Università degli Studi di Palermo

Facoltà di Scienze della Formazione

Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria

Indirizzo Scuola Elementare

Influenza dei registri linguistici nell'enunciato di un problema sui processi di risoluzione adottati dagli alunni del secondo biennio

Tesi di Laurea di:
Francesca Alongi
Matr. N° 0406511

Relatore:
Prof. re Filippo Spagnolo

A.A. 2004-2005

A Gianni e Guido

Indice generale

Introduzione……………………..……………………..………………...pag. **5**

Capitolo 1**:** *Ostacoli e fallimenti: linguaggi e difficoltà nell'apprendimento della matematica*

1.1. Il linguaggio della matematica………..…………………..……..…pag. **7**

1.2. Il ruolo della visualizzazione………..…………………..……..…pag. **12**

Capitolo 2**:** *Registri di rappresentazione semiotica e noetica nella didattica della matematica*

2.1. Semiotica e noetica…………………..…………………………..…pag. **15**

2.2. La rinuncia dell'allievo alla devoluzione: scolarizzazione e mancata noetica………………………………..…………………………...…pag. **21**

2.3. Lingua naturale e uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica……………..……….…………………………….…pag. **22**

Capitolo 3: *Il lavoro sperimentale*

3.1. Presentazione del lavoro sperimentale……………………...………..pag. **24**

3.2. La sperimentazione………………………………………..…….…pag. **26**

3.2.1. Il campione…………………………………………….……. pag. **28**

3.2.2. Quadro di riferimento teorico…………………...…….…… pag. **29**

3.2.3. La metodologia……………………………………….... pag. **30**

3.3. Analisi a – priori dei comportamenti attesi da parte degli allievi……………………………………………………...…………..... pag. **31**

Capitolo 4: *Analisi dei dati sperimentali*

4.1**.** Analisi quantitativa dei dati sperimentali…………………..……..… pag. **51**

4.1.1. Analisi descrittiva…………………...…………………….... pag. **51**

4.1.2. Analisi implicativa delle variabili………...……………..… pag. **64**

4.1.3. Variabili supplementari…....………………………….…..pag. **74**

4.2. Analisi qualitativa dei dati sperimentali……………….………..…. pag. **76**

Capitolo 5: *Conclusioni e problemi aperti*

5.1. Conclusioni del lavoro sperimentale…...………….…….….……..…pag. **89**

5.2. Problemi aperti…………………………………………..…………..pag. **92**

Appendice…………………………………………………………..pag. **94**

Riferimenti bibliografici…………………………………………………pag. **108**

Introduzione

Il presente lavoro, ponendosi come fine quello di indagare sull'utilizzo e sulla comprensione di rappresentazioni linguistiche differenti durante la risoluzione di una problema, in alunni di 8 – 10 anni, nasce dalla voglia di sperimentare sul campo le conoscenze e le esperienze maturate durante questi anni di studi, e di agire come un ricercatore, impegnato in prima linea nella ricerca – azione.

La scelta dell'argomento di indagine è stata dettata da una riflessione personale circa una tematica molto ampia, legata agli ostacoli relativi all'apprendimento della matematica, in primo luogo ostacoli di natura linguistica.

La matematica fa "paura". È opinione comune che la matematica sia una materia complicata, difficile, e non del tutto infrequente è l'atteggiamento di rinuncia in partenza di fronte ad alcuni contenuti matematici che non sono immediatamente comprensibili. La matematica sembra un mondo a sé stante, fatto di simboli e concetti lontani dall'applicazione pratica, un mondo astratto quindi difficile da capire e a volte noioso.

Verrà affrontata dunque, in un primo capitolo, una questione relativa agli ostacoli di origine didattica nell'apprendimento della matematica, con riferimento alla classificazione proposta da G. Brousseau (1983)[1]. In particolare, verranno esaminati gli ostacoli dipendenti dal linguaggio e l'importanza che riveste la visualizzazione, ovvero il ruolo delle immagini (disegni, diagrammi, rappresentazioni grafiche, ect.), nell'apprendimento della matematica nella scuola primaria.

---

[1]Brousseau, 1983, citato in B. D'Amore, 1993;

Una seconda parte sarà dedicata al ruolo della rappresentazione semiotica nell'attività matematica, facendo riferimento agli studi di semiotica e alle ricerche sui registri linguistici.

