Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Scienze della Formazione
Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria

Argomentare strategie risolutive di situazioni problematiche aritmetiche e geometriche in ambiente multiculturale

Tesi di:
Anna Barbara Rapa
Matricola 0371985

Relatori:
Prof. ssa Alessandra La Marca
Prof. Filippo Spagnolo

Anno Accademico 2002/2003

INDICE GENERALE

Introduzione

Nel racconto che Lewis Carroll pubblica nel 1871 come seguito ad *Alice nel paese delle meraviglie*, *Alice attraverso lo specchio* per la precisione, la protagonista mette in luce le sue difficoltà nei confronti della matematica: «Vediamo: quattro per cinque fa dodici, quatto per sei fa tredici, e quattro per sette… oh, povera me! Con questo ritmo non arriverò mai fino a venti!».

Convenendo con Dehaene (1997, 131 – 135), è possibile affermare che oggi il pericolo peggiore verso cui gli allievi possono imbattersi non è tanto quello di essere privi di conoscenze matematiche, quanto non essere in grado di applicarle a dispetto del proprio buon senso, diventando delle vere e proprie *macchine calcolatrici* che non riflettono. Una considerazione di questo tipo scaturisce da una serie di esperienze di tirocinio le quali hanno messo in evidenza il carattere acritico che l'insegnamento della matematica assume nella pratica educativa con conseguenze poco confortanti per l'apprendimento. Un'altra tendenza cui è impossibile fare riferimento è data dal fatto che la strutturazione della conoscenza è oggi orientata verso il riconoscimento e la gestione della complessità, in ordine con la continua ridefinizione dello sfondo culturale contemporaneo non più rappresentato da saperi ritenuti indispensabili e imprescindibili bensì da saperi in mobilità permanente. Il senso del sapere, quindi, non risiede in una *alimentazione* del soggetto, in un accumulo di conoscenze, come si evince dall'accezione classica del termine educare, cioè *edere*, ma in una condivisione del sapere scolastico con gli altri contesti in cui il soggetto vive.

L'interesse per l'oggetto di questo lavoro è motivato proprio dall'ipotesi che i processi argomentativi, in adeguate situazioni di insegnamento/apprendimento, possano agevolare l'assunzione della consapevolezza della conoscenza e, in generale, possano contribuire allo sviluppo della padronanza dei concetti matematici.

La Ricerca in Didattica può apportare il proprio contributo in questa direzione, attraverso il paradigma della Teoria delle situazioni elaborata da Guy Brousseau, nel caso in cui si mostra atta a formulare principi orientativi per l'attività didattica, partendo dall'analisi di una serie di indagini sul campo.

La possibilità di condurre ricerche sperimentali all'interno della scuola è regolata dal primo articolo del D.P.R. n.419 del 31 maggio 1974, nel quale viene sostenuto che la sperimentazione è «espressione della autonomia didattica dei docenti». All'origine dell'ipotesi di sperimentazione c'è sempre un bisogno o una difficoltà che, una volta superati i vincoli di una preoccupazione puramente personale, spinge a formulare delle ipotesi di lavoro che, prese come oggetto di indagine, potranno costituire la presa di posizione personale di fronte al fenomeno. La scelta di condurre un'indagine sperimentale che avesse come oggetto il pensiero proporzionale nell'ambiente geometrico e in quello aritmetico, in particolare, non nasce esclusivamente dalla necessità di indagare le concezioni degli allievi in riferimento a questo contenuto matematico, quanto piuttosto dall'esigenza di proporre un modo nuovo di fare matematica nel rispetto delle esigenze personali e di quella che è la vera natura di tale disciplina in quanto scienza che si pone come libera espressione della mente umana, piuttosto che sapere autoreferenziale.

In questa direzione, all'esperienza di Ricerca in Didattica condotta in ambiente multiculturale, si è voluto introdurre un **primo capitolo** in cui ci si propone di comprendere meglio il dominio della Ricerca in Didattica e il paradigma della Teoria delle situazioni didattiche proposto da Guy Brousseau, i quali hanno costituito il contesto per l'individuazione di modelli teorico – sperimentali in riferimento ai processi e alle argomentazioni degli allievi, sulla base dei modelli culturali di appartenenza.

Nel **secondo capitolo** si è cercato di delineare il ruolo dell'argomentazione nella padronanza consapevole dei concetti matematici, mettendo in evidenza proprio il percorso attraverso cui l'argomentare e il congetturare conducono l'allievo a sviluppare la capacità di definire i concetti matematici e individuare le relazioni fra questi, passando dal linguaggio naturale al linguaggio rigoroso della dimostrazione. All'interno del secondo capitolo, per meglio esplicitare il punto di vista del ricercatore, viene posta attenzione al rapporto tra l'argomentare e il modello socioculturale di appartenenza degli allievi, nell'ottica dell'Etnomatematica, con un esemplificativo riferimento al contesto della struttura della lingua cinese.

In relazione agli obiettivi e alle ipotesi della ricerca, nel **terzo capitolo** si è proceduto con l'analisi epistemologica del pensiero proporzionale, con particolare riferimento al concetto di rapporto tra grandezze per passare alla funzione di proporzionalità diretta, in modo da avere chiare le rappresentazioni dei percorsi conoscitivi dell'aspetto contenutistico messo in gioco nell'elaborazione delle situazioni – problema e delle situazioni a – didattiche, sia di geometria sia di aritmetica.

Se questa prima parte del lavoro si configura come uno sfondo teorico per una comprensione più significativa del punto di vista del ricercatore, il **quarto capitolo** costituisce proprio la descrizione dell'esperienza di Ricerca in Didattica condotta in ambiente multiculturale per configurare le differenze nelle argomentazioni di allievi provenienti da diversi ambienti socioculturali, al fine di individuare i modelli culturali di appartenenza e valorizzarli nella messa a punto di percorsi educativi individualizzati.

La valorizzazione dei modelli conoscitivi propri di ciascun allievo, frutto dell'interazione con l'ambiente e la comunità di appartenenza, è stata oggetto del **quinto capitolo**, nel quale si propone un'ipotesi di laboratorio didattico per lo sviluppo delle capacità argomentative in contesti multiculturali, con l'obiettivo di fornire un eventuale e concreto contributo al mondo della scuola, all'interno del quale il processo di rinnovamento è ancora di più oggi auspicabile sul piano della pratica quotidiana.

Capitolo 1

La Teoria delle situazioni come paradigma di riferimento nella Ricerca in didattica

Le Scienze dell'Educazione prendono in carico fenomeni di insegnamento/apprendimento secondo l'interpretazione di punti di vista diversi, come quello della pedagogia, della psicologia o della filosofia, solo per menzionarne alcuni.

Nonostante l'evidente necessità di configurare delle strutture di significato universali in campo educativo, ipotizzare l'esistenza di un sapere scientifico che sia trasversale a ciascun ambito disciplinare sarebbe come ridurre la complessità della realtà a una sola categoria di significati, in poche parole sarebbe estremamente mortificante.

Argomentando una riflessione sul quadro epistemologico della pedagogia secondo Gino Corallo, Zanniello (1997, 14 – 15) afferma : «Non si può, secondo Corallo, parlare di un metodo generale, valido per qualunque ricerca scientifica, indipendentemente dalla materia, dai contenuti ai quali essa venga applicato.

A parte le forme fondamentali della logica, ogni metodo di ricerca scientifica ha le sue caratteristiche che lo abilitano ad entrare in un peculiare rapporto con una certa materia, che si costituisce così come scienza».

Per far fronte alla scissione che si verificherebbe tra il contenuto e il metodo, causando una distorsione del sapere scientifico, è opportuno assumere il *punto di vista proprio della disciplina*, non relegandolo allo studio di metodi per l'insegnamento/apprendimento nelle varie didattiche disciplinari.

In questa prospettiva si colloca la Ricerca in Didattica che, proprio perché pone l'attenzione verso un dominio autonomo con un suo linguaggio specifico e metodi di indagine specifici, si configura come occasione funzionale all'individuazione di modelli teorico – sperimentali in riferimento alle concezioni degli allievi rispetto a un determinato contenuto disciplinare e, in modo specifico, agli ostacoli di natura epistemologica e didattica.

La Ricerca in Didattica focalizza l'attenzione in particolare sull'analisi delle situazioni didattiche nel sistema sapere – insegnante – allievo, al fine di configurare una chiave di interpretazione dei fenomeni di insegnamento/apprendimento.

È proprio in questo senso che la Ricerca in Didattica può essere definita naturalmente incline ad abbracciare il paradigma della Teoria delle situazioni didattiche proposto da Guy Brousseau (1998).

Ponendo in discussione la pratica educativa tradizionale di trasmissione lineare di un sapere precostituito, in quanto si basa su un percorso univoco che dall'insegnante procede verso l'allievo, la Teoria delle situazioni didattiche intende promuovere l'attivazione di un processo di strutturazione della conoscenza condivisa dal sapere matematico.

In questo senso, l'allievo si discosta dal ruolo di spettatore e si riappropria della responsabilità del processo di apprendimento, secondo una concezione reticolare del rapporto esistente tra soggetto e conoscenza.

Il senso del sapere non risiede in una *alimentazione* del soggetto, in un accumulo di conoscenze, come si evince dall'accezione classica del termine educare, cioè *edere*, ma in un'attività strutturante che considera la conoscenza come nodo di una rete provvisoria, realizzata attraverso procedure operative di scoperta e di invenzione individuale.

Brousseau (2000, 4) sottolinea proprio che «L'allievo apprende adattandosi ad un *milieu* che è fattore di contraddizioni, di difficoltà, di disequilibri, un po' come avviene nella società umana. Questo sapere, frutto dell'adattamento dell'allievo, si manifesta attraverso risposte nuove che sono la prova dell'apprendimento».

Come sottolinea Miller (1987, 375 – 426), questa prospettiva si accosta alle più accreditate teorie psicologiche sull'apprendimento le quali, sulla scia degli studi di Vygotskij e in genere dei contestualisti, rivalutano il ruolo del contesto socioculturale nell'apprendimento, il quale si realizza proprio grazie all'interazione sociale e alla mediazione del linguaggio.

L'approccio socioculturale che senza dubbio si afferma grazie alla fortuna degli scritti di Vygotskij e che nasce come critica al paradigma dell'*information Processing* nonché all'universalismo delle concezioni piagetiane, attribuisce un particolare rilievo al ruolo del contesto nelle attività cognitive.

Secondo questa prospettiva, l'apprendimento si identifica come un processo con cui si origina o si modifica un'attività reagendo ad una situazione incontrata e che ha luogo in partecipazione; si tratta di un fatto sociale e collettivo, distribuito tra coloro che partecipano al contesto. (Boscolo, 1986)

Il percorso di sviluppo dell'individuo può essere allora spiegato, così come sottolinea Maltese (2002, 8) come «graduale aumento di contesti in cui il soggetto fa esperienza e che, attraverso processi trasferiali, gli consentono di rendere significanti le successive esperienze».

La Teoria delle situazioni si pone proprio l'obiettivo di *modellizzare* le situazioni per favorire il lavoro intellettuale dell'allievo il quale, proprio come un ricercatore, intende porsi domande, analizzare, formulare ipotesi, argomentarle e confrontarle, al fine di spiegare una situazione problematica specifica.

Se come sostiene Brousseau (2001, 36) «I comportamenti degli allievi sono i rilevatori dell'ambiente», allora il compito dell'insegnante è quello di creare una *microsocietà scientifica* in cui l'allievo, calandosi metaforicamente nel ruolo del ricercatore, ritrovi «il significato del sapere culturale e comunicabile».[1]

---

[1] A questo proposito è possibile consultare: MARINO T. (2001), "Argomentare, congetturare dimostrare", Quaderni di ricerca in didattica, N.10, Palermo. La rivista è disponibile in rete all'indirizzo: http://math.unipa.it/~grim/memquad.htm

Accogliere questa prospettiva significa riconoscere le modalità con le quali il soggetto struttura la propria conoscenza, valorizzando il legame esistente tra questo processo e la dimensione cognitiva, relazionale, emotiva e sociale.

1.1 La modellizzazione delle situazioni nell'ambito della pratica didattica

Nell'ambito della modellizzazione delle situazioni è necessario in primo luogo avere chiara la definizione di *situazione* che, come sottolinea Spagnolo (1998, 100), viene intesa come «l'insieme delle circostanze nelle quali si trova una persona (un gruppo, una collettività, ecc.), le relazioni che l'uniscono all'ambiente, e l'insieme dei dati che caratterizzano una azione o una evoluzione (un'azione in un certo momento)».

La situazione si definisce didattica nel caso in cui l'azione dell'adulto è guidata dall'intenzione di insegnare all'allievo un determinato sapere. Una *situazione didattica* su uno specifico tema possiede due componenti: la situazione a – didattica e il contratto didattico. Nello specifico, seguendo le indicazioni di Spagnolo (1998, 101) la *situazione a – didattica* si definisce tale «quando l'intenzione dell'insegnante non è esplicitata nei confronti dell'allievo. L'allievo sa che il problema propostogli è stato scelto per fargli acquisire nuova conoscenza e, nello stesso tempo, deve sapere che questa conoscenza è giustificata dalla logica interna della situazione».

In questo senso, l'allievo si attiva in prima persona per trovare una possibile soluzione al problema proposto e, senza fare riferimento a delle ragioni didattiche, prende in carico la responsabilità della situazione di apprendimento, in un processo di *devoluzione* spinto dalla motivazione.

L'assunzione della responsabilità da parte dell'alunno passa attraverso la messa in discussione delle conoscenze pregresse e una conseguente situazione di conflitto, intesa come luogo della rielaborazione e ristrutturazione delle conoscenze.

La *situazione a – didattica* allora è uno spazio relazionale e cognitivo che si configura come possibilità offerta all'allievo di interagire con elementi della realtà, al fine di favorire l'auto – organizzazione della propria conoscenza.

La premessa irrinunciabile per la creazione di questa *microsocietà scientifica*, in cui l'esperienza di apprendimento si configura come una vera e propria *ricerca di senso*[2], è definire un *contratto didattico*.

Il contratto didattico viene definito da Spagnolo (1998, 98) come «Risultato della negoziazione dei rapporti stabiliti esplicitamente e/o implicitamente tra un allievo e un gruppo di allievi, un certo *ambiente* ed un sistema educativo, al fine di far appropriare gli allievi di un sapere costituito o in

---

[2] L'accezione attribuita alla *Ricerca di senso (Search for meaning)* va ricondotta alla proposta psico – pedagogica di apprendimento formulata da Noel Geoghegan durante la conferenza internazionale *The Humanistic Renaissance in Mathematics education.* Geoghegan afferma che i processi di insegnamento/apprendimento riflettono le relazioni che si stabiliscono all'interno della classe, le quali vengono rese significative grazie al principio della *ricerca* individuale di senso e alla promozione della creatività. Per approfondimenti: GEOGHEGAN N.(2002), "Learning Mathematics: a search for meaning", in *The Mathematics Education into the 21st Century Project*, Proceedings of the international conference, Terrasini, 141 – 144.

L'articolo è consultabile in rete all'indirizzo: http://math.unipa.it/~grim/21project.htm via di costituzione». Si tratta dunque di un insieme di regole stabilite all'interno della classe, derivanti dalla presa in carico della situazione, le quali organizzano le relazioni tra il contenuto oggetto di insegnamento, gli alunni, l'insegnante e le attese, al fine di favorire una buona devoluzione della situazione problematica.

1.2 La struttura della situazione a - didattica

La nozione di *situazione a – didattica* è fondante per la Teoria delle situazioni.

Per analizzarne la struttura interna è interessante configurare l'essenza delle varie fasi che la compongono.

La situazione a – didattica, al cui significato Brousseau attribuisce il sinonimo di gioco, è un percorso in cui l'allievo costruisce la sua conoscenza non per ragioni didattiche, come nel caso dell'esplicitazione dell'obiettivo da parte dell'insegnante, ma perché motivato dalla logica interna alla situazione.

In questo senso, l'apprendimento viene agito e costruito grazie anche alla valenza assunta dal gioco, strumento ampliamente riconosciuto come funzionale alla formazione dell'allievo.[3]

All'interno di un suo intervento Barra (1987, 52) traccia alcuni significativi collegamenti tra il gioco e l'insegnamento della matematica, facendo particolare riferimento ai processi di apprendimento in età evolutiva.

Delineando una serie di argomentazioni atte a definire la funzionalità del gioco all'apprendimento finalizzato, lo studioso afferma che «una delle caratteristiche più generali del gioco consiste nel ridurre o neutralizzare le difficoltà e le conseguenze di un'azione finalizzata, cioè le tensioni che si sviluppano per il positivo compimento di un atto».

È indubbio che creando un ambiente di sicurezza emotiva e privo di tensioni si concorre al miglioramento dell'apprendimento.

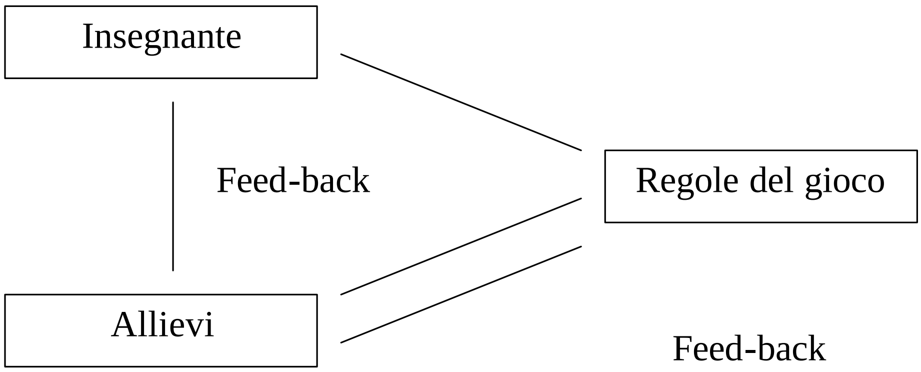
Con le parole di Romano (2000, 230), il gioco può essere considerato «valido strumento educativo da inserire in modo consapevole e coordinato all'interno di un possibile itinerario formativo per produrre effetti positivi sia nella sfera cognitiva che in quella emotivo – affettiva e relazionale».

Per assumere tale valenza, il gioco prevede diverse tappe, la definizione della *consegna*, la situazione *d'azione*, la situazione di *formulazione* e la situazione di *validazione*, ciascuna delle quali possiede una struttura e delle caratteristiche specifiche, non lasciate all'improvvisazione.

[3] Molti autori come Huizinga sottolineano come il gioco sia alla base della cultura, e ancora Piaget, studiando lo sviluppo cognitivo del bambino, lo definiscono come la *verità individuale* in contrapposizione con la *verità impersonale e collettiva*. Altri ancora, come Bruner, sottolineano le potenzialità trasformative del gioco, cioè l'eccellente opportunità offerta dal gioco per provare combinazioni di comportamenti che non sarebbero mai sperimentate sotto pressione funzionale. Ancora Winnicott afferma che il giocare è prima di tutto trasformare un oggetto, ovvero imprimere una personalissima ed unica impronta individuale, cosi che questo stesso oggetto non sia più descrivibile solo in termini fisici ma neppure sia riducibile nei soli termini psicologici; per cui secondo Winnicott, nessun oggetto è più lo stesso, dopo essere stato incontrato ed usato da un bambino: è un *oggetto soggettivo*.

Prima fase: La consegna

Una situazione a – didattica inizia sempre con una consegna specifica, durante la quale l'insegnante può giocare con un allievo per illustrare le regole del gioco o consentire a due allievi di ripetere l'attività.

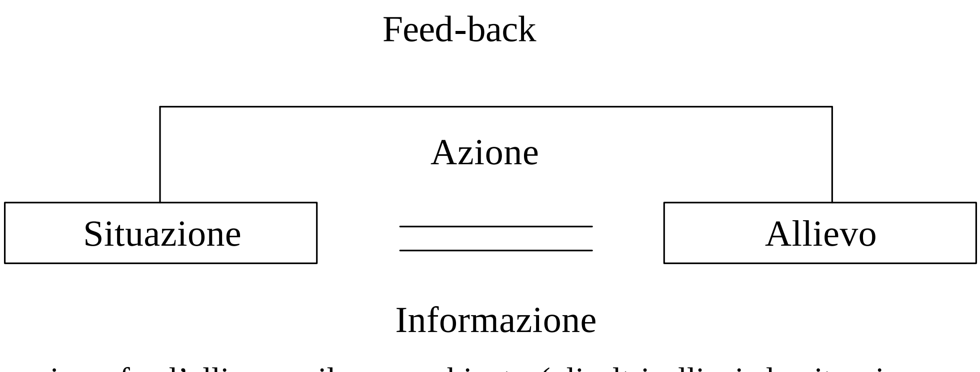


L'azione non solo riduce l'ambiguità del linguaggio verbale, ma si configura come *feedback* o retroazione dell'attività: da un lato l'allievo ha la possibilità di ripercorrere la situazione per effettuare un controllo e modificare l'azione, dall'altro l'insegnante ha l'occasione di cogliere il processo di retroazione attivato dall'allievo.

Seconda fase: La situazione di azione

La situazione d'azione costituisce il processo con il quale l'allievo si costruisce le strategie, ovvero apprende un metodo di risoluzione della situazione problematica presa in carico.

Gli allievi agiscono sulla situazione problema, iniziando a formulare ipotesi e strategie che sono messe alla prova da ulteriori esperienze.



L'interazione fra l'allievo e il suo ambiente (gli altri allievi, la situazione problematica, l'insegnante), grazie alla quale sono ipotizzate le prime strategie, è definita *dialettica dell'azione*.

Attraverso questo *dialogo* con l'azione, l'allievo adottata intuitivamente o razionalmente una strategia, rigetta la precedente, la mette alla prova con l'esperienza, l'accetta o la rifiuta; insomma costruisce un modello implicito, ovvero un insieme di relazioni o regole in base alle quali prende le sue decisioni senza averne coscienza e quindi senza formularle.

Terza fase: La situazione di formulazione

La formulazione di una conoscenza trova riscontro nella capacità del soggetto a riprendere, riconoscere, identificare, decomporre, ricostruire tale conoscenza all'interno di un sistema linguistico.

In questa fase infatti l'allievo è motivato dalla situazione a formulare il proprio modello implicito, a verbalizzare le proprie strategie, ad argomentarle e difenderle, per far in modo che siano fatte proprie dagli altri allievi.

Il punto di partenza per ciascun alunno è l'elaborazione progressiva di un linguaggio che deve essere compreso da tutti e che, attraverso lo scambio comunicativo tra gli allievi, deve portare alla formulazione della strategia, in una sorta di *dialettica della formulazione*.

Verbalizzazione e formulazione delle strategie

Situazione		Situazione

Feed-back

La traduzione di modelli impliciti d'acquisizione ottenute dalla formulazione e dalla comunicazione può essere un'ulteriore occasione di acquisizione della conoscenza.

Sia gli schemi d'azione, sia quelli di formulazione comportano dei processi di correzione empirica o culturali adatti ad assicurare la pertinenza o l'adeguamento delle conoscenze messe in atto.

Quarta fase: La situazione di validazione

I modelli conoscitivi formulati durante la fase precedente possono essere accettati o rifiutati dalla classe, metaforicamente intesa come una sorta di *comunità scientifica* che discute circa ciascuna strategia.

Le ipotesi accettate da tutti diventano teoremi, mentre gli errori diventano occasione per rivedere i propri ragionamenti e riformulare le strategie in modo corretto.

In questo modo l'errore diviene una tappa indispensabile nel processo di costruzione della conoscenza.

Con la fase di validazione si arriva a formalizzare il concetto matematico che nel tradizionale metodo di insegnamento spesso non rappresenta un punto d'arrivo ma un punto di partenza.

Oltre a sottendere un'ottica cooperativa dell'apprendimento, infatti, la fase di validazione promuove lo sviluppo dell'attitudine alla dimostrazione che, come ampliamente riscontrato in letteratura, è la fonte di difficili problemi che la didattica cerca di chiarire e risolvere (Balacheff, 2001).

La dimostrazione matematica, modalità specifica di costruzione di un discorso per stabilire la validità di un enunciato, è l'espressione del *fare matematica*, inteso come attività rivolta a utilizzare le stesse regole matematiche per accettare o respingere una proposizione (un teorema), una strategia, un modello.

