“Quaderni di Ricerca in Didattica”, n. 19, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Logica antica e logica moderna (*)

CARLO PENCO

Abstract
In this essay I give the main lines of a confrontation between ancient and modern logic, that is between logic before and after Frege. Much of the old ideas is recovered in the new logic, but after Frege logic is something deeply different from Aristotelian logic. This shows that Kant was wrong when he asserted, in the preface of the second edition of the /Critique of Pure Reason/, that formal logic "could not make any advance so that it is to be cosidered as complete". Not only logic was not completed with Aristotle, but lwe mayt also assert that logic today is connected to the old logic as chemistry is connected with alchemy. Some basic aspects are still valid, but the structure in which logicians work is much wider and complex than the structure of the old logic. Although Aristotle's syllogism was a coherent system and stoic logic has developed deep intuitions, only with the aid of mathematical symbolism logic could reach the most abstract achievements (like Gödel's theorem) and the most interesting applications (like symbolic artificial intelligence). While we have many introductions to logic, the historical reconstruction of the passage from old logic to contemporary logic is often disattended. This contribution gives a first direction for helping teachers to work on this direction. In the first paragraph I give a summary of the differences between Stoic and Aristotelian logics and I describe the Fregean turn which permitted the fusion of the two traditions after 2000 years of separation. In the second paragraph I try to make clear some differences between ancient and modern logic. The third paragraph is a sketch of classical formal systems as an help to better understand the logical language used in the first two paragraphs.

Sommario
In questo lavoro presento le linee di un confronto tra logica antica e logica moderna, cioè tra la logica prima di Frege e la logica dopo Frege, segnando con il nome di Frege[1] – il fondatore della logica matematica – lo spartiacque tra due visioni della logica. Molto dell'antico rimane nel nuovo, ma la logica dopo Frege non è più la logica di Aristotele, bensì qualcosa di nuovo e inedito, che mostra quanto sbagliasse Kant nella prefazione alla seconda edizione della *Critica della ragion pura*, dove sosteneva che la logica "non ha potuto fare un passo innanzi, di modo che, secondo ogni apparenza, essa è da ritenersi come chiusa e completa". Non solo la logica formale non era chiusa e completa con Aristotele, ma la logica di oggi si situa rispetto alla logica di ieri come la chimica rispetto all'alchimia. Alcuni aspetti di base permangono, ma la struttura in cui lavora oggi lo studioso di logica è molto più ampia e articolata della logica antica. Per quanto Aristotele con la teoria del sillogismo avesse costruito un sistema di logica quasi perfetto nel suo genere, e per quanto gli stoici – i grandi logici dell'antichità – avessero avuto intuizioni incredibilmente attuali, solo con l'aiuto del simbolismo matematico la logica iniziò quel percorso scientifico che le ha permesso sia le astrazioni più elevate (come il teorema di Gödel) sia le applicazioni più eclatanti (come l'intelligenza artificiale). Mentre abbondano i libri di logica[2], la ricostruzione storica del difficile passaggio dalla logica antica a quella moderna non sempre riceve la dovuta attenzione. Queste poche pagine vogliono dare una prima ricognizione didattica in questa direzione. Si prova a non dare molto per scontato, anche se oggi si dovrebbe presumere una conoscenza base di logica; nel terzo paragrafo si forniscono comunque alcuni cenni di logica "classica" che possono essere utili per impadronirsi del linguaggio usato anche nei primi due paragrafi.

(*) Si riassume qui il contenuto di una serie di conferenze a docenti di scuola superiore tenuto in diverse scuole pubbliche, e ripreso anche in altre sedi come la scuola di storia della logica organizzata dalla Società Italiana di Logica e Filosofia della Scienza; una prima versione di queste riflessioni è apparsa presso il Laboratorio di Scienze Cognitive di Rovereto (Università di Trento), 2001.

[1] Su Frege vedi C. Penco, *Vie della scrittura, Frege e la svolta linguistica*, Angeli, Milano 1994; A. Kenny, *Frege*, Einaudi, 2000; C. Penco *Frege*, Carocci, 2009.

[2] Tra i manuali più standard abbiamo in Italia il lavoro di D. Palladino *Corso di Logica. Introduzione elementare al calcolo dei predicati*, Carocci, Roma, 2002 e *Logica e teorie formalizzate. Completezza, incompletezza, indecidibilità,* Carocci, Roma, 2004. Tra le tante altre introduzioni, si può segnalare quella in parte più discorsiva di F. Berto, *La logica da zero a Gödel*, Laterza 2007.

1. Crisi del paradigma aristotelico e formazione del nuovo paradigma classico in logica

1.1. Contrasti di paradigmi in logica

Per quasi 2000 anni i filosofi, dopo Aristotele e gli stoici, hanno posto al centro o alla base della loro riflessione la logica, strumento, nato dall'analisi del linguaggio comune, per controllare la correttezza delle argomentazioni nelle diverse parti della filosofia (etica, fisica, metafisica). Dagli inizi del '500 alla fine del '600 si realizza quella rottura con la tradizione della logica scolastica che voleva inquadrare ogni conoscenza entro il sillogismo aristotelico. L'importanza data allo sviluppo di un metodo sperimentale ebbero un impatto enorme anche sull'organizzazione della filosofia e sulla logica. La crisi della cosmologia aristotelico-tolemaica non è che un segno di uno sconvolgimento culturale che richiedeva un rinnovamento intellettuale che la vecchia classe di "chierici" imbevuta di cultura scolastica non poteva reggere[3]. Alla logica del sillogismo viene contrapposto l'uso di un metodo matematico e sperimentale (il metodo galileiano), che viene preso a modello da alcuni filosofi. I casi più esemplari sono Cartesio e Locke. Entrambi sono a stretto contatto con la scienza moderna; Cartesio addirittura dà contributi fondamentali alla formulazione della geometria analitica; Locke si presenta come uno studioso di Boyle e Newton e delle nuove vedute della fisica moderna. Entrambi sono i fautori del nuovo metodo che non si basa su sterili sillogismi, ma nasce dallo studio delle idee e dalla visione matematica e meccanicisica del mondo[4] (sia Locke che Cartesio sono strenui fautori della visione meccanicistica; è interessante ad es. vedere la somiglianza delle loro analisi della luce e dei colori, fatte da Cartesio nella *Diottrica (1637*) e da Locke nel *Saggio sull'intelletto umano (1690)*, pubblicato tre anni dopo i *Philosophiae naturalis principia mathematica* di Newton). Per Cartesio il vero metodo è la ricerca di idee chiare e distinte. Per Locke il problema è mostrare come nascono e si sviluppano le idee. Il centro della riflessione filosofica diviene il problema della corretta rappresentazione del mondo da parte delle idee. La ricerca del metodo per la conoscenza del mondo esterno diviene il centro della riflessione filosofica. L'epistemologia (teoria della conoscenza) sostituisce la logica come centro e base della filosofia. [5]

Non solo la logica, ma anche la scienza aristotelica basata su quella logica, viene messa in crisi: soprattutto vengono messe in discussione la fisica e la cosmologia di impianto aristotelico [6]: della cosmologia aristotelica viene a cadere l'idea del cosmo come una serie di sfere cristalline concentriche con la terra al centro - sostituita dalla visione della terra che si muove intorno al sole; della fisica aristotelica sparisce l'idea delle "cause finali" che determinano il movimento dei corpi e l'idea che la velocità di caduta dei corpi sia proporzionale al loro peso - sostituita dalla legge di caduta dei gravi di Galileo[7]. Sparisce anche l'idea che ogni cosa terrestre sia composta da quattro elementi (terra, aria, acqua, fuoco - che contengono le qualità di caldo, freddo , secco e umido), base dell'alchimia medioevale

---

3 L'importanza della rivoluzione provocata dal passaggio dalla teoria tolemaica a quella copernicana è presentato e sottolineato in molti manuali, e in particolare dall'ormai classico testo di Kuhn, *La struttura delle rivoluzioni scientifiche*

4 Si può vedere il classico Dijksterhuis, *Il meccanicismo e l'immagine del mondo (1951)*, Feltrinelli, Milano 1971, specie su Galileo, Cartesio e Newton.

5 Tra le analisi della centralità del concetto di idea o rappresentazione si veda il testo di J. Hacking, *Linguaggio e filosofia* (1975), che distngue tre periodi nella riflessione sul linguaggio a partire dal '600: l'apogeo delle idee (Hobbes, Cartesio, Locke), l'apogeo dei significati (Frege, Wittgenstein), l'apogeo degli enunciati (Quine). Idee di Hacking si ritrovano in Rorty, *La filosofia e lo specchio della natura*, dove Rorty vede nella centralità della epistemologia basata sul conceto di rappresentazione la radice dei limiti della filosofia moderna.

6 La parte più valida della scienza aristotelica sembra a questo punto essere la biologia: come biologo Aristotele può essere letto ancora oggi come un buon naturalista (anche se si tende ad abbandonare la sua visione della vita animale incentrata sulle "cause finali"); il suo metodo di osservazione portò alla classificazione di 540 specie animali e a diverse analisi interessanti (sull'embriologia del pulcino, lo sviluppo dei cefalopodi, la descrizione dello stomaco quadripartito dei ruminanti, o sviluppo dei pesci, ...) Il bellissimo libretto introduttivo di Johnatan Barnes (*Aristotele*, Einaudi, 2002) aiuterà studenti e docenti ad avere una visione meno stereotipata del grande filosofo.

7 Anche se si rivaluta oggi la perdurante influenza della visione aristotelica delle quattro cause, spostata a un livello metateorico; sulla causalità in generale vedi il libro di F. Laudisa, *Causalità*, Carocci, Roma 1999. La fisica di Aristotele è comunque oggi rivalutata come "fisica del senso comune", cioé come analisi del modo di ragionare intuitivo ingenuo dell'uomo comune, che ha anche applicazioni a livello di strutturazione del ragionamento di senso comune comune in intelligenza artificiale.

e dissolta dalla nascita della chimica moderna. Relativamente alla logica si abbandona l'idea che la forma logica sia sempre la struttura soggetto-predicato - sostituita dalla ricostruzione del linguaggio logico sulla base della visione matematica del rapporto tra funzione e argomento.

Eppure, per almeno tre secoli dalla rivoluzione scientifica, la logica aristotelica, pur perdendo al sua centralità in filosofia, sembra non venire scalfita. Kant stesso ritiene la logica formale identificata una volta per tutte con la logica aristotelica[8]; il suo perdurare tra i filosofi fino alla rivoluzione "fregeana" di fine ottocento è segno anche della potenza della logica aristotelica che, per certi versi, sopravvive alla fisica e alla cosmologia del grande maestro di Alessandro Magno. Vediamo a grandi linee cosa si mantiene della visione tradizionale e cosa si aggiunge. In Aristotele sono presenti due aspetti essenziali del lavoro logico, mantenuti ancora oggi, per cui la logica è:

(1) *logica formale*, perché si occupa delle forme e non dei contenuti delle argomentazioni. Cosa è la "forma logica" di una proposizione diviene uno dei problemi principali del logico e del filosofo; Aristotele considerava come forma logica elementare la struttura soggetto-predicato e la attribuzione di generalità (si attribuisce una proprietà a tutti i membri di una classe o ad alcuni membri). Oggi non si accetta più che la struttura soggetto-predicato sia la forma logica base con cui si analizzano le proposizioni del linguaggio logico e si utilizza come forma logica base la struttura funzione-argomento. Si mantiene l'importanza di inglobare nella forma logica l'indicazione della generalità, ma questa assume una nuova formulazione con la notazione dei quantificatori, che rappresenta forse l'apporto più originale della logica contemporanea alla matematica.
(2) *logica simbolica*, perché utilizza simboli al posto delle espressioni correnti del linguaggio. Questa è una conseguenza del fatto che si occupa delle forme di argomentazione; una espressione come un nome o una proposizione possono essere sostituite da simboli; l'importante è che vi siano diversi simboli per diverse categorie grammaticali; Aristotele utilizza lettere per nomi comuni ("uomini", "mortali", ecc.); gli stoici lettere o termini generici per proposizioni ("il primo", "il secondo", ecc.); i moderni lettere diverse per ogni tipo di categoria sintattica: termini singolari, predicati, connettivi proposizionali, quantificatori, ecc.

Se queste prime due caratteristiche sono anticipate chiaramente nell'opera dello stagirita[9], altre due caratteristiche sono completamente assenti: quelle che collegano la logica con il linguaggio della matematica. Per capire il perché occorre rifarsi ancora alla rivoluzione scientifica del '600. Caratteristica centrale della rivoluzione scientifica è la "matematizzazione della natura" di cui parla Galileo Galilei: il libro della natura è scritto in formule matematiche. La matematica diviene il centro d'equilibrio di *ogni* scienza: cosmologia, fisica, biologia, chimica, ecc. sono tutte scienze che, oltre a essere basate sull'osservazione e sull'esperimento, sono basate sull'utilizzo di parti della matematica. Anche la logica viene dunque forzata a darsi una forma matematica: se la logica è lo studio delle argomentazioni e viene usata per la scienza, dato che le diverse scienze assumono forma matematica, la logica dovrà anch'essa assumere una forma adeguata ad analizzare il linguaggio matematico con cui sono esposte le scienze. Abbiamo così due direzioni nella matematizzazione della logica: una che utilizza strumenti matematici per esprimere la logica tradizionale; un'altra che cerca di sviluppare la logica per permetterle di trattare i ragionamenti matematici. La logica sarà quindi:

(3) *logica matematica* perché utilizza strumenti matematici; questo è un risultato già presente nel '600 in Leibniz, che utilizza l'algebra per esprimere le operazioni logiche, e sviluppato a metà dell'800 da Boole, che presenta un calcolo algebrico universale che vale sia per i numeri, sia per le classi, sia per le proposizioni, vale cioé sotto diverse interpretazioni dei simboli.