Il terzo capitolo costituisce, invece, la descrizione dell'esperienza di ricerca nelle sue tre fasi sperimentali: una fase iniziale ha lo scopo di verificare quale modalità di rappresentazione semiotica viene utilizzata con maggiore spontaneità negli alunni, durante la risoluzione di un problema aperto. La fase intermedia consiste nella somministrazione di uno stesso problema a quattro gruppi di soggetti, proposto in differenti registri linguistici[2], per verificare le differenze e le difficoltà.

La fase finale ha lo scopo di indagare su eventuali cambiamenti in seguito all'introduzione del fattore sperimentale.

Nel quarto capitolo ho operato la descrizione dei dati sperimentali attraverso l'analisi descrittiva e l'analisi implicativa delle variabili, seguita da un'analisi qualitativa dei protocolli maggiormente significativi, in relazione ad ogni fase della ricerca. Infine un ultimo capitolo è dedicato alle conclusioni e ai problemi aperti.

L'esperienza di ricerca, rivolta ad un campione di 98 alunni frequentanti il secondo biennio della scuola primaria, si è svolta nei mesi di dicembre – gennaio 2004/2005, presso due scuole di Palermo, il circolo didattico "G. La Masa" e il plesso "Nino Bixio"[3].

---

[2] La stessa situazione – problema è stata sottoposta a quattro differenti gruppi del campione sperimentale. Le quattro varianti sono le seguenti: lingua naturale, linguaggio figurativo, linguaggio tabulo – relazionale e linguaggio algoritmico – procedurale. Tali varianti costituiscono registri di rappresentazione semiotica differenti dello stesso contenuto (in questo caso, la situazione – problema proposta).

[3] Il plesso "Nino Bixio" fa riferimento all'Istituto Comprensivo Padre Pino Puglisi.

Capitolo 1
Ostacoli e fallimenti: linguaggi e difficoltà nell'apprendimento della matematica

1.1. Il linguaggio della matematica

L'apprendimento della matematica non è sempre un processo semplice, lineare. È caratterizzato da una serie di ostacoli di diversa entità, riconducibili sia alla natura della disciplina che ad altri fattori.

La matematica è un codice di comunicazione che, pur differenziandosi da altri codici come la lettura e la scrittura, a questi può essere comparato se consideriamo gli elementi che lo costituiscono: esistono 21 lettere dell'alfabeto che "combinate" tra loro, secondo determinate regole, danno vita al nostro codice linguistico, ma esistono anche 10 cifre che "combinate" tra loro, secondo regole convenzionalmente accettate, danno vita al nostro mondo dei numeri.

La matematica è un linguaggio[4], in cui dunque è rilevante la comunicazione, pertanto gli elementi che lo caratterizzano sono: il codice, la testualità (dal problema, ai diagrammi, alle tabelle…), la sintassi (come insieme di regole), così come lo sono per la lingua.

Ogni linguaggio possiede una propria sintassi, una propria semantica e una propria pragmatica[5], così le matematiche possiedono ciascuna una

---

[4] Fanno parte del linguaggio matematico testi verbali, espressioni simboliche e rappresentazioni visuali di diverso tipo. Il linguaggio matematico comprende diversi *registri*, da quelli usati dagli alunni di scuola primaria per discutere la soluzione di un problema a quelli usati nei testi universitari o negli articoli di ricerca.

[5] La pragmatica è il settore della linguistica che si occupa delle relazioni fra i sistemi di segni e i contesti nei quali vengono utilizzati, o, in altre parole, del funzionamento dei sistemi linguistici nei loro contesti d'uso. La grammatica è invece il settore che si occupa dell'organizzazione interna dei sistemi.

grammatica propria, oggetto di continui aggiustamenti e infine formalizzata, quindi accettata dalla comunità scientifica[6].

Potremmo fare una comparazione, forse un po' azzardata, tra l'analisi logica della lingua e i concetti logico – matematici, dal momento che entrambi permettono l'uso logico del codice, e tra la grammatica e le "regole matematiche" (tutte le varianti ed invarianti che troviamo nel codice matematico), poiché entrambi permettono la corretta costruzione dei linguaggi.

