“Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)”, n.21, 2011
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Il problema delle scale musicali nelle didattica dei numeri reali

Alessandro Sarritzu

Abstract. La ricerca parte dall'ipotesi che il tradizionale approccio fondato sulla scoperta delle grandezze geometriche incommensurabili possa essere utilmente affiancato da un altro, fondato sul problema delle scale musicali, anch'esso di origine pitagorica. L'esperienza è stata condotta con alunni di scuola secondaria superiore nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche. I risultati, sottoposti ad analisi qualitativa e quantitativa, con metodi statistici e implicazionali, sembrano decisamente confermare l'ipotesi e incoraggiano ulteriori ricerche sperimentali sull'argomento.

Abstract. The research hypothesizes that the traditional approach based on the discovery of immeasurable geometrical size, may be usefully accompanied by another, based on the problem of musical scales, also of Pythagorean origin. The experience was conducted with secondary school pupils under the Scientific Degree Project. The results, subjected to qualitative and quantitative analysis, with statistical and implicational method, seem to decidedly confirm the hypothesis and encourage further experimental research on the subject.

Introduzione

Tradizionalmente l'approccio alla didattica dei numeri reali assume come proprio riferimento epistemologico quasi esclusivamente quello geometrico che storicamente si identifica con la scoperta della incommensurabilità tra il lato e la diagonale di un quadrato[1]. L'ipotesi su cui si sviluppa la ricerca descritta nel presente lavoro consiste nel proporre un tipo di approccio diverso da affiancare a quello tradizionale[2]. In particolare si è ritenuto di potere utilizzare a tale scopo il problema dell'armonia musicale e della suddivisione della scala, a partire da una tradizione che anche in questo caso vede la propria origine nella scuola pitagorica, ma che vede la sua formulazione propriamente scientifica solo con Aristosseno.

L’analisi compiuta sull’opera di Aristosseno ci consente di mettere in evidenza come la modellizzazione matematica dell’armonia musicale, abbia giocato un ruolo significativo nell’evoluzione del pensiero scientifico greco. Tale ruolo si esplica in una molteplicità di direzioni. Innanzitutto il problema della suddivisione della scala musicale non solo è stato, nella tradizione pitagorica, una delle linee su cui si è misurata l’insufficienza del numero (intero e razionale) come fondamento di ogni discorso sulle grandezze, ma ha segnato anche il passaggio dalle forme più arcaicamente dogmatiche, ad una concezione delle scienze fondate sulla deduzione (matematica) e sulla modellizzazione dei fenomeni (scienze della natura). Nel caso speci-

[1] Dice in proposito Borzacchini, dopo aver trattato l'origine geometrica del concetto di incommensurabilità: «*Esiste una tesi diversa sull'origine della incommensurabilità, che è stata in passato da Paul Tannery e in tempi più recenti da Árpád Szabó, il quale tuttavia la ritiene niente più che un inizio, e che fa riferimento a un problema musicale come punto di partenza. Da sottolineare che anche Walter Burkert riconosce nella teoria musicale la più genuina teoria matematica ascrivibile agli antichi pitagorici*» (Borzacchini, 2005).

[2] Circa l'opportunità di utilizzare diversi approcci convergenti per la costruzione di uno stesso concetto nella didattica, v. ad es. D’Amore (2006).

fico si è evidenziato[3] come il trattato sull’*Armonica*, di Aristosseno, segni un passaggio, da una parte verso il metodo ipotetico deduttivo, di cui verosimilmente si ha negli *Elementi* di Euclide il primo esempio compiuto, dall’altra verso una concezione della scienza che possiamo definire “rappresentativa” e “modellistica”, in contrapposizione alle spiegazioni più squisitamente “metafisiche” della precedente tradizione.
Per meglio comprendere questo aspetto bisogna fare riferimento da una parte alla tradizione della teoria musicale ereditata dai pitagorici, dall'altra al problema delle origini del pensiero scientifico visto come modellizzazione più o meno formalizzata dei fenomeni.
La prima di queste due linee è stata già affrontata dall'autore in un lavoro pubblicato in precedenza[4] e di cui si richiama qui qualche elemento essenziale.
Il sistema musicale adottato in occidente fin da tempi molto antichi (che la tradizione fa risalire a Pitagora) è fondato su una scala che ha come propria base il rapporto tra i suoni prodotti da una corda vibrante di una certa lunghezza e la stessa corda di lunghezza dimezzata. Oggi sappiamo che con il dimezzarsi della lunghezza della corda, a parità di altre condizioni, si ottiene un suono di frequenza doppia, per cui le due forme d’onda finiscono per fondersi perfettamente costituendo la base fisica dell’armonia musicale. E’ per ciò che il rapporto 2□1 viene assunto come base della scala. Precisamente le note aventi tale rapporto, prendono lo stesso nome e vengono distinte tra loro da un indice (ad esempio do_1, do_2, oppure sol_1, sol_2, ecc.).
Il problema che si pone è di suddividere questo intervallo in parti tali che
1) l’intervallo sia vicino al minimo avvertibile dall’orecchio.
2) vi siano tra le note rapporti semplici e musicalmente armonici.

Ciò che si comprese fin dall’antichità, è che l’armonia musicale è strettamente legata ai rapporti numerici che sussistono tra certe grandezze misurabili sullo strumento che produce i suoni. Tale grandezza per gli strumenti a corda è la lunghezza della corda per uno strumento a fiato può essere la lunghezza della canna, ecc... Ciò che importa è comunque l’avere compreso come l’armonia tra i suoni si genera quando le grandezze in gioco hanno tra loro dei rapporti semplici, esprimibili cioè mediante una frazione *m/n* come *m* ed *n* numeri interi piccoli. Tradotta in termini moderni, l'impossibilità della suddivisione perfetta della scala musicale (cioè in intervalli aventi tutti lo stesso rapporto) è che tale rapporto dovrebbe essere irrazionale[5].

---

3 Sarritzu A. (2008).

4 Sarritzu A. (2004).

5 supponiamo dapprima che l’intervallo 2/1 si debba dividere in un numero *n* qualsiasi di intervalli, per poi considerare il caso particolare in cui *n* = 7. Si decide a priori il numero *n* di intervalli (tutti rappresentati dalla stessa proporzione *x*, (o, come si dice, equalizzati) in cui ripartire l’intervallo originario 2/1. In altri termini, stabilito il numero *n* di note aventi nomi diversi, vogliamo che il rapporto tra due note successive sia *x*. Se indichiamo con

$$a^0 = Do_1 , \quad a^1 , \quad a^2 , \quad \cdots \quad , \quad a^n = Do_2$$

le *n* note dell’intervallo più la prima nota Do_2 dell’intervallo superore (l’ottava se le note sono sette), e supposto che siano

$$f_0 , \quad f_1 , \quad f_2 , \quad \cdots \quad , \quad f_n$$

le rispettive frequenze, si deve avere che

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \cdots = \frac{f_n}{f_{n-1}} = x$$

e quindi

$$x^n = \frac{f_n}{f_0} = \frac{2}{1} = 2 ,$$

Rispetto alla seconda questione, si può fare riferimento in particolare ai lavori di Migliorato e Gentile[6]. In entrambi questi lavori si mette in evidenza l'originalità dell'opera euclidea che per la prima volta sembra presentare lo sviluppo ipotetico-deduttivo della geometria separato da qualunque preventiva affermazione di "verità" in senso assoluto. Questo aspetto di originalità viene ulteriormente approfondito dagli stessi autori che in un successivo lavoro su Archimede[7], evidenziano il carattere astratto e per molti aspetti convenzionale che i concetti scientifici sembrano assumere nel terzo secolo a.C.. L'insieme di questi caratteri viene poi denotato da Migliorato[8] con l'espressione "paradigma euclideo", ma lo stesso autore avverte sul carattere convenzionale dell'attribuzione che, in mancanza di precedenti testi scientifici sopravvissuti, viene assegnata interamente ad Euclide. Il problema della transizione al paradigma euclideo da una visione della scienza più intrisa di elementi metafisici e talvolta anche mistici (come nel caso di Pitagora), è affrontato in un precedente lavoro[9] . In quest'ultimo, l'autore analizza l'opera di Aristosseno (Armonica) dedicata al problema di cui ci si sta occupando, nell'ottica dei lavori di Migliorato e Gentile e alla luce di altri recenti lavori. Perviene alla conclusione che Aristosseno abbia, con incertezze e lacune, anticipato alcuni elementi del paradigma euclideo.

Il percorso che qui si è appena accennato costituisce quindi lo sfondo storico-epistemologico su cui verrà ora sviluppata la seguente ricerca su un problema di insegnamento-apprendimento della matematica, nei termini già accennati nell'apertura di questa introduzione e che verranno di seguito esposti.

Oggetto e scopi

L'iniziale base di partenza delle ipotesi che vogliamo verificare, nasce su un piano essenzialmente euristico suggerito dal parallelismo tra filogenesi e ontogenesi. Già nell'introduzione si è fatto riferimento ad un passo di Borzacchini che ipotizza un'origine del concetto di incommensurabilità fondata sulla modellizzazione dei fenomeni musicali non meno che su questioni geometriche (diagonale del quadrato). Che si accetti o meno una tale ipotesi, non è possibile ignorare che i problemi connessi alla suddivisione della scala musicale ebbero comunque un ruolo tutt'altro che trascurabile nella definizione di concetti fondamentali quali quelli di numero (tranne gli interi), di grandezza, di rapporto, proporzione, ecc... Non a caso Platone vi fa riferimento esplicito nel *Timeo*. Ma, come abbiamo visto, è con Aristosseno, che la modellizzazione matematica del problema delle scale si fa più pressante e assume una veste più precisa e rigorosa. Ed è in questa nuova forma di rappresentazione che anche l'aporia connessa con la richiesta di razionalità del rapporto diventa evidente e irresolubile. Da qui l'idea che gli ostacoli connessi alla comprensione del concetto di numero reale non siano solo di natura ontogenetica o didattica, ma anche epistemologica, e che proprio su questo aspetto possa dimostrarsi utile un percorso che utilizzi il problema delle scale musicali.
A tal fine non si può però prescindere dai diversi percorsi che nel corso della storia hanno dato significato e fondamento al concetto di numero reale[10]. In particolare non si può non fare riferi-

---

e cioè $x = \sqrt[n]{2}$. In particolare per una suddivisione in sette note si avrebbe $x = \sqrt[7]{2}$

6 Gentile G.., Migliorato R. (2005) e Migliorato (2005).

7 Gentile G.., Migliorato R. (2008).

8 Migliorato R. (2005).

9 Sarritzu A. (2008).

10 Va ricordato, per altro, che lo *status* di *numero* accordato ai rapporti (razionali e irrazionali) è un fatto del tutto sconosciuto nell'antichità e che il termine *reale* nasce in contrapposizione a immaginario solo via via che anche quest'ultima entità va acquistando dignità di *numero*.

mento ai principali approcci logico-formali con cui, in epoche diverse, si è dato fondamento ai numeri reali.
Non si tratta qui di esporre le diverse teorie in modo più o meno dettagliato, ma di metterne a confronto i caratteri salienti e i punti di maggiore criticità in rapporto ai processi di apprendimento.
In particolare possiamo innanzitutto distinguere, su una base semantico-motivazionale un tipo di approccio che possiamo definire operativo-tecnologico da un tipo di approccio più apertamente epistemologico.