---

8 Questo è quanto afferma Kant nel citato passo della *Critica della Ragion Pura*; nonostante questa tesi risultata erronea e purtroppo influente tra i filosofia, Kant non fu comunque così ingenuo in logica, come testimoniano le sue lezioni (vedi la introduzione di M. Capozzi all'edizione delle lezioni di logica di I. Kant). Mancava però a Kant ogni tentativo di formalizzazione matematica già abbozzata da Leibniz e ripresa da altri autori del '700 fino a culminare nell'opera di Boole (su cui vedi un lavoro di confronto con lopera di Frege in http://www.dif.unige.it/epi/hp/penco/pub/boole.htm). Per un approfondimento vedi l'introduzione di Mugnai a G. Boole, *L'analisi matematica della logica*, Boringhieri 1993.

9 Un altro aspetto non altrettanto esplicito, ma presente nel lavoro di Aristotele è l'aspetto della assiomatizzazione della logica, che diverrà centrale nella logica moderna a partire dai lavori di Frege e Hilbert.

(4) *logica della matematica* perché è in grado di analizzare il linguaggio matematico; questo è una delle motivazioni principali della logica di Frege, Peano e Russell. Che la logica sia "logica della matematica" la rende per certi versi una parte della matematica. E non a caso la logica viene insegnata normalmente nei corsi di laurea in matematica.

Perché gli aspetti (3) e (4) erano assenti dalla logica aristotelica? Probabilmente la responsabilità deriva dal diverso ruolo della matematica nell'antichità, che non rendeva necessario che la logica si interessasse così tanto del discorso matematico. Il ruolo centrale della matematica nella società contemporanea rendono la logica "matematizzata" non solo necessaria per un confronto con le scienze, ma anche utile per capire diversi dibattiti presenti nella nostra cultura: i problemi di carattere etico e teorico nati con l'età del computer sono legati anche al ruolo della logica matematica nella costruzione delle "macchine pensanti".

Gli sviluppi recenti delle Scienze Cognitive hanno peraltro posto il problema di una ulteriore ridefinizione della logica. Siamo forse a una nuova svolta della logica, dopo la svolta della "logica matematica" intesa nei due sensi sopra indicati? Ci troviamo di fronte a un nuovo tipo di logica, la cui distanza dalla logica matematica è pari alla distanza della logica matematica dalla logica aristotelica? Il dibattito è aperto e ha avuto momenti di accesa polemica[10]. Di fatto la logica matematica è nata sotto l'esigenza di dare un rigore alle argomentazioni matematiche; estendendo l'ambito di applicazione della logica dalla matematica ad altri aspetti del ragionamento ci si può ragionevolmente aspettare una nuova ridefinizione dello statuto della logica. Ma non è facile cogliere gli aspetti essenziali di questa ridefinizione.

Con gli sviluppi delle applicazioni informatiche l'ambito della logica si amplia in misura notevole oltre al lavoro di rigorizzazione del ragionamento matematico. Le "nuove tecnologie" sono peraltro nate anche proprio per le possibilità offerte dal rigore di calcolo della logica matematica. Studiare le somiglianze e le differenze tra logica aristotelica e logica matematica non è solo un modo per capire quanto profonda è stata la frattura tra mondo antico e moderno, ma anche un aiuto a capire i problemi di una nuova ridefinizione della logica. Capire le differenze di due paradigmi consolidati può aiutare infatti a creare la sensibilità per capire fino a che punto sia possibile parlare di paradigmi alternativi in logica (i passi avanti nella scienza di solito appaiono maggiori di quelli che sono in effetti).

1.2. Il paradigma stoico

Abbiamo parlato di "crisi del paradigma aristotelico", ma non è del tutto chiaro in cosa consiste il paradigma della cui crisi si è parlato, in particolare riguardo alla logica. Prima di tutto sembra strano che si parli di paradigma aristotelico in logica. Clemente Alessandrino sosteneva che gli antichi consideravano Omero principe dei poeti, Platone principe dei filosofi e Crisippo principe dei logici. Aristotele dunque? Egli era il principe degli scienziati. Perché dunque tanta importanza viene data alla sua logica? Di Crisippo e degli stoici si sono persi quasi tutti gli scritti, mentre di Aristotele si è salvato un abbondante corpus di scritti logici, raccolti con il titolo di "Organon". Nel medio-evo l'organon divenne il punto di riferimento fondamentale degli studiosi e così rimase fino all'età moderna. Anche la logica di Port Royal, manuale di logica antiformalista e antiscolastico che ebbe grande fortuna tra il '600 e l'800 (oltre 50 edizioni francesi) mantenne un'ispirazione aristotelica, legata probabilmente alla lettura degli *Analitici* di Aristotele. Quel poco di logica stoica che restò vivo durante il medio-evo e venne riscoperto in epoca moderna si sviluppò come "logica delle conseguenze" accanto alla "logica dei termini" di Aristotele. Due paradigmi si intrecciano dunque nella storia della logica e, benché quello stoico sia stato storicamente "perdente", è utile presentarlo per primo per evidenziare il contrasto con la più tradizionale logica aristotelica.

una contrapposizione millenaria

Socrate aveva due allievi particolarmente dotati: Platone di Atene e Euclide di Megara. Essi avevano sviluppato le due diversi anime di Socrate, quella del costruttore di concetti e quella del

[10] si veda ad esempio in Italia il dibattito tra Gabriele Lolli e Carlo Celucci che è nato probabilmente con un numero di "Notizie di logica" del Settembre 1991. Di Lolli si veda ad esempio *Filosofia della matematica. L'eredità del Novecento*, il Mulino, Bologna, 2002 o *Sotto il segno di Gödel*, il Mulino, Bologna, 2007. Cellucci in *Le ragioni della logica*, Laterza, 2005, ha ripreso la sua posizione polemica sullo sviluppo di una nuova forma di logica alternativa alla tradizione; vedi anche *La filosofia della matematica del '900*, Laterza, 2007.

costruttore di ragionamenti e sofismi. Alla morte di Socrate i suoi allievi andarono a vivere a Megara; dopo alcuni anni Platone tornò ad Atene fondando una scuola (il Liceo) tra i cui allievi troviamo Aristotele (a sua volta fondatore della scuola peripatetica). Ma a Megara anche Euclide ebbe una fiorente scuola di studi, tra i cui allievi troviamo Eubulide di Mileto. Eubulide è famoso nella storia della logica per aver 'inventato" alcuni dei più famosi paradossi logici (da "il mentitore" a "il calvo", "il cornuto", ecc.) Dei logici di Megara abbiamo però poche fonti, e molto viene raccontato da Aristotele stesso, con gran vigore polemico, come di logici dediti all'argomentazione sofistica, senza rispetto per la filosofia e la scienza. D'altra parte Aristotele si difendeva dagli attacchi virulenti che gli erano rivolti contro da Eubulide. Forse a questa primo momento di antagonismo dobbiamo una insanabile frattura tra due tradizioni logiche, che si irrigidirono nelle rispettive posizioni, senza mai giungere (se non con Frege dopo più di 2000 anni) a una unificazione.

Poco possiamo fidarci dei resoconti di Aristotele o dei resoconti ottocenteschi (la grande storia della logica del Prantl giudica semplicemente assurde le teorie della scuola megarico-stoica). Sappiamo però per certo che la scuola megarica si sviluppò, il suo sapere profondo confluì nella scuola stoica. Qui di seguito accennerò solo ad alcune idee base della logica stoica, senza entrare in dettagli[11].

Caratteristica della logica stoica è quella di concentrarsi sui rapporti inferenziali tra proposizioni, prese come un tutto indivisibile;

(1) le proposizioni si dividono in semplici e composte;
(2) queste ultime sono composte a partire dalle semplici attraverso connettivi[12].
(3) si distingue tra *tropos*, schema di inferenza valido, e *logos*, ragionamento effettivo.

Crisippo, il principe dei logici, aveva individuato cinque schemi di inferenza fondamentali, "indimostrabili", i primi due dei quali erano il "modus ponens" e il "modus tollens" (la riga si legge "quindi"):

se p allora q	se p allora q
p	non q
——	———
q	non p

Abbiamo qui in nuce gli elementi base della logica contemporanea:

(1) la distinzione enunciati semplici e enunciati composti,
(2) l'uso dei connettivi verofunzionali "se…allora" e "non"
(3) un abbozzo della distinzione tra regole e leggi logiche

Il modo di scrittura degli stoici non era peraltro molto perspicuo. Vediamo ad esempio come veniva espresso il nostro "modus ponens" e un ragionamento che lo esemplifica:

(1) regola del modus ponens:	Se il primo il secondo, e il primo, dunque il secondo
(2) enunciato che esemplifica la regola:	Se se è giorno c'é luce ed è giorno c'è luce.

Gli scritti degli stoici furono poco capiti e spesso trascritti in modo erroneo e approssimativo, fino ad arrivare al giudizio ottocentesco di Prantl che stima tali lavori di nessun interesse logico. Eppure con gli stoici abbiamo alcuni risultati interessanti; per fare un esempio le due forme sopra esposte si potrebbero tradurre in simbolismo attuale come

---

[11] Una presentazione introduttiva della logica stoica si può trovare nel volume di Kneale-Kneale, *Storia della logica*, Einaudi, Torino, 1972, cap.3, che dà anche indicazioni sulla contrapposizione tra Aristotele e Eubulide. Vedi anche R.Blanché, *La logica e la sua storia*, Ubaldini, Roma, 1973, cap. IV. Per un lavoro più approfondito è utile leggere i lavori di Benson Mates.

[12] La discussione sul significato dei connettivi, in particolare del condizionale ("se ... allora") prese ampio spazio nelle discussioni della scuola. Filone di Megara è oggi famoso per aver dato una definizione verofunzionale del condizionale identica a quella oggi usata in logica, a partire da Frege.

(1*) $p \rightarrow q, p \vdash q$

(2*) $((p \rightarrow q) \& p) \rightarrow q$

dove le parentesi aiutano a capire la struttura dell'enunciato complesso. Il secondo enunciato è valido per il teorema di deduzione per cui da (1*) si deriva (2*) tramite la regola metateorica per cui

da $X \vdash a$ si deriva $\vdash X \rightarrow a$

Cosa rimase della logica stoica? La dottrina delle conseguenze; nel medioevo si mantenne la distinzione tra *proposizioni categoriche* e *proposizioni ipotetiche*. Le prime riguardano i rapporti tra i termini (le categorie) secondo il metodo del sillogismo aristotelico, le seconde i rapporti di conseguenza tra proposizioni. Ma una fusione delle due tradizioni non si realizzò mai, anche se alcuni autori medioevali la tentarono (ad es. Burleigh). E il paradigma della logica rimase la logica sillogistica, depositata nella tradizione scolastica, almeno fino all'800 quando Boole propose, con l'albegra della logica, un trattamento parallelo dei due tipi di logica.

1.3. Il paradigma aristotelico

Aristotele voleva una logica come strumento di ordinamento e organizzazione del pensiero scientifico[13]. Aveva bisogno di qualcosa che permettesse di parlare dei concetti e dei rapporti tra concetti, non solo delle proposizioni. Anche se accenna a una rappresentazione "condizionale" del ragionamento, basata cioè sul "se...allora", il suo lavoro principale sarà quello di definire un tipo particolare di ragionamento usato nelle scienze e definire regole per verificarne la validità. Qui accenniamo ad alcune idee centrali del paradigma aristotelico in logica, che potremmo elencare così:

(1) La logica tratta di termini, enunciati, sillogismi,
(2) gli enunciati della logica sono gli enunciati assertori
(3) gli enunciati assertori uniscono e separano soggetto e predicato: sono affermativi e negativi.
(4) il logico è interessato agli enunciati universali e particolari; dell'individuale non si dà scienza.
(5) la forma soggetto predicato definisce cosa si intende per "universale"
(6) il logico studia le forme corrette di argomentazione secondo precise regole: il sillogismo.
(7) l'argomentazione scientifica è il sillogismo con premesse vere; il problema della relazioni.

Vediamo per cenni ciascuno di questi punti:

(1) è una "vulgata" aristotelica, che si richiama allo schema delle sue prime opere:

Categorie	libro che si occupa dei	*termini*	che esprimono	*concetti (o categorie)*
De interpret.	libro che si occupa degli	*enunciati*	che esprimono	*giudizi*
Analitici	libro che si occupa dei	*sillogismi*	che esprimono	*ragionamenti*

In particolare lo studio dei termini, e di ciò cui corrispondono pone, nel libro *Categorie*, la base del sistema logico, i mattoni ultimi della costruzione: gli individui ovverosia le "sostanze prime" (o "particolari") e le proprietà, la "sostanze seconde" (o "universali"). Questa è una distinzione fondamentale che si appoggia alla differenza tra nomi propri (Socrate, Callia, ecc.) e nomi comuni ("Bello", "Bianco", "Uomo", "Mortale").