Parole e numeri, dunque, sono entrambi funzionali alla comunicazione ed il loro uso comparativo li rende vicini e trasversali[7].

Il linguaggio matematico, tuttavia, è caratterizzato da una forte astrazione, dal momento che gli oggetti matematici sono per loro natura astratti, non riconducibili ad oggetti concreti: la concettualizzazione di un oggetto matematico, quindi, deve necessariamente passare dall'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche[8].

Il linguaggio non è soltanto una sorgente di difficoltà ma gioca un ruolo fondamentale nei processi di apprendimento.

Sono caratteristiche fondamentali dell'attività matematica l'astrazione, la generalizzazione e la simbolizzazione, operazioni mentali tipiche dell'attività razionale che serve a fornirci un modello generale, concettuale e simbolico, della realtà fisica.

Alla luce di tale riflessione possiamo interpretare in modo nuovo le difficoltà solitamente riscontrate nell'apprendimento della matematica.

---

[6] Il primo linguaggio con una grammatica abbastanza formalizzata è stato quello della geometria euclidea. La prima sistemazione delle grammatiche delle matematiche è avvenuta dalla fine del secolo scorso fino agli anni Trenta. Una prima significativa riorganizzazione degli Elementi di Euclide è stata operata da Hilbert (F. Spagnolo, 1998, pag. 56).

[7] Naturalmente questo non implica che la matematica sia identificabile con un linguaggio e possa essere appresa con gli stessi metodi adottati per una lingua.

[8] Duval, 1993; Chevallard, 1991; Godino, Batanero; 1994.

A tale proposito ritengo opportuno fare riferimento alla classificazione degli ostacoli che possono rendere difficile il superamento delle difficoltà nell'apprendimento della matematica, proposta da G. Brousseau (1983), il quale individua:

1) *Ostacoli di origine ontogenetica:* tali ostacoli dipendono dai limiti neurofisiologici dell'allievo, che possono influenzare negativamente il rendimento scolastico;
2) *Ostacoli di origine didattica:* dipendono dal sistema educativo adottato, dalle scelte operate dall'insegnante, quindi proprio all'insegnante spetta il compito di limitare il più possibile l'influenza di questo genere di ostacoli;
3) *Ostacoli di natura epistemologica*: dipendono dalla natura della disciplina, e dunque sono inevitabili.

Una delle principali questioni connesse agli ostacoli di origine didattica è quella inerente al linguaggio utilizzato e alla comprensione di quest'ultimo. Athanasios Gagatsis sottolinea l'importanza della lettura di un testo[9] matematico:

«*"Tecnicamente", la lettura è superiore in efficacia rispetto agli altri mezzi di informazione. Il lettore può sempre tornare sul suo testo per approfondirne progressivamente il contenuto (per esempio in matematica), cosa che non si potrebbe fare ascoltando la radio. D'altra parte, si sa che la lettura permette di comprendere un messaggio circa 3 volte più velocemente rispetto al semplice ascolto (27000 parole lette ogni ora, contro 9000 parole ascoltate)*»[10].

D'altronde, il problema della comprensibilità di un testo scritto è esistente: l'enunciato di un problema, il testo di un esercizio, una spiegazione

[9] Per "testo", qui si intende un testo scritto. In generale il termine "testo" va inteso come ogni produzione linguistica orale o scritta, non necessariamente formulata in un linguaggio verbale.
[10] A. Gagatsis, 1995, pag.138.

dell'insegnante, esprimono, mediante frasi e parole, termini tratti dal linguaggio matematico e non sempre la comprensione di un concetto matematico veicolato dal linguaggio scritto è immediata. La leggibilità[11] di un testo matematico (ad es. dell'enunciato di un problema) è determinata, secondo Colette Laborde[12], da quelle che ella indica come *variabili redazionali*[13]. Esse sono:

1) Grado di esplicitazione ottenuto dall'impaginazione, dalla punteggiatura e dalle strutture sintattiche impiegate.
2) Complessità sintattica.
3) Densità dell'enunciato.
4) Ordine delle informazioni fornite.
5) Differenza tra la forma in cui le informazioni sono date e quella in cui le si deve trattare nella risoluzione.
6) Grado di esplicitazione degli oggetti intermedi utili alla risoluzione del problema.