Al primo tipo appartengono quelle definizioni del numero reale che sono essenzialmente fondate su algoritmi di calcolo che, sia pure idealmente, possono essere pensati come processi infiniti. Una sistemazione di questi all'interno della teoria degli insiemi è per esempio, alla base della definizione dei reali come allineamenti illimitati di segni di un alfabeto, detti cifre, che può essere decimale o in base diversa dal 10. Senza coinvolgere esplicitamente l'infinito in atto si può fare invece ricorso al concetto di convergenza, inteso come proprietà della successione stessa e non come esistenza di un limite (Es.: Criterio di Cauchy). La concezione dei numeri irrazionali procede qui in un modo che è solo apparentemente naturale, ma proprio per questo presenta i rischi più insidiosi. I processi algoritmici su cui si fondano le definizioni, infatti, nascono all'interno di un quadro teorico già noto: che è quello dei numeri razionali, per essere estesi attraverso l'artificio di una potenziale estensione all'infinito del processo algoritmico. Su un piano puramente intuitivo ciò non sembrerebbe presentare difficoltà, e potrebbe anzi agevolmente essere spiegata geneticamente con la teoria della metafora di Lakoff e Nuñez (2000). Ma è proprio questa apparente naturalità del passaggio che può indurre in errore, creando un potenziale ostacolo epistemologico.

Al secondo tipo possiamo invece ascrivere quelle fondazioni tendenti a definire, in astratto, una nuova classe di oggetti, che possono chiamarsi “rapporti di grandezze” (fondazione euclidea), o “numeri reali” (fondazione di Dedekind), entro cui si possono assimilare, come costituenti una sottoclasse, i già noti “numeri razionali”. Questo secondo modo di definire i numeri reali, se può apparire più soddisfacente da un punto di vista logico-fondazionale, non è però, a nostro avviso il più idoneo per la formazione concettuale degli alunni di una scuola secondaria. Il fatto che talvolta venga utilizzato da alcuni insegnanti può invece essere alla base di ostacoli didattici. La nostra ricerca è indirizzata essenzialmente al rilevamento degli ostacoli epistemologici con il primo modo di definire i numeri reali e sull'eventuale utilità che può derivare dall'uso dell'approccio musicale congiunto a quello geometrico. E' tuttavia da tenere presente, che ostacoli didattici, fondati su definizioni del secondo tipo e dovuti a precedenti esperienze di alcuni alunni, potrebbero interferire con l'esperimento. Di ciò si dovrà tenere conto nell'interpretazione dei risultati, non avendo la possibilità di selezionare preventivamente il campione su cui effettuare la ricerca.

Domande di ricerca e relative ipotesi di risposta
D1. Il concetto di numero irrazionale presenta ostacoli epistemologici?
D2. La presentazione dell’irrazionale mediante la musica può dare maggiore conoscenza dell’oggetto matematico?
D3. L'uso del Monocordo come “macchina matematica” può facilitare una conoscenza più profonda dell’irrazionale?

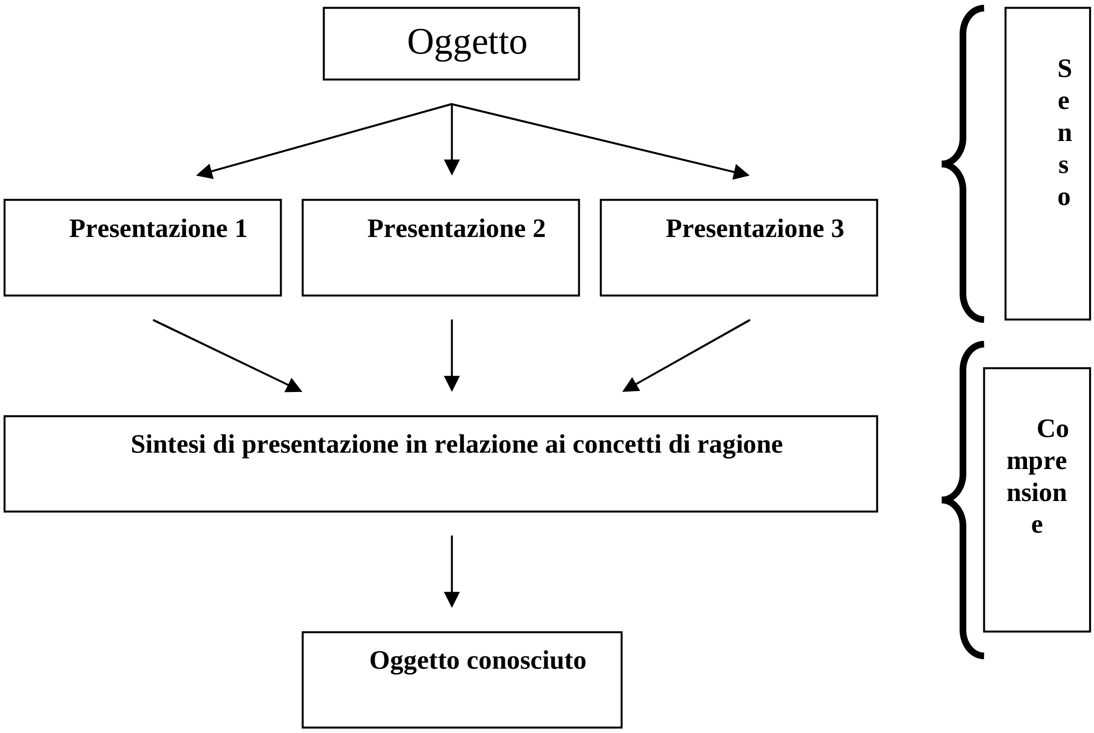
Quanto alle ipotesi di risposta, occorre dire che già le domande stesse sono state formulate sulla scorta di alcune ipotesi di fondo e quindi sono in qualche modo già implicitamente supportate dalle stesse domande. Si ritiene infatti, e la pratica didattica ne dà ampia conferma, che il pas-

saggio dal numero razionale al numero irrazionale, sia tra quelli che presentano maggiori difficoltà e ostacoli. Il problema è piuttosto di capirne la natura per approntare quelle misure che si dimostrano maggiormente atte ad un loro agevole superamento. Un'ipotesi di risposta positiva alla domanda D2, può essere suggerita, in via teorica, dal processo storico, ricostruito già nel primo capitolo. Anche se un'automatica trasposizione dal piano filogenetico a quello ontogenetico, sarebbe da considerare arbitraria, tuttavia il parallelismo che si può, in larga misura, rilevare tra i due processi, costituisce sicuramente una buona traccia euristica per formulare ipotesi da sottoporre a controllo sperimentale[11].
Anche per la terza domanda, un'ipotesi utile di risposta, ci viene suggerita ancora una volta dalla storia, se si tiene conto del fatto che già in epoca pitagorica la teoria musicale veniva supportata da esperimenti effettuati sul *monocordo*. Quest'ultimo oggetto, infatti, lungi dall'essere un vero strumento musicale (per la sua stessa conformazione non era adatto all'esecuzione di composizioni vere e proprie, e non era di fatto utilizzato per questo), si configurava invece come un apparato per esperimenti che avevano per oggetto la modellizzazione matematica del fenomeno armonico: quindi una vera e propria macchina matematica.

Quadro teorico
Il nostro lavoro si inserisce all’interno di un quadro didattico ben delineato in D’Amore (1999), il quale offre un’ampia panoramica dei vari gruppi di ricerca facendo riferimento al più moderno contesto internazionale.
Più in particolare la nostra ricerca si muove parallelamente su tre fronti, dal lavoro di D’Amore (2006) che pone maggiore attenzione ai processi di senso e comprensione, a quello della Bartolini Bussi-Maschietto (2006) che mette in luce, con ampi riferimenti alle numerose ricerche in campo internazionale (cito alcune fra le più importanti: Vygotskij 1987, Meira 1995, Radford 2003), il grande contributo che l’uso delle macchine matematiche offre alla didattica, ed infine il lavoro di Spagnolo-Marino (1996) che da un contributo forte al riconoscimento degli ostacoli epistemologici.

Ritornando al lavoro di D’Amore (2006), che, come abbiamo visto nel capitolo precedente pone le basi della semiotica, mi sembra interessante riportare qui uno schema di Radford (2004) dal quale si percepisce il tentativo di porre le idee di *senso* e *comprensione* al loro giusto posto:

11 Furinghetti F., Radford L.. (2002); Radford L. (1997); Scimone A. (2003)



Ritornando al lavoro della Bartolini Bussi e Maschietto (2006), poniamo il problema del contributo degli artefatti nella didattica della matematica, più precisamente, quanto questi ultimi possano contribuire alla costruzione e comprensione di oggetti matematici e quanto il ruolo dell'insegnante diventa essenziale nel definire la direzione del processo di esplorazione.