(2) La definizione di enunciato assertorio (veritativo) è svolto nel *De Interpretatione*, dove Aristotele distingue *logos semantikòs* (discorso significativo in generale) e *logos apofantikòs* (discorso apofantico,

[13] La logica dunque non era un modo per acquisire conoscenza, ma solo per ordinarla. Vedi in generale l'antologia di J. Barnes, M. Schofield, B. Sorabji, *Articles on Aristotle*, London, Duckworth 1975. Sulla logica di Aristotele è utile la presentazione di Mignucci all'edizione italiana degli *Analitici* di Aristotele, ma anche il breve ed efficacissimo "la posizione della logica nella filosofia antica", in AAVV, *Logica matematica e logica filosofica*, a c. di E. Agazzi, La Scuola, Brescia 1990.

veritativo). Ciò che interessa alla logica non è la espressione dei sentimenti, delle preghiere, ecc., ma il vero e il falso. La logica tratta dunque del discorso apofantico, cioé dei giudizi o delle asserzioni (attenzione ai problemi di traduzione!)[14]

(3) Una volta definiti i mattoni della costruzione (i nomi che devono ricorrere negli enunciati assertori) si definiscono i loro modi di combinazione: in una affermazione si attribuisce (o predica) qualcosa di qualcosa, la negazione sottrae qualcosa a qualcosa. Affermazione (Socrate è bianco) e negazione (Socrate non è bianco) sono quindi i principali modi dell'enunciato assertorio.

(4) Accanto alla distinzione tra enunciati affermativi e negativi Aristotele fa una distinzione tra enunciati universali che riguardano un'intera classe ed enunciati particolari che riguardano solo alcuni individui di una classe (tutti gli uomini, qualche uomo). Aristotele presenta quello che viene chiamato "quadrato delle opposizioni", una classificazione dei soli tipi di enunciati che la logica è tenuta a considerare (*De Interpretatione*). Dato che la scienza non si interessa dell'individuale, la logica si occuperà solo di enunciati categorici universali e particolari, affermativi e negativi (in quanto segue il primo termine rappresenta il soggetto e il secondo il predicato):

tutti gli A sono B	*nessun* A è B
qualche A è B	*qualche* A non è B

(5) La distinzione soggetto-predicato diviene sempre più rilevante in logica; essa aiuta a definire più rigorosamente la distinzione tra "particolari" e "universali" , cioè tra individui e proprietà, tra sostanze prime e sostanze seconde. Cosa sono gli universali? Anche Aristotele è in dubbio; a volte li chiama "enti" e a volte "dicibili". Dopo Aristotele per tutto i medio-evo gli studiosi si scontrarono sulle diverse interpretazioni da dare agli universali. Nel dibattito sugli universali si contrappngono principalmente due scuole: i realisti per cui gli universali esistono "in re", sono enti del tutto reali ("la bellezza", "il bene", "l'uomo", ecc.), e caratterizzati da una essenza reale, e i nominalisti per cui gli universali sono solo nomi generici per classi di oggetti, non hanno una realtà in sé, ma sono solo un utile artificio per parlare delle uniche cose realmente esistenti, cioè gli enti individuali (quel particolare uomo, quella particolare scultura, ecc.). Ma per avere un disaccordo su qualcosa occorre intendersi. La logica permette di dare una definizione di "universale" su cui sia realisti che nominalisti concordavano: "universale" è ciò che può fungere sia da predicato che da soggett; "particolare" è ciò che può fungere solo da soggetto e mai predicato; e al contempo è ciò di cui non si dà contrario (mentre dell'universale si danno contrari: esiste il contrario del bello, ma non il contrario di Socrate). La definizione "logica" può essere esemplificata come segue:

soggetto	*copula*	*predicato*
l'animale	è	un essere vivente
l'uomo	è	un animale
il greco	è	un uomo
Socrate	è	greco

Come si può vedere la predicazione unisce due termini attraverso la copula (il verbo "essere"); alcuni sono sia soggetti sia predicati; solo "Socrate" non può essere predicato di alcunché. Può essere solo soggetto, dunque è un ente particolare; tutti gli altri termini sono universali, e si può discutere se essi rappresentino realtà eterne, concetti presenti nella mente o siano puramente nomi di comodo per organizzare il discorso.

---

[14] Occorre qui una precisazione sulle traduzioni: Alcuni (Colli) traducono *apofansis* con "giudizio", altri (Zanatta) con "enunciato". Ma il logo apofantico si contrappone da una parte al logo semantico, espressione significativa in generale, ad es. nome e verbo; e avrebbe ragione Zanatta a tradurre "enunciato". D'altra parte il loo apofantico si contrappone ai diversi altri logoi o discorsi come preghiera, ecc. che vengono normalmente chiamati in italiano "enunciati ottativi", "enunciati interrogativi", ecc. Quindi tradurre *apofansis* con "enunciato" è riduttivo; *apofansis* è quel tipo di enunciato che può essere vero o falso, cioè l'enunciato dichiarativo o assertorio, che esprime appunto un giudizio di verità. Nel *De Interpretatione* Aristotele peraltro fa una analisi del linguaggio, quindi è forse meglio tradurre *apofansis* con "asserzione".

(6) Negli *Analitici Primi* Aristotele presenta la prima "teoria logica" della storia, definendo il sillogismo e un metodo per determinare quali conclusioni seguano necessariamentte dalle premesse. Il sillogismo è quella forma di inferenza per cui da due premesse che abbiano un termine in comune (termine medio) ri raggiunge una conclusione che unisce gli altri due termini, secondo l'esempio classico

tutti gli uomini sono mortali
tutti i greci sono uomini
----
tutti gli uomini sono mortali

Le coppie delle premesse sono raggrupparte in diverse figure a seconda della disposizione del temine medio, e in diverse forme a seconda del tipo di enunciati (universali o esistenziali, affermativi o negativi). Si danno le regole per verificare quando un sillogismo sia o no valido (delle 256 possibili forme di sillogismo Aristotele mostra che solo poco più di una quindicina sono validi). Si mostra anche che tutte le possibili combinazioni di premesse che danno luogo a ragionamenti validi possono essere ricondotte ai sillogismi di prima figura o sillogismi "perfetti" (del tipo presentato nell'esempio dato). [vedi ad es. http://en.wikipedia.org/wiki/Syllogism]

(7) Definita la teoria logica della validità del sillogismo Aristotele distingue i sillogismi validi, tali cioè che la conclusione segue necessariamente dalle premesse, dai sillogismi scientifici, che hanno anche bisogno di premesse vere. Un sillogismo può essere valido, ma derivato da premesse false. La logica si interessa della validità; la scienza della verità. Aristotele pretende però che tutta la scienza rientri nell'ambito del ragionamento sillogistico. Ma gran parte della matematica utilizza anche altri tipi di ragionamento, e in particolare usa di fatto il *modus ponens* degli stoici e soprattutto è interessata non solo alle proprietà universali, ma anche alle relazioni come "maggiore di", "minore di" ecc. Però Aristotele non ha un linguaggio per le relazioni perché il sillogismo tratta solo le proprietà, tratta cioè il rapporto di unione o separazione tra due termini[15].

1.4. Stoici e aristotelici: la soluzione fregeana

Con l'inizio della nuova logica è la distinzione soggetto-predicato la prima a cadere. E' qui che si gioca il punto di scontro tra la logica stoica e la logica aristotelica. Gli stoici criticavano la forma logica soggetto-predicato imposta da Aristotele ai suoi enunciati universali e particolari; infatti sostenevano che la logica doveva occuparsi dei rapporti inferenziali tra le proposizioni (delle "conseguenze"), e traducevano le proposizioni categoriche di Aristotele in proposizioni ipotetiche.

La proposizione aristotelica "tutti gli uomini sono mortali" diventava, in mano agli stoici, una proposizione condizionale del tipo: "se qualcosa è un uomo, allora qualcosa è mortale". La trascrizione stoica trattava gli enunciati come un tutto indivisibile: se a allora b; così facendo però sembrava incapace a risolvere i problemi del ragionamento sillogistico per i quali era essenziale lo schema soggetto-predicato. Infatti, come abbiamo visto, un sillogismo doveva connettere soggetti e predicati di due premesse tramite un termine medio:

PREMESSA M.	tutti gli M sono P
PREMESSA m.	tutti gli S sono M
CONCLUSIONE	tutti gli S sono P

"S" sta per *Soggetto*, "P" sta per *Predicato* e "M" sta per *Termine Medio*. Il sillogismo unifica nella conclusione soggetti e predicati delle premesse attraverso 'eliminazione del termine medio:

PREMESSA M.	tutti gli uomini sono mortali
PREMESSA m.	tutti i greci sono uomini

[15] Il problema valeva non solo per il trattamento logico dei problemi matematici, ma anche per i ragionamenti che usano normali relazioni come amare, odiare, ecc. . Espressioni come "Edipo ama Giocasta", "Achille odia Ettore", "i greci vincono i persiani" ecc. risultavano difficilmente traducibili nel sillogismo; lo potevano al prezzo di inventare predicati complessi come "vincere i persiani" e predicare dei greci la proprietà di vincere i perrsiani. Si poteva cioé rifomulare il sillogismo come "Edipo è amante_di_Giocasta" o "i greci sono vincitori_dei_persiani". Lo svantaggio di questa soluzione è quella di moltiplicare all'infinito le relazioni; non esiste l'amore, ma l'amore di Giocasta, l'amore di Santippe, l'amore di Elena......

CONCLUSIONE tutti i greci sono mortali

Di fronte a questa apparente empasse della logica stoica, Frege introduce l'idea di usare anche in logica le variabili come si fa in algebra, ma con un accorgimento del tutto nuovo per trattare la generalità ("tutti" e "qualche").

Egli prima di tutto dice[16] che

(1) *tutti gli uomini sono mortali* e (2) *se qualcosa è un uomo allora è mortale*

hanno lo stesso senso, cioè esprimolo lo stesso pensiero. Ma la seconda trascrizione è più importante per la logica perché mostra più chiaramente le relazioni inferenziali implicite nella frase (1). Il problema è trovare un simbolismo adatto a rendere espliciti i rapporti interni tra i concetti espressi "uomo" e "mortale"; la soluzione è la notazione della quantificazione che rende (in notazione odierna usuale) i termini "per tutti" e "per qualche" con i segni "∀"ed "∃" vincolandoli a una variable. La trascrizione logica di (1) e (2) diviene quindi

(3) $\forall x$ (uomo x → mortale x)

La trascrizione in formule si legge "per tutte le x, se x è un uomo, allora x è mortale". Con una notazione del genere Frege salva sia l'esigenza stoica di fare della logica lo studio delle relazioni inferenziali, sia l'esigenza di Aristotele di trattare i "termini" costitutivi delle proposizioni, cioè le categorie. Le cosiddette "proposizioni categoriche" aristoteliche sono esprimibili compiutamente come "proposizioni ipotetiche" o "condizionali". Il punto non è una semplice trascrizione di una espressione linguistica ("tutti") con un apposito simbolo (""). Con il metodo della quantificazione con variabili la logica riesce a esprimere senza ambiguità proposizioni che contentono più di una espressione di generalità. Questo tipo di proposizioni (dette di "generalità multipla") avevano dato filo da torcere ai logici dal medioevo in poi e non avevano mai trovato una chiara sistemazione. La differenza di ordine in cui compaiono le espressioni di generalità sono molto importanti anche in matematica (ad es. nella differenza tra funzione continua e continuità di una funzione) e il linguaggio logico riesce a esprimere con chiarezza tali differenze. Si pensi a "tutti i ragazzi amano una ragazza" che può voler dire che ciascun ragazzo ha una ragazza che ama (x ∃y…) o che esiste una ragazza amata da tutti (∃x y…).

La invenzione di una notazione della generalità è pealtro l'ultimo di una serie di passi fatti da Frege nella costruzione della nuova logica, primo dei quali è la eliminazione della forma logica soggetto-predicato. Questo passo è forse uno dei passi in cui si verifica in modo più chiaro il cambiamento effettivo rispetto al vecchio paradigma. E' quindi utile indicare le linee principali dell'argomento di Frege.

1.5. da soggetto-predicato a funzione- argomento: la soluzione del problema delle relazioni

Abbiamo visto sopra quanto la distinzione soggetto-predicato sia essenziale alla logica tradizionale. I sillogismi sono formulati a partire dalle relazioni tra soggetto e predicato; i concetti di "universale" e "particolare"' hanno una definizione sintattica legata alla distinzione soggetto/predicato: un universale può sempre essere sia soggetto sia predicato; un particolare può essere solo soggetto e non si può predicare di alcunché. L'atto di nascita della logica contemporanea nasce con una critica la distinzione soggetto/predicato come irrilevante per la logica. E' la critica fatta da Frege ad uno dei pilastri della tradizione. Quale argomento presenta Frege? L'argomento è semplice, e viene dato nel modo seguente nel suo libro del 1879. Prendiamo un enunciato come

"i greci vinsero i persiani"

Abbiamo come soggetto "i greci" e come predicato "vinsero i persiani". Consideriamo ora la frase al passivo:

"i persiani furono sconfitti dai greci"

ora il soggetto è "i persiani" e il predicato "furono sconfitti dai greci".