Queste variabili sono delle caratteristiche degli enunciati dei problemi dati in lingua naturale. Esse hanno una forte incidenza sul trattamento del testo da parte dell'allievo, svolgendo il ruolo di facilitatore o di ostacolo nell'elaborazione della soluzione. Se proviamo a comparare, seguendo i criteri indicati dalla Laborde, il seguente testo:

"Calcolare il rapporto delle altezze di due rettangoli equivalenti con le basi rispettivamente di 12 cm e di 15 cm".

con questo:

[11] Per leggibilità si intende "*il grado di difficoltà provata da un lettore che cerchi di comprendere un testo*" (A. Gagatsis, 1995, pag. 139).

[12] Laborde, 1995, *Occorre imparare a leggere e scrivere in matematica?* La matematica e la sua didattica n° 2, 121-135.

[13] "*Chiamiamo variabili redazionali alcune caratteristiche linguistiche degli enunciati dei problemi suscettibili di assumere valori differenti tali che un cambio di valore rischi di modificare il trattamento dell'enunciato*" (C. Laborde, 1995, pagg. 125 – 126).

"Il rettangolo A ha la base di 12 cm; il rettangolo B ha la base di 15 cm. L'area del rettangolo A è uguale all'area del rettangolo B. Calcolare il rapporto tra l'altezza del rettangolo A e l'altezza del rettangolo B"

comprendiamo subito che i due testi sono semanticamente congruenti, che entrambi richiedono lo stesso procedimento risolutivo, ma ci rendiamo conto anche dell'evidente differenza a livello di comprensibilità[14].

Nel primo caso la punteggiatura non viene utilizzata, l'enunciato è complesso, anche se costituito da un solo periodo, con una proposizione subordinata. Il termine "rispettivamente" richiede attenzione da parte dell'allievo. L'enunciato (appena di due righe) appare piuttosto denso e la domanda è posta all'inizio. Le informazioni sono date nell'ordine inverso rispetto a quello in cui esse possono essere trattate e l'informazione relativa al passaggio fondamentale (l'uguaglianza delle aree) è appena accennata ed è celata nel termine "equivalente".

Il secondo testo che, nel lavoro della ricercatrice francese, costituisce una rielaborazione del primo, è più comprensibile: la punteggiatura è utilizzata, il "rapporto delle altezze" richiesto viene indicato esplicitamente. L'enunciato è stato distinto in quattro proposizioni e appare meno complesso. L'enunciato (di cinque righe) è lungo, ma non è particolarmente denso, la domanda è posta alla fine ed è chiaramente evidenziata (si va addirittura a capo).

Le informazioni sono date nell'ordine in cui possono essere trattate nella risoluzione e l'informazione relativa al passaggio fondamentale (l'uguaglianza delle aree) è ora ben evidenziata.

---

[14] Per quanto riguarda la risoluzione dei problemi, gli ostacoli possono riguardare le seguenti fasi (D'Amore, 1993):

- Lettura del testo
- Comprensione (traduzione) del testo
- Trasformazione del testo in modelli (grafici , tabelle etc.)
- Applicazione della tecnica risolutiva
- Codificazione della risposta

Il linguaggio può diventare (e in molti casi lo è) un ostacolo supplementare all’acquisizione di conoscenze matematiche. La componente linguistica è un fattore preponderante in matematica, anche se a volte viene sottovalutato: la capacità di estrarre da un testo matematico le informazioni pertinenti rispetto alla risoluzione dello stesso, è mortificata dalla struttura dell’enunciato, dal momento che esso contiene solo le informazioni necessarie (e solo quelle vanno utilizzate, senza escluderne nessuna) per giungere alla soluzione del problema.

Questa è una vera e propria clausola didattica, come la definisce B. D’Amore[15], che spinge il bambino dalla scuola elementare in poi ad utilizzare esclusivamente i dati numerici del testo nell’ordine in cui essi si presentano[16].

Per lavorare in modo specifico sulla forma linguistica, propone Laborde, si può abituare gli allievi a giocare con il testo, facendo loro risolvere problemi in cui l’enunciato contiene dati superflui, facendo loro produrre un testo destinato ai compagni, ricomponendo un testo dato in più parti, trovando la domanda adeguata alla soluzione, e così via.