Dice la Bussi: «*la presenza di un artefatto in una classe (in un laboratorio) non determina automaticamente il modo in cui è stato concepito dagli studenti, ma può richiamare, attraverso l'uso e rispetto agli scopi di una certa attività, un sapere significativo dal punto di vista educativo. I sistemi semiotici implicati o "trascinati" nell'attività (gesti, linguaggi, rappresentazioni, ecc.) danno forma ad un potenziale processo di mediazione semiotica, che si basa inizialmente sull'articolazione tra un artefatto primario ed uno secondario. Tale articolazione è possibile per il rapporto dialogico esistente tra i due, poiché ognuna delle componenti del sistema può evocare le altre e dialogare con esse. In questo senso, la polisemia degli artefatti culturali fa sì che essi divengano buoni candidati per stimolare e sostenere discussioni matematiche in classe, orchestrate dall'insegnante. L'insegnante, introducendo un artefatto primario in una discussione matematica, per interpretarne la funzione o per risolvere uno specifico problema, ne sfrutta al polisemia potenziale creando nuove situazioni problematiche e concedendo tempo per l'articolarsi delle voci, ovvero per rendere accessibili i nuovi significati che sono obiettivo didattico dell'attività. Si creano in questo modo le condizioni per l'appropriazione o la costruzione di artefatti terziari…*».

Il contributo di Radford (2003), coerente con l'approccio vygotskiano in cui i sistemi di segni stanno alla base dell'origine della conoscenza, pone l'attenzione sull'analisi del discorso degli studenti impegnati in attività matematica, sostenendo che il significato sembra essere costruito a partire da azioni, mentali o concrete, che gli studenti compiono operando sul materiale di supporto, come ad esempio grafici o strumenti. La tradizione vygotskiana attribuisce all'insegnante il ruolo di guida esperta verso l’appropriazione degli oggetti del sapere, ed è proprio nel caso delle macchine matematiche che il suo contributo risulta fondamentale, sia nell’organizzazione del percorso per l’acquisizione di nuovi concetti, sia in merito alla decisione sugli artefatti da proporre fornendo le giuste chiavi d’interpretazione per il loro uso. Avendo, nell’ultimo laboratorio, fatto uso di un software che replicasse le funzioni del monocordo, mi preme citare, solo brevemente, il lavoro di Rabardel (1995), il quale, considerando principalmente strumenti contemporanei, pone l’attenzione sulla delicatezza del rapporto strumento-utilizzatore.

Come ultimo tassello c’è il lavoro di Spagnolo-Marino (1996) nel quale si fa il punto sulle attuali conoscenze relative agli Ostacoli Epistemologici e si esibisce un modello per la loro individuazione. Riprendo qui una definizione di ostacolo epistemologico che danno gli autori:
«*Quando in una certa epoca storica, la comunità matematica tenta di operare il passaggio da un campo semantico significativo ad un nuovo linguaggio relativo ad una certa classe di problemi entrano in gioco degli “oggetti” matematici particolari. Gli “oggetti” matematici dei campi semantici precedenti che potrebbero servire per la costruzione sintattica (nei fondamenti del nuovo linguaggio) sono gli ostacoli epistemologici*».

È essenziale riportare anche una loro interpretazione della caratterizzazione che Duroux opera (1982) per il riconoscimento degli ostacoli epistemologici:

“a) Un Ostacolo è una conoscenza: Si effettuano verifiche con strumenti storico-epistemologici.
b) Questa conoscenza produce delle risposte adatte in un certo contesto frequentemente riscontrato verifica sperimentale attraverso indagini volte a far vedere come si accumulino concezioni attorno a questioni poste in un determinato contesto con un determinato linguaggio.
c) Questa conoscenza produce delle risposte false fuori dal contesto. Cioè sostanzialmente resiste al transfert. Non riesce a trasferire risposte relative ad un contesto diverso, vuoi perché si è cambiato il punto di vista [c1], vuoi perché si è considerato un contesto più generale [c2] nel quale il primo era un caso particolare: Verifica sperimentale attraverso il cambiamento del contesto per quanto riguarda [c1]. Questi due momenti e cioè il punto di vista e la generalizzazione rappresentano due strumenti importanti per la costruzione dei linguaggi sia nella Storia delle Matematiche sia nella riorganizzazione delle fondamenta delle Matematiche . Ed essendo quindi due momenti importanti della messa a punto delle conoscenze matematiche rappresentano due momenti significativi per la caratterizzazione degli ostacoli epistemologici. Perciò bisogna operare: Una verifica sperimentale attraverso un ampliamento del contesto dove non si riconosce più il ruolo della conoscenza oggetto di ostacolo per quanto riguarda [c2]. Si tratta cioè di un ampliamento di un linguaggio dove la conoscenza oggetto di ostacolo non viene più riconosciuta come elemento fondamentale (ad es. assioma), ma dovrebbe essere riconosciuta come una qualunque proprietà.

Questa conoscenza resiste alle contraddizioni che vengono prospettate. Questo aspetto è sostanzialmente legato al punto precedente, consiste sostanzialmente in un fatto procedurale più basso che di analisi sui fondamenti. Nel senso che si manifesta nello stesso identico modo anche dopo che è stata ripresentata la stessa situazione ripetutamente. Le contraddizioni possono nascere da informazioni supplementari o da situazioni didattiche costruite ad hoc nelle quali deve essere messo bene in evidenza il nuovo ruolo della conoscenza/ostacolo nel nuovo linguaggio ampliato.
Questa conoscenza continua a manifestarsi anche dopo la presa di coscienza. Ossia dopo anche aver preso coscienza del ruolo della conoscenza/ostacolo nel nuovo linguaggio ampliato permangono le concezioni relative al ruolo della conoscenza/ostacolo del linguaggio di partenza.

Permane cioè il ruolo di fondamento del linguaggio di partenza. Anche in questo caso la verifica è di tipo sperimentale: si tratterà di mettere a punto delle situazioni didattiche”.

Scelta della popolazione
Il nostro lavoro si sviluppa all’interno del Progetto Lauree Scientifiche di Messina, pertanto la scelta dei ragazzi con cui realizzare i nostri laboratori non è avvenuta tramite selezione dell’insegnante o del ricercatore, ma dall’adesione dei ragazzi al progetto stesso. Questo punto non è da sottovalutare, perché, se da una parte vi è una certa predisposizione dell’alunno dovuta alla scelta di aderire al progetto e quindi di essere spontaneamente motivato, dall’altra, l’impossibilità da parte del ricercatore di poter scegliere numero di alunni e classe di provenienza, condizioni che potrebbero in qualche modo modificare il piano di esposizione, cioè il tipo di linguaggio da usare da parte del ricercatore.

Le scuole che hanno aderito al progetto “Rapporti musicali e intervalli numerici” sono state il Liceo Classico “Maurolico” di Messina e il Liceo Scientifico Sperimentale “Copernico” di Barcellona (ME), entrambe formate da gruppi di alunni appartenenti a classi diverse e ad anni differenti. Per la sperimentazione abbiamo preso in esame solo la prima scuola; i partecipanti erano quindici, in particolare sei di primo anno, quattro di secondo e cinque di terzo. Fra questi partecipavano anche due musicisti, uno di prima e l’altro di terza liceo. Prima di iniziare l’attività di laboratorio abbiamo diviso i ragazzi in gruppi da tre e da due, preoccupandoci sia di rispettare la classe di provenienza sia la competenza musicale. Pensavamo infatti che i musicisti, possedendo una struttura musicale forte, derivante dallo studio dell’armonia classica, potessero in qualche modo trovare più difficoltoso il processo di costruzione di un concetto matematico. La difficoltà, pensiamo, sta nel momento in cui si costruisce la scala musicale, perché, mentre i ragazzi che non studiano musica sono liberi da condizionamenti concettuali esterni che influenzano e ostacolano il processo di costruzione e conoscenza di un qualunque oggetto matematico, i musicisti invece, trovando particolare difficoltà ad abbandonare la struttura armonica in loro possesso, cercano di rispondere ed arrivare ad una soluzione facendo leva sulle loro precedenti conoscenze e intrecciando così i due diversi campi che portano ad un’inevitabile confusione. C’è, però, anche da valutare le capacità dell’alunno stesso, il quale può anche riuscire a colmare questa difficoltà e fare in modo che questa nuova conoscenza si vada ad aggiungere a quella precedente, confermandola e avvalorandola.

Descrizione del Monocordo
Vogliamo, in questo paragrafo, non solo fare una descrizione dettagliata dello strumento che abbiamo usato per i nostri laboratori, ma soprattutto inquadrarlo sotto i due aspetti fondamentali che lo costituiscono, cioè, quello musicale e quello matematico. Sarà interessante andare a scoprire le sue origini per poter poi spiegare e chiarire il motivo per cui i pitagorici hanno scelto di costruire proprio il monocordo come strumento per le proprie ricerche. La prima indagine per poter catalogare il nostro monocordo entro la famiglia degli strumenti musicali è di tipo storico. Ci rifaremo agli studi sulla classificazione degli strumenti dell’etnomusicologo C. Sachs, che prevede la divisione in quattro grandi classi definite secondo i principi acustici con cui riproducono il suono: *Idiofoni, Membranofoni, Aerofoni, Cordofoni.*
Gli *Idiofoni* possono essere considerati gli strumenti più antichi presenti nella civiltà arcaica di tutti i continenti; sono quegli strumenti che producono il suono tramite vibrazione della materia con la quale sono costruiti e le azioni di percussione e sfregamento. Rientrano in questa categoria il battito delle mani o di altre parti del corpo, bastoni di legno, campanelle e sonagli e prototipi dello xilofono.
I *Membranofoni* sono tutti i tipi di tamburi costruiti tendendo pelli di animali su recipienti di varia grandezza e suonati con le mani o con bacchette di diversa misura.