---

16 Con diverso esempio, in un articolo intitolato "Generalità", riportato negli *Scritti Postumi* (a cura di E. Picardi), Bibliopolis, Napoli, 1986.

Da entrambe le proposizioni si possono dedurre le medesime conseguenze. Ma la logica si deve occupare degli enunciati relativamente a ciò che é rilevante per le relazioni inferenziali. Che importanza ha dunque per la logica la distinzione tra soggetto e predicato se capovolgendo soggetto e predicato si ottengono sempre le stesse conseguenze? La conclusione è che la distinzione soggetto-predicato è una distinzione grammaticale, non logica; la forma logica di un enunciato sarà cercata altrove[17]. Dove? Nella formulazione matematica della distinzione tra funzione e argomento.

L'analisi della forma logica degli enunciati in termini di funzione e argomento ha una portata molto più generale della analisi in termini di soggetto e predicato. E' la realizzazione del sogno di Leibniz, di trovare una notazione del tutto generale che valga per ogni tipo di simboli. La notazione funzionale è usata in matematica per riferirsi a speciali tipi di relazioni numeriche; es. la funzione quadratica $(x)^2=y$ che possiamo trascrivere anche così:

"il quadrato di (x)=y"

dà per ogni numero come argomento il suo quadrato come valore. Ma lo stesso meccanismo della funzione può essere applicato a simboli qualsiasi. Se in espressioni come $(x)^2=y$ sostituisco alla x numeri e ottengo al posto della y numeri, in espressioni come:

"la capitale di (x) = y"

sostituendo al posto della x nomi di nazione ottengo al posto della y nomi di città. Ho qui presentato una funzione che va da oggetti qualsiasi a oggetti qualsiasi invece che da numeri a numeri. Ma la distinzione funzione/argomento può essere utilizzata anche per trattare proprietà e relazioni, trovando una formulazione per trattare senza problemi sia quello che la logica aristotelica sapeva trattare bene (il sillogismo) sia quello che la logica aristotelica faceva così fatica a trattare, le relazioni, come abbiamo visto al §2.3(7). Con la notazione funzionale proprietà e relazioni siano esse numeriche o di altro tipo possono essere presentate in una unica forma logica:

pari (x)	= y
uomo (x)	= y
x > z	= y
(x) odia (z)	= y

In tutti questi casi, alla domanda: cosa sarà il valore della funzione? la risposta di Frege è che per funzioni di questo genere il valore è un valore di verità, il Vero o il Falso[18].

pari (x) avrà valore
  Vero per {2,4,6,...} e
  Falso per {1,3,5,...}.
uomo (x) avrà come valore
  Vero per {Socrate, Platone, ...} e
  Falso per {Santippe, Giocasta...}
x > z avrà come valore
  Vero per le coppie <2,1>, <3,2>...
  Falso per le coppie <1,2>, <2,3> ...
x odia y avrà come valore
  Vero per le coppie <Achille,Ettore>...
  Falso per le coppie <Edipo, Giocasta>..

---

17 E' strano quanto i filosofi siano così impregnati della tradizionale distinzione soggetto-predicato che spesso non colgono la differenza con la distinzione funzione-argomento. Vedi ad es. la discussione in Penco 1994, par.26, specie pp.174-176.

18 In analogia con la "funzione caratteristica" per cui il valore di una funzione è 0 a certe condizioni e 1 ad altre condizioni (idea proposta da Dirichlet, citato da Frege perché per primo allargò l'idea di funzione da semplice formula analitica a funzione come corrispondenza. La cosiddetta "funzione di Dirichlet" è appunto quella funzione che ha come valore 1 se x è razionale e valore 0 se x non lo è.

La semplicità della soluzione è ammirevole: in un colpo solo si rende possibile rappresentare con un'unica notazione predicati e relazioni (come predicati a più posti) e permettere il trattamento di molti tipi di ragionamenti di cui il sillogismo è solo un caso particolare. In analogia con la distinzione tra funzione e argomento, in logica si distingue dunque tra *predicati e nomi (*o *termini singolari)*. I termini singolari sono espressioni che possono andare al posto dell'argomento di una funzione. I predicati (a uno o più posti, cioè predicati che esprimono proprietà e predicati che esprimono relazioni) hanno uno o più posti vuoti, una "lacuna", analogamente alle espressioni funzionali. Frege arriva vosì a una definizione di concetto del tutto inusuale e nuova, che oggi potremmo presentare così:

Un concetto (proprietà o relazione) è una funzione che ha come valore un valore di verità.

Analoga concezione veniva presentata da Russell e Whitehead nei *Principia Mathematica* del 1910, dove si parla di "funzione proposizionale" in termini simili al "concetto" di Frege – anche se Whitehead e Russell furono influenzati dalla tradizione di De Morgan e Peirce che avevano sviluppato autonomamente una loro teoria delle relazioni. Con la distinzione tra argomento e funzione, cioè – semplificando – tra *termine singolare* e *predicato* non si reintroduce surretiziamente la distinzione soggetto-predicato. Il termine singolare *non* è il soggetto, ma l'argomento di un qualsiasi predicato a *n* posti. La potenza della nuova logica rispetto all'antica si può cogliere considerando come viene trattata la dottrina sillogistica: essa è collocata in logica come sottoparte del calcolo dei predicati del primo ordine limitato ai predicati monadici, cioè una parte piccola piccola di quanto si intende oggi per "logica". Aristotele è comunque vendicato nella misura in cui ha elaborato un calcolo che è una parte particolarmente rilevante del calcolo dei predicati del primo ordine: esso è una parte "decidibile" del calcolo; è tale cioè che, data una sua espressione, si può decidere se è vera o falsa.

2. Logica tradizionale e logica matematica: paradigmi a confronto

Presentiamo alcune somiglianze e differenze più specifiche tra logica tradizionale (aritotelica) e logica classica (i paradigma assiomatico del calcolo dei predicati). Sono solo alcuni cenni per avere un quadro di insieme del cambiamento, avviato nel XVII Secolo e concluso nel XX Secolo, rispetto alla logica antica. I confronti tra teorie sono sempre problematici: due teorie di tempi diversi parlano davvero delle stesse cose? I problemi che si poneva Aristotele non erano condizionati dal tempo in cui visse a tal punto che non si puo' davvero confrontare le sue teorie con le nostre? Queste domande, nella loro vaghezza, son irrisolvibili. Ma qualcosa si può dire:

1. (la ridefinizione del quadrato) E' certo che Frege, ad esempio, scrisse la sua *Ideografia* sostenendo di dare una *estensione* della teoria tradizionale; e a tale scopo pose alla fine del primo capitolo la sua versione della tavole delle opposizioni tradizionale. E' un po' come a dire: vedete, con la mia logica posso esprimere quello che si può esprimere con la logica aristotelica, e in modo più perspicuo. Ma la mia logica esprime anche di più. E il "di più" riguarda la capacità di esprimere correttamente e senza lacune il ragionamento matematico.
2. (la disambiguazione dell'essere) L'irruzione della matematica nella scienza portò anche a rendere universalmente accettati strumenti concettuali (come la differenza tra appartenenza e inclusione in teoria degli insiemi) e a esigere una precisazione di concetti che non poteva essere data con i vecchi strumenti logici; soprattutto perché la logica antica era strettamente legata al linguaggio naturale più che a quello matematico; in particolare la grande riflessione di Aristotele sull'essere si appoggiava proprio su un verbo greco che per sua natura era polivalente. La dismbiguazione dei diversi sensi del verbo "essere" è uno dei risultati più importanti della logica moderna.
3. (il sillogismo ridefinito) Con tutta la sua precisione la logica moderna può giustamente ritenersi erede della tradizione e uno dei modi di cogliere questo è la riscrittura del sillogismo e delle sue regole in formulazione logica. Dopo la prima complicata esposizione di Lukasievicz, le esposizioni elementrari di questo lavoro sono ormai numerose e facili a trovare.
4. (ragionamento comune e ragionamento corretto) Certo i greci non erano così interessati al ragionamento matematico come centro del lavoro scientifico, e Aristotele discute per lo più del ragionamento comune e del ragionamento scientifico, legato alla fisica e alla biologia del suo tempo, che non avevano nella matematica il loro strumento come accadrà dal '600 in poi. Ma il problema che sia gli antichi che i moderni hanno in comune è: che rapporto passa tra ragionamento comune, a volte errato, e ragionamento corretto? Questa domanda deve essere affrontata e un cenno di risposta deve mostrare le differenze tra ieri e oggi.

5. (dalla predicazione alla forza) Aristotele aveva una visione del linguaggio come azione, nella sua divisione delle scienze del linguaggio: logica, poetica, grammatica, retorica. Ma questa visione era appena abbozzata. Toccherà ai moderni svilupparla. Una distinzione centrale, la cui esplicitazione mancava ad Aristotele (che ne intuì però l'importanza) permise di fare questo: la distinzione tra predicazione e asserzione. Nata con Frege, la inserzione di un segno speciale di forza nel simbolismo della logica rappresenta una innovazione sottile e difficile da cogliere, ma essenziale per capire alcuni sviluppi della logica contemporanea.

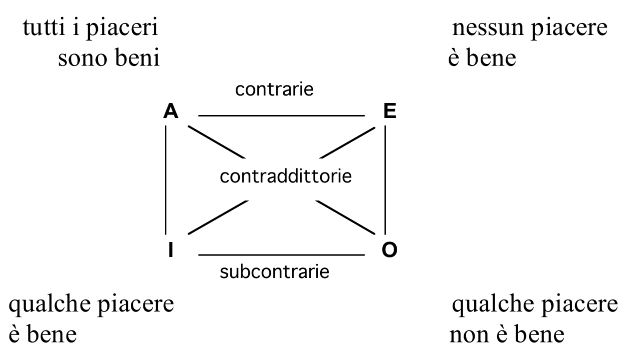
2.1. Quadrato delle opposizioni

Nel *De interpretatione* Aristotele discute a lungo dei diversi tipi di enunciati assertori, o proposizioni assertorie, tali cioè da poter essere vere o false. Aristotele fa fondametalmente due grosse dicotomie:
1) *enunciati affermativi e negativi*
Quando si unisce un soggetto a un predicato si fa una affermazione; quando si separa un soggetto da un predicato si fa una negazione.
2) *enunciati universali e particolari*
Questa distinione è particolarmente utile per la scienza, che deve fare generalizzazioni a partire dall'esperienza. Tipico della scienza è asserire se tutte le cose di un certo tipo hanno una data proprietà, oppure no. La scienza si interessa di classificare, e parlare delle cose in generale, non del singolo individuo. Dell'individuale non si dà scienza, e forse per questo Aristotele non annovera nel campo di lavoro della logica gli *enunciati singolari* (del tipo "socrate è un uomo), come farà invece la logica medioevale.

Combinando le due coppie di opposizioni si ottengono quattro tipi di enunciati fondamentali che vengono a costituire la base della logica aristotelica:

Universali Affermative	Universali Negative
Particolari Affermative	Particolari Negative

Questa quadrupla di proposizioni è stata a lungo studiata nel medioevo fino a dare luogo a una tradizione standard di studio che inquadrava i rapporti tra questi tipi di enunciati, chiamati rispettivamente A,E,I,O:
A : dalla prima lettera di ADFIRMO significherà le universali affermative
E: dalla prima lettera di NEGO significherà le universali negative
I: dalla seconda lettera di ADFIRMO significherà le particolari affermatve
O: dalla secoda lettera di NEGO significherà le particolari negative
Il quadrato delle opposizioni mostra i rapporti logici tra questi tipi di proposizioni:



L'esempio aiuta a capire le diverse relazioni tra proposizioni:
contraddittorie: gli angoli del quadrato presentano eunciati contraddittori: se un è vero l'altro è falso; se è vero che *tutti* i piaceri sono beni, come sostengolo gli epicurei, è falso che *qualche* piacere *non* è bene, come sostengono gli aristotelici. Se è vero che *nessun* piacere è bene, come sostengono gli stoici, è falso

che *qualche* piacere è bene, come sostengono gli aristotelici. Quindi se è vero quello che sostengono gli aristotelici è falso quello che sostengono gli stoici e gli epicurei.
contrarie: A ed E non possono essere entrambe vere. Ma potrebbero essere entrambe false. Se valgono insieme I e O, cioè qualche piacere è bene e qualche piacere non lo è, allora sia A che E sono false.
subcontrarie: I e O non possono essere entrambe false; ma possono essere entrambe vere (come nel caso dell'esempio dal punto di vista degli aristotelici).
subalterne sono le particolari rispetto alle universali, sia negatiche che affermative. Se è vera l'universale (A o E), è vera a maggior ragione la paricolare che si trova sotto di essa (I o O).
(Fare esempi sugli angoli del quadrato aiuta a capire come funzionano le relazioni tra proposizioni.)