1.2. Il ruolo della visualizzazione

Nell’apprendimento e nell’insegnamento della matematica, oltre all’espressione linguistica, svolge un ruolo importante la visualizzazione.

---

[15] B. D’Amore, 1995, pag. 333.

[16] Per quanto riguarda il contratto didattico, come lo definisce G. Brousseau quando parla di quell’: ”*Insieme dei comportamenti dell’insegnante che sono attesi dall’allievo e l’insieme dei comportamenti dell’allievo che sono attesi dall’insegnante…*”, esso è costituito da regole implicite, stabilite dai fatti. Un esempio:

- Ogni problema ha una soluzione e una sola;
- Bisogna utilizzare tutti i dati numerici dell’enunciato nell’ordine in cui vengono dati;
- L’allievo deve pensare ad applicare le operazioni che si stanno studiando;
- L’allievo deve arrivare ad ogni costo alla soluzione.

L’espressione di un contenuto matematico, con molta frequenza, non è affidata soltanto a parole o ad appositi simboli; spesso ci si avvale di disegni, schemi, diagrammi, immagini.

Insieme alle altre modalità di rappresentazione semiotica, le rappresentazioni grafiche sono molto utili per esprimere un contenuto matematico, e quindi per essere in grado di apprenderlo.

Le rappresentazioni grafiche «*sono delle rappresentazioni semiotiche allo stesso titolo di quanto lo siano le figure geometriche, la scrittura algebrica o la lingua*», tuttavia non basta affidarsi all’interpretazione spontanea di figure e immagini, per utilizzare correttamente questo registro semiotico[17].

E. Fischbein, in uno studio dedicato specificamente alla rappresentazione visuale di oggetti matematici ed alla sua importanza nella didattica della matematica[18], espone la “teoria dei concetti figurali”.

Fischbein sottolinea:

«*L’integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei contenuti concettuali su quelli figurali, non è un processo naturale. Essa dovrebbe costituire una continua, sistematica, principale attività del docente*».

Introducendo il termine “concetto figurale”, Fischbein parla di una «*fusione tra concetto e figura*» che porta alla formazione ed all’apprendimento del contenuto matematico in questione.

La costruzione dei concetti figurali, nella mente dello studente, non è, tuttavia, un processo cognitivo frutto dell’interpretazione spontanea dell’immagine: è necessario l’accostamento adeguato di diverse forme di rappresentazione per giungere alla comprensione.

[17] Duval, 1994.
[18] Fischbein, 1993, p. 143.

La visualizzazione è didatticamente molto importante, ma non deve essere considerata concettualmente esclusiva.

Duval sottolinea l'indispensabilità della varietà dei possibili registri rappresentativi, ridimensionandone il ruolo:

«*È l'oggetto rappresentato che importa, e non le sue diverse rappresentazioni semiotiche possibili... La distinzione tra un oggetto e la sua rappresentazione è dunque un punto strategico per la comprensione della matematica*»[19].

È da questa considerazione che voglio partire per introdurre l'argomento successivo, che costituirà una trattazione più ampia circa il concetto di "registro linguistico" e la coordinazione di diverse modalità di rappresentazione semiotica.

[19] Duval, 1993, pp. 37 e 38.

Capitolo 2
Registri di rappresentazione semiotica e noetica nella didattica della matematica

2.1. Semiotica e noetica

Dal momento che gli oggetti matematici non sono direttamente accessibili alla percezione, in quanto astratti, è necessario ricorrere a diverse rappresentazioni semiotiche per comprenderli, giungendo in tal modo alla concettualizzazione. La varietà dei possibili registri di rappresentazione semiotica[20] è indispensabile, e addirittura inevitabile, come sostiene Duval:

«Il funzionamento cognitivo del pensiero umano si rivela inseparabile dall'esistenza di una diversità di registri semiotici di rappresentazione. Se chiamiamo "sémiosis" l'apprendimento o la produzione di una rappresentazione semiotica e "noésis" l'apprendimento concettuale di un oggetto, dobbiamo affermare che la "sémiosis" è inseparabile dalla "noésis"»[21].