Gli *Aerofoni* sono quegli strumenti che producono il suono per mezzo della vibrazione di una colonna d’aria, come per esempio i flauti.
I *Cordofoni* al contrario delle altre classi furono poco sviluppati nelle culture primitive; si presentano in numerose forme e basano la loro sonorità sulla vibrazione delle corde. Fra i vari strumenti che possiamo citare appartenenti a questa famiglia, è interessante focalizzare la nostra attenzione su uno, il “salterio di terra”, che consiste di una lunga asta di legno sottile e flessibile in cima alla quale si lega una corda tesa che viene fissata su una buca scavata nel terreno; uno o più suonatori pizzicano e percuotono la corda. Nelle forme più perfezionate le corde sono tese su un’asse o su una cassa di risonanza portatile in legno, provvista di un manico.
Restringendo il nostro campo d’azione alla sola musica greca, notiamo che gli strumenti usati dai greci erano numerosi e venivano usati per accompagnare i canti religiosi e le danze in occasione di feste, banchetti, giochi o altre attività. Su numerosi reperti archeologici vi sono raffigurati vari strumenti a corda e a fiato che stanno a testimoniare la diffusione generalizzata che aveva la musica presso il popolo greco fin dai tempi più remoti. Fra gli strumenti a fiato il più diffuso era l’aulos, potremmo considerarlo come l’antenato dell’oboe; fra gli strumenti a corde, lo strumento più comune e più antico era la lira o cetra, la cui invenzione, la leggenda racconta, viene attribuita al dio Apollo. Nei tempi più antichi la lira aveva poche corde ma a partire dal VII secolo a.C. il musico Terpandro la portò a sette facendola diventare il tipo classico poi usato per centinaia di anni.

La tradizione musicale che ereditavano i pitagorici era forte, mentre i musici continuavano a comporre musica che potesse soddisfare il gusto del popolo, gli artigiani si adoperavano a costruire strumenti con sonorizzazioni sempre migliori e perfezionamenti di vario tipo.
È proprio in questo momento che si colloca il lavoro di teorizzazione musicale dei pitagorici; essi credevano che nessun miglioramento fosse possibile se ad una pratica musicale non si affiancasse la teoria. Parte così il progetto di Pitagora, che, sfruttando il materiale offertogli dalla tradizione musicale greca costruisce il monocordo, non inteso come strumento musicale, cioè adoperabile per eseguire brani, ma come pura macchina matematica-musicale con funzione esplorative, che permettesse facili esperimenti e immediate applicazioni.

Diamo adesso un’interpretazione diversa del monocordo, spostandoci decisamente dal contesto musicale per approdare in quello più strettamente scientifico; inseriremo così il nostro strumento fra la categoria delle macchine matematiche. Quest’ultime si caratterizzano per essere degli artefatti polisemici, facendo coesistere all’interno diversi significati; questo poiché nel corso della storia si sono evoluti, cambiando e migliorando, assumendo talvolta funzioni diverse, passando dall’uso pratico a quello teorico. Riporto un passo di Wartofsky (1979) tratto da un saggio su *Perception, Rapresentation, and the Forms of Action: Towards an Historical Epistemology* che considero importante e significativo per un approccio scientifico ad attività che apparentemente non lo sono, come ad esempio, la musica:
«*Ciò che costituisce una forma tipicamente umana di azione è la creazione e l’uso di artefatti, come strumenti, nella produzione dei mezzi di esistenza e nella riproduzione della specie*».

Di quest’ultimi distinguiamo tre tipi, gli *Artefatti primari*, che si identificano con le macchine stesse; gli *Artefatti secondari* si caratterizzano per essere come un manuale d’uso, cioè sono un compendio di regole e leggi sull’uso e il funzionamento delle macchine dando anche tutte le descrizioni sulla costruzione; infine gli *Artefatti terziari* sono le teorie costruite attorno ai modelli matematici del loro funzionamento.
Per tornare adesso al nostro monocordo, possiamo identificare lo strumento come *Artefatto primario*; in che modo tendere e allentare una corda per avere suoni più o meno acuti, come costruire i ponticelli fissi e mobili, come percuotere correttamente la corda per farla vibrare e tante al-

tre regole che permettono il corretto utilizzo dello strumento si possono identificare come gli *Artefatti secondari*; gli Artefatti terziari invece, altro non sono che le teorie musicali e tutte quelle modellizzazioni che possono spiegare fenomeni musicali, come per esempio, la consonanza armonica. Passiamo adesso alla descrizione del nostro monocordo, dando dei brevi cenni sui componenti che lo costituiscono. C’è da premettere che la fase più delicata è stata quella della costruzione (ci siamo infatti affidati ad un liutaio), poiché, se da una parte il nostro strumento doveva rispondere a certe caratteristiche musicali, ossia avere una cassa armonica che permettesse una chiara riproduzione dei suoni, la possibilità di una accordatura precisa e fedele, dall’altra vi era la necessità di ottenere una macchina utile ai fini da noi preposti e che permettesse un facile utilizzo didattico.

Costruito in legno di abete, il nostro strumento (fig.1) è dotato di due corde fisse della stessa lunghezza, appoggiate su ponticelli fissi alla distanza di 72 cm. e tenute ferme da due tipologie diverse di accordatura. La prima (fig.2) viene detta a farfalla e consente una accordatura profonda, la seconda (fig.3), più sensibile, viene chiamata accordatura fine e permette di allineare con precisione i suoni sulla stessa frequenza. Per prendere porzioni di corda differenti da quelle fissate in origine ci siamo serviti di ponticelli mobili (fig.4), inseriti all’interno di una delle due corde per poter variare la lunghezza della corda stessa ed ottenere, così, suoni più o meno acuti; la scelta di aggiungere una seconda corda è venuta fuori dall’esigenza di poter mettere a confronto subito i suoni prodotti dalle due corde, così da stabilire la consonanza o la dissonanza dei suoni stessi. Altra caratteristica del nostro monocordo è quella di avere, incollato sulla base di legno e al centro delle due corde, un metro della lunghezza di 72 cm.; la scelta dell’inserimento di quest’ultimo è dovuta al fatto che il monocordo, inteso come macchina matematica, dovesse principalmente essere uno strumento didattico e, pertanto, permettesse un immediato approccio e un facile utilizzo. Ovviamente anche la scelta della lunghezza è stata debitamente studiata, tenendo conto, soprattutto, delle porzioni delle corde e cercando nella loro divisione di ottenere il più possibile numeri interi. Ogni fase della costruzione del monocordo è stata seguita con grande attenzione, affinché non si perdesse mai di vista lo scopo del nostro lavoro e poter riprodurre esattamente ciò che i pitagorici costruirono due secoli e mezzo fa.

Fig. 1

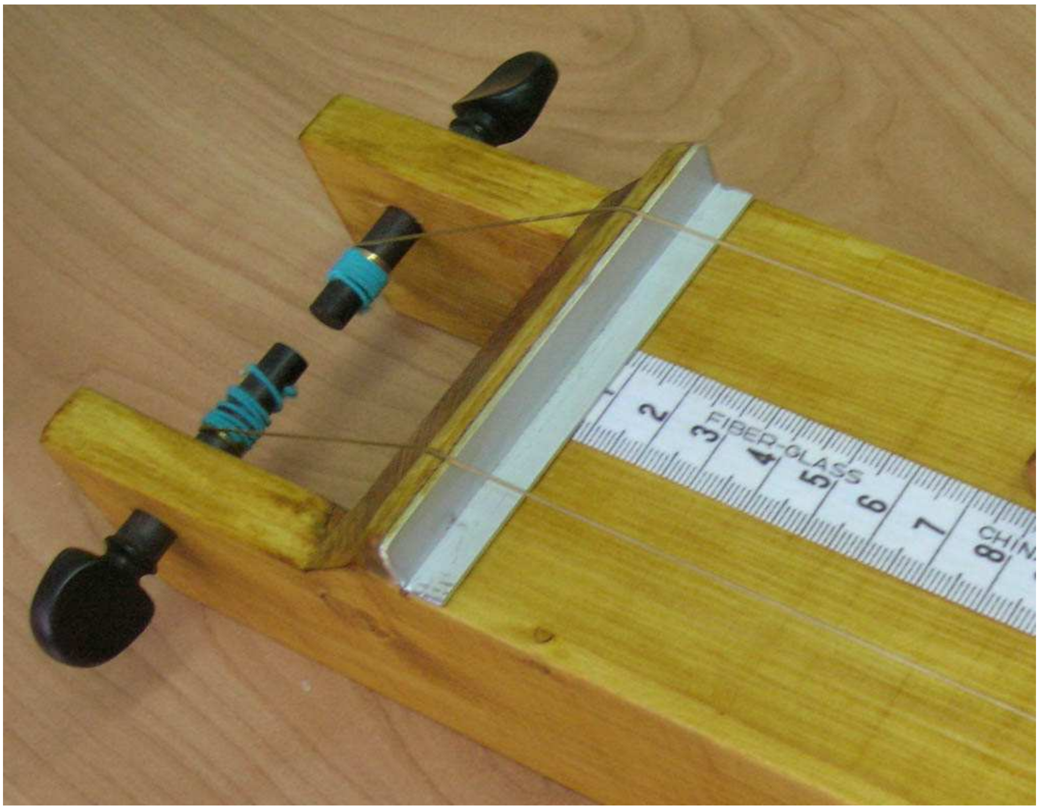


Fig.2

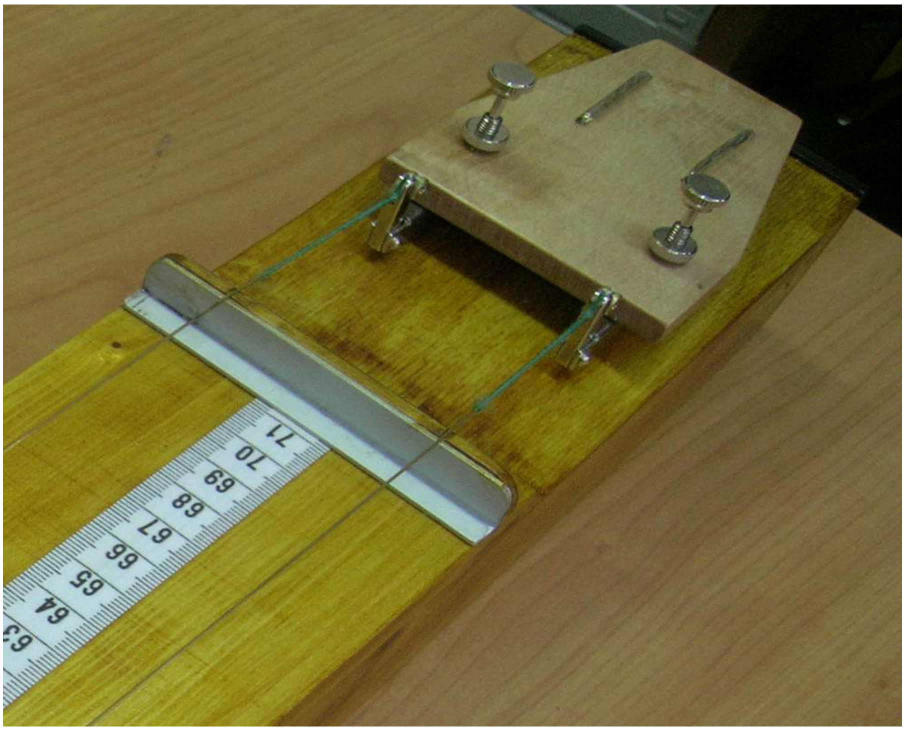


Fig. 3

Fig. 4

Descrizione dei laboratori

La ricerca è stata organizzata nella seguente modalità: quattro incontri di tre ore circa, di cui, i primi tre a scuola con i ragazzi divisi in gruppi ed impegnati in attività di laboratorio, mentre l'ultimo all'università, sotto forma di incontro-dialogo, con il gruppo al completo chiamato a partecipare attivamente con domande ed interventi. I quattro incontri sono stati distribuiti in tre settimane, e più precisamente, i primi due nella prima settimana, il terzo nella seconda settimana e infine l'ultimo nella terza settimana. La scansione è stata studiata considerando soprattutto i momenti di riflessione previsti per gli alunni, in modo tale da lasciare loro il tempo di fissare le idee e sviluppare i nuovi concetti acquisiti.