In questo senso viene rispettato quello che Bruner (1967) definisce il principio guida dell'educazione, ovvero definire una serie di esperienze che mirano a sviluppare l'intelligenza, favorendo l'apprendimento di quelle strategie che possono permettere al soggetto di scoprire la struttura del sapere oggetto di studio.

La situazione a – didattica allora, si configura come esperienza di *pensiero guidato* che, attraverso la costruzione di strutture cognitive nell'interazione con l'ambiente, risulta particolarmente funzionale a sviluppare quello che Petter (2002, 15 – 16) definisce pensiero *efficiente*.

Capitolo 2

Il ruolo dell'argomentazione nella padronanza consapevole dei concetti matematici

Nel panorama odierno della ricerca didattica è possibile rilevare un crescente interesse per quei processi che consentono la formazione del pensiero matematico, con particolare riferimento allo sviluppo di competenze argomentative che, insieme alla capacità di formulare congetture, costituiscono le premesse essenziali per giungere alla produzione di una dimostrazione consapevole che segna l'ingresso nella cultura dei teoremi.

All'interno di un'opera che presenta i concetti matematici fondamentali, prescindendo da un astrattismo eccessivo e soffermandosi piuttosto sui ragionamenti intuitivi che caratterizzano le varie trattazioni, dalla teoria dei numeri naturali agli elementi di analisi, Courant e Robbins (1971, 27) definiscono la matematica come l'*espressione della mente umana*, i cui elementi sono la logica e l'intuizione, l'analisi e la costruzione, la generalità e l'individualità.

La sintesi di queste *forze antitetiche* costituisce per gli autori il valore e l'utilità della scienza matematica.

In questa direzione è possibile affermare che proprio la dimostrazione consapevole segna il passaggio dalle nozioni intuitive e dai livelli puramente operativi a forme di pensiero deduttivo e a livelli astratti o di sintesi.

Attraverso un percorso di acquisizione dei concetti matematici, il quale in maniera evidente non segue un andamento lineare ma implica una serie di salti cognitivi dovuti alla presenza di ostacoli o misconcetti[4], il soggetto è in grado di configurare la valenza della dimostrazione nelle attività matematiche.

Proprio sulla base del fatto che nessun argomento o concetto può essere apprezzato come verità assoluta, i matematici utilizzano la dimostrazione come strumento funzionale sia alla validazione della loro produzione intellettuale, sia alla comunicazione e all'accettazione sociale delle proprie teorie.

---

[4] Facendo riferimento al paradigma della *Teoria delle situazion*i di Brousseau, il concetto di ostacolo e del suo superamento sono legati al modello di *adattazione.*

L'ostacolo può essere considerato come:

1. *una conoscenza* che gli *allievi hanno*;
2. *una conoscenza* legata ad *altre conoscenze* precedenti che sono spesso poco corrette, *imprecise e provvisorie*;
3. *una conoscenza anteriore* che ha avuto successo ma che è ora *inadatta*.

Gli ostacoli che risiedono nell'*organizzazione* stessa della matematica (o della disciplina che si vuole considerare), vengono chiamati *ostacoli epistemologici*.

Spagnolo (1998, 112 – 115) definisce gli Ostacoli Epistemologici come gli oggetti matematici dei campi semantici precedenti che potrebbero servire per la costruzione sintattica (nei fondamenti del nuovo linguaggio) della matematica e che si ripresentano nel percorso di apprendimento di essa.

La dimostrazione dunque è una delle attività che caratterizza il pensiero matematico maturo e nasce da un più generale apprendistato culturale e cognitivo[5].

Questo aspetto induce a riflettere su quanto sia difficile per l'allievo l'apprendimento della dimostrazione, il quale implica la completa padronanza di elementi specifici del sapere teorico e di un linguaggio rigoroso.

Di contro ci sono motivi ben precisi per cui la ricerca didattica sta mostrando sempre più attenzione alla dimostrazione come oggetto di studio della didattica della matematica.

Innanzitutto non si può negare che le abilità di tipo logico-deduttivo, i processi di generalizzazione e il controllo della validità di tali processi attraverso la dimostrazione sono considerate fondamentali nei curricula di matematica di molti paesi, compreso quelli italiani.

In secondo luogo, un itinerario fondato sul concetto di dimostrazione è stimolante dal punto di vista cognitivo, sociale e, in generale, culturale.

In questa direzione Speranza (1992, 135) precisa che le dimostrazioni sono solo una parte del lavoro riguardante la pratica matematica, la quale in realtà prevede una procedura che dalle intuizioni e dalle congetture, attraverso una serie di tentativi e approssimazioni sempre più precise, giunge alla matura dimostrazione.

Nel caso in cui la dimostrazione venga configurata al di fuori della sua funzione, dunque come uno sterile modello da imitare, si crea una forte ambiguità tra la validità della dimostrazione, in quanto rispondente alle regole stabilite dalla comunità scientifica o dall'insegnante, e il significato di ciò che si dimostra.

Balacheff (2001, 40) mette in evidenza proprio il fatto che «I primi ambienti di apprendimento della dimostrazione hanno taciuto il rapporto tra risoluzione di un problema e dimostrazione riducendo, di fatto, la pratica matematica ad una manipolazione di enunciati di carattere combinatorio».

Un elemento che potrebbe contribuire a chiarire il rapporto tra pratica matematica e dimostrazione viene proposto da Bagni (1998, 53 – 60) il quale illustra come *dimostrare* e *convincere* non hanno una valenza perfettamente coincidente: non è raro infatti riscontrare nella pratica didattica che la dimostrazione non è in grado di convincere pienamente l'allievo e di catturare la sua attenzione. Secondo quanto afferma Bagni (1998, 56), «L'allievo può restare in parte o del tutto insensibile ad una tradizionale dimostrazione, mentre può essere affettivamente coinvolto, in termini spesso decisivi, da un'argomentazione più vicina all'esperienza, ad una procedura (praticamente) ripetibile, sebbene, forse, meno rigorosa».

Una delle cause più rilevanti di discontinuità tra argomentazioni e dimostrazioni sta proprio nel fatto che quando argomentiamo o dimostriamo utilizziamo regole inferenziali fortemente differenti.

Durante un'attività dimostrativa, in effetti vengono esplicitati gli assiomi di una teoria, senza mettere in evidenza le regole inferenziali utilizzate nelle

[5] Secondo l'approccio socioculturale, che senza dubbio si afferma grazie alla fortuna degli scritti di Vygotskij, l'apprendimento viene visto come apprendistato e si definisce *apprendistato cognitivo*, le cui caratteristiche fanno riferimento alla partecipazione responsabile e allo scambio di informazioni all'interno di contesti significativi

dimostrazioni in quella teoria; al contrario le regole delle argomentazioni non sempre sono in consonanza con le regole inferenziali della logica classica che vengono utilizzate nella dimostrazione. L'argomentazione è fortemente caratterizzata dalle regole della logica con la quale la mente umana interpreta la realtà: si tratta di una sorta di ragionamento di senso comune le cui conclusioni sono in genere solo di carattere probabilistico, causando una forte modificabilità in presenza di nuove informazioni.

Nella logica dimostrativa, l'inferenza logica utilizzata è monotona, nel senso che la verità delle conclusioni risulta invariata per ogni possibile interpretazione.

L'argomentazione allora può essere definita come una forma di organizzazione del discorso che ha lo scopo di ottenere o accrescere l'adesione dei destinatari alle tesi che vengono loro proposte.

Se nella logica formale lo studioso stabilisce le regole in base alle quali condurrà il suo ragionamento, mettendo in evidenza la coerenza formale delle espressioni che ne risultano piuttosto che il loro significato, nell'ambito dell'argomentazione, il discorso può non avere una giustificazione intrinseca, ma deriva dall'effetto più o meno positivo che ottiene sul pubblico al quale è destinato.

Il discorso argomentativo in questo senso non può prescindere dalle caratteristiche psicologiche, culturali e sociali dei destinatari ai quali si rivolge e da una certa competenza comunicativa da parte di chi lo produce.

Ciò premesso la seguente trattazione si pone lo scopo di illustrare proprio il percorso attraverso cui l'argomentare e il congetturare conducono l'allievo a sviluppare la capacità di definire i concetti matematici e individuare le relazioni fra questi, passando dal linguaggio naturale al linguaggio rigoroso della dimostrazione.

Un particolare riferimento viene rivolto al rapporto tra l'argomentare e il modello socioculturale di appartenenza, nell'ottica dell'Etnomatematica, una disciplina che da pochi decenni si inserisce nel panorama della ricerca in didattica della matematica. La rilevanza del nucleo dell'argomentare e congetturare viene supportata infine dalla crescente presenza all'interno delle indicazioni per un nuovo curricolo per la matematica, le quali indicano proprio lo sviluppo delle competenze in riferimento a tale nucleo uno degli obiettivi didattici da promuovere fin dalla prima classe della scuola primaria.

2.1 Argomentare e congetturare: due registri per educare alla dimostrazione

All'interno del quadro teorico della didattica della matematica è stato ampliamente riscontrato, come sostiene Marino (2002), che gli allievi coinvolti in attività che richiedono la produzione di congetture, in un percorso di costruzione della dimostrazione o della confutazione delle congetture prodotte, attraverso processi di tipo argomentativo, hanno un discreto successo nell'attività dimostrativa.

L'ingresso nella cultura dei teoremi infatti implica lo sviluppo di specifiche competenze che riguardano proprio la produzione di congetture e l'argomentazione di queste ultime, facendo riferimento a elementi specifici del sapere teorico.

Le attività argomentative in cui si producono ipotesi o si generano condizionalità sono riconducibili a due modalità principali che, opportunamente coltivate, appaiono fondamentali per permettere la transizione nel lungo periodo al pensiero teorico proprio della matematica.

Queste modalità sono caratterizzate dal diverso modo con cui il soggetto si rapporta al mondo esterno rispetto al suo mondo interno. La prima modalità è caratterizzata dalla produzione di *congetture interpretative* di ciò che si percepisce, ad esempio al fine di organizzarlo, mentre la seconda è caratterizzata dalla produzione di *congetture previsionali*, come nel caso delle ipotesi su una situazione futura.

Nell'ambito degli studi matematici, *congettura* e *congetturare* sono due espressioni di uso piuttosto recente nella scuola, nonostante proprio le congetture costellino la storia della matematica.[6]

Baruk (1998, 101) definisce la congettura proprio come l'*intima convinzione* di un matematico sulla risposta a una domanda data, senza che egli abbia la possibilità di trasmetterne la consapevolezza, ovvero di fornire la prova della sua veridicità.

Non si può che rendere merito all'idea di sostenere, all'interno della scuola, uno spirito di ricerca che non pretenda un'immediata dimostrazione di certezza.

Un errore che però è piuttosto comune nella pratica didattica è quello di considerare la congettura nella riduttiva accezione di *supposizione azzardata* e non come affermazione che ha una forte probabilità per chi l'ha formulata.

Congetturare infatti presuppone una certa familiarità con gli oggetti e i metodi cui si riferisce una situazione e, in modo particolare, una reale presa in carico del problema: solo in questo senso la congettura genera una serie di tentativi rivolti a stabilire una verità da dimostrare.

Attraverso la congettura insomma l'allievo è in grado di concentrare il proprio pensiero su un fenomeno particolare, di circoscriverlo, di estrarlo dal contesto e di esprimerlo in una formulazione non ambigua.

Le fasi successive nello sviluppo del pensiero matematico prevedono l'esplorazione libera del fenomeno, attraverso l'argomentazione, e la spiegazione dello stesso entro un contesto definito e rigoroso, attraverso il registro della dimostrazione.

Il *Merriam Webster's Dictionary*[7] fornisce spunti per un possibile inquadramento teorico dell'argomentazione, definendo tale processo come «l'atto di produrre ragioni, realizzare induzioni, trarre conclusioni, ed applicarle al caso in discussione».

Un *argomento* allora può essere inteso come un complesso di ragioni a favore o contro una proposizione, il quale viene generato dalle conoscenze di riferimento[8].

---

[6] A questo proposito basti pensare alla celebre *Congettua di Goldbach* (1742), il cui semplice enunciato sostiene che ogni numero pari maggiore di 4 può essere scritto come somma di due numeri primi dispari.

[7] Il dizionario è consultabile in rete all'indirizzo: http://xx.mw.com\/mw/mwhome.htm

[8] Quanto sostenuto viene approfondito nel paragrafo seguente.

L’attività argomentativa può essere allora configurata come un discorso che viene condotto in una duplice direzione: da un lato permette al soggetto di tornare su ciò che si è agito o percepito, producendo interpretazioni e spiegazioni; dall’altro consente di anticipare fatti e situazioni, producendo previsioni, discorsi ipotetici su mondi possibili.

L'argomentazione si potrebbe definire dunque come lo strumento più generale per poter costruire catene deduttive nel linguaggio naturale, seguendo le modalità del prevedere e interpretare, e in questo senso come attività propedeutica alla dimostrazione.

Balacheff (2001, 10 – 21) propone una classificazione dei procedimenti che dal congetturare e dall'argomentare portano al dimostrare in situazioni didattiche, la quale prevede la *spiegazione*, la *prova*, la *dimostrazione*, il *ragionamento*.

La *spiegazione* è il tentativo del soggetto di chiarire principalmente a sé stesso la validità di una proposizione utilizzando le proprie conoscenze e seguendo le proprie regole di decisione.

La fase successiva prevede la *prova*, un discorso che assicura la validità di una proposizione condiviso da una comunità; il livello di compiutezza della prova è correlato allo sviluppo del soggetto[9].

Si procede allora alla *dimostrazione*, prova tipica della matematica basata su una precisa regola deduttiva e caratterizzata da una forma codificata, seguita dal *ragionamento* e dal processo di *validazione*. Il ragionamento è quel particolare momento in cui il soggetto concentrandosi giunge all'intuizione mentre la validazione è il passo successivo, caratterizzato dalla distensione del pensiero sotto forma verbale o simbolica, ovvero dalla creazione di un discorso che nel suo limite assume carattere formale e produce una spiegazione.

Risulta evidente che le funzioni cognitive coinvolte in tali attività discorsive, in cui gli alunni costruiscono significati nelle situazioni didattiche in cui operano, producendo ipotesi sul mondo, sono molteplici, dal definire, al classificare, generalizzare, gerarchizzare, progettare, e implicano una particolare attenzione da parte dell’insegnante.

---

[9] Le prove fornite dagli allievi possono essere distinte in quattro tipi che, secondo Balacheff (1987, 147 – 150), occupano un posto privilegiato nella genesi cognitiva della dimostrazione:

1. *Empirismo naif*: consiste nel produrre congetture tratte dall'esame di pochi casi, legate quindi a fattori empirici.
2. *Esperienza cruciale*: prevede la congettura tratta dall'esame di qualche caso ma messa alla prova su problemi simili. Rimaniamo fondamentalmente nell'empirismo tuttavia si delinea il problema della generalizzazione.
3. *Esempio generico*: prevede la prova di validità di una asserzione riferita ad una classe di problemi (generalizzazione). Le ragioni della validità vengono esplicitate riferendosi ad un rappresentante particolare.
4. *Esperienza mentale*: tali esperienze segnano il passaggio da prove pragmatiche a prove intellettuali. Esse sono caratterizzate da azioni interiorizzate in quanto l'allievo fa riferimento più che alla figura alle sue proprietà.

2.2 Il rapporto tra l'argomentazione e i modelli socioculturali di appartenenza nella padronanza dei concetti matematici

In riferimento ai processi di insegnamento/apprendimento, l'argomentazione viene generalmente considerata come una competenza esclusivamente linguistica e dunque inscritta nell'ambito della produzione dei testi argomentativi[10] nel secondo ciclo della scuola primaria. Prendendo in considerazione il punto di vista della Semiotica, la matematica può essere definita non esclusivamente un settore della conoscenza ma, con le parole di Spagnolo (1998, 54), «perfezionamento del linguaggio in generale, che integra le comuni espressioni verbali, che possono essere troppo imprecise o troppo ingombranti, con nuovi strumenti di rappresentazioni delle relazioni».

Secondo questo punto di vista, il linguaggio matematico presenta tre livelli: le *sintassi*, che corrispondono alla sistemazione formale dei linguaggi; la *semantica*, la quale fa riferimento al problema del significato; la *pragmatica*, l'aspetto che prende in considerazione le condizioni per una interazione efficace e non disturbata della comunicazione.[11]

Proprio perché implica la distinzione di questi piani, l'approccio semiotico alle matematiche consente una migliore analisi dei fenomeni di insegnamento/apprendimento e, per quanto più specificamente attiene l'argomentare, permette di ipotizzare l'esistenza di un parallelismo tra argomentazione e dimostrazione.

L'elemento più rilevante che differenzia i due registri è proprio il fatto che l'argomentazione è il mezzo per poter costruire catene deduttive, attraverso la *messa a fuoco* dell'oggetto matematico, l'interpretazione della situazione e l'evoluzione dell'oggetto stesso, nel dominio del linguaggio naturale.

Il linguaggio naturale è una delle funzioni neuropsicologiche più elevate dell'uomo che si configura come capacità di codificare il pensiero, grazie alla costruzione di rapporti semantici tra contenuti mentali e un codice simbolico: il suo sviluppo si fonda su 3 determinanti: le basi autonomo – funzionali (il cervello, gli organi fonatori, gli organi di senso), la relazione con l'ambiente, la struttura stessa del linguaggio (Bickel, 1989, 23 – 24).

---

[10] Il testo argomentativo si propone di convincere di qualcosa il destinatario, attraverso l'impiego di una strategia che mira a convincere facendo appello al ragionamento nell'argomentazione. Il testo argomentativo ha una struttura che comprende:

1. La presentazione del problema che generalmente ha un carattere informativo e costituisce una premessa all'argomentazione vera e propria;
2. una tesi da dimostrare;
3. gli argomenti a favore della tesi;
4. un'antitesi da confutare;
5. gli argomenti a sfavore dell'antitesi;
6. facoltativamente può essere presente una conclusione in cui, tirando le somme di quanto detto, si dimostra la ragionevolezza della tesi.

I principali tipi di testo argomentativo di cui si propone l'esplorazione a scuola sono i saggi di argomento scientifico o storico e il tradizionale tema scolastico, in cui gli allievi sono chiamati a sostenere le proprie opinioni su un determinato problema.

[11] A questo proposito è possibile consultare l'articolo di Spagnolo (2001) all'indirizzo http://math.unipa.it/~grim/21project.htm.

In riferimento al linguaggio naturale è necessario richiamare la prospettiva di Vygotskji rispetto al fatto che il funzionamento mentale è mediato dagli strumenti forniti dalla cultura (Miller, 1987, 375 – 426). Secondo Vygotskji lo sviluppo cognitivo e linguistico viene infatti influenzato dalla partecipazione dell'individuo a una fitta rete di interazioni sociali successivamente interiorizzate (Camaioni, 2001, 13). Oltre allo sviluppo naturale, supportato da comportamenti spontanei rispetto ad uno stimolo, l'individuo è soggetto allo sviluppo culturale, il quale comprende i concetti complessi o scientifici che portano allo sviluppo di strutture mentali superiori.

In questo senso il linguaggio si configura come strumento sociale che penetra nella mente a dirigere il pensiero, controllare il comportamento durante lo sviluppo, organizzare le categorie di realtà.

Ancora Anello (2001, 64) sottolinea come «L'acquisizione del concetto, la costruzione e la ricostruzione delle conoscenze, i processi di simbolizzazione sono particolarmente facilitati da quel mezzo di espressione e comunicazione che è il linguaggio».

In sintesi si può affermare che il linguaggio è un meccanismo attraverso cui la cultura influenza lo sviluppo dell'individuo.

Sulla base di questa prospettiva teorica, l'argomentazione come discorso nel linguaggio naturale che concerne il pensiero matematico diventa manifestazione del proprio universo cognitivo, mediata da un contesto culturalmente determinato. L'argomentazione inoltre è l'espressione delle conoscenze dell'allievo, risultanti da un intreccio dialettico tra le rappresentazioni simboliche e le attività discorsive su questi con cui il soggetto dà significato agli enunciati matematici.

Secondo numerosi studiosi di didattica della matematica affinché l'insegnamento di un concetto risulti efficace, non si può prescindere dalle conoscenze intuitive dell'allievo acquisite nel contesto socioculturale, non necessariamente scolastico.

Queste infatti possono facilitare o ostacolare in modo determinante l'apprendimento del concetto stesso.

In particolare Fischbein (1979) si riferisce a tali idee intuitive come a *intuizioni primarie* e sottolinea l'importanza di sostenerle e rafforzarle in modo che possano evolvere allo stadio di *intuizioni secondarie* e costituiscano elementi funzionali all'acquisizione del concetto matematico.

In questa prospettiva si colloca il crescente interesse verso l'Etnomatematica che, come approccio antropologico alla matematica, rivaluta le costruzioni di natura culturale e psico – emozionale.

L'Etnomatematica si definisce etimologicamente come l'arte o la tecnica di spiegare, di conoscere, di capire nei diversi contesti culturali[12]; con le parole di D'Ambrosio (2002, 7) «L'etnomatematica è un programma volto a spiegare i processi di generazione, organizzazione e trasmissione in differenti sistemi culturali e le forze interattive che agiscono su di noi in questi tre processi».

In particolare D'Ambrosio (2002, 18 – 23) mette in evidenza come diversi gruppi socioculturali procedono in modo differente nei loro sistemi logici, sulla

[12] *Etno* si riferisce al contesto culturale: *matema* va nella direzione di *spiegare, conoscere, capire; tica* che deriva da *Techne,* ovvero arte o tecnica.

base dell’influenza esercitata da fattori di natura linguistica, morale, religiosa e, in genere, culturale.

Queste differenze sono amplificate in riferimento al dominio della matematica elementare, in quanto ogni gruppo socioculturale ha le proprie forme di matematizzazione.

A questo proposito D’Ambrosio (2002, 19) sottolinea la necessità di non trascurare le particolarità che connotano ciascun individuo dal punto di vista culturale: «Il passato culturale del bambino deve essere rispettato.

Ciò non solo gli darà fiducia nella propria conoscenza, ma gli conferirà anche una certa dignità, vedendo che le sue origini culturali sono accettate dal suo maestro e sentendo così che questo rispetto si estende anche alla sua famiglia ed alla sua cultura».

Partire dalle conoscenze che l’allievo domina, sicuramente contribuisce a trasmettergli la sicurezza necessaria per essere soggetto attivo, in grado di prendere delle decisioni.

Nella direzione teorica delineata credo sia opportuno esplicitare una delle riflessioni che ha costituito elemento su cui incentrare la ricerca sperimentale: qualora il linguaggio naturale, nonché gli elementi socioculturali di un allievo straniero costituiscono elemento di differenziazione nell’approccio alle matematiche, tanto da supportare la nascita dell’Etnomatematica (una corrente di studi che si occupa proprio di rilevare la generazione, l’organizzazione e la trasmissione della conoscenza in diversi ambienti socioculturali, attraverso l’analisi storica) ritengo sia possibile individuare tali differenze sulla base delle analisi delle argomentazioni prodotte dagli allievi durante un compito cognitivo.

Questa ipotesi trova concreta risposta nei risultati del lavoro sperimentale condotto con alunni italiani e stranieri di origine cinese in riferimento al pensiero proporzionale, i quali sono utilizzati successivamente per la messa a punto di percorsi educativi personalizzati. Il contesto della struttura della lingua cinese infatti si caratterizza per la natura monosillabica: l’unità lessicale nella sua forma elementare, è formata da una sola sillaba. Comprendendo non più di quattrocento suoni sillabici nel dialetto di Pechino, la lingua cinese prevede che ad ogni suono sillabico corrispondono necessariamente più parole: ad esempio, con il suono sillabico *fu* vengono pronunciate le seguenti parole: marito, governo, fortuna, padre, ricchezza, vestito, Buddha, pelle, ascia, prigioniero e tante altre ancora.

Per ovviare a questa caratteristica, nella lingua cinese ciascun suono monosillabico viene pronunciato secondo diverse modulazioni della voce, dette *toni*, oppure viene combinato con altre sillabe.