Il quadrato delle opposizioni ha avuto una enorme fortuna nel medioevo, fino ad esere considerato il "pons asinorum" il ponte che dovevano passare tutti per proseguire negli studi della università. Rimasto come cardine della logica tradizionale doveva essere affrontato anche da chiunque volesse riformare la logica, come Frege. Se proponi una nuova teoria, devi mostrare prima di tutto che questa ha la stessa potenza espressiva ed esplicativa della teoria precedente e poi mostrare che fa anche qualcosa di piu'. Frege dedica molto spazio a queste dimostrazioni nella sua critica all'algebra di Boole (che rappresenta la prima vera formalizzazione della logica aristotelica e di quella stoica). Ma alla fine della introduzione del suo primo libro, l'*Ideografia* del 1879, presenta il quadrato delle opposizioni nel suo simbolismo; la sua formulazione ha lo stesso potere espressivo del quadrato aristotelico, ma è scritto usando proposizioni ipotetiche e quantificatori:

tutti i P sono B	nessun P è B
$\forall x(Px \rightarrow Bx)$	$\forall x(Px \rightarrow \neg Bx)$
qualche P è B	qualche P non è B
$\neg \forall x \neg (Px \& Bx)$	$\neg \forall x (Px \& Bx)$

Come si nota Frege esprime tutto in termini di enunciati (formule) universali con condizionale e negazione; ma dà anche le regole per tradurre le formule al condizionhale con formule di congiunzione e disgiunzione e le formule universali in formule particolari, con una piena corrispondenza delle vecchie regole medievali di corrispondenza tra "tutti" e "qualche"

$\neg \forall x \neg Fx$	=	$\exists x F(x)$	(esistono degli F)
$\forall x \neg Fx$	=	$\neg \exists x F(x)$	(non esiste alcun F)
$\neg \forall x\ Fx$	=	$\exists x \neg F(x)$	(alcuni oggetti non sono F
$\forall x Fx$	=	$\neg \exists x \neg F(x)$	(non esiste oggetto che non sia un F)

2.2 La disambiguazione dell' essere

Nel suo lavoro di analisi degli enunciati Aristotele utilizza la proposizione categorica, che unisce con la copula (il verbo "essere") due diverse categorie (ad es. "l' uomo è mortale"). In diversi passi delle sue opere parla dell' "essere che si dice in molti modi"; è la tematica più difficile della sua filosofia, anche per il fatto che egli usa proprio un concetto derivato da un verbo, il verbo "essere", che in Greco ha davvero usi diversissimi tra loro.

Si è discusso molto sull' influenza della lingua greca sulla filosofia di Aristotele. Non discuteremo qui né di questo né del problema dell' essere in Aristotele. Ci limitiamo a osservare che Aristotele fece i primi passi per disambiguare alcuni usi differenti del verbo essere, e la sua grandezza consiste anche nell' essere riuscito a dare alcune definizioni dell' essere *nonostante* la presenza pervasiva del verbo essere nella lingua greca: partendo dall' analisi dei ragionamenti effettivi, svolti dai suoi contemporanei in greco, Aristotele arrivò ad astrarre alcuni concetti e principi generali validi per ogni lingua. La sua fu una lotta difficile, per la peculiarità della lingua greca e per l' uso polisemantico del verbo essere. La sua fu quindi anche una lotta contro la lingua, per estrarre da essa alcuni concetti validi universalmente per tutte le lingue (validi logicamente).

Oltre alle distinzioni del quadrato delle opposizioni, Aristotele (*Metafisica*) distingueva quattro tipi di essere:
- l' essere come accidente (l'uomo è musico)
- l' essere come vero (Socrate è musico)
- l' essere secondo le figure delle categorie (sostanza, qualità, relazione, spazio, tempo, azione, passione)

- l' essere secondo l' atto e la potenza (la semiretta è nella retta)

La logica moderna prosegue questo sforzo di distinzione e riconosce almeno quattro diversi usi del verbo "essere". Questi diversi usi di uno stesso verbo sono comuni in molte lingue indoeuropee, dal greco al latino, all' italiano, allo spagnolo, al tedesco, ecc. (ma in altre lingue, come il cinese, gli stessi concetti che nell' indoeuropeo sono unificati sotto un unico verbo, possono essere espressi da verbi differenti, o comunque espressi in diversi modi):

1) ogni francese è gioviale
2) abelardo è francese
3) abelardo è il migliore maestro di Parigi
4) vi è almeno un francese

Vediamo dunque quello che oggi viene dato per scontato in ogni manuale di logica e che è il risultato di millenni di chiarificazione sull' uso della nostra lingua naturale; tradurremo in linguaggio del calcolo dei predicati[19] le quattro espressioni precedenti, dando come equivalenti

F =	la proprietà di essere francese
G =	la proprietà di essere gioviale
a =	l' individuo di nome abelardo
b =	l' individuo che corrisponde alla descrizione definita "il miglior maestro di Parigi"

(1) Inclusione	$\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$	[per tutti gli x, se x è F allora x è G]
(2) Appartenenza	Fa	[a è un F]
(3) Identità	$a = b$	[a è uguale a b]
(4) Esistenza	$\exists x\, Fx$	[esiste almeno un x tale che x è un F]

(1) e (2) sono entrambi casi di predicazione; ma si distingue (1) il cadere di un concetto entro un concetto o subordinazione di concetti o inclusione di classi (2) il cadere di un oggetto sotto un concetto, o appartenenza di un individuo a una classe. Il lavoro dei logici è stato anche quello di fissare non solo un nome diverso per questi diversi usi del verbo essere, ma anche un simbolo diverso, in modo da non poter essere fuorviati dalla uniformità di espressione del verbo "essere" della lingua naturale. Non sempre gli studiosi antichi hanno distinto nettamente casi di predicazione come in (1) e (2) e casi di identità come in (3). Altri studiosi hanno inoltre spesso distinto con difficoltà i casi (1) e (2).

2.3 Il sillogismo ridefinito

Il sillogismo si lascia trattare anche graficamente con i diagrammi di Eulero-Venn (diagrammi per il sillogismo sono già presenti nei lavori di Leibniz). I diagrammi aiutano a verificare la validità dei sillogismi in modo intuitivo. La logica matematica permette di riscrivere la logica sillogistica in modo rigoroso e riconoscibile anche da una macchina. Vi sono diverse esposizioni elementari del sillogismo formulato in linguaggio logico moderno, una delle più classiche è quella presentata da W.V. O. Quine nel suo *Manuale di logica* (Feltrinelli, Milano) e una ricostruzione del sillogismo in formule logiche viene data da D. Palladino in una sua presentazione a docenti delle superiori: http://www.dif.unige.it/epi/hp/pal/ssis04/sill.pdf. Quine introduce il sillogismo con i diagrammi di Venn, mentre Palladino utilizza i più intuitivi diagrammi di Eulero. Per una esemplificazione dei due tipi di diagrammi vedi: http://en.wikipedia.org/wiki/Venn_Diagram

Il sillogismo è un modo di rafionare quotidiano molto intuitivo; ma è difficile capire perché noi umani riconosciamo facilmente alcuni sillogismo validi e facciamo fatica a riconoscerne altri o siamo

---

[19] Inclusione e appartenenza sono termini della teoria degli insiemi; come viene riportato nel testo, nel linguaggio logico sono espressi da diversi modi di predicazione, che derivano dalla rigorosa distinzione tra termini singolari e predicati. Quindi dire $a \in F$ (a appartiene a F) equivale a fare una predicazione semplice, e dire $F \subset G$ (F è incluso in G) equivale a quantificare sugli individui appartenenti alle classi F e G.

facilmente ingannati da certe forme. I lavori degli psicologi, a partire dal lavoro di Johnson-Laird (*Modelli Mentali*, Il Mulino, Bologna), hanno tentato di mostrare le procedure al lavoro nella verifica della validità dei sillogismo, ridando così interesse allo studio di una struttura argomentativa comune e così tanto discussa.

2.4 Teoria della forza e atti linguistici

Nella sua prima opera, la *Ideografia* del 1879, Frege introduce un segno speciale per quella che in seguito chiamerà "forza assertoria". Tale segno viene anteposto a tutte le formule che vengono riconosciute come vere, asserite come vere. Frege distingue infatti il contenuto di un giudizio assertorio (che chiama "pensiero") e l' atto stesso del giudizio: l' atto mentale del giudicare e, parallelamente, atto linguistico dell' asserire.

La prima conseguenza di questa analisi è la caduta della centralità della distinzione tra negazione e affermazione; negazione e affermazione sono per Aristotele due aspetti della predicazione, l'unire o il separare soggetto e predicato. Ma il predicare fa parte del *contenuto* di ciò che dico, non della *forza*. Predicare è semplicemente considerare la possibilità che un enunciato sia o non sia vero; asserire è riconoscere la verità di un enunciato. Il contrasto principale in Frege diviene il contrasto tra predicazione (che riguarda il contenuto e non arriva ancora a livello di riconoscimento della verità) e asserzione (che riguarda il modo in cui viene trattato il contenuto di ciò che pensiamo: riconoscerlo come vero). Quindi la negazione non è una azione linguistica che si contrapponga all'asserire: negare che p infatti equivale ad asserire che non p. Per questo la negazione, come si impara nella prima lezione di ogni corso dilogica, è un connettivo proposizionale. Se vi è un segno per la forza assertoria, non vi è in Frege un segno per una "forza" del diniego; il segno di negazione è un segno che riguarda il contenuto proposizionale che può essere o meno asserito (ad esempio in "se non p allora q" non si asserisce che non p; esempio; "se pia non viene allora resto solo" non asserisco che pia non viene, ma ne considero semplicemente la possibilità; l'asserzione in questo caso riguarda l'intero condizionale).

La teoria dell'asserzione di Frege non è stata molto seguita in logica. Tracce del suo "segno di asserzione" restano nei segni metateorici di derivabilità e di conseguenza logica. Per seguire la visione di Frege dobbiamo ricordare il parallelo che egli istituisce tra mondo dei pensieri (una specie di regno platonico di realtà oggettive) e dei processi mentali (processi psichici con cui si afferrano i pensieri) e mondo del linguaggio e dei processi linguistici:

(1) al pensiero corrisponde un enunciato

(2) all' atto mentale del giudicare corrisponde l' atto linguistico dell' asserire

Nei suoi ultimi scritti Frege parla del pensiero come ciò di cui si può *asserire che* è vero, ma di cui anche si può *domandare se* è vero. Probabilmente Frege pensa qui alle ipotesi scientifiche che sono formulabili come domande. Solo dopo una lunga ricerca un certo pensiero può esser riconosciuto come vero. Ad esempio l' ipotesi che Espero, la stella della sera, sia eguale a Fosforo, la stella del mattino, era una ipotesi astronomica che dopo un lungo periodo di ricerche si è rivelata valida ed è stata asserita come verità dagli antichi astronomi babilonesi.

Queste idee sulla necessità di avere anche in logica un segno per il tipo di "forza" con cui viene usato un enunciato non vennero molto sviluppate negli anni successivi tranne alcune notevoli eccezioni, come Reichenbach che abbozzò una logica dei segni di forza, distinguendo tre tipi di forza che si applicano allo stesso contenuto di pensiero. Dopo Reichembach, il primo a dare una sistemazione rigorosa, seppure informale, del concetto di "forza" è stato Austin, con la teoria degli atti linguistici presentata in *Come fare cose con le parole*, seguito da J. Searle in *Atti linguistici*. A partire da Austin, il concetto di "forza" è venuto a far parte del bagalio teorico di ogni formalizzazione di sistemi che vogliano rappresentare il funzionamento del linguaggio naturale (in intelligenza artificiale Winograd ha insistito molto sull' applicazione del concetto di forza ai sistemi computazionali).

L' idea base, come viene presentata da Reichenbach, può essere data in termini molto semplici. Si possono definire almeno tre tipi di forza, che verrano indicati da tre diversi simboli:

forza assertoria	|- p
forza interrogativa	? p
forza imperativa	! p

"p" stia per una proposizione qualunque, ad esempio "silvio paga le tasse". Le tre formule sopra riportate sono tre formulazioni per tre modi di considerare questo "contenuto dipensiero", cioè:

silvio paga le tasse.
silvio paga le tasse?
silvio paga le tasse!

Tre diversi tipi di frase, che in italiano hanno un segno di riconoscimento (il punto, il punto interrogativo e il punto esclamativo) vengono così distinti anche a livello di formalismo logico. Come sviluppare questa idea? I logici hanno sempre trovato una grande difficoltà perché un *atto* linguistico non è né vero né falso; infatti è un atto, una azione. Ma una azione può essere corretta o scorretta, giustificata o non giustificaba, buona o cattiva, ma non è vera o falsa. La logica dovrebbe occuparsi dunque non solo di verità e falsità, ma anche di giustificazione.

Se si vogliono sviluppare le idee di Frege occorre quindi ampliare il campo della logica, da uno studio delle regole del vero e del falso, a uno studio delle regole dell' agire corretto o scorretto, giustificato o non giusticiato. L' obiettivo è di allargare l' ambito della logica dalla sintassi (analisi della correttezza dei rapporti segnici, teoria della dimostrazione) e dalla semantica (analisi dei rapporti dei segni con gli oggetti, teoria dei modelli) alla pragmatica (analisi dei rapporti tra segni e parlanti). L' obiettivo diviene quello di dare una "logica dell' azione". Problematiche di questo genere sono sviluppate in diversi tentativi formali, spesso legati allo sviluppo della logica intuzionistica che si basa appunto sul concetto di "giustificazione" e "prova"[20].