A tutti e tre i laboratori svolti a scuola sono stati presenti i quindici alunni, il ricercatore e l'insegnante. La figura di quest'ultimo è stata determinante ed il suo contributo prezioso, non solo dal punto di vista organizzativo, data la conoscenza dei ragazzi, ma anche e soprattutto per non averli influenzati con consigli e suggerimenti e contribuendo ad invogliarli e stimolarli senza interferire con il progetto di ricerca in corso.

Nel primo laboratorio il ricercatore ha mostrato agli alunni il monocordo, spiegando tecnicamente il suo funzionamento e l'utilizzo, evitando però di spiegare a cosa servisse, camuffando così la macchina matematica in solo strumento musicale. Quindi, dopo questo primo momento preliminare che si potrebbe intendere come un "manuale d'uso", si chiedeva ai ragazzi (ecco la prima consegna) di trovare la corrispondenza tra lunghezza della corda e suono consonante. Dapprima tutti i ragazzi hanno tentato a caso, senza applicare nessuna tecnica, successivamente però, si sono accorti che dimezzando la corda si otteneva un suono che era, per così dire, il "doppio" del primo o per essere più precisi abbiamo convenuto di chiamare quest'altro suono, ottava. Vogliamo sottolineare che il linguaggio usato in classe, quindi il nome delle note e altri termini, è stato frutto di un lavoro collettivo che ha visto partecipi i ragazzi, i quali, scegliendo il nome delle note si sono accorti della convenzionalità di tali nomi e quindi della possibilità di cambiarli senza alterare l’altezza del suono. Ogni tentativo e commento fatto dai ragazzi, è stato segnato da loro stessi in fogli d’appunti, che venivano firmati e poi consegnati alla fine di ogni laboratorio, così da salvare ogni tipo di intuizione e poter riconoscere le difficoltà e gli ostacoli in cui potevano imbattersi. Dopo alcuni tentativi, spostando il ponticello mobile lungo la corda, si sono accorti che dividendola in quattro parti e prendendone prima un quarto poi i tre quarti si ottenevano suoni armonicamente consonanti col suono di riferimento; lo stesso risultato è stato ottenuto dividendo la corda in tre parti e prendendone prima un terzo, poi i due terzi. La prima e più immediata intuizione è stata quella di aver capito che più corte erano le porzioni di corda che si prendevano più il suono era acuto, cioè, che la frequenza di un suono è inversamente proporzionale alla lunghezza della corda che lo produce. Dopo diversi tentativi hanno preso un’altra strada per risolvere il problema, concentrando l’attenzione sulla lunghezza della corda, cioè sul numero settantadue, convenendo dopo qualche calcolo che altro non era che il prodotto di potenze di due e tre. Il primo incontro si conclude così con la fissazione dell’intervallo di ottava, quinta e quarta dando loro le rispettive frazioni di riferimento: 2/1 l’ottava, 3/2 la quinta, 4/3, la quarta.

Nel secondo laboratorio prendendo come riferimento la tastiera del pianoforte e usando il confronto con il modello del monocordo, abbiamo fatto vedere come differenze o somme di intervalli sono rappresentate da rapporti e prodotti di frazioni.

Si è discusso su alcuni intervalli, come ad esempio quello di seconda, ottenuto dalla differenza fra quello di quinta e quello di quarta; tutto questo affinché il confronto fra rappresentazione “geometrica” e “aritmetica” facesse nascere l’idea di una “distanza” il cui calcolo avviene però in modo diverso da quello usuale. Un altro risultato ottenuto dai ragazzi è stato quello di accorgersi che i rapporti rimanevano costanti indipendentemente dalla lunghezza della corda di riferimento (un’altra delle tematiche che il monocordo consente di trattare è la proporzionalità, tema cui si è solo brevemente accennato ma che non si è ulteriormente sviluppato vista la scelta preventivamente fatta).

Il terzo laboratorio è stato il più impegnativo e anche il più ricco di sorprese. Si è chiesto ai ragazzi di costruire l’intera scala musicale adoperando la tecnica già imparata e verificata nei laboratori precedenti, cioè di somma di intervalli mediante prodotto e divisione di frazioni. Dopo aver scelto il DO come nota di partenza della nostra scala, si è dovuto decidere quale sarebbe stato l’intervallo di riferimento con cui trovare tutte le altre note. Per ricondurre i ragazzi all’esperienza già fatta dai pitagorici, il ricercatore ha proposto come intervallo tipo, quello di quinta. Fatto ciò, i ragazzi hanno incominciato a trovare tutte le note della scala, dando loro delle frazioni identificatrici, come in precedenza avevano fatto per gli intervalli di quinta, quarta e ottava. Proprio quest’ultimo era sotto costante osservazione, poiché definiva il punto di arrivo della scala, cioè, il prodotto (somma) degli intervalli doveva concludersi con la frazione 2/1; ogni tentativo portava ad ottenere, invece, dei valori maggiori di 2, che ovviamente, non permettevano la corretta chiusura della scala, mettendo in evidente crisi tutti gli alunni. Senza svelare il perché di quel curioso “imbroglio” numerico si è posto il problema in termini più semplici, chiedendo ai ragazzi di divedere l’ottava in 2 parti uguali, cioè di trovare 2 frazioni uguali che moltiplicate dessero come risultato 2. Lo scopo era quello di metterli di fronte alla sua impossibilità, così da poter introdurre un concetto nuovo, o meglio, dei numeri nuovi, gli irrazionali.

Al quarto laboratorio abbiamo dato, invece, una veste diversa, cioè, di un incontro-dialogo, nel quale i ragazzi avevano ampio spazio per domande ed interventi. Condotto dal prof. Migliorato e dal prof. Gentile, l’incontro ha avuto come protagonista unico l’irrazionale, presentato nelle sue diverse forme. Dapprima si è chiesto ai ragazzi di duplicare l'area di un quadrato di lato *l* rappresentato su una lavagna di fronte a loro (vedi quadrato rosso in fig.1); la prima e più immediata soluzione è stata quella di un ragazzo che ha proposto: «*Basta raddoppiare i lati*»; è stato sufficiente far notare che il quadrato così ottenuto fosse quattro volte più grande di quello assegnato e non il doppio come richiesto (vedi quadrato blu in fig.1); la seconda e non meno curiosa soluzione è stata quella di un altro allievo che ha detto: «*Basta allora raddoppiare solo due lati paralleli così avremo metà del quadrato di prima*»; i rimanenti studenti hanno fatto notare subito che la figura così ottenuta non era un quadrato bensì un rettangolo e pertanto non soddisfaceva la condizione richiesta. I ragazzi hanno convenuto che il lato richiesto fosse compreso fra il lato *l* e il suo doppio 2*l*; sulla base di questa osservazione alcuni ragazzi hanno proposto come soluzione corretta il segmento che si trova esattamente a metà fra *l* e 2*l*, ovvero 3/2 *l* (vedi quadrato bianco in fig.1); è stato mostrato come anche questa soluzione non fosse corretta, facendo vedere nella figura stessa come tale quadrato fosse maggiore del doppio (vedi le coppie di rettangoli opportunamente evidenziate in fig.1). a questo punto uno studente ha proposto di intervallare un opportuno rombo fra il quadrato originario e l'ultimo proposto; alla richiesta di rappresentare tale rombo il ragazzo lo ha disegnato come è possibile vedere in fig.1. È stata cura dello sperimentatore far notare che il rombo proposto non era nient'altro che un quadrato ruotato rispetto a quello originario, e che la correttezza della soluzione non poteva essere dimostrata ma che fosse necessario costruire tale quadrato sulla base di quello dato. È stato a questo punto che i ragazzi hanno avuto l'idea di dimezzare il quadrato quadruplo usando la diagonale del quadrato di partenza (vedi fig.2), non solo ottenendo la soluzione corretta ma avendo anche la garanzia della correttezza medesima. Finita questa fase è stato letto il famoso passo del *Menone* di Platone in cui Socrate ragiona con uno schiavo di come raddoppiare l'area di un quadrato di lato dato. Volevamo in questa maniera far prendere coscienza ai ragazzi che i tentativi da loro fatti fossero simili se non del tutto identici a quelli narrati e descritti da Platone sottolineando così l'importanza del processo costruttivo oltre che del prodotto finale. L'incontro si è chiuso con la classica dimostrazione aritmetica dell'irrazionalità della radice di 2 e con la descrizione di un software di facile applicazione e immediata comprensione che replica le funzioni del monocordo.

Dopo un mese da quest'ultimo laboratorio abbiamo valutato l'apprendimento del concetto di irrazionale, sottoponendo ai ragazzi un questionario, il cui contenuto viene qui di seguito esposto; il prossimo paragrafo sarà dedicato alla descrizione dei risultati che da tale questionario sono scaturiti.