Data la loro natura monosillabica, le parole cinesi sono invariabili, ovvero non presentano forme di flessione che permettano di distinguere le parti del discorso, il genere, il numero, la persona, il tempo, come nelle lingue occidentali. Per esprimere le varie categorie grammaticali allora vengono utilizzate delle particelle ausiliarie.

A differenza della lingua parlata, che ha subito dei notevoli mutamenti nel corso dei secoli e varia da una provincia all'altra, la lingua scritta è uniforme per tutto il territorio della Cina ed è basata su un sistema di scrittura non alfabetico, ma ideografico: ad ogni ideogramma o carattere corrisponde una determinata parola, ma mentre il significato è suggerito dal segno grafico, la pronuncia ne è quasi del tutto indipendente e varia a seconda dei numerosi dialetti.

Alcuni caratteri sono pittografici, ovvero sono dei disegni che cercano di rappresentare l'immagine, sia pure in maniera stilizzata, mentre altri sono simbolici, come nel caso del carattere che significa *luce*, il quale consiste di un disegno in cui sono raffigurati il sole e la luna. Le caratteristiche della lingua cinese appena accennate sono sufficienti a mostrare come la sua padronanza implichi a compiere degli sforzi di astrazione e memorizzazione non indifferenti e, sulla base di quanto afferma Spagnolo (2002, 5), come il processo di costruzione e riconoscimento degli ideogrammi possa essere paragonato ad un'equazione mentale.[13]

Il linguaggio matematico si caratterizza per l'ampio uso di simboli, per la mancanza di ridondanze e parafrasi, per la densità contenutistica in testi molto brevi; si tratta di un linguaggio astratto e dalla sintassi complessa proprio come la lingua cinese.

È probabile che esista allora una correlazione tra la lingua cinese e il pensiero matematico, tanto da implicare, come sostengono Hok Wing e Bin (2002, 223 – 224), che gli studenti cinesi forniscono le più alte prestazioni del mondo in compiti che richiedono l'applicazione delle abilità matematiche.[14]

2.3 La matematica della scuola primaria nella proposta del 2001

Con lo scopo di sostenere l'ipotesi della rilevanza dei processi argomentativi nello sviluppo del pensiero matematico, avanzata nei paragrafi precedenti, si prendono in considerazione le conoscenze fondamentali di matematica indicate all'interno del volume Matematica 2001, all'interno del quale il nucleo *Argomentare e Congetturare* viene definito come competenza trasversale da acquisire in matematica al termine della scuola primaria. Numerose sono sempre state le proposte innovative in relazione ai curricoli di matematica nella Scuola primaria, alcune divenute realtà ordinamentali, altre adottate sperimentalmente, altre ancora che, seppure non istituzionalmente, hanno in ogni caso lasciato una traccia.

Questo è a mio avviso il caso del documento Matematica 2001, un ampio e documentato lavoro effettuato da un comitato istituito dall'UMI, assunto come punto di partenza nella stesura del curricolo di matematica del 2001, curricoli della nuova scuola stabilita dalla legge sul Riordino dei Cicli[15], approvata dal Ministro della Pubblica Istruzione Tullio De Mauro. All'interno dei *Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica* vengono individuati gli aspetti epistemologici fondamentali della matematica e gli obiettivi lungo l'intero percorso scolastico primario e secondario. Il curricolo è organizzato per *nuclei*, dei quali quattro definiti *tematici*, con specifici contenuti, ed altri tre, detti *di processo*, che non hanno contenuti propri, perché trasversali ai primi quattro. I nuclei tematici – *Il numero, Lo spazio e le figure, Le relazioni, I dati e le previsioni* – e quelli di processo – *Argomentare e congetturare,*

---

[13] L'articolo è disponibile in rete all'indirizzo: http://math.unipa.it/~grim

[14] È possibile consultare l'articolo all'indirizzo http://math.unipa.it/~grim/21project.htm.

[15] *Legge quadro in materia di riordino dei cicli dell'istruzione*, Legge n. 30 del 2000.

Misurare, *Porsi e risolvere problemi* – sono stati pensati, per il criterio di progressività, validi anche per il ciclo secondario. Della matematica intesa come componente essenziale della formazione del cittadino sono poste in luce due funzioni fondamentali, quella strumentale e quella culturale: matematica, dunque, come strumento essenziale per la comprensione della realtà e per il vivere quotidiano, e sapere logicamente coerente e sistematico, caratterizzato da una forte unità culturale. Una matematica formale, priva del riferimento alla realtà sarebbe infatti un puro *gioco di segni*, ma anche una matematica puramente strumentale, senza una visione globale, rischierebbe di essere frammentaria e poco incisiva.

Nel programma sono affrontate anche questioni didattico –metodologiche, quali l'integrazione continua dei due aspetti ora richiamati, il ricorso ad una didattica attenta alla costruzione del significato degli *oggetti* matematici e quindi la necessità di ciclicità nell'approccio ai concetti, la cautela nei momenti dei salti cognitivi che s'incontrano lungo il percorso, come, per fare degli esempi, l'introduzione dei numeri decimali e quello dei numeri frazionari, e la conseguente necessità di evitare in età precoce fraintendimenti, che spesso lasciano una traccia indelebile. Viene inoltre messa in luce la valenza didattica delle tecnologie nella comprensione dei concetti matematici. Per quanto riguarda più precisamente il nucleo *Argomentare e congetturare*, esso viene riferito a quelle attività mentali che *preparano alla dimostrazione*, espressione del pensiero matematico maturo che pertanto appartiene all'età della Scuola secondaria. All'interno del documento, in particolare, viene sottolineato come le attività argomentative, in cui si producono ipotesi o si generano condizionalità[16], possano essere opportunamente coltivate attraverso un percorso di promozione di specifiche competenze, al fine di favorire la transizione nel lungo periodo al pensiero teorico proprio della matematica. Le competenze matematiche da sviluppare nel corso della scuola primaria menzionate nel documento in riferimento al nucleo *Argomentare e congetturare* sono:

- osservare, individuare e descrivere regolarità;
- produrre congetture, testarle, validare le congetture prodotte;
- riconoscere proprietà che caratterizzano oggetti matematici e l'importanza delle definizioni che le descrivono;
- giustificare affermazioni con semplici concatenazioni di proposizioni;
- riconoscere argomentazioni conflittuali;
- utilizzare controesempi per confutare ipotesi o argomentazioni;

Il nucleo *Argomentare* e *congetturare* insomma prende in considerazione quei *processi eminentemente discorsivi che concernono il pensiero matematico*, derivanti da un intreccio dialettico tra rappresentazioni simboliche, quali i segni dell'aritmetica o le figure della geometria, e le attività discorsive su questi con cui il soggetto attribuisce significato agli enunciati matematici. Per promuovere tali processi, il documento valorizza il ruolo della verbalizzazione delle attività di cui gli allievi fanno esperienza: in tutte le attività risulta essenziale la mediazione del

[16] Le attività argomentative sono riconducibili a due modalità principali: la produzione di *congetture interpretative* e la formulazione di *congetture revisionali*.

linguaggio naturale, sia parlato che scritto, in quanto l'esperienza e la verbalizzazione col linguaggio naturale precedono la formalizzazione e la riflessione sui sistemi di notazione simbolica propri della matematica. In tal modo l’attività discorsiva diventa argomentazione matematica e successivamente dimostrazione. Nel panorama normativo odierno, ovvero all’interno delle *Indicazioni Nazionali per i Piani di Studio Personalizzati nella Scuola Primaria* predisposte il 6 novembre 2002, non compare più il nucleo tematico *Argomentare* e *congetturare*, ma l’insegnamento della matematica si rivolge alla promozione di conoscenze e abilità in riferimento al *Numero*, alla *Geometria*, alla *Misura*, all’*Introduzione al pensiero razionale*, al nucleo *Dati e previsioni* e, al termine del secondo ciclo, ad alcuni *Aspetti storici connessi alla matematica*.

Capitolo 3

Il pensiero proporzionale

Il pensiero proporzionale rappresenta uno strumento fondamentale per la modellizzazione matematica di svariate situazioni reali la cui analisi viene spesso richiesta agli allievi nell'arco della scuola primaria.

Nel sottolinearne la centralità dell'indagine in riferimento ai processi di apprendimento, Pesci (2002, 22) afferma che «Il ragionamento proporzionale è una necessaria premessa all'algebra ed ai livelli più alti del sapere matematico». Per tali motivi il pensiero proporzionale, nelle sue propedeutiche applicazioni in ambiente aritmetico e geometrico, è stato preso in considerazione nella messa a punto del lavoro sperimentale, sia in riferimento alle situazioni a – didattiche, sia in riferimento alle situazioni – problema.

In effetti la funzione di proporzionalità diretta, nell'ambito delle strutture matematiche di base, ricopre un ruolo decisivo nella comprensione dei rapporti che intercorrono tra grandezze fisiche dello stesso *tipo*, come due lunghezze, o di *tipo* diverso, quali ad esempio costo e peso.

L'importanza della proporzionalità in situazioni di insegnamento/apprendimento può essere argomentata proprio dal fatto che le situazioni di proporzionalità sono molteplici e i loro soggetti sono scelti nei campi più svariati, soprattutto fra quelli della vita quotidiana.

L'applicazione più immediata è quella di partire dal valore associato ad un singolo elemento per ottenere il corrispondente valore da associare ad un qualsiasi numero di quegli elementi.

Matematicamente l'operazione svolta consiste nel moltiplicare il valore (K) dell'elemento più piccolo, individuabile in un insieme, per il numero di volte (x) che quest'ultimo è contenuto nell'elemento a cui si vuole associare un valore.

La legge che si ottiene è quindi del tipo :

$$\textit{Valore di } x := f(x) = Kx$$

La relazione riportata è la forma con cui si rappresenta la *funzione di proporzionalità diretta*; da questa relazione è chiaro che l'aumentare di una delle due quantità implica un aumento del valore di *f(x)* della stesso ordine.

In quanto detto è stato usato in modo sottointeso il concetto di *misura* e quello di rapporto di equivalenza tra quantità omogenee, concetti che verranno chiariti nel presente capitolo alla fine del quale si perverrà ad un significato più ampio di funzione di proporzionalità diretta tra grandezze.

È tuttavia sorprendente che spesso la sola origine delle successioni proporzionali venga indicata nella moltiplicazione per un coefficiente, senza prendere in considerazione l'intervento del concetto di *rapporto* che è allo stesso modo elemento costitutivo della funzione di proporzionalità.

Un altro elemento da tenere presente è il fatto che la fondamentale distinzione epistemologica tra una proporzionalità matematica in senso stretto, che mette in gioco la *commensuralità* e l'*incommensuralità* delle grandezze, e la proporzionalità approssimativa delle pratiche quantitative della vita sociale non viene affatto sottolineata.

I due ambiti di applicazione della funzione di proporzionalità prima citati sono concettualmente differenti e richiamano i concetti di grandezze omogenee e grandezze non omogenee.

La proporzione viene definita in matematica proprio come uguaglianza tra due rapporti, secondo la formula *a:b = c:d*, nella quale il primo termine *a* ha rispetto al secondo *b* lo stesso rapporto che intercorre tra il terzo *c* e il quarto *d*.

Di seguito si esporranno le caratteristiche dell'ambito matematico in cui viene definita la funzione di proporzionalità diretta, del suo significato e delle differenze concettuali tra i due ambiti di applicazione citati.

3.1 Le grandezze omogenee

La definizione più comune di una classe di grandezze omogenee è quella di una serie di infiniti elementi per i quali è possibile :

- definire una relazione di equivalenza che soddisfi le proprietà riflessiva simmetrica e transitiva;
- esiste una grandezza A?0;
- definire una operazione di somma che soddisfi le proprietà commutativa ed associativa e rispetto la quale esista un elemento neutro indicato con 0;
- enunciare un postulato di Archimede secondo il quale presi due elementi di una stessa classe A e B, supposto A<B, esiste sempre un numero naturale *n* tale che *n*A>B;
- la relazione d'ordine > è transitiva;
- definire la proprietà di cancellazione della somma (A+C=B+C allora A=B);
- la relazione d'ordine è compatibile con l'addizione, cioè se A>B e C>D allora A+C>B+D;
- per ogni grandezza A?0 e per ogni naturale n>0 esiste una grandezza B tale che A=nB.

Le classi di grandezze che hanno tutte le caratteristiche sopra descritte vengono dette *classi omogenee archimedee*; un esempio è dato dalle lunghezze dei segmenti del piano o dalle aree dei poligoni, campi di riferimento in parte esplorati in riferimento alla fase sperimentale.

Nel caso dei segmenti, ad esempio, è possibile definire la lunghezza come relazione di equivalenza tramite cui individuare più gruppi di segmenti equivalenti tra loro; tali gruppi, detti classi di equivalenza, sono sottoinsiemi dell'insieme totale, all'interno dei quali tutti gli elementi hanno la stessa lunghezza.

All'interno di una classe di grandezze omogenee archimedee possono essere individuate grandezze tra di loro *commensurabili* o *incommensurabili* a seconda che sia possibile individuare o meno una grandezza *D* comune e due numeri naturali n e m tali che

$$A=mD\ ;\ B=nD\ ?\quad An=Bm$$

Si definisce *rapporto* tra A e B il numero razionale $\frac{m}{n}$.

Nel caso non sia possibile trovare una grandezza D come sopra definita, possono essere individuati due sottoinsiemi di numeri razionali $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ tali che:

$$mB<nA \qquad pB>qA$$

In questo caso le grandezze A e B si definiscono incommensurabili.

Il termine *commensurabile* si riferisce dunque a due grandezze che hanno una misura comune, per le quali esiste una unità di misura che permette di esprimerle entrambe mediante un numero intero.

Per analogia, il significato matematico di incommensurabile si riferisce a ciò che non si può confrontare a un altro oggetto, per mancanza di una misura comune.

Il quadro teorico descritto costituisce il riferimento ad alcune situazioni di proporzionalità diretta che richiedono un rapporto tra grandezze della stessa *specie*: si pensi ad esempio al problema di determinare, assegnate base ed altezza di un rettangolo e base di un secondo rettangolo, l'altezza di questo secondo rettangolo in modo da conservare la *forma* del primo.

Lo stesso quadro teorico è altresì il riferimento a quanto si è soliti fare per misurare una grandezza, attività che si presenta agli alunni già nel corso dei primi anni della scuola elementare.

È utile comunque notare che il senso del rapporto, nei due casi menzionati è molto differente: nel caso della misura, infatti, fissata una grandezza U (unità) non nulla e omogenea alla grandezza A da misurare, la misura di A rispetto ad U è il rapporto $\frac{A}{U}$ sopra definito, che si collega all'analogo significato di *rapporto di contenenza* fra numeri.

3.2 Rapporto tra grandezze omogenee e non omogenee

Nel caso dei problemi di proporzionalità il significato più frequente da attribuire al rapporto fra grandezze omogenee non è tanto quello *di contenenza*, quanto piuttosto quello di una costante numerica da preservare in *analoghi* rapporti; con la proporzionalità dunque non si tratta solo di reiterare un algoritmo noto ma di arricchirlo di un ulteriore significato.

Quanto appena detto fa soprattutto riferimento ai casi in cui la moltiplicazione o il rapporto relazionano *grandezze omogenee*, dando luogo ad un grandezza non omogenea alle prime due, ovvero quando da due grandezze *non omogenee* si perviene ad una grandezza non omogenea alle originali. Casi tipici di quanto detto sono il calcolo dell'area di un rettangolo partendo dai suoi lati o il calcolo della velocità partendo da spazio e tempo.

Queste considerazioni si rifanno alla teoria generale delle grandezze elaborata da Darbo (1969, 1 – 7) nella quale viene riportato il processo di costruzione di *classi di omogeneità* all'interno di un insieme in cui è definita una operazione binaria di moltiplicazione e quattro assiomi che caratterizzano l'insieme.

Tali classi di omogeneità possono essere messe in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri reali positivi, infatti a ciascuna grandezza x appartenente ad una classe di omogeneità si può associare la sua misura rispetto un'altra grandezza u omogenea ad essa e fissata (rapporto x/u), la misura sarà un numero reale positivo. È possibile dimostrare che la corrispondenza tra le classi di omogeneità e l'insieme dei reali positivi è biunivoca e conserva l'ordinamento della classe di omogeneità, vale a dire che a due grandezze omogenee a e b tali che a>b corrispondono rispettivamente due numeri reali a/u e b/u per i quali vale $a/u > b/u$, si dice che la corrispondenza è un *isomorfismo* di ordine. È importante notare che essendo ciascuna classe di omogeneità in relazione con l'insieme dei numeri reali tramite una funzione biunivoca, esse saranno altrettanto relazionabili tra loro con una corrispondenza biunivoca ed ordinata.

Tale relazione tra classi di omogeneità non è altro che una relazione di proporzionalità diretta, in quanto se per una classe si sceglie come unità di misura una grandezza u, e per l'atra una grandezza h, si ha che le due classi sono relazionate all'insieme dei numeri reali positivi da corrispondenze del tipo f(x/u) e g(y/h) e tra di loro da una relazione avente la forma

$$F(x) = (h/u)x=Kx$$

Quanto detto mostra il ruolo fondamentale che assume la funzione di proporzionalità diretta quale anello di connessione tra grandezze non omogenee in grado di esprimere ed interpretare relazioni intercorrenti tra esse.

3.3 Il pensiero proporzionale nella Teoria dei campi concettuali di Vergnaud

La Teoria cognitivista dei campi concettuali elaborata da Vergnaud (1991, 133 - 170) assume un ruolo privilegiato all'interno della Teoria delle situazioni, in quanto costituisce insieme ad essa un modello teorico innovativo per l'interpretazione dei processi di insegnamento/apprendimento. Sviluppando la sua teoria, Vergnaud cerca di chiarire i processi di concettualizzazione progressiva di alcuni campi concettuali, i quali vengono definiti come insieme di situazioni per dominare le quali si richiede un'ampia varietà di concetti e di rappresentazioni simboliche collegate tra loro.

In particolare, Vergnaud considera un campo concettuale come l'insieme delle situazioni che danno senso al concetto (il *riferimento*), degli invarianti operatori sui quali si basa l'operatività degli schemi evocati nel singolo soggetto dalla situazione (il *significato*) e delle forme linguistiche e non linguistiche che permettono di rappresentare simbolicamente il concetto (il *significante*). Secondo tale definizione, un concetto risulta essere una terna di tre insiemi: l'insieme delle situazioni di riferimento per il concetto, l'insieme degli invarianti operatori e l'insieme delle rappresentazioni linguistiche (Spagnolo, 1998, 124). Le situazioni di riferimento sono le situazioni problematiche esperite dal soggetto che restano associate al concetto nella memoria a lungo termine e sono depositarie del senso con cui il concetto viene vissuto dal soggetto; gli invarianti operatori sono le proprietà del concetto su cui si basano gli schemi che il soggetto mette in opera per risolvere i problemi da affrontare; le rappresentazioni linguistiche infine sono parole, segni geometrici o formule che consentono di riflettere sul concetto, di comunicare a proposito del suo uso e di utilizzarlo nella risoluzione dei problemi.

Tra i campi concettuali inizialmente indicati da Vergnaud è possibile menzionare il campo concettuale delle strutture additive e quello delle strutture moltiplicative, oltre al campo concettuale delle misure spaziali e quello riferito a questioni di dinamica.

Il campo concettuale delle strutture moltiplicative, in particolare viene definito come l'insieme delle situazioni il cui trattamento implica una o più moltiplicazioni o divisioni, oltre che come l'insieme dei concetti e dei teoremi che permettono di affrontare tali situazioni.

Pesci (2002, 34) sottolinea come la proporzionalità diretta occupa un posto centrale all'interno del campo concettuale moltiplicativo, anche se l'esistenza di questa stretta connessione non deve certo indurre a concludere che per affrontare la tematica della proporzionalità devono essere sviluppati come propedeutici ad essa tutta una serie di concetti matematici cui è collegata, quali la nozione di frazione, di variabile, di funzione, eccetera. L'autrice suggerisce invece che tali tematiche vengano *sviluppate in parallelo*, grazie ad un'attenta programmazione didattica.

La seguente trattazione mette in evidenza che proprio la nozione di funzione come caso particolare di relazione è un concetto basilare nei processi di insegnamento/apprendimento, in quanto permette di sintetizzare molti altri concetti matematici e condensare varie esperienze didatticamente significative.

In effetti, l'apprendimento dall'aritmetica all'algebra può essere considerato come un unico itinerario che, partendo dalle strutture additive, prosegue verso quelle moltiplicative con problemi di moltiplicazione e divisione, per giungere a una prima sintesi nella classe dei problemi moltiplicativi che si esprimono altrimenti nella funzione di proporzionalità diretta.

La teoria di Vergnaud a proposito dei concetti appare particolarmente utile per l'insegnamento/apprendimento della matematica in quanto mostra come la padronanza di un concetto è una acquisizione complessa che procede per gradi lungo le tre componenti indicate, le quali dovrebbero fungere da modello per l'analisi e la progettazione dell'apprendimento di un concetto.

Capitolo 4

Una esperienza di Ricerca in Didattica condotta in ambiente multiculturale

Il ruolo della ricerca in campo didattico quale mezzo per il miglioramento e lo sviluppo del sistema scolastico, in modo particolare nell'ottica della piena autonomia didattica e organizzativa[17], presuppone una chiara definizione della problematica su cui si intende intervenire.

In questo senso è indispensabile mettere in evidenza la crescente tendenza di un fenomeno che gli insegnanti si trovano ad affrontare sempre più di frequente: la presenza nelle proprie classi di alunni provenienti da ambienti culturali differenti[18].

Rispetto a questa evidenza, molto spesso si assiste a un particolare dispendio di energie per intervenire nell'ottica di una *integrazione delle differenze* che trascende a mio avviso nel concetto di omologazione.

Il termine *integrazione* viene comunemente inteso come il passaggio di un bambino segregato, in una classe regolare: sicuramente questo tipo di definizione è riduttiva nei confronti di un concetto che, come sostiene Canevaro (1996, 183), «non significa affatto assunzione di una situazione statica ma richiesta di trasformazioni per rispondere a bisogni integrati e integrabili».

In un altro lavoro Canevaro (1983, 16) definisce l'integrazione proprio come «un cambiamento e un adattamento reciproco, un processo aperto e correlato con il riconoscimento e l'assunzione delle identità e delle conoscenze incorporate».

---

[17] Il Regolamento in materia di Autonomia delle istituzioni scolastiche previsto dal DPR n. 275 dell'8 marzo 1999, come recita l'articolo 3 – comma 1, si configura come «documento fondamentale costitutivo dell'identità culturale e progettuale delle istituzioni scolastiche ed esplicita la progettazione curricolari, extracurricolare, educativa ed organizzativa che le singole scuole adottano nell'ambito della loro autonomia».

Con il Regolamento sull'Autonomia organizzativa e didattica infatti si definiscono le condizioni di esercizio effettivo dell'autonomia riconosciuta dalla legge 59/97, con specifico riferimento agli spazi decisionali in materia di curricolo e di scelte organizzative.

[18] Nel corso degli anni novanta in Italia, si assiste ad un'evoluzione nella raccolta dei dati statistici che rispecchia la sempre maggiore consistenza delle presenze straniere e la necessità di comprendere meglio il fenomeno.

Secondo i dati del ministero della Pubblica Istruzione nell'anno scolastico 1998/99 gli studenti stranieri erano 85.522, pari all'1,09% dell'intera popolazione scolastica.

Nel 1999/2000 le scuole italiane, dalla materna alle medie superiori, sia pubbliche sia convenzionate, sono state frequentate da 119.679 allievi con cittadinanza non italiana.

La percentuale di stranieri sul totale degli iscritti è stata dell'1,47% Inoltre, il maggior numero di presenze (52.973) si rileva, in particolar modo, nella scuola elementare; seguono le medie inferiori (28.891), le scuole materne (24.103) e le superiori (13.712).