2.5. Ragionamento comune e ragionamento corretto

Abbiamo visto come Frege riesca a comporre la bimillenaria opposizione di logica aristotelica e stoica, logica dei termini e logica delle conseguenze, con un unico impianto teorico incentrato sull' idea di riscrivere il linguaggio logico nella notazione funzione-argomento. La visione della logica ne risulta di molto ampliata. Vi è però una analogia nella logica antica e moderna: entrambe cercano di trovare un formalismo adeguato per esprimere i ragionamenti che facciamo nel linguaggio comune e, trovato un formalismo che pare adeguato, usarlo per distinguere tra i tanti ragionamenti possibili quelli che sono corretti (che sono tali cioè da preservare la verità). Si tratta dunque di definire rigorosamente il concetto di "inferenza" (per "inferenza" si intende il passare dalle premesse alle conclusioni di un ragionamento). Vi sono due ordini di idee, un interno alla logica e uno esterno, e corrispondono, per così dire, a una tesi debole e una tesi forte della potenza della logica.

Nel primo caso (tesi debole) si assume che in logica tutte le inferenze sono riconducibili ad alcuni principi generali, possono cioè essere date in forma assiomatica. Questa tesi è presentata da Aristotele quando riconduce tutti i possibili sillgismi ai sillogismi perfetti (quelli della prima figura - vedi in seguito). Ed è presente nella teoria assiomatica moderna che riporta tutte le inferenze a inferenza date sotto forma di applicazione del *modus ponens* a partire da assiomi logici (ed assiomi specifici nel caso della formalizzazione di una singola scienza, ad es. la geometria euclidea).

Nel secondo caso (tesi forte) si sostiene che ogni raginamento è riconducibile alla forma di ragionamento così come è formalizzata in logica. Aristotele sostenne questa tesi per il sillogismo: ogni ragionamento, ogni inferenza sarebbe riconducibile a inferenze sillogistiche. Un analogo della tesi forte di Aristotele è presente anche nella logica moderna ed è che tutto ciò che è calcolabile è calcolabile secondo le forme di calcolo elaborate dalla logica formale. Il primo a ipotizzare questa tesi fu Church, seguito da Turing. La "Tesi di Church" o "tesi di Church-Turing" è un caposaldo della logica classica, che inizia a essere messo in discussione con le nuove applicazioni dell' informatica, specie con lo sviluppo del connessionismo.

In comune alle due tesi vi è che entrambe si basano su una precisazione concettuale. Né inferenza né computabilità (o calcolabilità) sono nozioni definite; di esse viene dato un explicatum più preciso. Con Aristotele viene dato come explicatum di inferenza il *sillogismo* e con Church-Turing viene dato come explicatum di calcolabilità le *funzioni ricorsive* o la *macchina di Turing*.

La tesi forte di Aristotele ci appare oggi palesemente falsa, perché il sillogismo non riesce a trattare diversi tipi di inferenza (da semplici ragionamenti matematici a inferenze con più di un

---

20 Una introduzioni a queste tematiche viene data da G. Usberti, *Significato e conoscenza : per una critica del neoverificazionismo*, Milano , Guerini scientifica, 1995 . Una formalizzazione viene presentata in alcuni lavori di C. Dalla Pozza. Vedi anche la discussione in C. Penco, *Vie della Scrittura*, *Frege e la svolta linguistica*, Angeli, 1994, §§ 11 e 12.

quantificatore, ecc.[21]). Analogamente la tesi debole che tutte le inferenze sono riconducibili a applicazioni di regole e assiomi classici è messa in discussione da una ampia batteria di oppositori che si basano su casi di inferenze non classiche (basate per lo più su inferenze di senso comune o probabilistiche).

La tesi di Church non ha ancora avuto controesempi; e da questa tesi insieme alle idee legate al paragone del pensiero con un processo calcolistico sono sorte diverse riflessioni sulla possibilità di rappresentare ogni tipo di pensiero con la logica matematica. Ma vi sono anche in questo caso limiti ovvi dati dal fatto che il funzionamento del pensiero umano è strettamente dipendente dal contesto e dalle situazioni in cui si applica e la logica matematica non sembra avere la elasticità necessaria per seguire le imprevedibili svolte di un pensiero recalcitrante, che cambia assiomi a seconda delle circostanze e delle informazioni a disposizione, e vuole abbandonare conclusioni già prese. Gran parte dello sforzo dei logici e degli scienziati cognitivi contemporanei si gioca sulla sfida di verificare se nuove formulazioni della logica siano o no adeguate a rappresentare anche il ragionamento di senso comune, il ragionamento da cui era partito Aristotele nella sua analisi della forma logica.

3. Il paradigma della logica matematica classica

Questa terza parte presenta in modo semplificato lo schema della logica "classica" come si è sviluppato nel XX secolo dopo il lavoro di Frege.

3.1. Sistemi formali

Fregeinsisteva nel dire che un sistema formale in logica deve rispondere dall'ideale leibniziano di unire una *lingua characterica* e un *calculus ratiocinatur*. Se Boole aveva sviluppato un calcolo algebrico passibile di diverse interpretazioni e Peano aveva sviluppato una lingua universale per esprimere la matematica, Frege voleva presentare un sistema che unisse i due aspetti. La formulazione contemporanea delle idee leibniziane di lingua universale e calcolo combinatorio è la differenza tra linguaggio e calcolo di un sistema formale. Un sistema formale, una "logica" è di per sé universale, cioè applicabile in linea di principio a qualsiasi tipo di enunciati. Come nell'algebra le lettere possono essere sostituite da numeri[22], così in logica le lettere possono essere sostituite da espressioni linguistiche, parole e frasi. La struttura di un sistema formale assiomatico come venne sviluppato agli inizi del '900 si può schematizzare nel modo seguente:

LINGUAGGIO	**CALCOLO**
Vocabolario: dà gli elementi base per formare frasi del linguaggio	**Assiomi** alcune frasi scelte come punti di partenza del calcolo
Regole di Formazione: regole per costruire a partire dal Vocabolario le infinite frasi ben formate del linguaggio	**Regole di trasformazione** regole che permettono di passare dagli assiomi ad altri enunciati veri detti " teoremi".

21 Una breve ed efficace dimostrazione viene presentata da Mignucci in Agazzi (a cura di) *Logica matematica e logica filosofica*, La scuola, Brescia, 1990

22 Nell'algebra della logica di Boole i simboli usati (lettere e segni di operazione) possono venir interpretate almeno in tre modi diversi: come calcolo su numeri, su classi, su proposizioni. Ma è proprio questa potenza del calcolo di Boole a diventare un problema per Frege. In Boole operazioni diverse sono rappresentate dallo stesso segno; e si creerebbero continue ambiguità: quando il segno "+" rappresenta la somma aritmetica, e quando la unione di classi o la disgiunzione di proposizioni? Quando il segno "1" rappresenta un numero e quando un dominio di discorso o il Vero? In una parola, la possibilità di usare gli stessi segni (con le stesse regole) con interpretazioni diverse, che era il punto di forza dell'algebra di Boole, diviene, nell'ottica di Frege, un segno di debolezza. Occorre avere un linguaggio universale che possa essere applicato per esprimere il ragionamento matematico senza ambiguità, e per questo scopo andrebbe bene qualcosa di simile al formulario di Peano. Ma il formulario di Peano (almeno nelle prime formulazioni) non unisce al linguaggio un calcolo come quello di Boole, e resta una mera riformulazione dei ragionamenti matematici in altra lingua. Vedi i riferimenti bibliografici alla nota 8.

Un sistema logico è un po' come una macchina che prende in input assiomi e dà in output teoremi. La logica ha contribuito a creare un nuova definizione di "linguaggio", ripresa poi dalla linguistica contemporanea: un linguaggio non è un qualsiasi insieme di simboli o un insieme di parole; esso è un insieme potenzialmente infinito di *frasi* o *enunciati*. Esso è costituito da un vocabolario e da regole per la formazione di enunciati. Il vocabolario è costituito da un insieme finito di simboli, e la caratteristica "creatività" del linguaggio, come si esprimerà Chomsky in anni recenti, è la capacità di costruire un insieme potenzialmente infinito di frasi a partire da un insieme finito di simboli iniziali. Per capire come funziona un linguaggio non basta avere un elenco di parole o di frasi; è necessario capire *come vengono formate* le sue frasi.

Prima di dare un esempio di linguaggio logico, è utile dare un quadro di riferimento sui connettivi logici attraverso le tavole di verità, che costituiscono il contributo del primo Wittgenstein alla logica[23].

3.2. tavole di verità, tautologia, contraddizione

Aristotele definì il campo della logica come il discorso apofantico, cioè il discorso veritativo: ciò che interessa al logico sono le proposizioni dal punto di vista della loro verità (in contrasto, ad es. con il punto di vista del suono, della bellezza, della forza persuasiva, ecc.). Questo punto di vista tradizionale si è mantenuto in tutta la storia della logica fino ad oggi. In particolare, a partire da Frege e Wittgenstein, si usa iniziare lo studio della logica con lo studio delle "tavole di verità" ovverossia con lo studio delle forme più elementari di connessione "verofunzionale" tra enunciati. Gli enunciati si possono combinare in diversi modi. Le parole con cui leghiamo tra di loro gli enunciati sono chiamate "connettivi" (o "connettivi enunciativi").

I connettivi enunciativi sono di numero fissato, relativamente al numero delle proposizioni che li compongono. Fu Wittgenstein tra i primi a mostrare chiaramente questo aspetto essenziale, facendo ricorso alle tavole di verità. Per una proposizione data vi sono 4 possibili combinazioni di valori di verità e quindi 4 possibili connettivi; per due proposizioni date, vi sono 16 possibili combinazioni di valori di verità, e quindi 16 possibili connettivi, e così via.

I connettivi sono però interdefinibili; una "base di connettivi" è un insieme di connettivi sufficiente a esprimere tutti gli altri; in linea di rincipio basta anche un solo connettivo appositamente scelto per esprimerli tutti (il funtore di Sheffer usato da Wittgenstein); più usualmente si adopera una coppia di connettivi, il "non" più un connettivo biargomentale come "se allora" (lo fa Frege) oppure la "o" (lo fa Russell).

Vediamo qui di seguito la tavola di verità della negazione: per una sola proposizione vi sono due possibili situazioni: quella in cui è vera e quella in cui è falsa (prima colonna); vi sono quindi 4 possibili combinazioni; la terza colonna rappresenta la inversione del valore di verità della proposizione. E' la colonna che esprime il significato della negazione (la negazione di p è vera quando p è falsa e falsa quando p è vera).

p	1	2	3	4	esempi:	1: p o non p
						2: p
V	V	V	F	F		3: non p
F	V	F	V	F		4: p e non p

Se data una proposizione, vi sono solo due possibili situazioni (quella in cui è vera e quella in cui è falsa), date due proposizioni vi sono quattro possibili situazioni: quella in cui entrambe sono vere, la prima vera e la seconda falsa, la prima falsa e la seconda vera, entrambe false. Questa classica presentazione assume il principio di bivalenza e il terzo escluso (che una proposizione possa essere vera o falsa, *tertium non datur*). Le possibili combinazioni di valori di verità (le possibili tavole di verità) saranno dunque 16. Wittgenstein dà la formula generale del calcolo combinatorio sulle possibili combinazioni di valori di verità; il problema del calcolo delle tavole di verità riguarda la complessità

[23] L. Wittgenstein, Tractatus Logico-Philosophicus, (1921) Einaudi, Torino. Le tavole di verità come metodo di verifica della validità delle formule vengono contemporaneamente inventate da L. Wittgenstein e E. Post agli inizi degli anni '20.

computazionale, perché già a partire da piccoli numeri di proposizioni, i numeri delle possibili combinazioni aumentano esponenzialmente.

pq	1 2 3 4	5 6 7 8	9 10 11 12	13 14 15 16
VV	V V V V	V V V V	F F F F	F F F F
VF	V V V V	F F F F	V V V V	F F F F
FV	V V F F	V V F F	V V F F	V V F F
FF	V F V F	V F V F	V F V F	V F V F

Si possono notare la prima e ultima colonna che hanno valore costante, la quarta e la sesta ove si producono le tavole delle lettere proposizionali iniziali, p e q, e la 11 e la 13 che riproducono la loro negazione. A questo proposito possiamo dividere idealmente la tavola in due e notare che nella parte destra troviamo tutte le negazioni di quanto risulta nella parte sinistra. Dei 10 connettivi rimasti dunque è facile fare una classificazione utile, iniziando dai quattro più usuali: nella parte a sinistra si noti: la colonna 2 (la tavola dalla "o" disgiuntiva o "vel"), per cui la proposizione "p o q" è versa se è vero almeno uno dei due disgiunti:

```
p q   p o q
--------------
VV       V
VF       V
FV       V
FF       F
```

la colonna 5 (la tavola del "se...allora", detto anche "solo se"), per cui la proposizione "se p allora q" è vera in tutti i cai tranne che nel caso in cui la prima sia vera e la seconda falsa.

```
p q   p solo se q
-------------------
VV       V
VF       F
FV       V
FF       V
```

la colonna 7 (la tavola del "se e solo se"), per cui la proposizioen "p se e solo se q" è vera se sono entrambe false:

```
p q   p se e solo se q
--------------------------
VV       V
VF       F
FV       F
FF       V
```

la colonna 8 (la tavola della "e"), per cui la proposizione "p e q" è versa se sono vere entrambe:

```
p q   p e q
--------------
VV       V
VF       F
FV       F
VV       F
```

Nella parte destra la negazione della "e" (la colonna 9, tavola del NAND, cioè "non+e"), la negazione del "se e solo se" (la colonna 10, cioè la "o"alternativa o "aut"), la negazione della "o" (colonna 15, tavola del NOR, cioè "non+o") ecc. In diversi testi di logica si usano diversi simboli per i connettivi; qui useremo i seguenti:

non:	¬
e:	&
o:	v
se allora	→
se e solo se	↔

Tra le tavole di verità si notino ancora la prima e l'ultima, in entrambi gli schemi sopra proposti. Se le altre tavole indicano le condizioni di verità di un enunciato composto da "p" e"q" attraverso un connettivo, queste tavole danno sempre lo stesso valore qual i che siano i valori degli enunciati i partenza. Esse danno dunque il valore a formule particolari: tautologie e contraddizioni.

