 978-981.

Appendice 1: il testo completo delle richieste

A

Date l’equazione della parabola

$$y = x^2 + 4x - 5$$

e della retta

$$y = 6x - 6\,,$$

1. il punto K (1,0) è un punto di intersezione:
    a. il testo (figura 1) propone un procedimento per individuarlo: commentalo soffermandoti su ognuno dei tre passaggi.
    b. utilizza il programma di excel per determinare che il punto K è un punto sia della parabola sia della retta: modificando i dati su sfondo rosso visualizzerai alcuni punti della parabola e della retta sul piano cartesiano e contemporaneamente ne saranno esplicitate le coordinate nelle tabelle. Riesci ad individuare il punto comune alle due curve?
2. prova che non esistono altri punti di intersezione.

B

Siano date l’equazione della parabola

$$y = 2x^2$$

e della retta

$$y = 4\sqrt{2}x - 4\,.$$

Le due curve hanno punti comuni? Spiega come deduci le tue conclusioni.