All'inizio dell'anno scolastico 2000/2001 gli iscritti non italiani sono stati circa 140.000 e corrispondono al 2% del totale degli studenti, con un incremento di circa 20.000 e di più di mezzo punto percentuale in un anno. A tal proposito è possibile consultare il sito: http://www.istat.it/Popolazion/Stranieri/index.htm

La Ricerca in Didattica può apportare il proprio contributo in questa direzione, nel caso in cui si mostra atta a formulare principi orientativi per l'attività didattica, partendo dall'analisi di una serie di indagini sul campo.

L'obiettivo della ricerca è quello di configurare le differenze nelle argomentazioni di allievi provenienti da differenti ambienti socioculturali, al fine di individuare i modelli culturali di appartenenza e valorizzarli nella messa a punto di percorsi educativi individualizzati.

4.1 Presentazione del lavoro sperimentale

<u>Ipotesi generale:</u>

In situazioni di insegnamento/apprendimento esistono delle differenze nei processi e nelle argomentazioni rispetto ai modelli culturali di appartenenza.

<u>Ipotesi operative:</u>

1. Le strategie risolutive e le argomentazioni ricorrenti di allievi di età compresa tra gli otto e i dieci anni, rispetto alla situazione – problema di geometria, fanno riferimento al rapporto tra grandezze omogenee.
2. Le strategie risolutive e le argomentazioni ricorrenti di allievi di età compresa tra gli otto e i dieci anni, rispetto alla situazione – problema di aritmetica, fanno riferimento al pensiero proporzionale intuitivo.
3. Le strategie risolutive e le argomentazioni di allievi cinesi di età compresa tra gli otto e i dieci anni, rispetto alla situazione – problema di geometria, fanno riferimento a intuizioni empiriche.
4. Le strategie risolutive e le argomentazioni di allievi cinesi di età compresa tra gli otto e i dieci anni, rispetto alla situazione – problema di aritmetica, fanno riferimento al rapporto tra grandezze omogenee.
5. I fattori socioculturali influenzano le argomentazioni delle strategie risolutive di una situazione – problema di geometria, durante la fase di validazione di una situazione a – didattica.
6. I fattori socioculturali influenzano le argomentazioni delle strategie risolutive di una situazione – problema di aritmetica, durante la fase di validazione di una situazione a – didattica.
7. Il confronto di strategie risolutive e argomentazioni differenti è funzionale all'esplorazione cooperativa dei contenuti.

<u>Obiettivo generale:</u>

Individuare possibili differenze nei processi e nelle argomentazioni delle strategie risolutive di situazioni problematiche di geometria e aritmetica in ambiente multiculturale.

<u>Obiettivi specifici:</u>

1. Rilevare le strategie risolutive e le argomentazioni ricorrenti di allievi di età compresa tra gli otto e i dieci anni, rispetto alla situazione – problema di geometria (situazione problema A).
2. Rilevare le strategie risolutive e le argomentazioni ricorrenti di allievi di età compresa tra gli otto e i dieci anni, rispetto alla situazione – problema di aritmetica (situazione problema B).

3. Individuare le strategie risolutive e le argomentazioni di allievi cinesi di età compresa tra gli otto e i dieci anni, rispetto a una intervista semi – strutturata, contenente una situazione – problema di geometria e una situazione – problema di aritmetica.
4. Individuare le modalità con cui i fattori socioculturali influenzano le argomentazioni delle strategie risolutive di una situazione – problema di geometria, durante la fase di validazione di una situazione a – didattica.
5. Individuare le modalità con cui i fattori socioculturali influenzano le argomentazioni delle strategie risolutive di una situazione – problema di aritmetica, durante la fase di validazione di una situazione a – didattica.
6. Confrontare e trarre inferenze sulle modalità con cui le strategie risolutive e argomentazioni differenti sono funzionali all'esplorazione cooperativa dei contenuti.

<u>Disegno sperimentale:</u>

Per falsificare l'ipotesi generale, l'attività di ricerca si è articolata in tre fasi:

Durante la prima fase ci si è proposti di somministrare una situazione – problema, composta da due problemi aperti, a un campione casuale di circa 100 allievi, per individuare quali sono le strategie risolutive e le argomentazioni ricorrenti relative ai contenuti proposti.

Durante la seconda fase ci si è occupati di somministrare un'intervista semi – strutturata a due alunni stranieri inseriti nel contesto scolastico siciliano, per rilevare le strategie risolutive e di socializzazione che emergono rispetto alle situazioni – problema proposte.

La terza fase costituisce propriamente l'esperimento, in cui è stato ipotizzato di utilizzare un piano sperimentale a gruppo unico: si è proposto a un gruppo classe multiculturale la situazione – problema, dalla quale si ricavano dati quantitativi, e si è successivamente introdotto il fattore sperimentale, il quale si compone di due situazioni a – didattiche che utilizzano come modello di riferimento uno strumento storico per la didattica della matematica, il romanzo di Abbot *Flatlandia. Racconto fantastico a più dimensioni*. [19]

Durante la messa in opera del fattore sperimentale sono stati rilevati dei dati qualitativi, sulla base delle osservazioni descrittivo – diaristiche condotte in itinere dalla sottoscritta, mediante l'analisi dei protocolli prodotti dal gruppo e dall'osservazione degli audiovisivi prodotti durante l'attività.

A seguito della somministrazione del fattore sperimentale, è stato proposto nuovamente al gruppo la situazione – problema per rilevare gli effetti prodotti dal fattore sperimentale.

Allo stesso gruppo è stato inoltre somministrato un breve questionario a risposta aperta, al fine di rilevare il livello motivazionale durante la somministrazione del fattore sperimentale.

---

[19] Il romanzo "Flatlandia. Racconto fantastico a più dimensioni" è stato scritto e pubblicato dal reverendo Edwin A. Abbot nel 1882.
Si tratta di un racconto fantastico che, a qualche anno dalla pubblicazione, attira l'attenzione dei matematici e scienziati che vi vogliono riscontrare un'anticipazione della teoria einsteiniana.

I dati qualitativi sono stati rapportati ai dati quantitativi relativi all'analisi della situazione – problema, permettendo di far emergere i processi attraverso i quali gli alunni hanno risolto le situazioni problematiche, nonché le motivazioni che li hanno spinto a procedere in un determinato modo in relazione allo stimolo proposto, traendo le conclusioni relative all'ipotesi generale.

I dati quantitativi rilevati attraverso la somministrazione del problema – aperto in seguito all'introduzione del fattore sperimentale, infine, sono stati confrontati con i dati rilevati, attraverso lo stesso strumento, dal campione di circa 100 alunni, durante la prima fase.

Campione:

L'indagine è stata rivolta, per quanto riguarda la prima fase, a 90 allievi di età compresa tra gli otto e i dieci anni, frequentanti le classi quarte – quinte del Circolo Didattico "G. Oberdan" di Palermo, secondo un tipo di campionamento casuale, ed è stata svolta durante i mesi di aprile e maggio del 2003.

La situazione problema è stata rivolta anche a 7 allievi stranieri, 4 cinesi e 3 tunisini, inseriti in un progetto di integrazione scolastica presso la scuola media statale "A. Roncalli" di Palermo.

Per quanto riguarda più specificatamente la seconda e la terza fase, l'indagine è stata rivolta a una classe quarta del Circolo didattico "E. Amari" di Palermo, in cui sono inseriti 3 allievi cinesi, due di sesso femminile e uno di sesso maschile.

L'intervista semi – strutturata è stata destinata alle due allieve cinesi, di sesso femminile, frequentanti una classe prima della scuola media statale "A. Roncalli" di Palermo.

4.2 La prima fase della sperimentazione

La prima fase della sperimentazione ha previsto la somministrazione di due problemi aperti a un campione di 97 alunni, con l'obiettivo specifico di rilevare le strategie risolutive e le argomentazioni ricorrenti di allievi di età compresa tra gli otto e i dieci anni, rispetto alle situazioni – problema proposte.

La situazione – problema somministrata durante la prima fase della ricerca contiene due problemi aperti: nello specifico, nel primo problema aperto (situazione problema A) viene richiesto all'alunno di comporre in tre modi differenti tre poligoni dati, di individuare se si tratta di figure equivalenti e di motivare la propria risposta; in questo modo l'alunno è indotto a dare una prima definizione del concetto di equivalenza.

Nel secondo problema aperto (situazione problema B) viene proposto all'alunno di trovare il rapporto di similitudine tra due rettangoli e di esplicitare il processo per trasformare la figura A nella figura B, per configurare le strategie adottate nella configurazione dell'operatore.

La somministrazione delle situazioni – problema è stata attuata tra aprile e maggio 2003, concordando degli appuntamenti con l'insegnante dell'ambito logico – matematico di ciascuna classe, al fine di creare un clima funzionale allo svolgimento della prova.

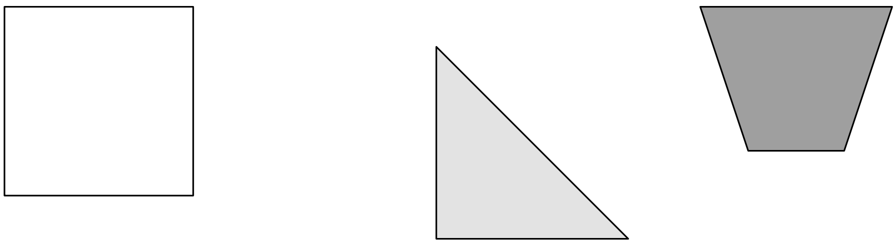
Per lo svolgimento di entrambe le situazioni - problema sono stati impiegati in media 40 minuti, durante le prime ore della mattina.

4.2.1 Descrizione delle situazioni – problema

Le situazioni – problema ideate sono state presentate al campione nella forma che segue.

Situazione – problema A

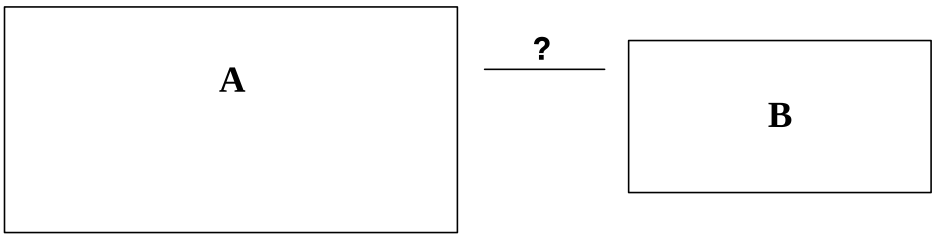
Disegna tre poligoni diversi, ottenuti unendo le figure che vedi qui sotto.



Domanda: Le tre figure che hai ottenuto sono equivalenti? Motiva la tua risposta.

Situazione – problema B

Osserva le due figure poste qui sotto.



Esse sono simili e misurano

A = 6 cm X 3 cm

B = 4 cm X 2 cm

Domanda: Come fai a passare dalla figura A alla figura B? Sai trovare l'operatore che trasforma la figura A nella figura B? Spiega il procedimento che intendi utilizzare e motivalo.

4.2.2 L'analisi a-priori delle strategie risolutive

L'analisi a-priori ha permesso di determinare le possibili strategie risolutive in riferimento alle situazioni problema.

Lo strumento dell'analisi a-priori, oltre a fornire la possibilità di tabulare i dati emersi dalla somministrazione dei problemi aperti, configurandosi altresì come risorsa funzionale ai fini valutativi, consente di poter focalizzare l'attenzione del ricercatore su una serie di aspetti interessanti, il primo dei quali può essere considerato lo *spazio degli eventi*, ovvero l'insieme delle possibili risposte che si possono ipotizzare in uno specifico contesto.

Sulla base dello *spazio degli eventi* è possibile inoltre individuare sia il *buon problema*, quello che permette la migliore formulazione in termini ergonomici della conoscenza, sia le variabili didattiche che permettono di favorire un cambiamento nel comportamento degli allievi (Spagnolo, 1998, 268).

L'analisi a-priori è stata condotta sia durante la costruzione dei problemi aperti, facendo riferimento alle attese personali del ricercatore e all'analisi epistemologica dei contenuti messi in gioco, sia a seguito della somministrazione delle situazioni problema al campione di 97 alunni.

Le strategie risolutive che sono state prese in considerazione per la tabulazione dei dati rispetto alla prima situazione problema (problema A) sono di seguito elencati:

Domanda A: Le figure che hai ottenuto unendo in modo diverso i tre poligoni dati sono equivalenti? Motiva la tua risposta.
A1: Le figure ottenute sono equivalenti perché occupano la stessa superficie.
A2: Le figure ottenute sono equivalenti perché sono formate da poligoni di partenza uguali.
A3: Le figure ottenute sono equivalenti perché, pur avendo diversa forma, hanno la stessa dimensione.
A4: Le figure ottenute sono equivalenti perché hanno la stessa area e lo stesso perimetro.
A5: Le figure ottenute sono equivalenti.
A6: Le figure ottenute non sono equivalenti.
A7: Le figure ottenute non sono equivalenti perché non occupano lo stesso spazio.
A8: Le figure ottenute non sono equivalenti perché hanno forma diversa.

Quelle utilizzate in riferimento alla seconda situazione problema (problema B) sono le seguenti:

Domanda B: Come fai a passare dalla figura A alla figura B (due rettangoli simili)? Sai trovare l’operatore che trasforma la figura A nella figura B? Spiega il procedimento che intendi utilizzare e motivalo.
B1: L’operazione utilizzata è la divisione. L’operatore adoperato è :1,5 perché facendo la divisione tra i lati corrispondenti (6:4 = 1,5 e 3:2 = 1,5), si ottiene questo operatore.
B2: L’operazione utilizzata è la divisione. L’operatore adoperato è :1,5 perché mi trasforma i lati del rettangolo A nei lati del rettangolo B.
B3: L’operazione utilizzata è la divisione perché è necessario rimpicciolire. L’operatore adoperato è :1,5 perché :2 si ottiene un rettangolo più piccolo quindi, per tentativi, si arriva a questo operatore che permette di passare esattamente dalla figura A alla figura B.
B4: L’operazione utilizzata è la sottrazione perché per trasformare una figura più grande in una più piccola bisogna togliere.
B5: L’operazione utilizzata è la sottrazione. Gli operatori adoperati sono -2 e -1 perché permettono di ottenere la misura dei lati della figura B.
B6: L’operazione utilizzata è la moltiplicazione. L’operatore adoperato è x2 perché permette di passare dalla figura B alla figura A (3x2 = 6 e 2x2 = 4).
B7: L’operazione utilizzata è la divisione.
B8: L’operazione utilizzata è la sottrazione.

4.2.3 Analisi dei dati sperimentali

L’analisi dei dati in riferimento alla somministrazione dei problemi aperti al campione di 97 alunni è stata condotta grazie all’applicazione della statistica descrittiva, con il calcolo della frequenza relativa percentuale, e attraverso l’uso del *software* statistico CHIC, il quale permette di studiare le implicazioni tra gli indicatori.

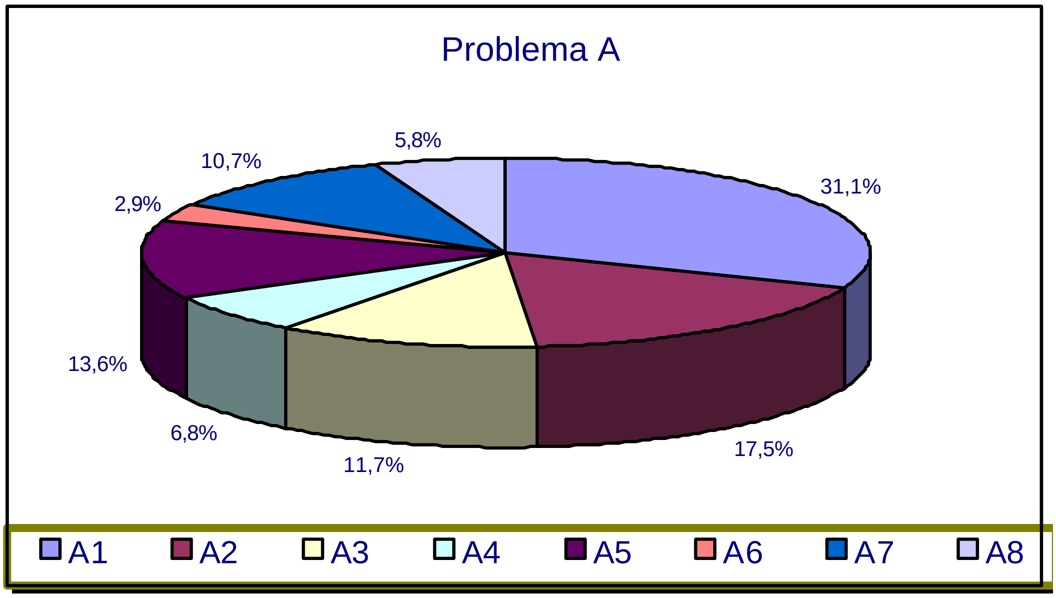
Analisi descrittiva

I dati emersi dalla somministrazione delle situazioni problema, tabulati sulla base dell’analisi a-priori, sono stati inseriti in 2 tabelle a doppia entrata *alunni-strategie*, una in riferimento alla prima situazione problema, l’altra in riferimento alla seconda.

All’interno delle tabelle sono stati indicati per ciascun alunno i seguenti elementi:

- Valore 1: Strategie di cui l’alunno si è servito.
- Valore 0: Strategie di cui l’alunno non si è servito.
- Le tabelle ottenute grazie al supporto EXCEL sono consultabili in allegato.

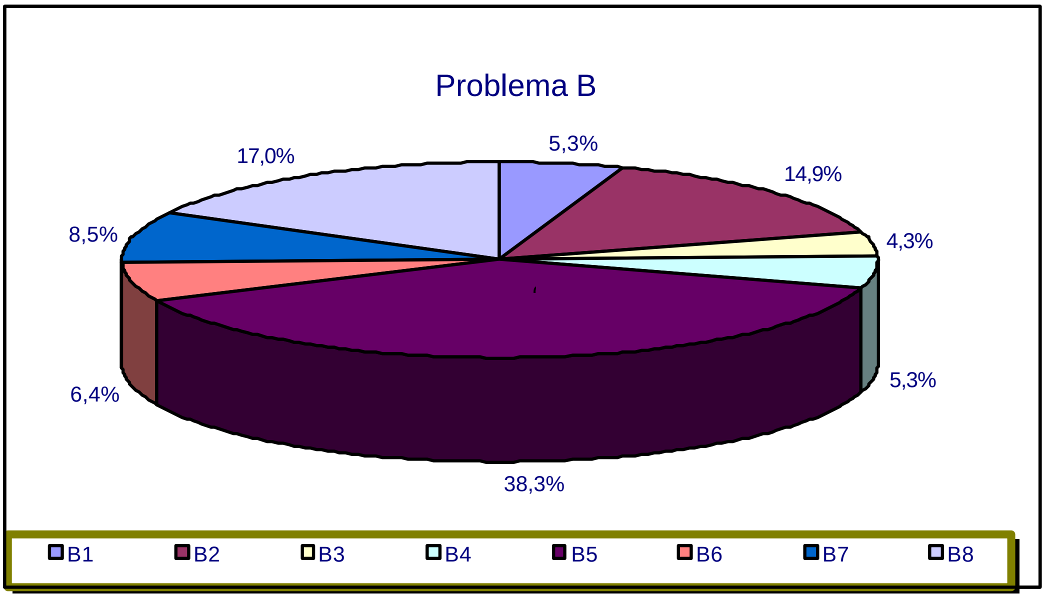
Riguardo le risposte degli allievi a cui è stato sottoposto il problema aperto A emergono i seguenti dati:



- Circa il 45.5% (A1+A3) degli allievi motiva esattamente il perché le figure geometriche ottenute dalla composizione dei tre poligoni dati risultano equivalenti, facendo riferimento all'uguaglianza delle superfici occupate e distinguendo quindi il concetto di forma da quello di estensione;
- Il 15.46% degli allievi riconosce l'equivalenza tra i poligoni ottenuti, ma collega questo concetto all'uguaglianza tra le figure elementari di partenza, senza menzionare il fattore area (A2);
- Il 7.2% degli allievi conferma l'equivalenza dei poligoni ottenuti associando al concetto di equivalenza la concomitante uguaglianza dell'area e del perimetro (A4);
- Il 14.43% riconosce l'equivalenza tra i poligoni composti ma non motiva la risposta (A5);
- Una piccola percentuale (il 3% circa) non riconosce l'equivalenza tra i poligoni composti ma non motiva questa affermazione (A6);
- Per l'11.34% (A7) degli allievi le figure composte non sono equivalenti in quanto non occupano lo stesso "spazio"; questo indica che il concetto di spazio occupato nel piano non viene associato a quello di area, ma probabilmente a quello di perimetro o forma.
- Il concetto di equivalenza viene associato da alcuni allievi alla forma dei poligoni, infatti il restante 6.2% del campione esclude l'equivalenza tra i poligoni composti in base alla diversa forma (A8).

Da quanto rilevato emerge dunque che la maggior parte degli allievi conosce la nozione di equivalenza ed effettua una distinzione tra area forma e perimetro; una parte degli allievi mostra, invece, qualche difficoltà nel discernere i concetti di area e forma, difficoltà che potrebbe essere superata avvalendosi del concetto di unità misura.

La somministrazione del secondo problema aperto, che richiedeva l'applicazione dei concetti di divisione e moltiplicazione ha fornito i seguenti dati:

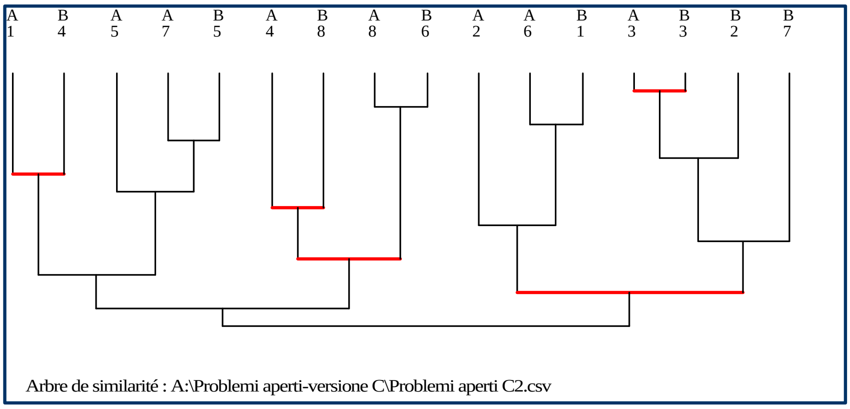


- Oltre il 32% composto dai gruppi di risposte B1(5.32%), B2(14.89%), B3(4.25%) e B7(8.51%) degli allievi identifica nella divisione l'operatore più efficace per trasformare il rettangolo maggiore nel più piccolo, in particolare la divisione per 1.5 è quella utilizzata da un folto gruppo. In particolare alcuni alunni (B1) motivano la scelta dell'operatore :1.5 in quanto 1.5 è il rapporto tra lati corrispondenti dei due rettangoli, altri lo scelgono senza dare una particolare spiegazione (B2), un gruppo (B3) arriva a questo valore per tentativi e considerando che una divisione per 2 darebbe un rettangolo troppo piccolo, infine alcuni rispondono solo che l'operazione da utilizzare è la divisione ma non specifica il divisore (B7);
- Una parte degli alunni, circa il 17% (B8) indica la sottrazione come operazione da utilizzare ma non ne spiega il motivo; una piccola percentuale, pari al 5.31% (B4) sfrutta la nozione di sottrazione nella sua più immediata applicazione, ossia ridurre una quantità, ma non descrive una strategia precisa. Una buona parte di alunni, pari al 36% (B5), concretizza il concetto di operatore in una serie di trasformazioni applicate a singole parti della figura geometrica in esame, in particolare, sottraendo ad ogni lato del rettangolo A il valore per il quale differisce dal corrispondente del rettangolo B;
- Una piccola percentuale di alunni dimostra di saper applicare il concetto di moltiplicazione come operatore che amplifica le dimensioni di una quantità (B6) ma porta a far coincidere i due rettangoli agendo sulle dimensioni di B, non rimpicciolendo A come indicato nel testo. Questo atteggiamento suggerisce che, probabilmente, introdurre il concetto di moltiplicazione di una quantità per un numero <1 darebbe le basi per risolvere il problema proposto anche con l'ausilio dell'operatore moltiplicazione, in alternativa alla divisione.