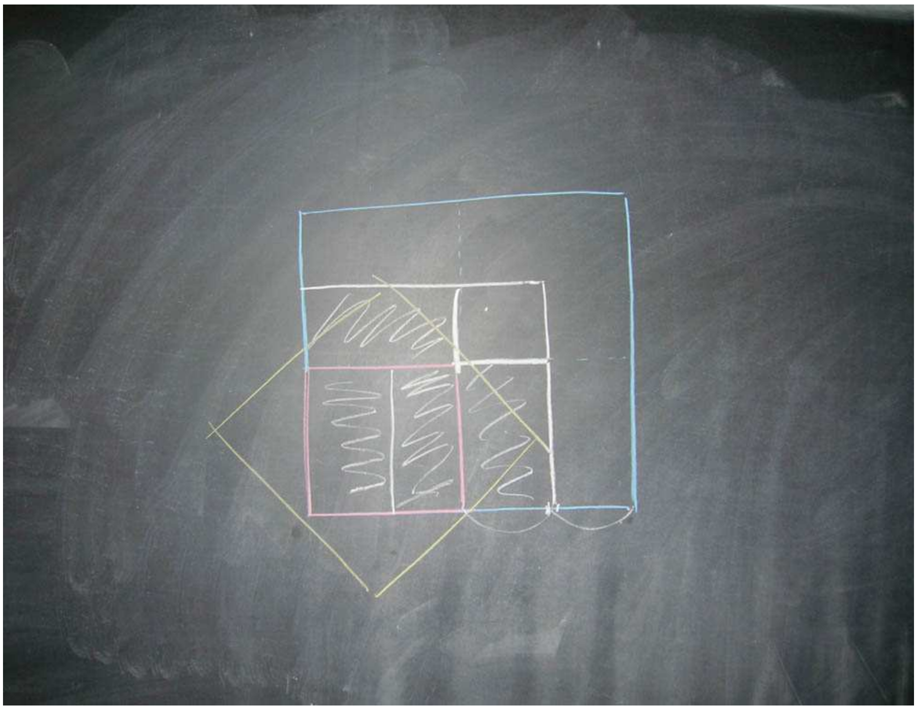


Fig. 1

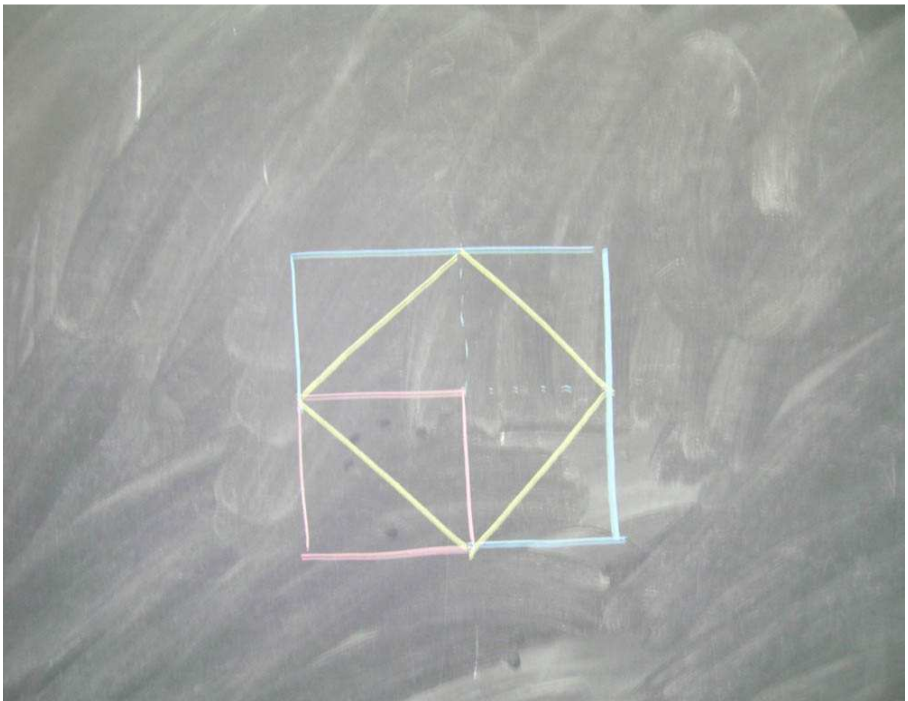


Fig. 2

Il questionario

1. È possibile dividere l’ottava in due parti uguali?
2. È possibile dividere l’ottava in tre parti uguali?
3. In quante parti si può dividere l’ottava? Fai un esempio di divisione dell’ottava in due parti.
4. Come si rappresenta numericamente un intervallo musicale? Come si sommano gli intervalli musicali?
5. La consonanza e la dissonanza sono aspetti musicali. Questi fatti si possono esprimere numericamente? Se sì, come?

Un tuo amico, che frequenta la scuola media, ti dice di aver sbirciato un libro delle superiori e che ha letto la frase “numero irrazionale” senza riuscire però a capirci niente. Che cosa gli dici? Come glielo spiegheresti?

Rispondi alle seguenti domande:

1. Cosa vuol dire il simbolo $\sqrt{2}$?
2. Che cosa significa che un numero è irrazionale?
3. I numeri irrazionali sono solo quelli con la radice?
4. Perché si usano?
5. Quanti sono?
6. Posso fare operazioni con questi numeri?
7. Quali dei seguenti numeri sono irrazionali:

$$\sqrt{2} \quad \sqrt{4} \quad \log_2 8 \quad \log_2 7 \quad \pi \quad 1,\overline{6} \quad e \quad 3,75 \quad 5 \quad -2 \quad 2/7$$

Leggi le seguenti frasi:

Trova un numero che al quadrato fa 2.
$x^2 = 2$.
Dividere l’ottava (musicale) in due parti uguali.
Esprimere il rapporto fra diagonale e lato di un quadrato.

Cosa ne pensi delle precedenti richieste

Descrizione ed interpretazione dei risultati del questionario

Descrizione del questionario e delle motivazioni sottese

Il questionario è stato presentato ai ragazzi in quattro fogli formato A4, con le domande sufficientemente separate da poter contenere le risposte; la consegna è stata divisa in quattro momenti; dopo aver consegnato il primo foglio, ognuno dei successivi è stato consegnato solo dopo aver ritirato il precedente. Il primo foglio, contenente le domande dalla 1 alla 5, verteva sugli aspetti musicali messi in luce durante i primi tre laboratori; ai ragazzi è stato concesso un tempo di 15 minuti per poter fornire le risposte. Il secondo foglio prevedeva una personale produzione libera con l’intento di accertare l’assimilazione del concetto di irrazionale senza vincoli o costrizioni formali che avrebbero potuto invalidare le nostre conclusioni; per tale produzione era previsto un tempo di 20 minuti. Nel terzo foglio si chiedeva di rispondere a sette domande di carattere più marcatamente matematico e che miravano a sapere se la presentazione degli aspetti musicali, sottesi al concetto di irrazionale, avesse avuto delle ricadute positive sull’apprendimento dello stesso; il tempo di consegna per tale foglio è stato di 15 minuti. Nell’ultimo foglio veniva richiesto ai ragazzi di esprimersi su quattro frasi con l’obiettivo di sapere se e quante di esse venivano riconosciute come aspetti dello stesso concetto, in ambiti fra di loro diversi, ovvero se e quante conversioni i ragazzi erano in grado di operare fra registri semiotici differenti, essendo la capacità di convertire uno dei parametri indicativi dell’avvenuto apprendimento; il tempo concesso per l’espletamento di quest’ultima consegna è stato di 15 minuti.

Risultati del questionario

L’analisi dei risultati è stata effettuata sia dal punto di vista quantitativo che qualitativo. Ciò si è reso necessario perché, se da una parte, quasi tutte le risposte al questionario potevano essere tradotte quantitativamente in maniera naturale, era presente una domanda aperta che, richiedendo una produzione libera, si prestava meglio ad un'analisi qualitativa.

Per quanto riguarda l'analisi quantitativa si è fatto uso del software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive), dopo opportuna traduzione numerica delle risposte; da tale analisi statistica sono rimaste fuori cinque domande: quella contenuta nel secondo foglio, che è stata analizzata qualitativamente; la prima domanda del primo foglio, la quinta del terzo foglio e parte della settima sempre del terzo foglio (segnatamente l’aver indicato i numeri 5 e -2 come numeri razionali), poiché sono risultate corrette per tutti gli alunni, e lo CHIC non è predisposto ad una simile analisi. Le risposte alle domande del primo foglio sono state tradotte in maniera standard, cioè assegnando 1 alla risposta corretta e 0 a quella sbagliata; la stessa cosa vale per il terzo foglio tranne che per la settima domanda in cui sono stati assegnati i valori 0 ed 1 singolarmente a nove delle undici risposte (due di esse sono state espunte dall’analisi come già chiarito sopra); per quanto riguarda l’ultimo foglio è stato assegnato 1 nel caso in cui tutte le frasi fossero state riconosciute come esprimenti lo stesso problema, 0 nel caso in cui neanche due fra di esse fossero state riconosciute equivalenti (non si è posto il problema di valori intermedi perché in effetti ogni ragazzo li ha riconosciuti o tutti equivalenti o con nessuna equivalenza).

Per quanto riguarda la domanda contenuta nel secondo foglio, essa, come già anticipato, è stata analizzata da un punto di vista qualitativo, cercando di mettere in evidenza, se ce ne fossero stati, analogie o parametri che consentissero di classificarle. Da tale analisi emerge con chiarezza che le risposte a tale quesito si possono classificare in tre gruppi, che corrispondono di fatto alle tre classi (I, II e III liceo) di appartenenza. I ragazzi delle classi di I liceo sembrano riferirsi a conoscenze per “compartimenti stagni” dando definizioni, o solo operativo-algoritmiche, o storiche, o fondate sul problema musicale.