Con il termine "*tautologia*", si intende una formula o enunciato sempre vero indipendentemente da come stanno le cose nel mondo (o, detto in altri termini, vero in tutti i mondi possibili); ad esempio "p v ¬ p".

Con il termine "*contraddizione*", si intende una formula o enunciato sempre falso indipendentemente da come stanno le cose nel mondo (o, detto in altri termini, falso in tutti i mondi possibili); ad esempio "p & ¬ p".

Le tautologie sono "leggi logiche"; ad esempio le equivalenze di connettivi risulteranno tautologie. Fare la prova con

(p → q) ↔ (¬ p v q)
(traduzione del condizionale in "non" ed "o")
(p v q) ↔ ¬ (¬ p & ¬ q)
(legge di de Morgan)
(p &q) ↔ ¬ (¬ p v ¬ q)
(legge di de Morgan)

La terminologia nasce con il *Tractatus* di Wittgenstein e si impone nella logica contemporanea, contribuendo a formare il paradigma semantico (o teoria dei modelli) che si rafforzerà con la semantica tarskiana. Accanto alla teoria dei modelli si sviluppa peraltro la teoria della dimostrazione, basata più sullo studio delle regole d'uso dei connettivi che non sulla loro interpretazione in termini di tavole di verità[24].

3.3. Linguaggio

Lasciando in sospeso il problema della la struttura degli enunciati elementari o "atomici", pietre costitutive del nostro linguaggio, possiamo vedere la struttura generale del linguaggio guardando come si formano gli enunciati "molecolari" o "complessi". Per semplicità accetteremo nel nostro linguaggio diversi connettivi (ma come accennato, basterebbe il NAND o il NOR per definirli tutti). Abbiamo così una visione un po' più concreta di cosa si può intendere per linguaggio di un sistema formale: un vocabolario finito di simbli alcune regole di formazione degli enunciati del nostro linguaggio, che chiameremo qui "formule ben formate". Avremo quindi:

[24] Per un certo periodo è andato di moda contrapporre il metodo delle tavole di verità e la teoria dei modelli come ispirati al primo Wittgenstein, e la teoria della dimostrazione e il calcolo della deduzione naturale sviluppato da Gentzen come una espressione delle preoccupazioni del secondo Wittgenstein. Per il primo Wittgenstein il significato un enunciato consiste nelle sue condizioni di verità; per il secondo Wittgenstein il significato di un enunciato è dato dal suo uso o dalla giustificazione che si puo' dare di esso. Per Gentzen il significato delle costanti logiche è dato dall'uso che si fa di esse, in particolare dalle regole di introuzione e eliminazione delle costanti logiche. Così per definire la "e" invece della tavola di verità si darà una regola siffatta:

$$\frac{p \quad q}{p \;\&\; q}$$

La regola si legge: se si ha una dimostrazione di p e una dimostrazione di q, allora è giustificato introdurre p & q. Sul contrasto tra tavole di verità e regole di introduzione e eliminazione vedi i saggi di Prior e Belnap in Bottanti-Penco, *Significato e teorie del linguaggio*, Angeli, Milano 1991. In generale sulle teorie del significato basate sulla giustificazione vedi le riflessioni di Usberti (che si richiamano in parte a Dummett).

LINGUAGGIO PROPOSIZIONALE

vocabolario:
lettere enunciative α, β
connettivi $\neg$, &, v, $\rightarrow$

regole di formazione di fbf

se α è una fbf allora $\neg\alpha$ è una fbf
se α e β sono fbf, allora
α & β, α v β, $\alpha \rightarrow \beta$ è una fbf.
(usiamo le lettere greche per indicare una qualsiasi fbf)
- niente altro è una fbf

Abbiamo visto finora come si possono comporre gli enunciati di un linguaggio per costruire enunciati sempre più complessi attraverso i connettivi. Ma qual'è la struttura degli enunciati semplici? I neopositivisti distinguevano due tipi di enunciati, quelli "atomici" e quelli "molecolari"[25]; gli enunciati atomici erano tali che non potevano essere analizzati ulteriormente. I filosofi neopositivisti discussero a lungo sulla forma che dovevano avere tali enunciati: enunciati puramente sensoriali - su dati di senso - o enunciati su fatti fisici? Il linguaggio doveva essere fenomeologico e fisicalista? Il logico è interessato solo fino a un certo punto a questo dibattito; esso infatti non riguarda la forma logica degli enunciati atomici, che viene definita secondo canoni precisi, indifferente alla loro eventuale interpretazione filosofica.

La logica, nel presentare la struttura interna delle proposizioni, la loro forma logica, mette infatti tutti gli enunciati semplici nel letto di Procuste della distinzione di termini singolari (nomi propri o descrizioni definite) e predicati (aggettivi, verbi intransitivi, verbi transitivi) e quantificatori (espressioni come "tutti" e "qualche"). Useremo lettere minuscole per termini singolari (costanti e variabili), lettere maiuscole per predicati e segni speciali per i quantificatori. Formalizzeremo gli enunciati semplici, senza e con quantificatori, come segue.:

- enunciati semplici senza quantificatori:

-Adele è pazza:	Pa
- Giorgio corre	Cg
-Ada ama Beatrice	Aab

- enunciati semplici con quantificatori:

-	sono tutti pazzi! : (per tutte le x, x è pazzo)	$\forall$ x Px
-	non ci sono pazzi: (non esiste alcuna x tale che x è pazzo) (o: per nessuna x, x è pazzo)	$\neg\exists$ xPx
-	qualcuno è saggio: (per qualche x, x è saggio) (o: esiste almeno un x che è saggio)	$\exists$ x Sx
-	tutti amano qualcuno: (per ciascuno c'e' almeno una persona amata - per tutte le x, esiste almeno un y tale che x ama y)	$\forall$x $\exists$y Axy
-	tutti amano qualcuno (c'è qualcuno che è amato da tutti)	$\exists$y $\forall$ x Axy

[25] E' un'idea ricorrente anche in linguistica; l'esigenza di distinguere enunciati semplici e composti è stata espressa ad es. dal primo Chomsky con la distinzioe tra "frasi nucleari" della lingua e frasi che risultano essere effetto di trasformazioni. In tal modo Chomsky dava un ruolo centrale alle frasi dichiarative attive.

Abbiamo così un insieme di enunciati semplici, che si costruiscono con regole precise a partire dal vocabolario di base costituito da segni per termini singolari, predicati e quantificatori. [26]

Ricordiamo che "fbf" vuol dire "formula ben formata"; qui adottiamo la convenzione tipica della logica contemporanea per cui una formula ben formata può essere sia un enunciato completo (come Pa, xPx, ecc.), sia una funzione enunciativa (come Px, x (Px&Qy), Pa Qx, ecc.) che non può ancora essere considerata un enunciato (cioè ad essa non si può ancora attribuire un valore di verità).

Per semplicità inoltre useremo solo costanti predicative a un posto (monadiche). Il calcolo dei predicati del primo ordine limitato ai predicati monadici corrisponde alla logica aristotelica (o meglio la teoria del sillogismo corrisponde solo a una sottoparte del calcolo dei predicati monadici). Tale calcolo è decidibile, cioè, dato un qualsiasi enunciato, è sempre possibile decidere in un numero finito di passi, se è o non è valido (sempre vero qualsiasi sia l'interpretazione delle lettere).

LINGUAGGIO PREDICATIVO DEL PRIMO ORDINE:
vocabolario:
costanti individuali a,b,c...
variabili individuali x,y,z...
costanti predicative P,Q,R
connettivi ¬, &, v, →, ↔
quantificatori ∀, ∃ ,

regole di formazione di fbf

- se P è una costante predicativa e t è una costante o una variabile individuale, allora Pt è una formula
- se α, è una formula, allora anche ¬ α è una formula
- se α e β sono formule, allora anche α & β, α v β, α → β è una fbf
- se α è una formula e x una variabile individuale, alora ∀xα è una formula
- nient'altro è una formula

3.4. calcolo (apparato deduttivo)

Come ricordava Frege nella *Ideografia* (1879) si possono dare diversi sistemi di assiomi, cioè di principi assunti come validi da cui derivare tutti gi infiniti teoremi del calcolo. Questi principi sono tratti dagli enunciati del nostro linguaggio (formule ben formate) e corrispondono a tautologie (sono cioé sempre veri, veri in qualsiasi circostanza o mondo possibile - vedi par. successivo).

Dai principi o **leggi** logiche vengono distinte le **regole** di inferenza, o regole di trasformazione, che permettono di passare dagli assiomi ai teoremi. La distinzione leggi/regole è stata elaborata rigorosamente per la prima volta da Frege nella sua *Ideografia* del 1879; negli stessi anni Lewis Carroll, autore di *Alice nel Paese delle Meraviglie*, si poneva problemi che richiedevano questa distinzione, con un famoso apologo su Achille e la tartaruga (di cui nel 1995 viene festeggiato il centenariocon un numero speciale della rivista *Mind*). Le regole d'oro dei calcoli logici assiomatici classici sono la Regola di Separazione (o Modus Ponens) e la Regola di Sostituzione. Nell'esempio che segue gli assiomi sono quelli usuali in molti sistemi logici; i primi due sono i primi due assiomi del sistema dell'*Ideografia* fregeana e il terzo è derivato dalla formulazione abbreviata di Luckasiewivz1921 (che dimostra come i restanti assiomi proposizionali di Frege sono riducibili, ovvero derivabili dai primi due più questo terzo).

Si noti che Frege usa come base di connettivi "non" e "se...allora". Russell userà "non" e "o". Hilbert proporrà un insieme di assiomi più ricco per facilitare la deduzione logica.

CALCOLO
assiomi (o leggi logiche)

---

[26] Possiamo subito vedere che si mantengono le intuitive relazioni tra "tutti", "qualche" e "nessuno"; l'espressione "nessuno è pazzo" è equivalente alle due seguenti:
tutti sono non pazzi = non esiste alcun pazzo
∀ x ¬ Px = ¬ ∃ xPx
Le due formule si possono leggere come: "per tutti gli x, x non è pazzo" e "non si dà il caso che per qualche x, x sia pazzo" (o "non esiste nemmeno un x, tale che x è pazzo).

1) $A \to (B \to A)$
2) $A \to (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$
4) $\forall x\, Px \to Pt$
5) $\forall x\, (A \to B) \to (A \to \forall x B)$ (se x non libero in A)

regole di trasformazione
(regole di inferenza)

MODUS PONENS: GENERALIZZAZIONE:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B} \qquad\qquad \frac{A}{\forall x\, A}$$

Per poter dare una lettura intuitiva del calcolo non vincolata a questioni troppo tecniche legate alla semantica, diamo una traduzione intuitiva dei primi quattro **assiomi**:

1) se A è un enunciato vero, allora è implicato da qualsiasi enunciato B.
2) se l'implicazione di C da B dipende da A, allora se A implica B, A implica anche C
3) se dalla falsità di A si deriva la falsità di B, allora se B e' vero anche A sarà vero.
4) se un predicato vale per tutti gli individui, vale per uno preso a piacere.