Dalle risposte registrate appare chiaro che il campione esaminato non ha particolari difficoltà nell'associare alle quattro operazioni un significato fisico e applicarle in un problema concreto, in questo emerge anche una diversità nelle procedure adottata; prevale l'uso della sottrazione che probabilmente viene più facilmente metabolizzato come strumento per ridurre.

L'albero della similarità

il software CHIC permette la costruzione rapida del grafico della similarità, strumento utile alla configurazione delle variabili simili e del grado di similarità.



Dall'osservazione del grafico di similarità si delineano sostanzialmente quattro gruppi ed emergono le seguenti informazioni:

- Nel primo gruppo si nota un'elevata similarità tra le strategie A3 e B3, le quali si correlano poi con B2 e, in modo trascurabile, con B7.
- Nel secondo gruppo le strategie A6 e B1 mostrano un buon grado di similarità; queste presentano similarità decisamente minore con A2.
- Nel terzo gruppo, una similarità molto alta si riscontra tra le variabili A8 e B6, correlate in modo trascurabile con le coppie A4 e B8, al cui interno si rileva una scarsa similarità.
- Nel quarto gruppo si nota una scarsa similarità tra le variabili coinvolte, fatta eccezione per la coppia A7 e B5 che mostra una discreta similarità.

Del primo gruppo fanno parte coloro che utilizzano strategie che mostrano la conoscenza dei concetti di equivalenza e similitudine e argomentano tali strategie con procedimenti di tipo locale, facendo dei riferimento di tipo teorico.

Al secondo gruppo appartengono gli alunni che, nel caso del problema A, non giustificano la strategia adottata e nel caso della seconda situazione-problema, argomentano correttamente la strategia risolutiva messa in atto, definendo la strategia e argomentandola in modo generale e facendo riferimenti di tipo pragmatico.

Le due variabili sono accomunate dallo scarso numero di alunni che le ha utilizzate.

Nel terzo gruppo è rilevante evidenziare la similarità tra alunni che non rispondono correttamente alle due situazioni – problema e argomentano le proprie strategie facendo riferimento a delle *teorie ingenue*.

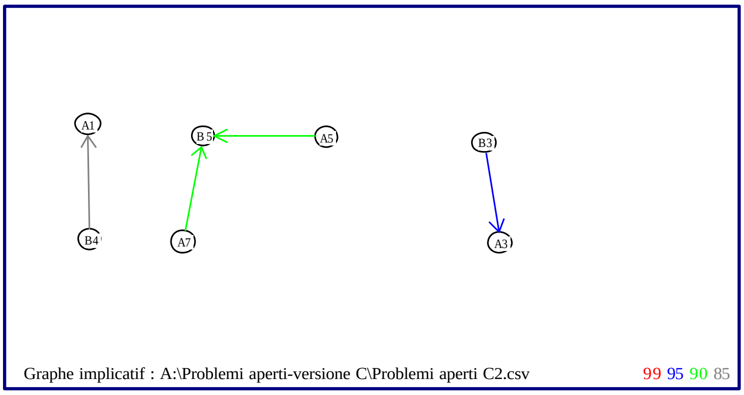
Del quarto gruppo fanno parte coloro che, come nel gruppo precedente cui è correlato, non utilizzano strategie corrette e le argomentano in modo teorico, facendo riferimento a delle teorie ingenue.

<u>Analisi implicativa delle variabili</u>

L'analisi implicativa delle variabili, strumento statistico messo a punto da Régis Gras (1997, 99 – 109) nell'ambito di ricerche riguardanti la Didattica della matematica, permette di misurare il grado di validità di una proposizione implicativa tra variabili binarie e non binarie (Spagnolo, 1997, 111 – 117).

Lo strumento utilizzato per costruire il grafico implicativo delle variabili, a partire dalle strategie individuate attraverso l'analisi a – priori, è il software CHIC.

Grafico implicativo



Dall'analisi del grafico implicativo emerge che le strategie B3 e A3 hanno un'implicazione del 95% e questo significa che, relativamente al problema B, nel caso in cui l'allievo esplicita la strategia adottata e la giustifica, individuando per tentativi che la divisione è l'operatore più efficace per trasformare il rettangolo, argomenta correttamente il perché le figure geometriche ottenute dalla composizione dei tre poligoni risultano equivalenti nello svolgimento del problema A. L'alunno argomenta la situazione – problema B facendo riferimento ai concetti teorici di equivalenza e di similitudine, conoscenze di cui si serve anche per l'argomentazione della strategia utilizzata nel risolvere la situazione – problema A.

Un altro dato significativo è che la procedura A7 implica la procedura B5 nel 90% dei casi e questo indica che l'allievo che risolve il problema A, affermando che le figure geometriche non sono equivalenti perché non occupano lo stesso spazio, nell'argomentare l'operazione utilizzata per trasformare il rettangolo esplicita che è necessario sottrarre ad ogni lato del rettangolo A il valore per il quale differisce dal corrispondente del rettangolo B.

L'allievo che non distingue i concetti di superficie e di forma nella risoluzione del problema, dunque, non elabora una strategia consapevole che agisca sul parametro area per la risoluzione della seconda situazione – problema. Esiste un'implicazione del 90% anche tra le strategia A5 e quella B5; ciò comporta che l'alunno non argomenta l'equivalenza tra le figure geometriche, pur affermandone l'esistenza, e individua nella sottrazione l'operazione adatta a rimpicciolire il rettangolo, nella seconda situazione – problema.

È possibile infine individuare che la strategia B4 implica la strategia A1 all'85%: l'alunno in questo caso individua la sottrazione come operazione necessaria a ridurre il rettangolo, per risolvere la seconda situazione – problema. Tale strategia viene spiegata tramite argomentazioni di tipo generale e non elaborando una procedura concreta. La padronanza del concetto teorico di equivalenza viene mostrata nell'implicazione con la strategia A1, nella quale l'alunno riconosce figure geometriche equivalenti aventi diversa forma e si serve di argomentazioni che fanno riferimento al sapere matematico.

Tra le altre strategie non sono emerse implicazioni significative, il che induce a ritenere che le variabili individuate per l'analisi dei dati sono indipendenti.

4.2.4 Riflessioni conclusive

Dall'analisi dei dati sperimentali, in riferimento alla situazione – problema A, emerge che la maggior parte degli allievi (il 45.5% circa) ha utilizzato le strategie A1 e A3 e motivato esattamente il perché le figure geometriche ottenute dalla composizione dei tre poligoni dati risultano equivalenti, facendo riferimento all'uguaglianza delle superfici occupate e distinguendo quindi il concetto di forma da quello di estensione. Tali allievi hanno utilizzato dunque uno schema di ragionamento che fa riferimento alla proporzionalità fra grandezze, motivandolo con argomentazioni di tipo locale, con riferimento di tipo teorico atti a giustificare la strategia adottata. Ciò mette in evidenza la tendenza ad avvalersi del pensiero proporzionale in contesto geometrico.

Da quanto rilevato emerge inoltre che solo una piccola parte degli allievi ha mostrato qualche difficoltà nel discernere i concetti di area e forma, difficoltà che potrebbe essere superata avvalendosi del concetto di unità misura.

Rispetto alla situazione – problema B, come messo in evidenza nella seconda ipotesi operativa, le attese del ricercatore sono state rivolte a riscontrare che il campione utilizzasse nella risoluzione del problema, gli schemi di ragionamento proporzionale di tipo intuitivo, per tentativi ed errori, evidenziati nella strategia B3. La strategia B3 può essere considerata una variabile simile alla strategia A3, emersa rispetto alla situazione – problema A. Dall'analisi del grafico implicativo, inoltre, si osserva che le strategie B3 e A3 hanno un'implicazione del 95% e questo significa che, relativamente al problema B, nel caso in cui l'allievo esplicita la strategia adottata e la giustifica, individuando per tentativi che la divisione è l'operatore più efficace per trasformare il rettangolo, argomenta correttamente il perché le figure geometriche ottenute dalla composizione dei tre poligoni risultano equivalenti, nello svolgimento del problema A. L'allievo argomenta la situazione – problema B facendo riferimento ai concetti teorici di equivalenza e di similitudine, conoscenze di cui si serve anche per l'argomentazione della strategia utilizzata nel risolvere la situazione – problema A.

In realtà, buona parte di alunni (pari al 36%) ha utilizzato la strategia B5 e concretizzato il concetto di operatore in una serie di trasformazioni applicate a singole parti della figura geometrica in esame, in particolare, sottraendo ad ogni lato del rettangolo A il valore per il quale differisce dal corrispondente del rettangolo B.

In questo senso è possibile rilevare il ricorso a differenze non costanti rispetto a rapporti costanti, ovvero ad operare in campo additivo piuttosto che in quello moltiplicativo. Ciò può indurre a riflettere sul fatto che alcune strategie del pensiero proporzionale possono essere correttamente utilizzate in contesto geometrico e non adoperate in altri contesti, in questo caso quello aritmetico.

Un altro elemento da mettere in evidenza è che la strategia adoperata viene commentata con argomentazioni di tipo locale, le quali fanno riferimento a teorie ingenue per giustificarla. Interessante è notare che oltre il 32% degli allievi ha identificato nella divisione l'operatore più efficace per trasformare il rettangolo maggiore nel più piccolo, in particolare la divisione per 1.5 è quella utilizzata da un folto gruppo. In particolare alcuni allievi hanno utilizzato la strategia B1, motivando la scelta dell'operatore :1.5 in quanto 1.5 è il rapporto tra lati corrispondenti dei due rettangoli, altri lo hanno scelto senza dare una particolare spiegazione, un piccolo gruppo ha utilizzato la strategia B3, giungendo a questo valore per tentativi ed errori.

Da un confronto tra le strategie risolutive utilizzate per la situazione – problema A e la situazione – problema B, infine, è possibile osservare che nel primo problema 17 alunni non hanno argomentato la risposta data al quesito; di questi 5 non hanno argomentato neanche la risposta al secondo problema. Il numero di risposte non argomentate sale per il secondo problema aperto, per il quale ai 5 già menzionati se ne sono aggiunti altri 19; questa osservazione sottolinea ancora che gli allievi utilizzano con maggiore consapevolezza schemi di ragionamento proporzionale in ambiente geometrico piuttosto che in quello aritmetico.

4.3 La seconda fase sperimentale

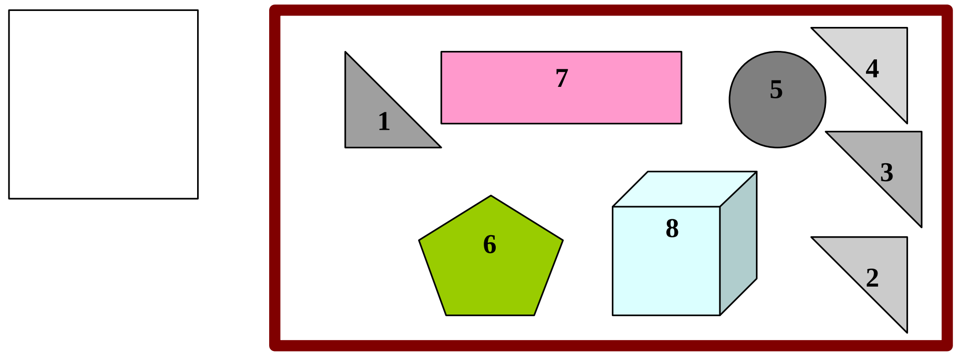
La seconda fase sperimentale ha previsto la somministrazione di un'intervista semi-strutturata a due alunni stranieri inseriti nel contesto scolastico siciliano, al fine di individuare le strategie risolutive e le argomentazioni di allievi cinesi, rispetto a una situazione – problema di geometria e una situazione – problema di aritmetica.

L'intervista semi-strutturata è stata costruita tenendo conto dei saperi in gioco nelle situazioni a – didattiche e nelle situazioni – problema.

Nello specifico, essa si articola in due situazioni - problema.

<u>Una situazione – problema di geometria</u>

Disegnate il maggior numero di figure contenute nel pannello all'interno del quadrato, ricoprendolo esattamente senza uscire fuori, e spiegate quali figure avete scelto e perché.



1. Quali figure avete scelto? Quali non avete scelto? Perché?

____

____

2. Pensate che il quadrato e le figure del pannello unite siano equivalenti? Perché?

____

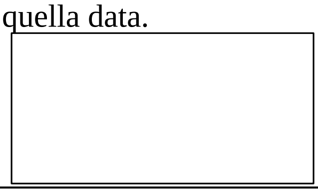
____

3. Come fate a stabilire con certezza che le due figure (il quadrato e quella formata dai 4 triangoli) sono equivalenti?

____

____

Spiegate con parole vostre come fareste ad ottenere una figura equivalente a quella data.



2 cm

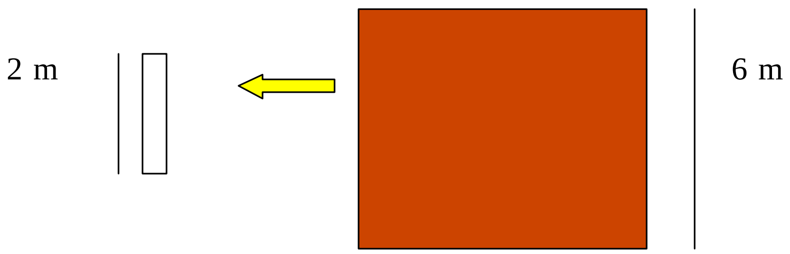
____

____

____

<u>Una situazione – problema di aritmetica</u>

Vogliamo far passare un tavolo largo 6 m attraverso una porta larga solo 2 m.



Riuscite a trovare tra gli operatori scritti nella tabella quelli che vi permettono di rimpicciolire il tavolo per farlo passare attraverso la porta? Puoi scegliere di fare anche più di una operazione.

+ 0,5	x 0,5	x 1,2	x 0,15	: 0,5	+ 0,3	x 0,4
x 0,25	x 0,3	: 0,3	x 0,2	x 0,1	: 2	:0,1

1. Quali operatori avete scelto? Perché?

____

____

2. Quali operatori avete scartato subito? Perché?

____

____

3. Quali operatori vi permettono di ottenere esattamente la misura della porta?

____

____

4. Per rimpicciolire la figura mi serve conoscere la misura dell'area? Perché?

____

____

Dalla somministrazione dell'intervista ai due alunni stranieri inseriti nel contesto scolastico siciliano ci si è proposti di ricavare informazioni sulle strategie risolutive di due studenti e sui processi di socializzazione che attivano in una situazione di omogeneità culturale.

In questo senso, dopo aver rilevato i dati durante l'introduzione del fattore sperimentale nella stessa classe in cui due alunni stranieri sono inseriti, è stato possibile attuare dei confronti e configurare le analogie e le differenze che emergono tra le argomentazioni messe in gioco durante l'intervista e quelle attivate durante la situazione a-didattica.

4.3.1 Analisi dei dati sperimentali

<u>Analisi qualitativa dei dati</u>.

Mann e Simonetta sono due alunne di origine cinese inserite da poco più di un anno nel contesto scolastico palermitano.

Mann ha 13 anni e frequenta insieme al fratello Hai Feng una classe IV di una scuola elementare. A differenza del fratello che non parla l'italiano, Mann è in grado di enunciare qualche parola italiana, anche se comunica con l'insegnante ed il resto della classe attraverso il dizionario cinese - italiano/italiano - cinese e utilizzando il linguaggio non verbale.

La lingua si configura quindi come un ostacolo alla socializzazione con il resto della classe.

Simonetta ha 10 anni e frequenta una classe IV della stessa scuola di Mann, nella quale è ben integrata. Possiede una sufficiente competenza in riferimento alla lingua italiana, anche perché ha vissuto per qualche anno in un'altra città italiana.

Per la somministrazione dell’intervista semi-strutturata, per una durata complessiva di circa 1 ora, sono state invitate le due alunne ad uscire dalle proprie classi e svolgere le attività in un setting più raccolto.

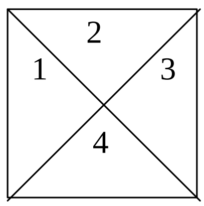
La consegna fornita alle alunne è stata quella di leggere insieme al ricercatore il testo delle situazioni-problema e rispondere alla domande aperte, solo dopo aver negoziato la risposta.

Il dialogo tra le due alunne, condotto spesso in lingua cinese, è stato tradotto grazie all’ausilio di un mediatore culturale ed è stato incluso in parte nel protocollo di osservazione redatto al termine della somministrazione dell’intervista.

In riferimento alla situazione – problema di geometria sono state fornite le seguenti risposte:

- <u>Domanda n°1</u>

Alla prima domanda Mann risponde escludendo subito la figura n°7 «perché ha un lato più lungo di quello del triangolo», la figura n°5 «perché ha i bordi rotondi» e quella n°6 “perché i bordi non combaciano».
Mann dice a Simonetta che, a parer suo le figure da scegliere sono la n° 1, la n° 2, la n° 3 e la n° 4 e Simonetta le risponde che quanto detto «è vero perché i bordi delle figure combaciano con il quadrato».
Alla mia richiesta di una risposta definitiva, Mann dichiara a Simonetta che le figure scelte sono sicuramente giuste e, sul retro stesso del test, invitando la compagna a guardare, disegna le diagonali del quadrato che incrociandosi formano le figure individuate.



A questo punto faccio notare che la figura n°8 non è stata presa in considerazione e ne chiedo il motivo.
Dopo un attimo di esitazione, durante il quale le alunne si guardano reciprocamente, Simonetta dice che «non è possibile mettere quella figura nel quadrato perché esce fuori» e Mann annuisce.

- <u>Domanda n°2</u>

Prima di rispondere alla seconda domanda, Simonetta spiega a Mann il significato della parola *equivalente*, in quanto anche con l’aiuto del mediatore culturale non siamo in grado di tradurre la parola.
Simonetta fa riferimento a un’attività di equiscomponibilità, sicuramente svolta in classe: «Guarda se taglio un quadrato in due e sposto un pezzo, ottengo due figure equivalenti».
Simonetta disegna su un foglio l’esempio fatto e Mann annuisce e pronuncia probabilmente la parola corrispondente in cinese.

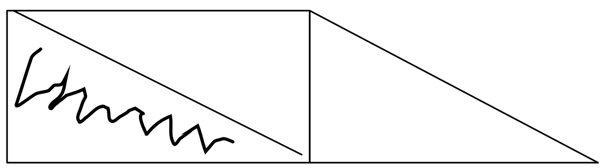
Mann allora chiede a Simonetta se le figure scelte sono equivalenti e questa risponde che non lo sono «perché sono più piccole».
In questo caso, prendendo consapevolezza della possibilità di aver posto una domanda in modo poco chiaro, sulla base del fatto che Simonetta risponde in riferimento alla singola figura e non considerando l'accostamento dei quattro triangoli.
Pongo nuovamente la domanda e Simonetta dice a Mann che i triangoli devono essere uniti.
Mann indica a Simonetta il disegno prodotto precedentemente e dice alla compagna «vedi che sono uguali?».
Simonetta allora mi dice che le figure «sono equivalenti perché la superficie che occupano è la stessa».

- Domanda n°3

Rispetto alla terza domanda Simonetta e Mann hanno uno scambio di idee più intenso; Mann afferma «È chiaro no? Lo vediamo dalla figura che sono equivalenti».
Simonetta risponde che questo modo non è «davvero giusto perché dobbiamo dire con certezza e quindi dobbiamo usare la formula».
Chiedo a Simonetta a quale formula fa riferimento e mi risponde che «se misuro l'area delle due figure e ottengo lo stesso numero, allora sono sicura che sono uguali».
Mann risponde: «Posso dire che sono uguali anche con il disegno» e mostra alla compagna il quadrato con le diagonali; poi continua «Se metto il n°1 qui, il n°2 qui, il n°3 qui e il n°4 qui, si vede che sono uguali perché combaciano».
Simonetta risponde che se misuriamo siamo ancora più sicuri della risposta.
Propongo allora alle alunne di scrivere entrambe le risposte e queste concordano.

- Domanda n°4

La risposta alla quarta domanda, a mio avviso, risente del dialogo precedente e Simonetta, senza consultare la compagna risponde subito che bisogna misurare l'area e disegnare una figura che ha l'area uguale. Io chiedo di spiegarmi il procedimento e allora mostra un attimo di esitazione. Simonetta chiede alla compagna «Tu lo sai?» e, dopo qualche minuto, Mann propone di fare come le ha fatto vedere Simonetta: «Possiamo tagliere a metà la figura e spostarne una parte». Simonetta chiede di mostrare il procedimento e Mann traccia direttamente sul foglio il seguente disegno:



Dopo cinque minuti di pausa, in riferimento alla seconda situazione – problema, sono emerse le seguenti risposte:

- Domanda n°1

Per dare una risposta alla prima domanda, Simonetta dice a Mann che «Si potrebbe fare la sottrazione ma non c'è tra i numeri dati».

Mann ribatte che se prendiamo la porta, notiamo che essa è la terza parte del tavolo, allora bisogna dividere. Mann segna sulla figura del tavolo 1/3 del suo lato. Simonetta continua dicendo che «6 : 3 fa 2 ma non c'è neanche :3 nella lista, quindi non si può usare». Mann chiede un momento di pazienza alla compagna e, su mia richiesta, esplicita che sta facendo dei calcoli mentalmente.
Dopo circa due minuti scrive sul foglio le seguenti operazioni:

20 X 0.1 = 2
0.3 ~~60~~
6
~~0~~

Mann dice che gli operatori sono : 0,3 e poi x 0,1.
Simonetta afferma «Si, è vero!». Chiedo allora a Mann di spiegarmi come è arrivata a formulare questa soluzione e lei mi spiega che ha provato a fare una serie di tentativi e ha trovato 6: 0,3 = 20; se poi questo risultato si divide per 10, oppure si moltiplica per 0,1 *che è lo stesso*, si ottiene 2.

- <u>Domanda n°2</u>

Alla seconda domanda, Simonetta e Mann concordano nello scartare subito gli operatori +0,5 e +0,3 perché, secondo Simonetta, «Aumentano i lati della figura e non servono a farla passare dalla porta».

- <u>Domanda n°3</u>

Alla terza domanda è Simonetta a ribadire subito: «Io avevo detto che si doveva fare :3 ma non lo hai scritto, però si può fare come ti ha fatto veder Mann».

- <u>Domanda n°4</u>

La quarta domanda conduce ad un'immediata risposta: dopo essersi confrontate, Simonetta si fa carico di spiegare che la misura dell'area non serve perché «rende i calcoli ancora più difficili».

4.3.2 Riflessioni conclusive

Dal protocollo di osservazione dell'attività è emerso che entrambe le alunne si attivano con entusiasmo per risolvere le situazioni problematiche proposte.

Mann ha dimostrato una maggiore difficoltà in quanto deve spesso attendere le traduzioni del mediatore culturale.

Le congetture prodotte in riferimento alla domanda – stimolo sono state di tipo previsionale, a volte piuttosto originali.

Mann ha osservato attentamente la situazione prima di dare una risposta, mentre Simonetta ha fornito delle risposte in modo più affrettato.

Le argomentazioni di Simonetta hanno cercato di fornire delle definizioni facendo riferimento a delle affermazioni di tipo teorico oppure facendo dei riferimenti di tipo pragmatico.

Singolare è stata la risposta in cui ha cercato di attribuire allo sperimentatore la colpa di non aver inserito l'operatore giusto per rimpicciolire la figura tra le opzioni.

Mann ha utilizzato prevalentemente delle argomentazioni con riferimenti di tipo pragmatico: più volte ha mostrato con un disegno o un'operazione la veridicità di quanto ha affermato.

Ricorrente nel linguaggio verbale il riferimento a parole come «guarda» oppure «vedi».

È possibile a mio avviso ipotizzare che il ricorso all'esempio sia legato all'incertezza nella comunicazione verbale.

4.4 La terza fase della sperimentazione

La somministrazione del fattore sperimentale si è posta l'obiettivo di individuare le modalità con cui i fattori socioculturali influenzano le argomentazioni delle strategie risolutive di una situazione – problema di geometria e aritmetica, durante la fase di validazione di una situazione a – didattica, al fine di trarre inferenze sulle modalità con cui le strategie risolutive e argomentazioni differenti sono funzionali all'esplorazione cooperativa dei contenuti.