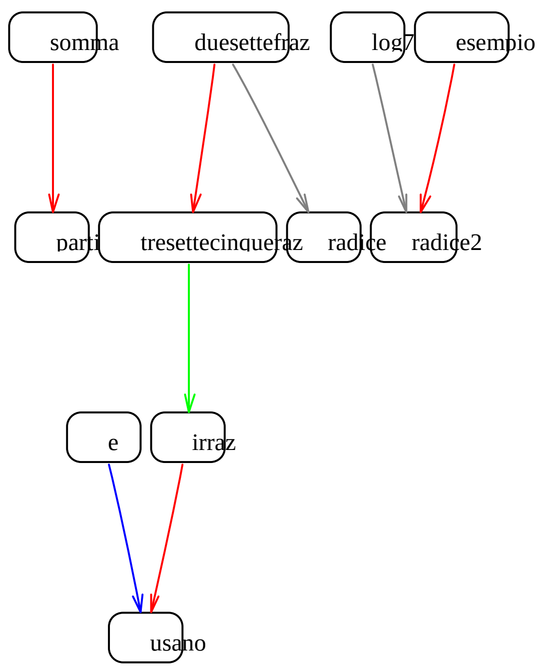
Per Es. A risponde così: «*I numeri irrazionali permettono di compiere operazioni altrimenti impossibili. A noi hanno permesso, per esempio di dividere l’ottava e trovare gli intervalli. Un esempio* $\sqrt{2}$ *. Sono dunque dei numeri indispensabili. Essi hanno infinite cifre dopo la virgola ma non sono periodici*».

B, sempre di I liceo, scrive: «*Nell'antichità i pitagorici misuravano il mondo con un'unità di misura del tutto particolare: il numero. Loro riuscivano a scorgere l'ordine della matematica ovunque. Era sorto però un problema che aveva messo in difficoltà le loro menti, ovvero l'esistenza, anzi l'ipotizzata esistenza di numeri che non fossero finiti, che non fossero completi. Da poco tempo in effetti sono stati scoperti i cosiddetti "numeri irrazionali". Un esempio è 2,5. Oltre al 5 dopo la virgola possono esserci altri numeri, per esempio 2,5672354 e così via; questi numeri effettivamente sono infiniti. Proprio questo "errore nel sistema matematico" aveva indotto i pitagorici all'errore*».

Le risposte dei ragazzi di secondo liceo sembrano invece essere intrise di formalismo. Non è difficile qui riconoscere la probabile interferenza (come già preventivato) di un precedente intervento didattico sulla tematica dei numeri reali (irrazionali), definiti mediante "classi contigue". Riportiamo ad e. la definizione di C: «*Direi che è un numero definito mediante due classi contigue, una contenente valori approssimati per difetto ed una per eccesso…* ».

Tra i ragazzi di terza liceo, tre su cinque si distinguono perché si servono più liberamente di espressioni che denotano una comprensione del concetto non soltanto verbale. Efficace appare anche l'uso della suggestione e della metafora per simboleggiare il passaggio all'idea dell'infinito. È particolarmente significativa la risposta di D: «*Un numero irrazionale è un numero non conoscibile del tutto ma rappresentabile. Un numero irrazionale potrebbe essere costituito da infinite cifre, e nessuno può venire a dirci che sono disposte casualmente, esse dopo una lunga disposizione potrebbero anche ripetersi, ma neanche mio nonno che ha 94 anni è riuscito a saperlo né se campasse altri 100 anni lo saprebbe. Noi usiamo per indicarli espedienti come la radice quadrata…* $\sqrt{2}$ *è un esempio di numero irrazionale il cui valore oscilla tra il valore 1 e il 2. 1.414… per l'esattezza…anzi per la* <u>non</u> *esattezza*».

Passiamo adesso all'analisi quantitativa, servendoci appunto, del grafico implicativo ottenuto dallo CHIC dove la freccia rossa ha un valore di 95, la blu 90, la verde 87 e la grigia 85. Per una più facile lettura del grafico implicativo, do le corrispondenze fra gli acronimi messi in tabella e le domande a cui si riferiscono: somma si riferisce alla domanda 4 del primo foglio (somma di intervalli musicali); parti alla domanda 3; duesettefraz, tresettecinqueraz, e, log7, alla domanda 7 del terzo foglio (più precisamente indicano la frazione 2/7, il numero razionale 3,75, e, log7); radice corrisponde alla domanda 3 del terzo foglio; esempio alla domanda 3 del primo foglio; radice2 alla domanda 1 del terzo foglio; irraz alla domanda 2 del terzo foglio; usano corrisponde infine alla domanda 4 sempre del terzo foglio.



Dal grafico si rilevano quattro implicazioni forti (con indice di implcazione □0,94). Tre di queste appaiono per sé stesse abbastanza scontate, ma sono da rilevare perché confermano la correttezza del questionario e la coerenza complessiva dei risultati. La quarta implicazione è quella invece per noi significativa. Più precisamente tre delle implicazioni sono interne ad uno stesso apparato concettuale: l'implicazione somma □□parti si riferisce all'ambito musicale, mentre le implicazioni duesettefraz □□tresettecinqueraz e irraz □□usano sono interne all'ambito matematico; esse, come già accennato, erano attese e, pertanto, averle trovate nell'analisi finale non fa che confermare la bontà delle scelte fatte nel calibrare il questionario e possono essere considerate come una conferma. L'implicazione esempio □□radice2 è quella non scontata e, solo per questo, già di per sé significativa; il fatto che poi consente di trasferire una conoscenza di ambito musicale su una conoscenza di ambito matematico le conferisce un maggiore interesse: essa infatti ci dice che chi dimostra di aver compreso come dividere l'ottava musicale, risponde anche correttamente sul significato matematico di $\sqrt{2}$ □□Vorrei fare le ultime considerazioni dicendo che all'ultima domanda, quella in cui si richiedeva di riconoscere l'irrazionale espresso in ambiti diversi, hanno risposto correttamente 13 ragazzi su 15; il dato è incoraggiante perché, anche se debolmente, rassicura sul metodo usato; i tre ragazzi che hanno mostrato maggiore conoscenza, come dedotto dall'analisi qualitativa, hanno anche risposto correttamente a quest'ultima domanda; e per concludere aggiungerei che i due musicisti hanno reagito all'esperienza in maniera differente, il che significa che avere una precedente conoscenza musicale, non sembra incidere sul tipo di esperienza da noi effettuata. È appena il caso di precisare, infatti, come il problema delle scale musicali, visto quale modello matematico del fenomeno armonico, è qualcosa di ben diverso dalla pratica del fare musica.

Risposte alle domande di ricerca

Risposta alla domanda D1: Il concetto di numero irrazionale presenta ostacoli epistemologici?

Come la ricerca in Didattica della Matematica ha ormai acquisito, è possibile far emergere la presenza di ostacoli epistemologici in due contesti diversi e con modalità differenti: sul piano storico, con strumenti storico-epistemologici, sul piano didattico, evidenziando la presenza di "errori" ricorrenti. La strada seguita è stata quella di fondere i due punti di vista, al fine di avere un risultato in un cotesto corroborato e validato da quello attinto nell'altro; così dapprima è stata operata l'analisi storica che ha dimostrato come gli irrazionali siano intrisi di ostacoli di tipo epistemologico; d'altra parte, sul piano didattico, è stato possibile mostrare come la struttura dei numeri razionali, già posseduta dagli alunni, sia un ostacolo epistemologico forte nei confronti del concetto di numero reale. Tale ostacolo si presenta nelle diverse forme e situazioni che si sono presentate anche storicamente. Il problema delle scale musicali appartiene indubbiamente a quest'ambito.

Risposta alla domanda D2: La presentazione dell'irrazionale mediante la musica può dare maggiore conoscenza dell'oggetto matematico?

Questa era sicuramente la domanda di fondo dell'intero lavoro. L'analisi implicativa sviluppata ha evidenziato una implicazione forte che, come già discusso nel paragrafo sui risultati, dimostra come chi è riuscito ad entrare nel problema pitagorico delle scale musicali e della divisione dell'ottava è stato in grado di descrivere in maniera esauriente il concetto di irrazionale. In breve, l'analisi implicativa sui risultati sperimentali rivela una forte correlazione tra la comprensione del fatto musicale e di quello aritmetico e geometrico. Ne consegue l'utilità di un approccio che utilizzi tutti e tre gli aspetti. La risposta pertanto può ritenersi positiva (seppur con alcuni limiti che espliciteremo nelle conclusioni).

Risposta alla domanda D3: L'uso del monocordo come “macchina matematica” può facilitare una conoscenza più profonda dell’irrazionale?

Questa domanda può ritenersi una precisazione ed una particolarizzazione della precedente. Senza dubbio, come già acquisito dalla ricerca in Didattica della Matematica, l'uso di “macchine matematiche” non può che agevolare l'apprendimento; la particolarità della “nostra” macchina è che riveste (ed ha rivestito storicamente) due ruoli, quello musicale e quello matematico ed il suo uso nel nostro esperimento (come in quelli dei pitagorici) è stato squisitamente matematico. Possiamo senz'altro affermare che l’uso del monocordo è stato essenziale nella conduzione dell’esperimento in quanto costituisce lo strumento fondamentale che mette in relazione il fenomeno (suoni armonici) con la sua modellizzazione matematica; anche nel momento in cui è stato presentato un software matematico-musicale, l'aver fatto “esperimenti” sul monocordo ha consentito di comprendere ciò che il software stava semplicemente “replicando”, amplificando le potenzialità del software medesimo.

Conclusioni, problemi aperti e future ricerche

La ricerca sperimentale descritta in questo lavoro, sebbene non possa ancora considerarsi del tutto esaustiva, costituisce tuttavia, una prima risposta abbastanza forte sull’utilità dell’approccio anche musicale nella didattica dei numeri irrazionali.

Nella valutazione di questo risultato va tenuto presente lo spessore complessivo dei contenuti concettuali a cui si fa riferimento. La proposta didattica qui considerata, infatti, ha come obiettivo, non un apprendimento puramente formale e algoritmico, ma una concettualizzazione forte e profondamente strutturata, in grado di reggere anche in fasi di apprendimento più avanzate. Detto ciò, assume particolare rilievo nella formazione del concetto, la pluralità delle situazioni in cui il concetto stesso viene riconosciuto. Non si tratta quindi di sostituire gli approcci classici (quello puramente aritmetico e quello geometrico), ma di arricchire ulteriormente il quadro delle situazioni riconducibili alla struttura in oggetto.

L’esperienza, condotta sotto forma di laboratorio in situazione “a-didattica” (nei termini della teoria delle situazioni di Brousseau) sembra avvalorare in modo convincente le ipotesi iniziali. L’analisi implicazionale evidenzia infatti una correlazione forte tra la “comprensione” del problema delle scale musicali e la “comprensione” complessiva del numero irrazionale e del suo ruolo nell’insieme dei numeri reali. Questo dato è avvalorato dalle altre implicazioni forti, che non costituiscono di per sé alcuna novità, ma che per la loro piena corrispondenza a quanto atteso, sono fortemente indicative di una coerenza complessiva dei risultati.