La lettura intuitiva della regola del Modus Ponens (Separazione) dice: se è vero che A implica B, ed A è vero, allora anche B è vero. Ad essa va aggiunta la regola di Sostituzione: all'interno di una formula si può sostituire uniformemente un simbolo con un altro;

Nota Bene: Si è usato nel definire gli assiomi la parola "implicare"; occorre ricordare che la implicazione logica corrisponde alla validità del condizionale. Il condizionale, o "se...allora" è un connettivo che dà come risultato una proposizione composta che può essere vera o falsa. La implicazione corrisponde al riconoscimento che la proposizione composta dal condizionale non è falsa, assume cioè solo i valori V in tutte le occasioni possibili (sarebbe un po' come tracciare una segno di cancellazione sulla riga che conclude con il valore di verità F nella tavola di verità).
Un maggior rilievo alle regole sulle leggi logiche viene dato nell'ottica della deduzione naturale e nel calcolo dei sequenti di Gentzen. Qui il ragionamento si basa su assunzioni e regole di introduzione e eliminazione dei connettivi logici. Vi è una classica contrapposizione tra il metodo delle tavole di verità e il metodo di Gentzen. Alcuni considerano i due metodi come paradigmi rispettivamente della visione filosofica del Tractatus di Wittgenstein (il significato di un enunciato sono le condizioni di verità determinate dalle tavole di verità) e della visione filosofica del secondo Wittgenstein (il significato di un enunciato è il suo uso, e nel caso dei connettivi l'uso è espresso dalle regole di introduzione e eliminazione). Vi è peraltro una stretta equivalenza tra il metodo delle tavole di verità e il calcolo di deduzione naturale.

3.5. Dimostrabilità (sintassi) e Validità (semantica)

Compito primario del calcolo logico è derivare formule da formule attraverso le regole date. Si usa oggi distinguere tra *aspetto sintattico* (derivabilità e dimostrabilità) e *aspetto semantico* (verità e conseguenza logica). La visione più tradizionale (aristotelica) era semantica: lo scopo ultimo della logica era preservare la verità attraverso il ragionamento; ma questa era la applicazione della logica alla scienza; la logica come strumento doveva solo essere strumento di controllo per la struttura del ragionamento corretto, a prescindere dalla verità delle premesse. Con gli anni '30 del XX Secolo si sviluppa la *metalogica*, ossia una serie di lavori formali sulla struttura dei sistemi logici e sulle loro proprietà. Lo studio della logica nel XX Secolo diviene quindi principalmente lo studio delle proprietà dei sistemi logici. A livello di metalogica si usa distinguere due tipi di segni, uno correlato alla sintassi e uno alla semantica

$\vdash$ derivabilità e dimostrabilità

$\models$ conseguenza logica e validità

Dobbiamo distinguere in entrambi i casi quando il segno viene posto dopo un insieme di premesse arbitrarie, o quando non è preceduto da alcuna premessa particolare; in questo secondo caso si intende che ciò che segue deriva o è conseguenza lgica dei soli assiomi. Occorre dunque distinguere:

$X \vdash A$ il segno "$\vdash$ " sta a indicare che A è *derivabile* da un insieme di premesse e duque è un *teorema specifico* del nostro calcolo (le premesse, elementi di X, possono essere extralogiche).

$\vdash A$ il segno "$\vdash$ " sta a indicare che A è *dimostrabile*, cioè è un *teorema logico*, che deriva dai soli assiomi.

$X \models A$ il segno $\models$ sta a indicare che A è *conseguenza logica* di un insieme di premesse, cioè A è vero in certe interpretazioni,cioè vero solo a condizione che siano soddisfatte certe premesse.

$\models A$ Il segno $\models$ sta a indicare che A è *valido*, cioè vero in qualsiasi interpretazione dei simboli.

Diversi calcoli e formalismi si sono sviluppati dopo la nascita della assiomatica classica (che risale a Frege, Hilbert e Russell). Gödel ha dimostrato alcuni dei più rilevanti teoremi metalogici classici: i teoremi di completezza e correttezza del CPI che mostrano la **interrelazione tra sintassi e semantica**

se una formula è *derivabile* a partire da un insieme X di premesse, o è *dimostrabile* dagli assiomi (è un teorema) allora è conseguenza logica dell'insieme X di premesse o dei soli assiomi (è una tautologia, è una formula valida)

CORRETTEZZA FORTE $X \vdash A \Rightarrow X \models A$

CORRETTEZZA DEBOLE $\vdash A \Rightarrow \models A$

e viceversa se una formula è una conseguenza logica di un insieme X di premesse (o dei soli assiomi: tautologia), allora è derivabile da quell'insieme X di premesse (o dimostrabile dai soli assiomi: è un teorema).

COMPLETEZZA FORTE $X \models A \Rightarrow X \vdash A$

COMPLETEZZA DEBOLE $\models A \Rightarrow \vdash A$

Il teorema di completezza vale per il calcolo dei predicati del primo ordine (Gödel 1930); il teorema di completezza non vale però per i calcoli dei predicati di ordine superiore, che quantificano su proprietà (questo risultato è una delle conseguenze del famoso "teorema di incompletezza" di Gödel del 1931).

Ultimo dato rilevante: la **decidibilità**. Un sistema formale è decidibile se, data una formula a piacere, si può concludere in un numero finito di passi se essa è dimostrabile o no, valida o no). Il calcolo enunciativo è decidibile; il calcolo dei predicati del primo ordine con identità non è "decidibile" (teorema di Church); ma sono decidibili sue sottoparti, come il calcolo dei predicati monadici, un frammento del quale corrisponde alla formalizzazione del sillogismo aristotelico.

3.6. composizionalità e contestualità

Una volta accennato al funzionamento del calcolo logico è facile capire il principio base che lo regola, il principio di composizionalità o principio di Frege. chiamiamo "valore semantico" il valore che un simbolo assume nel calcolo quando viene interpretato (un simbolo di enunciato avrà come valore un valore di verità; i simboli per termini individuali avranno come valore oggetti e i simboli per predicati avranno come valore classi). E' facile vedere che il valore semantico del tutto dipende dal valore semantico delle parti di cui è composto.

- Il valore di verità di un enunciato composto dipende dal valore di verità degli enunciati componenti, come abbiamo visto dalla definizione delle tavole di verità.
- Il valore di verità di un enunciato semplice dipende dal valore semantico degli elementi componenti: Pa sarà vero se l'oggetto l'oggetto che è il valore di "a" appartiene alla classe che è il valore di "P" e sarà falso se tale oggetto non appartiene a tale classe.

Il principio di composizionalità diviene un principio importantissimo in logica, filosofia della scienza e filosofia del linguaggio: è un requisito minimo indispensabile per parlare di un sistema formale; se venisse a mancare la composizionalità, un sistema formale non sarebbe più tale e ogni ideale di applicazione della logica alle teorie scientifiche e all'analisi del linguaggio diverrebbe un progetto illusorio e impraticabile.

D'altra parte Frege per primo si rese conto che la composizionalità trova difficile applicazioni in contesti diversi dal normale ragionamento matematico (ad esempio all'interno dei contesti di credenza). Questo porta a porre restrizioni al principio di composizionalità che varrà relativamente a certi contesti. Gli sviluppi delle applicazioni informatiche daranno infine alla nozione di contesto una importanza centrale in logica. Se questo basti a parlare di cambiamento di paradigma o di sviluppo di un paradigma costituito è compito degli storici decidere. Sta di fatto che gli inizi del XXI secolo sono segnati da una discussione a tutto campo sul problema del contesto, sia in logica che in semantica, ma anche in altri ambiti sia filosofici sia infomatici, come presentato ampiamente nell'antologia a cura di C. Penco, *La svolta contestuale*, McGraw Hill, Milano, 2002.

3.7 Logica e logiche

La idea di sviluppare una teoria generale dei segni che comprenda sintassi, semantica e pragmatica (vedi §. 2.5) è una delle idee sviluppate nell' ambito della semiotica di C.S. Peirce, filosofo americano che studiò a lungo la logica booleana e contribuì allo sviluppo della logica contemporanea insieme a Frege. Se gli sviluppi di un tale progetto sono ancora frammentari, è da ricordare che l' idea di usare degli operatori sulle proposizioni che non si limitino alle funzioni di verità dei connettivi logici tradizionali sono state sviluppate con grande dovizia di particolari dai logici contemporanei, dando luogo a diversi tipi di logiche, di cui si trova un'ottima introduzione in D. Palladino e C. Palladino, *Le logiche non classiche. Un'introduzione,* Carocci, Roma, 2007. Facciamo un esempio:

LOGICHE MODALI: usano operatori per la necessità e la possibilità; esprimono cioè le tradizionali modalità aletiche:

N p = è necessario che p
P p = è possibile che p

LOGICHE DEONTICHE: formalizzano le "modalità deontiche", usando operatori per l' obbligo e il permesso:

O p = è obbligatorio che p
P p = è necessario che p

LOGICHE TEMPORALI: formalizzano il ragionamento temporale, usando operatori per il passato e il futuro:

P p = era vero che p
F p = sarà vero che p

Vi sono diverse altre logiche, diversi modi di interpretare questi operatori, diversi sistemi logici di questi generi al punto che oggi è difficile orientarsi nel proliferare di tanti formalismi. Una utile semplificazione è mostrare i rapporti di queste logiche "speciali" rispetto alla logica standard, cioè il calcolo dei predicati così come si è sviluppato nella tradizione di Frege e Hilbert e che resta punto di riferimento di tutti gli studi di logica. Così come il calcolo dei predicati è un ampliamento della logica tradizionale e la ingloba in sé, analogamente diversi calcoli vogliono essere estensioni proprie del calcolo dei predicati. E' questo il caso delle logiche ora viste e potremmo schematizzare la situazione nel modo seguente:

logica tradizionale:

sillogistica aristotelica
logica stoica
algebra di Boole

logica matematica classica:
calcolo dei predicati
(del primo e secondo ordine)

logiche estese:
logiche modali
logiche temporali
logiche deontiche
logiche epistemiche
logiche erotetiche
logiche rilevanti
logiche della preferenza
logiche epistemiche

Altre logiche si pongono invece come alternativa radicale della logica classica, benché spesso tutte tendano a dimostrare che la logica classica è un caso particolare del loro sistema. Le possiamo chiamare, con una terminologia spesso in uso[27]

logiche devianti:
logica intuizionista
logiche polivalenti
logiche quantistiche
logiche libere
logiche paraconsistenti
logiche non monotone
logiche lineari
logiche multicontestuali

La discussione nata con lo sviluppo dei sistemi computazionali, e quindi con sistemi di calcolo logico caratterizzati dalla finitezza e da problemi di controllabilità e complessità computazionale, ha arricchito il dibattito sulle sorti della logica, con punte polemiche accese, come ad esempio la discussione critica sul metodo assiomatico in logica condotta da C. Cellucci in *Le ragioni della logica*, Laterza, Roma 1988. Possiamo anche lasciare in dubbio se la logica matematica abbia avuto come compito esclusivo quello di fornire certezza alla matematica o semplicemente quello di fornire ad essa una esposizione più rigorosa. Di certo se oltre a trattare il ragionamento matematico ci si pone il problema di formalizzare aspetti sempre più complessi del linguaggio naturale e del ragionamento di senso comune è ovvio che la logica dovrà confrontarsi con nuovi problemi rispetto a quelli tradizionali del ragionamento matematico. Il confronto con la psicologia diviene sempre più rilevante[28]. Si apre il campo della trattazione del ragionamento in condizioni di incertezza, con svilupo di metodi probabilistici e di scontro di paradigmi alternativi nel decidere cosa vale come modello di un ragionamento incerto. Logica e intelligenza artificiale hanno sempre intrecciato le loro sorti ora con polemiche accese ora con scambi reciproci[29]; tra

---

27 Vedi S. Haack, *Filosofia della logica*, Angeli, Milano, 1993; S. Haack Deviant Logic, Fuzzy Logic: Beyond the Formalism. Chicago: The University of Chicago Press, 1996.

28 vedi per una discussione complessiva P. Cherubini, P. Giaretta, A. Mazzocchi, *Ragionamento: psicologia e logica*, Giunti, Firenze 2000. Il lavoro è ricco di interventi contrapposti su diversi aspetti dei rapporti psicologia-logica scritti da informatici, logici, filosofi e psicologi. Vedi anche Pascal Engel, *Filosofia e psicologia*, Einaudi, 2000; C. Casadio, *Logica e psicologia del pensiero*, Carocci, 2006.

29 vedi M. Benzi, *Il ragionamento incerto*, Angeli, Milano, 1997, M. Frixione, *Logica, linguaggio, intelligenza artificiale*, Angeli, Milano, 1994, D. Marconi, *Filosofia e scienza cognitiva*, Laterza, 2003.

le più recenti novità in logica troviamo lo sviluppo delle logiche lineari[30] e i sistemi multicontestuali[31]. Tematiche come l'analogia, i concetti fluidi o altre che intervengono nel voler ridefinire lo statuto della logica devono comunque confrontarsi con il paradigma dominante della logica classica e in particolare con lo sviluppo delle analisi sul concetto di calcolabilità o computabilità, che costituisce uno dei principali apporti della logica allo sviluppo dell'informatica[32].

30 V.M. Abrusci, *Seminari di logica lineare*, F.lli Laterza, Bari, 1992. Vedi anche: http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_logic

31 Per una introduzione v. F. Giunchiglia, "Contextual reasoning", *Epistemologia*, 1993 e P. Bouquet, *Contesti e ragionamento contestuale*, Pantograf, Genova, 1998 e il saggio di Varol Akman in Penco (a c.di) *La svolta contestuale*, McGraw Hill, Milano 2002.

32 Vedi M. Frixione & D. Palladino, *Funzioni, macchine, algoritmi. Introduzione alla teoria della computabilità*, Carocci, Roma, 2004.