L'introduzione del fattore sperimentale ha previsto un primo momento costituito dalla somministrazione delle situazioni – problema (situazioni – problema A e B) e dalla visione del cartone animato *Flatlandia* di Michele Emmer, della durata di circa 30 minuti, e un secondo momento in cui sono state somministrate le situazioni a -didattiche.

Entrambi i giochi proposti nelle situazioni a – didattiche, infatti, traggono spunto da *Flatlandia*, il meraviglioso mondo a due dimensioni, descritto nei costumi, nelle abitazioni, negli abitanti dal reverendo Edwin A. Abbot.

La situazione a – didattica di geometria, denominata «Chi invitiamo alla festa?», proprio per la sua logica interna, ha permesso di far esplorare allo studente il concetto di *equivalenza* delle figure piane o *equiestensione* che, come afferma Speranza (1986, 232) è alla base del concetto di *Area* definita come la classe di equivalenza di un poligono nella relazione di equiscomponibilità.

I nodi epistemologici che sottendono l'elaborazione del gioco sono:

- Attuare il processo di astrazione nella configurazione di una relazione di equivalenza;
- Il passaggio da una percezione intuitiva della grandezza in esame ad una sua valutazione oggettiva.

È stata implicitamente messa in gioco, inoltre, la conoscenza delle principali figure piane.

Allo studente è stato chiesto di ricoprire la superficie interna di un pentagono servendosi del maggior numero di figure geometriche, tra quelle a disposizione.

La situazione a – didattica di aritmetica, chiamata «Un invitato ingombrante!», ha permesso di introdurre una revisione della *moltiplicazione*, legandola al significato concreto di *operatore*[20].

---

[20] *Un'operazione* è un'azione che risponde all'intenzione per la quale, a partire da due numeri ad esempio, se ne vuole trovare un terzo.
Il *calcolo* di questo nuovo numero è una fase meccanica che può anche essere affidata a una macchina calcolatrice.

È stato inoltre preso in considerazione il problema dei *numeri decimali*, inseriti nel contesto geometrico – spaziale per facilitarne l'uso e la comprensione del significato.

I nodi epistemologici che sottendono l'elaborazione del gioco sono:

- Recupero di senso dell'algoritmo moltiplicazione;
- Conoscenza relativa alla moltiplicazione tra un numero intero ed un numero < 1, in opposizione all'immagine di moltiplicazione tra due numeri interi.
- Corrispondenza tra la moltiplicazione e la divisione.

Allo studente è stato chiesto di trovare la combinazione di *operatori* che consente di ingrandire o ridurre la dimensione di un *Quadrato*, in modo che possa passare dalla porta di una delle tipiche case del fantastico mondo a due dimensioni.

La somministrazione delle situazioni a – didattiche è stata attuata in una classe quarta elementare composta da 19 alunni ed è stata eseguita nel maggio 2003, concordando degli appuntamenti con l'insegnante dell'ambito logico – matematico di ciascuna classe.

Si è cercato di preparare la classe all'applicazione del fattore sperimentale, fornendo al gruppo la motivazione delle attività, creando un clima di fiducia funzionale all'esecuzione delle situazioni a – didattiche, cercando di stimolare l'attenzione e la partecipazione del gruppo.[21]

Per lo svolgimento di entrambe le situazioni - problema sono stati impiegati in media 3 ore, durante le prime ore della mattina, e sono stati utilizzati alcuni sussidi come forme geometriche, carta, colori, penne, cartoncini, forbici con le punte arrotondate e altro materiale necessario allo svolgimento di questa fase.

La consegna e i contenuti dell'attività non sono state anticipate alla classe prima della sperimentazione.

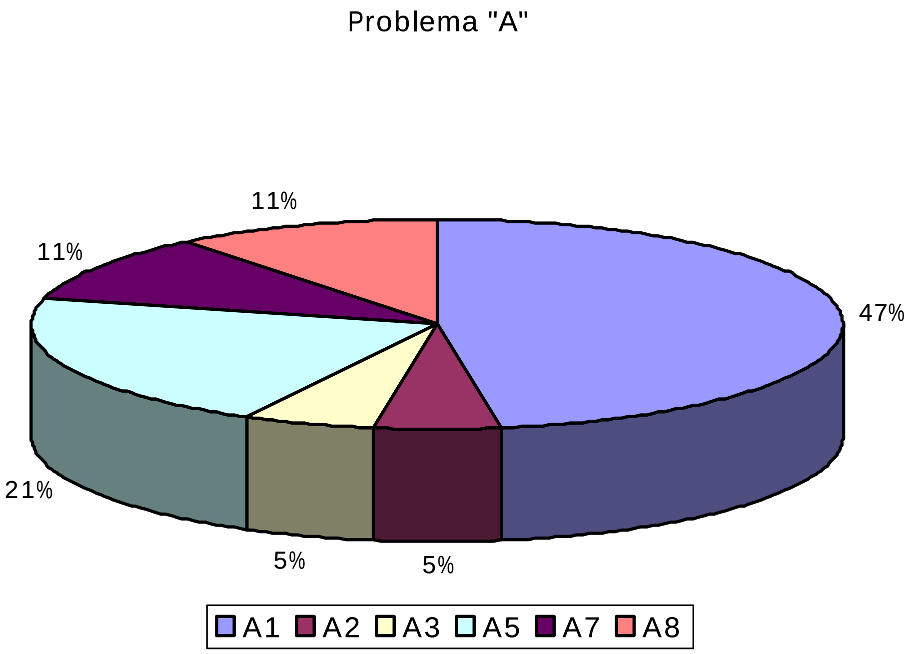
Durante l'attività, il ricercatore ha assunto un ruolo tutoriale, cercando di favorire la devoluzione dei saperi in gioco.

4.4.1 Analisi dei dati sperimentali

<u>Analisi quantitativa dei dati relativi alla somministrazione delle situazioni – problema (situazione problema A e B), prima dell'introduzione del fattore sperimentale</u>

L'analisi dei dati rilevati, in riferimento alla prima situazione – problema, dimostra la seguente condizione:

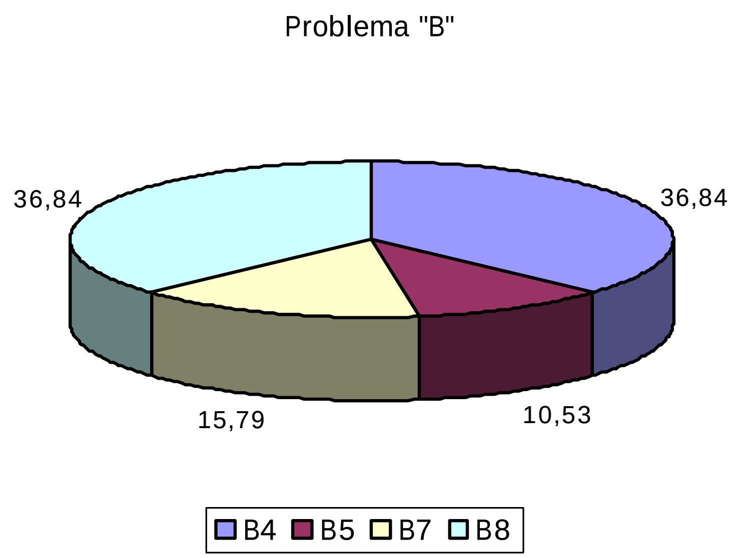
[21] Durante questa fase della ricerca sono state assunte come riferimento le indicazioni metodologiche fornite da Francesca Anello e Alessandra La Marca circa la somministrazione delle prove oggettive di profitto. Si veda a tal proposito: ZANNIELLO G. (1997a, 193 – 205).



- Circa il 52.63% (A1+A3) motiva esattamente il perché le figure geometriche ottenute dalla composizione dei tre poligoni dati risultano equivalenti, facendo riferimento all'uguaglianza delle superfici occupate e distinguendo quindi il concetto di forma da quello di estensione.
- Il 5.26% degli alunni riconosce l'equivalenza tra i poligoni ottenuti, ma collega questo concetto all'uguaglianza tra le figure elementari di partenza, senza menzionare il fattore area (A2).
- Nessun alunno determina l'equivalenza dei poligoni ottenuti in base alla concomitante uguaglianza dell'area e del perimetro (A4).
- Il 21.05% riconosce l'equivalenza tra i poligoni composti ma non motiva la risposta (A5).
- Nessun alunno nega l'equivalenza tra i poligoni composti senza motivare questa affermazione (A6).
- Per il 10.53% (A7) degli alunni le figure composte non sono equivalenti in quanto non occupano lo stesso "spazio"; questo indica che il concetto di spazio occupato nel piano non viene associato a quello di area, ma probabilmente a quello di perimetro o forma.
- Il concetto di equivalenza viene associato da alcuni alunni alla forma dei poligoni, infatti il restante 10.53% degli alunni esclude l'equivalenza tra i poligoni composti in base alla diversa forma (A8).

Da quanto rilevato emerge dunque che la maggior parte degli alunni conosce la nozione di equivalenza ed effettua una distinzione tra area forma e perimetro; di contro un quinto degli alunni mostra qualche difficoltà nel discernere i concetti di area e forma, difficoltà che potrebbe essere superata avvalendosi del concetto di unità misura.

In riferimento alla seconda situazione – problema si configura la seguente condizione:



- Le possibili risposte B1, B2 e B3 che identificano nella divisione l'operatore più efficace per trasformare il rettangolo maggiore nel più piccolo e che prevedono un'argomentazione della risposta non sono state fornite da nessuno degli alunni;
- Una piccola percentuale (15.79%) degli alunni indica solo che l'operazione da utilizzare è la divisione ma non specifica né il divisore né argomenta la risposta (B7);
- Una rilevante parte degli alunni, il 36.84% (B8) indica la sottrazione come operazione da utilizzare ma non ne spiega il motivo; un pari numero di alunni (B4) sfrutta la nozione di sottrazione nella sua più immediata applicazione, ossia ridurre una quantità, ma non descrive una strategia precisa.

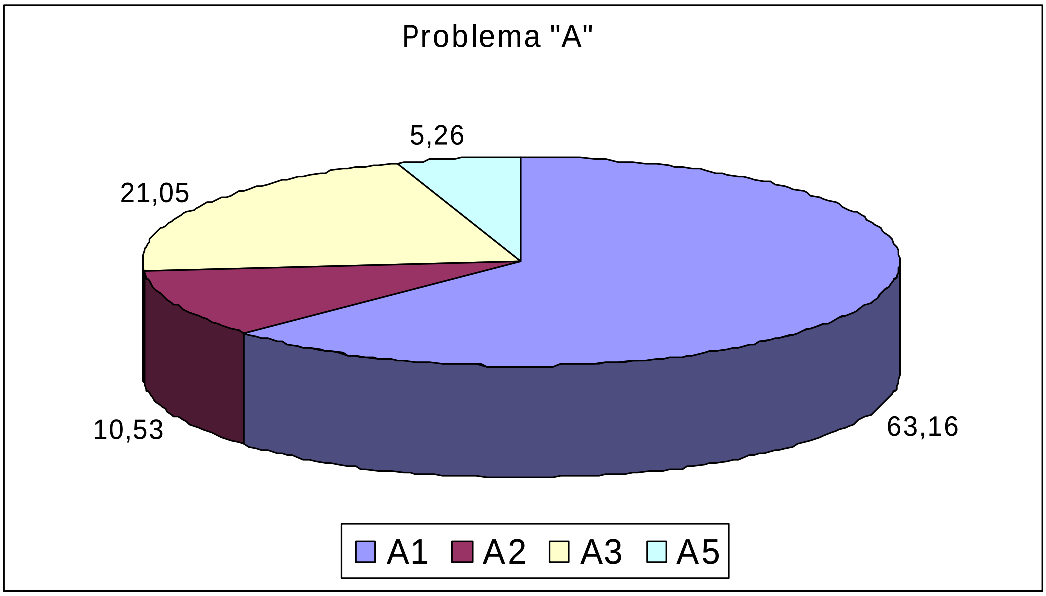
Una minima parte infine, pari al 10.53% (B5), concretizza il concetto di operatore in una serie di trasformazioni applicate a singole parti della figura geometrica in esame, in particolare, sottraendo ad ogni lato del rettangolo A il valore per il quale differisce dal corrispondente del rettangolo B;
- La risposta B6 non viene fornita da nessuno degli alunni.

Dalle risposte registrate appare chiaro che il campione esaminato non ha particolari difficoltà nell'associare alle quattro operazioni un significato fisico e applicarle in un problema concreto; prevale nettamente l'uso della sottrazione che probabilmente viene più facilmente metabolizzato come strumento per ridurre, infine non risulta acquisito il concetto di operatore.

Analisi quantitativa dei dati relativi alla somministrazione delle situazioni – problema (situazione problema A e B), dopo l'introduzione del fattore sperimentale

A seguito dello svolgimento della fase sperimentale, sono stati nuovamente riproposti ai 19 alunni i due problemi aperti.

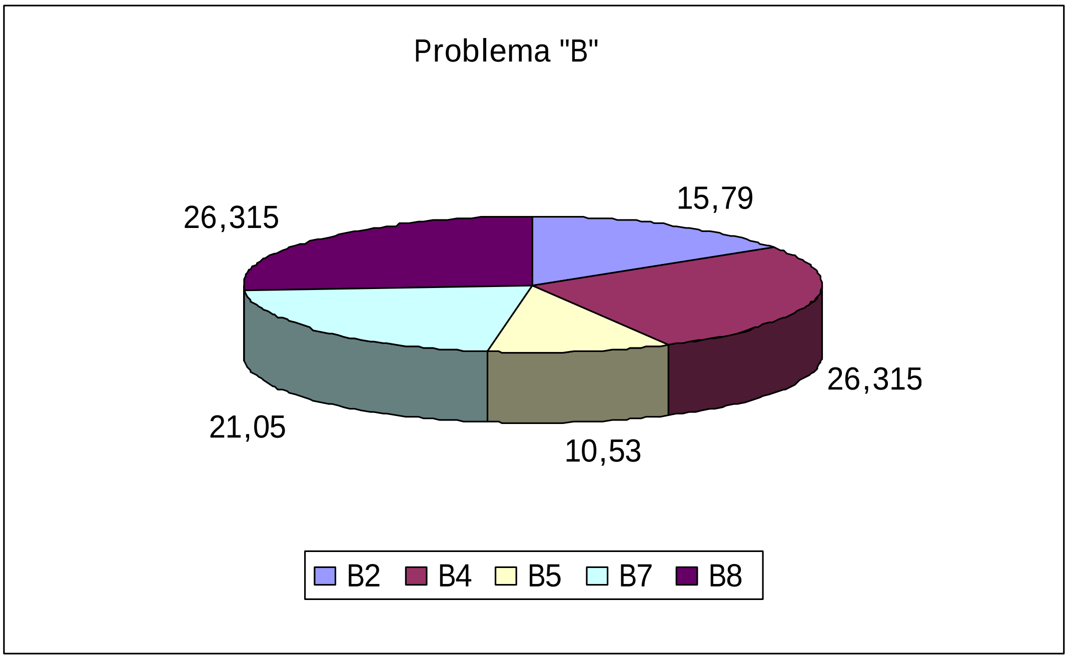
Alla luce dell'esperienza maturata nella situazione a-didattica, gli alunni hanno così risposto rispetto alla prima situazione – problema.



- Circa il 94.74% (A1+A2+A3) motiva esattamente il perché le figure geometriche ottenute dalla composizione dei tre poligoni dati risultano equivalenti, facendo riferimento all'uguaglianza delle superfici occupate e distinguendo quindi il concetto di forma da quello di estensione.
- Il 5.26% riconosce l'equivalenza tra i poligoni composti ma non motiva la risposta (A5).

Da quanto rilevato è possibile interpretare che, fatta eccezione per un alunno (A11), l'esperienza della situazione a-didattica ha portato gli alunni ad assimilare i concetti di area, forma ed equivalenza, mettendoli in grado non solo di dare una risposta corretta ma di argomentarla.

Rispetto alla seconda situazione – problema è emersa la seguente situazione.



- Circa il 15.79% identifica nella divisione l'operatore più efficace per trasformare il rettangolo maggiore nel più piccolo e dà un'argomentazione della risposta (B2).
- Aumenta la percentuale (21.05%) degli alunni che indica la divisione come operazione da usare come operatore ma non specifica né il divisore né argomenta la risposta (B7).
- Una percentuale minore rispetto la fase antecedente alla situazione a-didattica, il 26.31% (B8) indica la sottrazione come operazione da utilizzare ma non ne spiega il motivo; un pari numero di alunni (B4) sfrutta la nozione di sottrazione nella sua più immediata applicazione, ossia ridurre una quantità, ma non descrive una strategia precisa. Una minima parte infine, pari al 10.53% (B5), concretizza il concetto di operatore in una serie di trasformazioni applicate a singole parti della figura geometrica in esame, in particolare, sottraendo ad ogni lato del rettangolo A il valore per il quale differisce dal corrispondente del rettangolo B.

4.4.2 La situazione a – didattica di geometria «Chi invitiamo alla festa?»

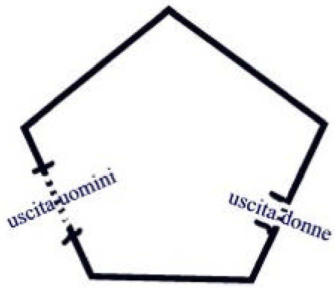
<u>Descrizione della situazione a – didattica di geometria: «Chi invitiamo alla festa?»</u>

La situazione a – didattica proposta al gruppo classe multiculturale si articola in quattro fasi.

I Fase: Consegna

L'insegnante legge un breve brano tratto da *Flatlandia* per presentare il mondo a due dimensioni: «Immaginate un vasto foglio di carta su cui delle Linee Rette, dei Triangoli, dei Quadrati, dei Pentagoni, degli Esagoni e altre Figure geometriche, invece di restar ferme al loro posto si muovano qua e là, liberamente, sulla superficie o dentro di essa, ma senza potersene sollevare e senza potervisi immergere, come delle ombre, insomma – consistenti, però e dai contorni luminosi. Così facendo avrete un'idea abbastanza corretta del mio paese e dei miei compatrioti».

In seguito, l'insegnante enuncia le regole del gioco: a Flatlandia si sta organizzando una grande festa per soli uomini in una delle caratteristiche abitazioni: «La forma delle case più comune è a cinque lati o pentagonale, come nell'annessa figura. I due lati settentrionali RO, OF, costituiscono il tetto, e in genere non hanno porte; […] il lato meridionale o pavimento è in genere privo di porte».



Vince la squadra che riesce a configurare il maggior numero di abitanti di Flatlandia che possono entrare nella casa, facendoli accedere dalla porta di ingresso, lunga 3 cm.

Bisogna tenere presente che nel paese di Flatlandia esistono:

- Triangoli Isosceli (soldati e operai della classe inferiore);
- Triangoli Equilateri (esponenti della borghesia);
- Quadrati e Pentagoni (professionisti e gentiluomini);
- Esagoni (esponenti dell'aristocrazia);
- Cerchi (appartenenti all'ordine sacerdotale).

L'insegnante rappresenta graficamente, con il supporto della carta a quadretti, la casa di Flatlandia che deve ospitare la festa.

II FASE: Situazione d'azione.

Ogni gruppo di due allievi ha a disposizione una pianta della casa a base pentagonale (allegato 9) ed una serie di *abitanti* di Flatlandia rappresentanti i potenziali partecipanti alla festa (allegato 10). Per ciascuna delle classi di abitanti suddette vi sono individui simili ma di diverse dimensioni, per cui nel rispetto delle regole del gioco, occorrerà verificare che i probabili invitati possano passare dalla porta d'ingresso. A ciascun gruppo di allievi viene chiesto di giocare applicando la regola.

Ogni allievo posto di fronte alla situazione deve prendere delle decisioni, spinto da una sana competizione nei confronti del compagno.

È immediato cogliere che non è funzionale operare delle scelte casuali, ma è vantaggioso utilizzare, anche in modo implicito, le proprie conoscenze e quindi operare una selezione logica, basata su di un criterio, degli *invitati* per utilizzare le figure più idonee.

Una strategia è messa alla prova dalla situazione d'azione stessa, la quale mette in evidenza la sua efficacia in rapporto al problema.

Tali strategie consentono all'allievo di operare delle anticipazioni e vincere sul tempo il compagno avversario.

Al termine di questa fase, l'insegnante raccoglie le composizioni proposte e segnala quelle che prevedono il massimo numero di *ospiti*.

III FASE: Situazione di formulazione.

Questa fase è contraddistinta dalla formulazione della conoscenza, ovvero dalla possibilità dello studente di riprendere, identificare, decomporre e ricostruire in uno specifico sistema linguistico la propria conoscenza. A questo punto la classe viene suddivisa in due gruppi, con due portavoce.

La situazione è formata dalla partita giocata dai due portavoce.

Ciascuna squadra ha 10 minuti di tempo per formulare una strategia comune e comunicarla al portavoce, il quale è tenuto a rispettarla durante la partita.

La strategia di ciascun gruppo dovrà essere documentata da un breve protocollo in cui il gruppo indicherà quali figure sono state scelte ed in base a quali criteri.

Ciascun allievo, durante questa fase, si fa carico di essere opportunamente compreso dal proprio gruppo perché dal livello di chiarezza con il quale vengono esposte e motivate le proprie strategie dipende la vincita del gioco.

Successivamente i due portavoce giocano una nuova partita; ciascuno sceglie gli *ospiti* da invitare alla festa e vince la squadra che ne individua il numero più elevato.

L’insegnante fissa alla lavagna gli ospiti all’interno della casa e gli allievi hanno un’ulteriore retroazione alle strategie adottate.

L’allegato 11 riporta una delle possibili configurazioni vincenti.

IV FASE: Situazione di validazione.

La situazione di validazione ha lo scopo di condurre gli studenti a rivedere le proprie opinioni per individuare una serie di strategie che non siano esclusivamente l’adesione alla regola, ma che siano il risultato di un processo di interiorizzazione e di riorganizzazione delle strategie in una Teoria riconosciuta socialmente.

A questo punto alle due squadre viene data un’ulteriore consegna, ovvero proporre delle congetture, argomentarle alla squadra avversaria ed evidenziare, qualora queste venissero accettate, dei Teoremi. L’argomentazione consente a discrezione degli studenti l’uso sia della discussione sia la dimostrazione pratica, per provare la falsità o la veridicità della congettura. Ogni proposizione accettata vale 1 punto e per ogni proposizione provata falsa si danno 3 punti alla squadra che ne ha argomentato la prova. Vince la squadra con il massimo numero di punti.

Se la classe non trova delle altre proposizioni da enunciare, l’insegnante può introdurre un’ulteriore strumento di validazione: la misura.

Una strategia forte per verificare quale combinazione ci consente di far entrare il maggior numero di *invitati* nella casa, è quella di misurare la sua superficie e confrontarne la misura con quella delle superfici degli *invitati*.

A questo punto le squadre possono enunciare nuove congetture e si procede nell’attribuzione dei punti consentendo nuove possibilità di gioco per coltivare l’attitudine alla prova degli allievi.

<u>Analisi a – priori dei comportamenti attesi</u>

Alcune strategie che si ipotizza potrebbero emergere sono:

A1: Non utilizzo i cerchi in quanto perdo molto spazio.

A2: Utilizzando in prevalenza i triangoli riesco ad occupare quasi tutta la superficie.

A3: Vi sono figure che non passano dalla porta e quindi da escludere subito.

A4: Per ricoprire la figura utilizzando il maggior numero di abitanti sono utili le figure più piccole.

A5: Pentagoni ed Esagoni hanno una cattiva interconnessione.

Analisi Qualitativa dei dati.

Durante tutte le fasi del gioco, gli allievi hanno mostrato un notevole interesse nei confronti delle attività, stimolati dal fascino del mondo di *Flatlandia*, con il quale sono entrati in contatto durante un'attività propedeutica alla sperimentazione vera e propria.

In particolare, dopo aver compreso la consegna, gli allievi sono stati posti in situazione d'azione e si sono dedicati in un primo momento alla scelta casuale delle figure geometriche.