Un ulteriore rafforzamento in tal senso deriva anche dalle risposte alle domande libere, sebbene in questo caso bisogna fare alcune distinzioni. In alcuni casi, infatti, si rileva, come si è già osservato, l’interferenza di interventi didattici precedenti che agiscono qui come un “ostacolo didattico” (sempre nel senso di Brousseau) che si sovrappone all’ostacolo epistemologico, da noi posto come oggetto di studio. Tuttavia tale sovrapposizione si è presentata in modo marginale e non ha impedito di evidenziare gli aspetti fondamentali. Tra le risposte alle domande aperte, appaiono di particolare rilievo quelle degli alunni di terza liceo che hanno usato un linguaggio più libero, in quanto da esse traspare un processo di concettualizzazione mediato dalla funzione linguistica della metafora. E’ questo un aspetto che merita un approfondimento in future ricerche, prendendo anche in considerazione le idee recentemente sviluppate da Lakoff e Nuñez.

Ciò detto, bisogna tuttavia rimarcare i limiti della ricerca, sia per quanto riguarda il campione, sia per l’articolazione e lo sviluppo della stessa ricerca. Il primo limite è ovviamente quello numerico. Sarà dunque importante riprendere la ricerca su un campione più vasto. Ma al

di là di questo bisogna superare i limiti che in questo caso erano imposti dal contesto entro cui, per mancanza di risorse, si è dovuto forzatamente operare. Si è operato infatti all’interno di un progetto finalizzato e organizzato per scopi diversi (Progetto Lauree Scientifiche).
Una ulteriore ricerca dovrebbe innanzitutto rendere più fine la griglia delle domande sulla base dei risultati già conseguiti. Così ad esempio sarebbe da capire più a fondo se le relazioni implicative osservate siano in qualche modo invertibili e in che misura, e quale peso abbia ciascuna delle diverse situazioni sul risultato finale. Allo stesso tempo però andrebbe condotta con una maggiore libertà nella selezione dei campioni, sia per avere campioni sufficientemente rappresentativi di una popolazione scolastica generale, sia per potere individuare dei gruppi di controllo con cui comparare i risultati.

Bibliografia

Aristosseno, *L'Armonica*, a cura di R. Da Rios (Istituto Poligrafico dello Stato, Roma, 1956).

Bachelard G., *La formation de l'esprit scientifique,* Paris: Vrin, 1938.

Bartolini Bussi M.G., **Maschietto M.**, *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*, Springer-Verlag, Italia, 2006.

Baruk S., *L'âge du capitain*, Paris, Seuil, 1985.

Borzacchini L., *Il computer di Platone: alle origini del pensiero logico e matematico,* Edizioni Dedalo, Bari, 2005.

Brousseau G., *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. *Recherches en didactique des mathématiques.* 7, 2, 33-115. 1986.

Brousseau G., *Le contrat didactique: le milieu.* Recherches en didactique de mathématiques. 9, 3, 309-336. 1989.

Chevallard Y., *Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique*. Recherches en didactique des mathématiques. 12, 1, 73-112, 1992.

Chevallard Y., *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, La Pensée Sauvage, 1985.

Chevallard Y., *Les processus de transposition didactique et leur théorisation.* In: Arsac G.,

Chevallard Y., Martinand J. L., Tiberghien A. *La Transposition didactique à l'épreuve.* Grenoble, La Pensée Sauvage, 135-180. 1994.

Cornu L., Vergnioux A., *La didactique en questions*. Paris, Hachette, 1992.

D'Amore B.,*Il problema del pastore*, La vita scolastica, 2, 14-16, 1993b.

D'Amore B., *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora. III 1999 ed. 2001.

D'Amore B., *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica,* Pitagora, Bologna, 2003.

D'Amore B., **Fandiño Pinilla M.I.**, *Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica"*. Educación Matemática (México DF, México). 14, 1, 48-61, 2002.

D'Amore B., **Martini B.**, *Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard*. La matematica e la sua didattica. 2, 150-175, 1997.

D'Amore B., **Sandri P.**, *Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante.* La matematica e la sua didattica. 1, 4-18, 1998.

Droysen J. G., *Geschichte des Hellenismus*, 2 vol., Hamburg, Perthes, 1836-1843.

Duroux A., *La valeur absolue (Difficultes majeurs pour une notion mineure)*, Tesi, Bordeaux Università - IREM 30.6.1982

Fandiño Pinilla M.I., *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna, Pitagora 2002.

Fandiño Pinilla M.I., *Frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna, Pitagora 2005.

Furinghetti F., **Radford L.**, *Historical Conceptual Developments and the Teaching of Mathematics: from Phylogenesis and Ontogenesis Theory to Classroom Practice*, Handbook of International Research in Mathematics Education, Hillsdale, Erlbaum, pp. 631-654, 2002.

Piaget J., **Garcia R.**, *Psychogenèse et histoire des sciences*, Paris, Flammarion, 1983.

Radford L., *On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics*, For the Learning of Mathematics, 17(1), pp. 17-23, 1997.

Gentile G., **Migliorato R.**, *Euclid and the scientific thought in the third century B.C.*, Ratio Mathematica, 15, 37-64, (2005).

Gentile G., **Migliorato R.**, *Archimede aristotelico o platonico: "tertium non datur"?*, Atti Acc. Peloritana dei Pericolanti, Cl. di Sci., Fis, Mat.e Nat. Vol. LXXXVI, C1A0802009, 2008.

Giordan A.,**De Vecchi G.**, *Les Origines du Savoir*. Delachaux et Niestlé, 178, 1987.

Godino J. D., *La metafora ecologica en el estudio de la noosfera matematica.* Quadrante. 2, 1, 9-22, 1993.

Lakoff G., **Nuñez R.E.**, (2000), *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Ediz. Italiana: *Da dove viene la matematica: come la mente embodied dà origine alla matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, (2005).

Macaluso G., *Interpretazione vygotskiana in una situazione a-didattica nell'insegnamento/ apprendimento nella scuola primaria*, Tesi di laurea in Scienze della formazione primaria, Università degli studi di Palermo, Palermo, 2006. Versione in italiano sul sito: http://math.unipa.it/~grim/Tesi_FP_macaluso_06.

Marazzani I., **D'Amore B.**, **Fandiño Pinilla M.I.**, **Sbaragli S.**, *La didattica e le difficoltà in matematica*, Centro Studi Erickson, ISBN: 8861372384, 2008.

Meira, L. (1995). *Meditation by tools in the mathematics classroom*, in *Proceding of the 19th Conf. of the Intern. Group for the Psychology of Mathematics Education*, Recife, Brazil, vol. 1.

Migliorato R., *La Rivoluzione euclidea e i "paradigmi scientifici" nei regni ellenistici*, Incontri Mediterranei, 11, pp. 3-24, 2005.

Migliorato R., *Modelli matematici, predittività e progresso scientifico: un caso storico esemplare,* Atti del Convegno “L'insegnamento della matematica nel quadro delle riforme”, S. Cesarea Terme - 2003. (pubbl. elettr. in *Matematicamente* http://www.matematicamente.it/attisantacesarea/index.htm).

Morin E.,**Ciurana E.**, **Domingo Motta R.**, *Educare per l’era planetaria: il pensiero complesso come metodo di apprendimento,* Armando Editore, Roma, 2004.

Polo M., *Il contratto didattico come strumento di lettura della pratica didattica con la matematica*. L’educazione matematica. XX, VI, 1, 4-15, 1999.

Radford L., *Gestures, Speech, and Sprouting of Signs. A Semiotical-Cultural Approach to Students’ Types of Generalization*, Mathematical Thinking and Learning, 5(1) 37-70, 2003.

Radford L., *Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità*. La matematica e la sua didattica. 1, 4-23, 2004.

Sachs C., *Storia degli strumenti musicali*, Milano, Mondadori, 1980.

Sarritzu A., *Modelli matematici e armonia musicale: uno sguardo storico,* in Quali prospettive per la Matematica e la sua didattica, Atti on line del Convegno omonimo (Piazza Armerina, 2004, pp. 14) http://math.unipa.it/~grim/convreg1_sarritzu_05

Sarritzu A., *Aristosseno tra Aristotelismo e nuova scienza*, Atti Accademia Peloritana dei Pericolanti, Vol. LXXXVI, pp. 1-15, DOI: 10.1478/C1A0802010, 2008.

Sbaragli S., *Le convinzioni degli insegnanti sull’infinito matematico*. Tesi di Dottorato di Ricerca. Università Komenského di Bratislava, (2004). Direttore: Ivan Treskansky, advisor: Bruno D’Amore. Versione in italiano e in inglese nel sito: http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm

Scimone A., *Pupils’ conceptions about an open historical question: Goldbach’s conjecture. The improvement of mathematical education from a historical viewpoint*, Doctoral Thesis, Quaderni di Ricerca in Didattica del G.R.I.M., n.12, 2003.

Spagnolo F., *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, La nuova Italia Editrice, Scandicci (Firenze), 1998.

Spagnolo F.,**Marino T.**, *Gli ostacoli epistemologici: Come si individuano e come si utilizzano nella Ricerca in Didattica della Matematica*, L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 19b, n.2, 1996.

Speranza F., *Tendenze empiriste nella Matematica*. *Quaderni di Epistemologia della Matematica.* CNR, Progetto TID-FAIM. 10, 77-88. [Ristampato in: Speranza F. (1997). Scritti di Epistemologia della Matematica. Bologna: Pitagora. 57-64]. 1992.

Surian, E., *Manuale di storia della musica*, vol.1 Rugginenti Editore, Milano, 1991.

Vygotskij L. S., *Il Processo Cognitivo*, Universale Bollati Boringhieri, Torino, 1987.

Vygotskij L. S., *Pensiero e linguaggio*, Editori Laterza, Bari, 2003.

Wartofsky M., *Perception, Representation, and the Forms of Action: Towards an Historical Epistemology*. In: *Models. Representation and the Scientific Understanding, D.*, Reided Publishing Company, 188-209, 1979.