Alcuni allievi hanno sovrapposto le figure geometriche, per cercare di farne entrare il maggior numero possibile all'interno del pentagono, ma sono stati subito ripresi dall'avversario.

Lo sperimentatore ha messo in evidenza il fatto che gli abitanti non possono disporsi uno *sopra l'altro* e dunque si tratta di una modalità non corretta.

Al termine della partita, lo sperimentatore ha chiesto di segnare in un foglio quale è stata la configurazione vincente, quante figure contiene e quali.

Ha chiesto inoltre alla classe, in una discussione collettiva, di esplicitare la strategia messa in atto nella scelta delle figure.

In questa prima fase è emerso che la maggior parte degli allievi procede per tentativi ed argomenta le proprie scelte con espressioni tautologiche del tipo: «Per me si devono scegliere i triangoli rossi» oppure «Sicuramente gli aristocratici devono andare alla festa».

Mann ha espresso che bisogna scegliere le figure rosse *perché si vede che ne entrano di più*.

Durante la situazione di formulazione è stata osservata la partecipazione attiva della classe. Dopo un primo momento di difficoltà, legato alla creazione di un setting insolito per la classe, sono state formate le due squadre e data la nuova consegna.

All'interno della squadra A è stata osservata una maggiore tendenza a convincere i compagni nella scelta delle figure, mediante argomentazioni di tipo tautologico e riferimenti di tipo pragmatico. Ad esempio è stato *dimostrato* come «Accostando un cerchio ed un quadrato si perde lo spazio».

La squadra B invece ha mostrato una partecipazione meno attiva; in prevalenza gli allievi non hanno giustificato la strategia adottata o lo hanno fatto con argomentazioni di tipo tautologico.

Nel caso di Mann che ha difficoltà nel comunicare in lingua italiana con i compagni, è possibile osservare che ha tolto alcune figure geometriche dal banco, nello specifico i quadrati celesti e i cerchi. Con l'aiuto di Simonetta poi, ha convinto i compagni ad usare in prevalenza i triangoli rossi perché *sono più piccoli*.

Altri due allievi si sono occupati di disporre le figure, accostandole meticolosamente.

La squadra A è riuscita a inserire nel pentagono 30 figure geometriche mentre la squadra B ne ha utilizzate 26.

Le strategie utilizzate sono emerse durante la fase di validazione durante la quale le due squadre hanno proposto la congetture e le argomentazioni relative alla situazione.

Per facilitare l'attività, data l'evidente stanchezza della classe, ho chiesto di scrivere su un protocollo le strategie messe in atto e di socializzarle alla squadra avversaria.

Come è riscontrabile nei protocolli, durante la lettura della squadra A sono emerse le seguenti strategie:

1. «Bisogna scegliere i triangoli rossi perché sono più piccoli e ne possiamo mettere di più».
2. «I soldati (triangoli gialli) non bisogna sceglierli perché sono troppo lunghi».
3. «I triangoli giallini bisogna sceglierli perché dopo quelli rossi sono i più piccoli».
4. «Con i quadrati viene occupato troppo spazio perché sono grandi».
5. «Non bisogna scegliere i cerchi perché si perde spazio con i cerchi».
6. «Le figure devono essere messe più accanto possibile per recuperare spazio ma no una sull'altra».

La squadra B ha ascoltato le strategie individuate dalla prima squadra e non le ha confutate.

Soltanto un alunno non ha condiviso la seconda strategia ma non è stato in grado di confutarla.

Le strategie individuate dalla squadra B sono state le seguenti:

1. «Si devono scegliere i triangoli rossi perché occupano meno spazio».
2. «I quadrati celesti occupano troppo spazio e quindi non si prendono».
3. «Il pentagono rosa è piccolo e quindi si può scegliere».
4. «I triangoli gialli piccoli si possono anche scegliere perché sono piccoli».
5. «Le figure devono essere accanto per occupare meno spazio».

La squadra A non ha respinto alcuna strategia della squadra B e, per tale motivo, il gioco è finito in situazione di parità.

Riflessioni conclusive

Dall'osservazione degli elementi emersi in particolar modo durante la situazione di validazione, si evince che la classe ha realmente preso in carico il problema ed è in grado, in maniera cooperativa, di creare delle congettura circa le strategie risolutive e argomentarle.

Si tratta in modo prevalente di congetture interpretative e di argomentazioni di tipo locale, con riferimento di tipo pragmatico e, talvolta con affermazioni tautologiche.

I marcatori linguistici prevalentemente utilizzati sono «quindi» e «perché», indicatori linguistici di condizionalità.

Per quanto riguarda i processi di socializzazione delle strategie risolutive, per quanto più specificamente attiene gli alunni di nazionalità cinese, è possibile notare che Simonetta partecipa all'attività, esplicitando le proprie scelte ma non argomentandole, e diventa portavoce della squadra B.

Anche Mann partecipa all'attività e, pur avendo delle difficoltà nella comunicazione verbale con i compagni, toglie le figure a suo avviso non adatte a vincere il gioco e mostra quelle che vorrebbe scegliere; inoltre, grazie al mediatore culturale, ne argomenta anche la scelta. Hai Feng invece si limita ad osservare le attività svolte dai compagni.

4.4.2 La situazione a – didattica di aritmetica «Un invitato ingombrante!»

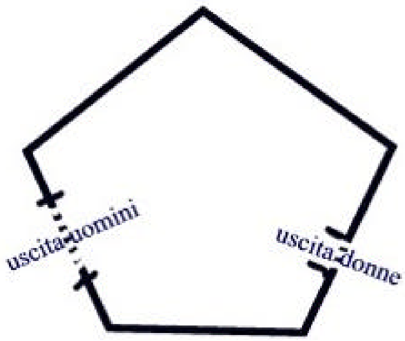
<u>Descrizione della situazione a – didattica di aritmetica: «Un invitato ingombrante!»</u>

La seconda situazione a – didattica proposta al gruppo classe multiculturale prevede quattro fasi.

I Fase: Consegna

L'insegnante legge un breve brano tratto da *Flatlandia* per presentare il mondo a due dimensioni: «Immaginate un vasto foglio di carta su cui delle Linee Rette, dei Triangoli, dei Quadrati, dei Pentagoni, degli Esagoni e altre Figure geometriche, invece di restar ferme al loro posto si muovano qua e là, liberamente, sulla superficie o dentro di essa, ma senza potersene sollevare e senza potervisi immergere, come delle ombre, insomma – consistenti, però e dai contorni luminosi. Così facendo avrete un'idea abbastanza corretta del mio paese e dei miei compatrioti».

In seguito, l'insegnante enuncia le regole del gioco: a Flatlandia si sta organizzando una grande festa in una delle caratteristiche abitazioni: «La forma delle case più comune è a cinque lati o pentagonale, come nell'annessa figura. I due lati settentrionali RO, OF, costituiscono il tetto, e in genere non hanno porte; [...] il lato meridionale o pavimento è in genere privo di porte».



La casa di Flatlandia dove si svolgerà la festa ha la forma di un pentagono di area 50cm^2 ; su un lato si trova la porta di ingresso lunga 2 cm. Uno degli insoliti abitanti di Flatlandia, un Quadrato della casta dei Professionisti di 6 cm di lato e di 36 cm^2 di Area, vuole prendere parte alla festa ma è talmente grande da non riuscire ad entrare nella casa, a meno che non venga rimpicciolito attraverso alcuni dei seguenti operatori:

+ 0,5	x 0,5	x 1,2	x 0,15	: 0,5	+ 0,3	x 0,4
x 0,25	x 0,3	: 0,3	x 0,2	x 0,1	: 2	:0,1

Lo scopo del gioco è riuscire a trovare, nel minor tempo possibile, la combinazione di operatori che permettano di rimpicciolire il Quadrato, consentendone l'ingresso nella casa.

Attenzione a non rimpicciolire troppo il Quadrato: a Flatlandia quando gli abitanti rimpiccioliscono è come se ringiovanissero e un abitante troppo piccolo non sarebbe ammesso alla festa.

Il lato del quadrato quindi non deve essere minore di 1 cm.

L'insegnante rappresenta graficamente, con il supporto della carta a quadretti, la casa di Flatlandia che deve ospitare la festa, il Quadrato ed i possibili operatori da utilizzare.

II FASE: Situazione d'azione.

Ogni gruppo di studenti ha a disposizione una pianta della casa (a base pentagonale), il Quadrato che vuole entrarvi ed una serie di operatori.

La classe viene suddivisa in gruppi di due e ciascun giocatore del gruppo ha circa 10 minuti per trovare, spinto da una sana competizione nei confronti dell'avversario, l'esatta configurazione di operatori per vincere il gioco.

Ciascun allievo si trova a ricevere degli stimoli dalla situazione e ad agire attivamente per modificarla e vincere, applicando la regola ed avendo cura di scrivere i vari tentativi che mette in atto. E' evidente che non è vantaggioso operare delle scelte casuali, ma è funzionale utilizzare, anche in modo implicito, le proprie conoscenze per scegliere la sequenza di operatori più adatta.

Le strategie attivate vengono messe alla prova dalla situazione d'azione stessa, la quale mette in evidenza la sua efficacia in rapporto al problema. Le strategie permettono all'allievo di operare delle anticipazioni e vincere sul tempo il compagno avversario.

Al termine di questa fase, l'insegnante raccoglie i protocolli delle coppie di allievi ed individua le sequenze di operatori che consentono di ridurre adeguatamente la figura.

III FASE: Situazione di formulazione.

Questa fase è caratterizzata dalla formulazione della conoscenza, ovvero dalla possibilità dello studente di riprendere, identificare, decomporre e ricostruire in uno specifico sistema linguistico la propria conoscenza.

La classe viene suddivisa in due gruppi, ciascuno dei quali individua un portavoce.

La situazione si configura come la partita giocata dai due portavoce, durante la quale ciascun membro delle due squadre ha la possibilità di formulare dei suggerimenti per il proprio compagno.

Prima di giocare la partita, le squadre hanno 10 minuti di tempo per formulare e scrivere in un protocollo una strategia comune da comunicare al portavoce, il quale ha la possibilità di rispettarla o modificarla sotto suggerimento dei compagni di squadra.

Nel protocollo devono essere indicati quali operatori sono stati scelti con riferimento alle motivazioni. Ciascun allievo, durante questa fase, si fa carico di essere opportunamente compreso dal proprio gruppo perché dal livello di chiarezza con il quale esprime e motiva le proprie strategie dipende la vincita del gioco. Dopo la stesura del protocollo, i due portavoce giocano una nuova partita; ciascuno sceglie la sequenza di operatori adatti per rimpicciolire la figura e vince la squadra che, nel minor tempo, riesce a trovare un Quadrato di lato il più possibile prossimo a 2 cm, permettendogli di entrare nella casa mantenendo un'età adulta. L'insegnante fissa alla lavagna le configurazioni ottenute dalle squadre, gli studenti hanno così un'ulteriore retroazione alle strategie adottate.

IV FASE: Situazione di validazione.

La situazione di validazione ha lo scopo di condurre gli studenti a rivedere le proprie opinioni per individuare una serie di strategie che non siano esclusivamente l'adesione alla regola, ma che siano il risultato di un processo di interiorizzazione e di riorganizzazione delle strategie in una Teoria riconosciuta socialmente.

Per tale motivo, durante questa fase, viene data un'ulteriore consegna alle due squadre, ovvero proporre delle congetture, argomentarle alla squadra avversaria ed enunciare, qualora queste venissero accettare, dei teoremi.

L'argomentazione consente a discrezione degli allievi l'uso sia della discussione sia della dimostrazione pratica, per provare la falsità o la veridicità della congettura. Ogni proposizione accettata vale 1 punto e per ogni proposizione provata falsa si danno 3 punti alla squadra che ne ha argomentato la prova.

Vince la squadra con il massimo numero di punti.

Se la classe non trova delle altre proposizioni da enunciare, l'insegnante può introdurre un'ulteriore strumento di validazione: la misura.

Una strategia forte per verificare quale combinazione di operatori ci consente di far entrare il Quadrato nella casa, è quella di misurare anche lo scarto tra la lunghezza del lato del Quadrato e la lunghezza della porta.

A questo punto le squadre possono enunciare nuove congetture e si procede nell'attribuzione dei punti consentendo nuove possibilità di gioco per coltivare l'attitudine alla prova degli allievi.

<u>Analisi a – priori dei comportamenti attesi.</u>

È possibile ipotizzare che gli alunni possano ricorrere alle strategie risolutive individuate tramite l'analisi a – priori:

B1. La sola strategia additiva non funziona;

B2. È necessario moltiplicare;

B3. È vantaggioso operare sulla lunghezza dei lati piuttosto che sull'Area.

B4. L'operatore - moltiplicazione maggiore di 1 permette di ingrandire la figura;

B5. Per rimpicciolire la figura è necessario scegliere un operatore - moltiplicazione minore di 1;

B6. Minore è l'operatore – moltiplicazione, se compreso tra 0 e 1, maggiore sarà la riduzione.

B7. Maggiore è l'operatore – divisione, se minore di 1, maggiore sarà la riduzione.

Analisi qualitativa dei dati

L'esperienza di sperimentazione della seconda situazione a – didattica è stata positiva in quanto, data la precedente fase che possiamo definire anche di accoglienza, la classe non ha avuto bisogno di eccessivi richiami per mantenere viva l'attenzione.

Dopo la socializzazione della consegna, la quale ha nuovamente attivato l'interesse nei confronti del mondo di Flatlandia, ciascun allievo della classe ha giocato con il proprio compagno di banco, durante la seconda fase della situazione a – didattica.

In questa fase, la maggior parte degli allievi ha eseguito le operazioni nella sequenza in cui vengono presentate dallo sperimentatore; soltanto otto alunni non hanno utilizzato in prima istanza l'operatore addizione e, tra questi, Mann ha provato subito ad utilizzare l'operatore moltiplicazione.

Al termine della seconda fase, le risposte più frequenti sono state quelle di usare la moltiplicazione e, nello specifico, *x0,25* , *x0,3*, *x0,2*.

Un solo allievo ha indicato come risposta l'operatore *:0,3* ma nel suo protocollo risulta evidente un errore di calcolo.

Lo sperimentatore ha chiesto allora di disporsi nuovamente in gruppo e utilizzare quanto scoperto in modo individuale nella propria squadra per trovare l'operatore che trasformi il quadrato.

La squadra A ha impiegato poco tempo per individuare la soluzione del problema e produrre le congetture richieste, infatti secondo gli allievi è stato scelto proprio «l'operatore giusto che trasforma il quadrato di lato 6 cm nel quadrato di lato più vicino a 2 cm».

Durante la fase di validazione, il portavoce della squadra A ha socializzato alla squadra avversaria le congetture formulate dal gruppo: «Per rimpicciolire il quadrato abbiamo scelto l'operatore x 0,25 perché abbiamo fatto l'operazione e il risultato è più piccolo di 2 e più grande di 1.

Non bisogna scegliere l'addizione perché trasforma il 6 in un numero più grande, infatti 6 + 0,5 = 6,5. Il numero si ingrandisce invece noi dobbiamo rimpicciolire».

La squadra B ha ascoltato quanto letto e, dopo aver realizzato concretamente l'operazione e preso atto del risultato, ha accettato quanto detto dalla squadra A.

La squadra B ha socializzato quanto emerso dalla propria attività: «Per trasformare il quadrato scegliamo la moltiplicazione decimale x0,2 perché si rimpicciolisce ma il risultato viene maggiore di 1. Non abbiamo usato l'addizione perché invece di diminuire il quadrato lo aumenta. Non abbiamo usato la divisione perché diminuisce troppo il risultato e non va bene».

In risposta all'ultima affermazione, due esponenti della squadra A hanno mostrato disappunto nei confronti di quanto affermato per la divisione. In particolare un allievo ha affermato: «Questa divisione aumenta, non diminuisce perché è con la virgola».

Sotto richiesta dei compagni di squadra, Mann ha svolto alla lavagna la divisione e la classe ha preso atto dell'errore.

Un membro della squadra B ha affermato che: «Con i numeri normali però la divisione diminuisce».

Ho chiesto all'alunno se è in grado di dimostrare la falsità di quanto sostenuto dall'avversario ma questi non ha trovato alcuna argomentazione.

Ho comunicato allora che la squadra vincitrice è la A e successivamente ho invitato tutta la classe a ricercare sul proprio libro di testo un possibile spunto per confutare la teoria della squadra avversaria, qualora non fosse convinta di accettarla.

Riflessioni conclusive

Dall'analisi degli aspetti emersi, con particolare riferimento alla situazione di validazione, risulta chiaro che la maggior parte degli allievi prende realmente in carico il gioco mentre altri si fermano alla prima soluzione che rispetta le condizioni.

In entrambe le squadre però viene messa in evidenza la volontà di produrre delle congetture interpretative in riferimento al gioco vissuto.

Le argomentazioni che emergono sono ancora una volta di tipo pragmatico; anche quando si cerca di confutare un'ipotesi viene usato un controesempio ostensivo.

Solo in un caso, nello specifico quando viene sostenuto che le divisioni *con la virgola* non rimpiccioliscono il quadrato, si va oltre l'esempio per procedere verso una prima generalizzazione.

Durante tutta l'attività, il marcatore linguistico prevalentemente utilizzato è il «perché» di condizionalità.

Per quanto riguarda gli alunni di nazionalità cinese, inseriti all'interno della squadra vincente, soltanto Mann non procede per tentativi ma mette in atto una strategia di scelta dell'operatore che tiene conto esclusivamente delle moltiplicazioni per un numero minore di 1.

Non riesce comunque a socializzare l'argomentazione della propria strategia, se non con l'esempio pratico.

Capitolo 5

Una proposta didattica per lo sviluppo delle capacità argomentative in contesti multiculturali

I presupposti teorici che sottendono la formulazione di una qualsiasi proposta didattica implicano necessariamente una riflessione sull'educazione e sulle sue finalità.

In prima istanza l'educazione può essere definita come il complesso delle azioni organizzate e sistematiche che, nei luoghi istituzionalmente deputati come la scuola, promuovono e sostengono lo sviluppo integrale della persona umana in base ai principi e ai valori considerati auspicabili dal consenso sociale, in un determinato periodo storico. Altarejos e Naval (2003, 18) precisano che il termine educare ha una etimologia duplice, in quanto può derivare sia da *educare*, sia da *educere*.

Le due etimologie sono fondamentali per la comprensione del significato dell'educazione: la prima derivazione (da *edere*, ovvero alimentare o allevare), vincente fino all'epoca medievale, individua un'idea di educazione intesa come azione esercitata sui minori dall'esterno, sulla base delle regole della tradizione. La seconda accezione (da *ex – ducere*, ovvero trarre fuori) privilegia un naturale svolgimento del soggetto, sulla base delle proprie energie, e si afferma in età Moderna grazie a pedagogisti come Comenio e Rousseau.

È evidente che tutte le concezioni estreme non possono che distorcere il profondo significato dell'educazione che, al contrario, dovrebbe essere soggetto a un'analisi che prenda in carico le molteplici dimensioni dell'agire educativo.

La definizione di educazione che allora si intende prendere come modello di riferimento della trattazione è quella che racchiude in sé i tratti caratteristici del fenomeno educativo e che fa riferimento alla pedagogia di Gino Corallo. Interrogandosi sulla qualità umana posseduta la quale la persona può definirsi educata, Corallo sostiene che «L'educazione consiste nel portare l'uomo alla conquista della piena forma umana, cioè al conseguimento del suo significato». (Zanniello, 1997, 19 – 20). In questo senso, l'educazione diventa l'azione che mira alla crescita libera dell'uomo, attraverso la valorizzazione delle eccellenze personali.

La messa a punto di percorsi educativi nell'ambito dell'educazione personalizzata[22] implica dunque un'attenta diagnosi pedagogica che, partendo dalla conoscenza dell'ambiente in cui il soggetto è inserito, conduca alla

[22] L'educazione personalizzata può essere definita come un'educazione integratrice, in quanto cerca di comprendere le complesse manifestazioni della realtà per inserirle nel processo educativo. In questo senso, l'educazione personalizzata tende a creare i presupposti affinché «ciascuna persona sia capace, mediante gli aiuti opportuni, di formulare e di portare a termine, in modo cosciente e libero, un modo di esistenza personale all'interno dei diversi ambiti in cui deve integrarsi e realizzarsi, non solo adattarsi» (Garcia Hoz – Guerrero – Di Nuovo – Zanniello, 1997, 240).

strutturazione di un curricolo che contempli il raggiungimento sia di obiettivi generali comuni, sia di obiettivi generali propri di ogni singolo alunno.

Il punto di partenza diventa allora l'individuazione delle *eccellenze personali* o meglio sono «le conoscenze previe possedute dall'alunno, le sue motivazioni, le sue aspettative e capacità, le sue caratteristiche personali ed intellettuali, [che] costituiscono i necessari prerequisiti di ogni corretto intervento pedagogico» (Garcia Hoz – Guerrero – Di Nuovo – Zanniello, 1997, 238 – 239).

La proposta didattica che si intende offrire per la promozione dell'argomentazione in ambiente multiculturale si pone l'obiettivo di mostrare un esempio di come l'apprendimento significativo, nell'ottica dell'integrazione di strutture cognitive, si basa su una conoscenza previa dell'allievo, e di come l'apprendimento matematico non sia autoreferenziale, bensì collegato con la cultura e la vita di ogni giorno. Se si riflette in effetti sul significato del lemma *apprendere* (dal latino *ad* e *prehendere*) si potrebbe pensare ad un *afferrare con la mente* che, in questa accezione, presuppone un ruolo attivo e dinamico, oltre ad una maggiore motivazione, da parte del discente rispetto al generico *imparare* (da *in*, illativo, e *parare*, procurare) che significa acquisire una serie di conoscenze mediante lo studio, l'esercizio, l'osservazione.

La struttura della proposta didattica ipotizzata si colloca proprio all'interno di una prospettiva di studi psicopedagogici che considerano i fenomeni sociali, culturali e affettivi strettamente correlati alle attività di apprendimento, in un percorso dinamico – costruttivo della conoscenza che si attiva grazie a situazioni laboratoriali.

5.1 Dall'analisi del tessuto argomentativo alla strutturazione del laboratorio di matematica

L'analisi del tessuto argomentativo in riferimento alle tre fasi del lavoro sperimentale consente di individuare, in termini di generalizzazione, di progressiva astrazione, di consapevolezza e di relazione sistemica con altri concetti, tre tipologie di informazioni: nella prima fase, le concezioni ricorrenti rispetto al sapere messo in gioco nelle situazioni – problema proposte; nella seconda fase, le conoscenze degli allievi di nazionalità straniera; infine nella terza fase l'evoluzione del sapere di riferimento.

In particolare, durante la prima fase sono emerse prevalentemente delle argomentazioni di tipo locale, con riferimento di tipo teorico e atte a giustificare la strategia adottata, rispetto alla situazione – problema di geometria; le argomentazioni sono di tipo locale e con riferimento a teorie ingenue, volte a giustificare la strategia adottata, nel caso della situazione – problema di aritmetica. Durante la seconda fase, gli allievi di nazionalità cinese utilizzano in netta prevalenza delle argomentazioni di tipo pragmatico, in quanto mostrano con un disegno o con un'operazione la veridicità di quanto affermano. Durante la terza fase è emerso che, rispetto alle situazioni – problema di geometria, la maggior parte degli allievi utilizza argomentazioni di tipo teorico, senza riferimento alla strategia adottata. Rispetto alla situazione – problema di aritmetica, emergono in prevalenza delle argomentazioni di tipo tautologico ed è inoltre presente una delle procedure errate più frequenti in riferimento ai primi problemi di proporzionalità:

gli allievi fanno ricorso a differenze costanti piuttosto che a rapporti costanti, ovvero operano in campo additivo invece che in quello moltiplicativo. In questo caso le strategie del ragionamento proporzionale che risultano essere corrette in ambiente geometrico, subiscono una sorta di regressione a campi più familiari come quello additivo, in situazioni più complesse o nuove, in questo caso in ambiente aritmetico. Durante le situazioni a – didattiche, emergono in prevalenza delle argomentazioni di tipo pragmatico o locale, per quanto riguarda gli allievi di nazionalità cinese, e di tipo pragmatico o tautologiche, per gli altri allievi.

Una volta individuate le modalità di argomentazione proprie di ciascun alunno è possibile farle interagire e favorire l'integrazione delle differenze individuali, utilizzando opportune metodologie di lavoro didattico. Una modalità che ritengo possa essere funzionale a tale proposito è il laboratorio, luogo in cui l'apprendimento diventa un processo ciclico che nasce dall'esplorazione esecutiva, si sviluppa nella rappresentazione iconica e culmina nell'astrazione[23]. Lontano dall'essere solo lo spazio fisico in cui vengono sviluppate pratiche didattiche basate sull'uso di specifiche tecnologie, il laboratorio di matematica è principalmente una modalità rivolta ai meccanismi e ai processi che risultano coinvolti nella costruzione del *significato* nell'apprendimento della matematica.

Si tratta di meccanismi e processi legati da una parte a specifiche *situazioni* e dall'altra alle interazioni sociali che si sviluppano intorno a tali esperienze, volte a modellarle culturalmente.

All'interno del laboratorio, l'insegnante ha la possibilità di progettare situazioni adeguate sulla base delle caratteristiche personali degli allievi, in riferimento a diversi parametri:

1. a livello delle *strategie apprenditive*, strutturando percorsi diversi o utilizzando tecnologie diverse;
2. a livello degli *obiettivi generali*, programmando obiettivi comuni e individuali;
3. a livello dei *tempi di apprendimento,* prevedendo delle attività in base al ritmo di apprendimento di ciascun allievo;
4. a livello delle *modalità di verifica*, ipotizzando criteri di verifica adatti per ciascun allievo*;*
5. a livello dell'interazione nel *lavoro di gruppo*, strutturando gruppi in base ai criteri stabiliti nelle finalità del laboratorio.

In questo modo, la scuola si trasforma in *laboratorio di apprendimento*, inteso come una dimensione operativa e attuativa all'interno della quale ciascun allievo ha la possibilità di mettere in gioco le proprie conoscenze in modo competente; la gestione autonoma dell'apprendimento da parte degli allievi

[23] Risulta evidente in tal senso il riferimento ai *Piani di rappresentazione* individuati da Bruner e considerati fondanti delle strategie dello sviluppo mentale: l'esecutivo, l'iconico, il simbolico. In riferimento all'itinerario che segue lo sviluppo cognitivo del fanciullo, lo stesso Bruner (1967a, 7) afferma che «All'inizio il mondo del fanciullo è noto a lui principalmente attraverso le azioni abituali, che egli usa, per affrontarlo. Successivamente si aggiunge una tecnica di rappresentazione attraverso l'immagine, che è relativamente libera dall'azione. Gradualmente si aggiunge un nuovo e potente metodo di tradurre azioni ed immagini nel linguaggio che favorisce un terzo sistema di rappresentazione».

diventa uno dei prerequisiti dell'attività laboratoriale, mentre l'insegnante ha il ruolo di coadiutore per lo sviluppo di tale capacità.

All'interno del laboratorio, dall'esplorazione dinamica dei gesti mentali, quali l'attenzione, la memoria, la comprensione, la riflessione e l'immaginazione, si configurano le abitudini mentali dell'allievo, alla base della strutturazione della conoscenza.

Per la creazione di un laboratorio che favorisca l'esplorazione dei gesti mentali, dunque, occorre una rigorosa strutturazione degli obiettivi da perseguire, la creazione di ambienti favorevoli al confronto e al dialogo costruttivo e l'individuazione delle possibili dinamiche da gestire.

In questo senso, il punto di partenza potrebbe essere quello delle dinamiche *manipolative* o di *azione* che, oltre a stimolare la curiosità dell'allievo e promuovere la sua motivazione, contribuisce a creare una matrice cognitiva del gruppo classe rispetto al contenuto individuato come oggetto di studio.

Il secondo passo potrebbe essere quello di proporre alcuni enunciati rispetto al contenuto esplorato e creare una *controversia*[24], chiedendo agli allievi di sostenere una tesi e argomentarla secondo le proprie inclinazioni e, solo successivamente, seguendo le indicazioni dell'insegnante, ad esempio quella di utilizzare esclusivamente riferimenti di tipo pragmatico.

L'attività laboratoriale, a mio avviso, deve sempre contemplare una fase di *colloquio pedagogico*, ovvero una discussione conclusiva mirata a configurare e rendere esplicito il bilancio delle attività svolte.

In riferimento alle tipologie di argomentazioni rilevate all'interno della classe, in particolare, si ipotizza un laboratorio transdisciplinare con l'obiettivo di promuovere la competenza argomentativa.

5.2 Un laboratorio di matematica e lingua italiana: "I *grattacapi* della Regina di Cuori"

La progettazione di un laboratorio di matematica e lingua italiana si inserisce nell'ambito del percorso sperimentale, allo scopo di fornire un esempio di come dalla rilevazione delle strategie argomentative proprie di ciascun allievo è possibile ipotizzare un itinerario per la promozione della competenza argomentativa.

Il laboratorio si propone proprio di condurre l'allievo, attraverso un percorso operativo, verso una graduale evoluzione del linguaggio formalizzato a partire dall'uso del linguaggio spontaneo e naturale.

In concreto, attraverso il lavoro di gruppo, ciascun allievo ha la possibilità di conoscere le varie tipologie di argomentazioni ed essere in grado di gestirle in maniera competente, in riferimento ad una situazione problematica che trae origine da specifici contenuti matematici. Dal punto di vista linguistico, il laboratorio contribuisce a sviluppare la capacità degli allievi di pianificare un intervento discorsivo attinente al tema, che presenti una strutturazione logica e che esprima il senso critico individuale e del gruppo. Come sostiene Anello (2001, 144), infatti, «La definizione corrente di testo argomentativo sostiene che esso trasmetta un giudizio, un'opinione, un'idea, accompagnandoli con ipotesi, ragioni

[24] Secondo Ianes (2001, 396) «La controversia in classe è uno dei mezzi didattici più efficaci e importanti che l'insegnante ha a disposizione per migliorare l'apprendimento».

o prove per dimostrarne la validità o la debolezza». In questa direzione è opportuno creare delle situazioni di apprendimento che sviluppino lo spirito di osservazione, di analisi e di giudizio degli allievi, in modo tale che riescano a codificare il proprio pensiero in modo chiaro.

In questa prospettiva è stata ipotizzata l'attività laboratoriale di seguito illustrata.

Descrizione dell'attività:

Dalla somministrazione della scheda motivazionale al termine della terza fase sperimentale è emerso che gli elementi che hanno maggiormente entusiasmato la classe, oltre alla disposizione dell'aula e al carattere ludico dell'attività, sono stati la creazione di una storia di sfondo, la storia della festa a Flatlandia e del quadrato che non può parteciparvi, e la lettura di un brano tratto da *Flatlandia*.

Proprio allo scopo di ampliare il livello motivazionale della classe, stimolando la curiosità e l'interesse, il laboratorio ha inizio con la lettura collettiva di un brano tratto da *Alice nel paese delle meraviglie* di Lewis Carroll[25].

In particolare, ci si sofferma sull'ultimo capitolo della fiaba in cui Alice, trovandosi all'interno di un'aula di tribunale, viene coinvolta a testimoniare in un bizzarro processo per scoprire chi ha rubato i dolci preferiti dalla Regina.

Prendendo spunto dall'episodio, il conduttore del laboratorio può ipotizzare una serie di *processi* per risolvere i vari *grattacapi* della Regina di Cuori.

A livello esemplificativo si propone il seguente caso:

Le caramelle gommose della Regina

In occasione dei festeggiamenti per il compleanno della Regina di Cuori, viene stabilito che ciascun abitante del *Paese delle meraviglie* abbia in dono 2 pacchi di caramelle gommose, fino ad esaurimento delle scorte del regno. Gli abitanti si affrettano a disporsi in fila in modo da rientrare tra i fortunati che riusciranno a ricevere le caramelle, creando così una fila lunghissima e una confusione tale da disturbare la Regina stessa, Quando il Bianconiglio (il funzionario della Regina) comincia a distribuire le monete, da acuta osservatrice Alice fa notare che è inutile tenere tutta quella gente lì in fila quando molti non arriveranno a ricevere alcuna caramella. La Regina che è famosa in tutto il reame per la sua irritabilità, va su tutte le furie e dispone di risolvere la questione ancora una volta in tribunale.

---

[25] Famosa in tutto il mondo, tradotta in varie lingue, trasformata in spettacoli teatrali e film, anche in un famoso cartone animato di Walt Disney, *Alice nel paese delle meraviglie* è considerata da molti una fiaba per bambini, ma anche una lettura per adulti: è noto a tal proposito come illustri studiosi e psicoanalisti abbiano analizzato minutamente l'opera sotto molteplici aspetti. Si tratta di un racconto fantastico, la cui dimensione narrativa è ricavata in parte dalla tradizione della *fiaba*, in parte dal mondo delle *Nursery Rhymes*

In tribunale Alice sostiene che è più facile fare la divisione tra il numero complessivo delle caramelle per 2 ed il risultato farà sapere subito quanti abitanti potranno ricevere le caramelle e così facendo si potrà vedere da quale punto della fila si può andare via. Il Bianconiglio non è molto abituato all'utilizzo di moltiplicazione e divisione e accusa Alice di tentata truffa nei confronti della Corona e di tutti gli altri cittadini che diligentemente stanno silenziosamente in fila: secondo il Bianconiglio, attraverso una serie di somme e sottrazioni, tutti gli abitanti avranno le caramelle, senza la possibilità di creare errori e confusione.

A seguito della lettura del caso, il conduttore del laboratorio delinea il contesto per simulare un tribunale all'interno dell'aula: vengono creati alcuni gruppi di 4/5 allievi, cercando di seguire il criterio dei differenti stili argomentativi, e vengono invitati alcuni allievi che hanno dimostrato di avere più chiaro il concetto di moltiplicazione per assumere il ruolo di giuria[26].

Il conduttore del laboratorio allora mette in evidenza le tesi avallate nella storia a invita ciascun gruppo a svolgere la seguente consegna:

> Ciascun membro del gruppo analizzi individualmente la situazione problematica e, dopo aver riflettuto sulle due tesi, individui quella ritenuta più valida. Dopo aver discusso e confrontato le posizioni individuali, ciascun gruppo avrà il compito di scrivere un breve testo in cui si evidenzia la tesi scelta e le argomentazioni forti che la sostengono. Un portavoce individuato dal gruppo avrà il compito di esporre alla Giuria la posizione del gruppo, mentre gli altri allievi avranno il compito di trovare degli elementi per confutare le argomentazioni degli altri gruppi.

[26]Qualora fosse possibile, sarebbe interessante invitare un gruppo di genitori per impersonare il ruolo di giurati.

Durante l'attività, tutti gli allievi hanno la possibilità di consultare del materiale per chiarire la propria posizione, ad esempio dei libri di testo. Qualora si verificasse che tutti i gruppi sostengano la stessa tesi, il conduttore potrebbe assumere il ruolo di antagonista e cercare di confutare le argomentazioni degli allievi.

Al termine del dibattito, la giuria ha il compito di emettere un verdetto che verrà discusso in maniera collettiva dall'intera classe, in riferimento alla tesi *vincente*, agli elementi che hanno contribuito ad attestarla tale, ai tipi di argomentazione utilizzati, ai punti forti e ai punti deboli che ciascun tipo di argomentazione presenta. L'attività laboratoriale potrà essere ripetuta, presentando nuove situazioni problematiche, affinché ciascun gruppo produca un *Diario di bordo* in cui esplicitare la situazione problematica, la tesi vincente e le relative argomentazioni, oggetto di successive discussioni in classe.

5.3 Riflessioni conclusive sul laboratorio di matematica e sulla discussione in classe

La pratica didattica del laboratorio di matematica favorisce una evoluzione degli schemi d'azione in riferimento alla situazione e ai significati ad essa associati da parte degli studenti, in quanto si delinea come riferimento per un linguaggio condiviso da supporto per i processi di verbalizzazione. Con l'obiettivo di riformulare e giustificare quanto esperito, il laboratorio matematico permette di proiettare il significato oltre il proprio vissuto e di entrare in contatto con altri aspetti della cultura matematica, in una sorta di costruzione reticolare della conoscenza che rispetta l'individualità.

La centralità del colloquio pedagogico come discussione in classe e la rilevanza della codificazione verbale in matematica sono tematiche presenti negli studi di vari gruppi di ricerca in didattica della matematica, quasi tutti concordi nel sostenere il concomitante valore della dimensione individuale e di quella sociale nei processi di insegnamento/apprendimento. In questo senso la discussione non si identifica come momento conclusivo del laboratorio proposto ma, al contrario, può esserne definita la risorsa, in quanto si configura come ambiente di apprendimento che incoraggia il confronto e la valutazione ragionata dei punti di vista ed alimenta la strutturazione concettuale e, dunque, affina la competenza argomentativa (Anello 2001, 136). Fin dalla prima consegna infatti, gli allievi hanno il compito di esprimere le motivazioni delle proprie azioni e delle proprie scelte, sulla base di un ambiente di apprendimento particolarmente ricco e stimolante, quale quello di una situazione problematica ispirata al *mondo delle meraviglie* di Alice.

Lo sviluppo della competenza argomentativa ha bisogno proprio di un clima favorevole all'elaborazione di ipotesi e alla successiva discussione. Il ruolo dell'insegnante è proprio quello di sostenere un positivo confronto e un'efficace interazione verbale per favorire la socializzazione delle strategie utilizzate e il riconoscimento di più possibilità risolutive, attraverso la flessibilità nella gestione degli interventi, la valorizzazione dei contributi, l'analisi degli errori[27], la promozione di una reale collaborazione all'interno della classe.

---

[27] Come sostiene Maccario (2003, 18 – 20), gli errori intesi come momenti di *deviazione* rispetto ad uno standard di risposta prestabilito, non vanno semplicemente corretti ma meritano

Sicuramente una modalità didattica di tipo laboratoriale prevede tempi lunghi e la strutturazione di situazioni che consentano agli allievi di costruire una successione di modellizzazioni provvisorie da verificare continuamente nella dialettica tra la pratica e il costrutto teorico emerso dalla discussione con i compagni e l'insegnante; nonostante ciò è indispensabile sottolineare che solo attraverso un'adeguata integrazione tra gli schemi d'azione esperiti e la comunicazione allievi – insegnante è possibile favorire la produzione di ipotesi, la costruzione di congetture, la loro verifica e argomentazione, per la strutturazione di significati innovativi rispetto a quelli strettamente connessi agli schemi d'uso impiegati nella soluzione di uno specifico compito.

opportune forme di esplorazione, possibilmente condivisa con l'allievo. Spagnolo (1998, 109 – 119) ad esempio propone un interessante approccio sistemico all'errore visto come ostacolo epistemologico.

Conclusioni

Il lavoro di ricerca in campo didattico quale occasione di sviluppo del sistema scolastico per una piena attribuzione dell'Autonomia scolastica e organizzativa, ha affrontato la tematica dell'argomentazione come elemento funzionale alla padronanza consapevole dei concetti matematici, aspetto che suscita oggi un crescente interesse nel panorama della ricerca in didattica della matematica. L'argomentare e il congetturare in particolare sono propedeutici allo sviluppo della capacità di definire i concetti matematici e di individuare le relazioni fra questi, passando dal linguaggio naturale al linguaggio rigoroso della dimostrazione.

L'attività argomentativa potrebbe essere infatti definita come lo strumento più generale per poter costruire catene deduttive nel linguaggio naturale, seguendo le modalità del prevedere e interpretare, e in questo senso come attività di avviamento alla dimostrazione.

Ispirandosi alla Teoria delle Situazioni (Brousseau, 1998) quale paradigma di riferimento nella Ricerca in didattica, l'esperienza sul campo è stata in particolare rivolta a configurare le differenze nelle argomentazioni di allievi provenienti da contesti socioculturali differenti, al fine di individuare i modelli culturali di appartenenza, in riferimento ai contenuti messi in gioco riconducibili al pensiero proporzionale, e valorizzarli nella messa a punto di percorsi educativi individualizzati.

La problematica cui si è voluto dare un contributo si configura nella crescente presenza nelle scuole di allievi provenienti da ambienti culturali differenti, rispetto alla quale si assiste a un particolare dispendio di energie per intervenire nell'ottica di una *integrazione delle differenze* che trascende a mio avviso nel concetto di omologazione. Il termine *integrazione* viene comunemente inteso come il passaggio di un bambino segregato in una classe regolare: sicuramente questo tipo di definizione è riduttiva nei confronti di un concetto che, come sostiene Canevaro (1996, 183), «non significa affatto assunzione di una situazione statica ma richiesta di trasformazioni per rispondere a bisogni integrati e integrabili».

La definizione della linea di indirizzo predisposta per l'esperienza sul campo è stata inoltre fortemente influenzata sia dalla prospettiva di Vygotskji rispetto al funzionamento mentale e al fatto che il linguaggio si configura come strumento sociale che penetra nella mente a dirigere il pensiero, controllare il comportamento durante lo sviluppo, organizzare le categorie di realtà (Miller, 1987, 375 – 426); sia dalla prospettiva dell'Etnomatematica, un approccio antropologico alla matematica, «volto a spiegare i processi di generazione, organizzazione e trasmissione in differenti sistemi culturali e le forze interattive che agiscono su di noi in questi tre processi» (D'Ambrosio, 2002, 7). L'ipotesi di partenza relativa all'esistenza di differenze nei processi e nelle argomentazioni in situazioni di insegnamento/ apprendimento rispetto ai modelli culturali di appartenenza è stata in parte verificata grazie all'analisi quantitativa e qualitativa dei dati rilevati durante i tre interventi che hanno costituito l'indagine sperimentale.

In particolare la differenza più evidente tra il tessuto argomentativo degli allievi di nazionalità cinese e quelli di nazionalità autoctona è legata al fatto che, come riscontrabile nell'analisi dei dati della seconda fase sperimentale, gli allievi cinesi utilizzano in netta prevalenza delle argomentazioni di tipo pragmatico, in quanto mostrano con un disegno o con un'operazione la veridicità di quanto affermano, mentre gli allievi italiani adoperano argomentazioni di tipo locale, con riferimento di tipo teorico e atte a giustificare la strategia adottata; i riferimenti teorici inoltre risultano essere più rigorosi ambito geometrico piuttosto che in quello aritmetico, nel quale si rilevano anche riferimenti a teorie ingenue.

Questo risultato è a mio avviso un forte stimolo per una serie di lavori volti a condurre uno studio più accurato delle argomentazioni degli allievi di nazionalità cinese, con i quali non condividiamo la tipologia linguistica in quanto i cinesi utilizzano una lingua simbolica mentre gli italiani una lingua flessiva; tali studi potrebbero prendere ad esempi in carico, oltre a riflessioni di natura linguistica, elementi relativi alle metodologie didattiche utilizzate per l'insegnamento della matematica nelle scuole cinesi o ancora alla storia della cultura matematica cinese. Un ulteriore piano di riflessione potrebbe nascere alla luce del fatto che la Cina è un territorio immenso che accoglie una varietà di popoli diversi, ciascuno con usi e dialetti propri[28], analizzabili a mio avviso tramite la metodologia etnostorica[29].

Ad ogni modo risulta evidente che prendere in considerazione la capacità di argomentare degli allievi in situazioni di insegnamento/apprendimento è una risposta concreta alla necessità di inserire lo studio del linguaggio delle matematiche in una dimensione culturale (Spagnolo, 2002, 11).

Dal punto di vista dell'insegnante – ricercatore inoltre, l'indagine sperimentale ha fornito la possibilità di approfondire alcuni degli aspetti legati allo sviluppo del pensiero proporzionale da parte di allievi di 8 – 10 anni: nella prima e nella terza fase dell'intervento sperimentale infatti è emerso come gli schemi del ragionamento proporzionale vengano utilizzati adeguatamente e con maggiore frequenza in contesto geometrico piuttosto che in quello aritmetico.

Se gli allievi hanno in prevalenza fatto riferimento alla proporzionalità fra grandezze omogenee in contesto geometrico, rispetto alla situazione – problema

[28] Per risolvere le ovvie difficoltà di questa situazione, a partire dalla fondazione della Repubblica Popolare nel 1949, il governo cinese ha adottato una lingua ufficiale usata da radio e televisione, il cosiddetto cinese mandarino, ovvero *lingua comune*, che corrisponde al dialetto parlato nell'area di Pechino.

[29] Ogni territorio possiede una propria storia ufficiale ma è anche portatore e matrice di una storia non ufficiale che bisogna legare e far interagire con la prima, per avere una storia integrale, totale, completa, degli avvenimenti e dei fatti narrati.

La disciplina che indaga tale ambito è l'Etnostoria, la quale implica che la storia risulti caratterizzata da una straordinaria e quasi illimitata flessibilità delle fonti sicché si possa registrare la teoria rigoliana della *compresenza necessaria di tutte le fonti possibili, tutte necessarie, senza aprioristici scarti per fotografare il molteplice del reale* , esito di un equilibrio in grado di segnare, con la polifonia delle fonti, la voce dello storico – antropologo e quella dell'antropologo – storico (Rigoli, 1995).

di aritmetica, è stata rilevata una delle procedure errate più frequenti in riferimento ai primi problemi di proporzionalità ovvero gli allievi fanno ricorso a differenze costanti piuttosto che a rapporti costanti, operando in campo additivo invece che in quello moltiplicativo. In questo caso le strategie del ragionamento proporzionale che risultano essere corrette in ambiente geometrico, subiscono una sorta di regressione a campi più familiari come quello additivo, in situazioni più complesse o nuove, in questo caso in ambiente aritmetico.

Questo aspetto credo abbia dimostrato che l'attività argomentativa è funzionale non solo al monitoraggio delle reali concezioni degli allievi, ma anche alla configurazione di elementi su cui focalizzare la trasposizione didattica e alla messa a punto di percorsi educativi individualizzati.

Tale aspetto propositivo è stato esplicitato nell'ultimo capitolo del lavoro, all'interno del quale è stata proposta un'ipotesi di laboratorio didattico interdisciplinare per lo sviluppo della capacità argomentativa in contesti multiculturali, con l'obiettivo di fornire un eventuale e concreto contributo al mondo della scuola, all'interno del quale il processo di evoluzione è ancora di più oggi auspicabile sul piano della pratica quotidiana.

Ancora nell'ottica del miglioramento, ritengo indispensabile mettere in luce alcune questioni aperte che possono fungere da ipotesi per successive indagini e che possono arricchire di nuovi spunti il presente lavoro:

- Quale ruolo assume realmente il nucleo *Argomentare e congetturare* nella scuola del duemila?
- Quali sono i processi emotivo – motivazionali coinvolti nell'apprendimento della matematica in situazioni didattiche volte a promuovere contestualmente la capacità argomentativa?
- È possibile rintracciare nei risultati ottenuti dalle tre fasi sperimentali immagini mentali distorte che possono in futuro pregiudicare lo sviluppo del ragionamento proporzionale da parte del campione considerato?
- Gli strumenti adottati per la somministrazione dei due interventi si sono rivelati idonei alle caratteristiche del contenuto in questione alle esigenze dei soggetti?
- La proposta di un laboratorio didattico di matematica risponde effettivamente alle esigenze dell'utenza a cui è rivolto?

Le domande elencate nascono dalla volontà di dare validità al lavoro sperimentale, in quanto esperienza spendibile nella pratica didattica, e di sottolineare il carattere non esaustivo della ricerca che mi auguro venga sottoposta ad un'analisi rigorosa che metta in evidenza variabili non considerate, ma anche errori, imperfezioni e tutto ciò che possa attribuire maggiore significato a questa esperienza di ricerca in campo educativo.

Da un punto di vista strettamente personale, l'esperienza di ricerca è stata funzionale a farmi cogliere quanto la scuola di oggi necessiti la figura di un insegnante – ricercatore che, prendendo in carico la delicatezza del processo di insegnamento – apprendimento e assumendo la consapevolezza che l'educazione non si promuove applicando regole precostituite, esplori la realtà scolastica all'interno della quale opera spinto da un autentico gusto per la scoperta.