L'acquisizione concettuale di un oggetto matematico passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche. Da qui ne deriva che "non c'è noetica[22] senza semiotica[23]", non c'è pensiero senza

[20] Secondo Duval un registro è un sistema *semiotico* di rappresentazione. Ferrari P.L. intende il concetto di registro con un'accezione differente: il registro è una varietà linguistica basata sull'uso. Più in generale, è una costruzione che collega la situazione simultaneamente al *testo*, al sistema *linguistico* e al sistema sociale. Un registro si forma per selezione delle risorse linguistiche disponibili a un soggetto, in relazione agli usi che intende farne.

[21] Duval, 1993, pp. 39-40.

[22] Per "noetica" si intende l'acquisizione concettuale di un oggetto. Per Platone la noetica è l'atto di concepire attraverso il pensiero, per Aristotele costituisce l'atto stesso di comprendere concettualmente.

[23] Per "semiotica" si intende l'acquisizione di una rappresentazione realizzata per mezzo di segni. La semiotica include lo studio delle *lingue* e di altri sistemi di segni che lingue non sono, come ad esempio le notazioni *simboliche* o i colori di un semaforo.

attività rappresentativa. Quindi, il soggetto deve necessariamente ricorrere ad una pluralità di sistemi semiotici, coordinandoli in modo funzionale alla comprensione.

La questione dei rapporti fra sviluppo del pensiero e processi di comunicazione sembra collegarsi ampliamente al rapporto noetica/semiotica.

Duval distingue le rappresentazioni mentali da quelle semiotiche. Le rappresentazioni mentali sono il risultato di un processo di interiorizzazione delle rappresentazioni semiotiche[24]. La disponibilità di più sistemi semiotici permette diverse rappresentazioni di uno stesso oggetto, il che arricchisce le capacità cognitive dei soggetti e le loro rappresentazioni mentali.

La scuola di G. Lakoff[25] di colloca su posizioni opposte: l'attività linguistica è il riflesso di quella cognitiva e dipende strettamente da questa. Pur rimanendo in un quadro cognitivista, Lakoff muove dalla critica di alcuni aspetti delle teorie di Chomsky, rifiutando l'indipendenza della grammatica da fattori come significati, contesti, cultura, esperienza corporea, metafore: per lui i linguaggi sono manifestazioni di superficie di processi cognitivi profondi. Quindi secondo questo orientamento è possibile separare i concetti dalla loro forma linguistica e un linguaggio riflette una cultura ma non contribuisce a determinarla.

È evidente che, se si ritiene che le rappresentazioni semiotiche siano fenomeni di superficie, è difficile attribuire alla comunicazione un ruolo rilevante nello sviluppo del pensiero e quindi nell'educazione.

Sostiene D'Amore che se cambia il registro cambia necessariamente anche la rappresentazione semiotica, mentre non è detto il contrario; cioè può

[24] Vygotskij sostiene che l'interiorizzazione è un processo che consiste nel trasformare i comportamenti esteriorizzati in processi intellettuali interni (Vygotskij, 1992).
[25] Lakoff e Núñez (1997), opera citata e commentata all'interno dell'articolo "*Matematica ed educazione: il ruolo fondamentale dei linguaggi*", parte I, di Ferrari P.L.

cambiare la rappresentazione pur mantenendosi lo stesso registro semiotico[26].

Gli oggetti matematici sono costruiti attraverso l'attività semiotica, cioè attraverso rappresentazioni linguistiche, molteplici e complementari, che aiutano a distinguere l'oggetto dalla sua rappresentazione.

L'ampia letteratura in materia di conversione e trattamento dei registri semiotici, che fa capo a Raimond Duval, e le numerose ricerche nel settore, nascono per tentare di capire qual è il ruolo del segno, del simbolo, nella concettualizzazione[27].

Elemento centrale per la costruzione di concetti è l'uso funzionale del segno[28]. Un sistema simbolico è un registro rappresentativo che interviene nella concettualizzazione, un sistema di segni che permette di adempiere alle funzioni meta–linguistiche di comunicazione, trattamento e di oggettivazione.

Ma un sistema semiotico non è uno strumento per accedere ad un concetto, "*esso è costitutivo del funzionamento stesso del pensiero e della conoscenza*"[29], in questo senso "*ogni conoscenza è inseparabile da un'attività di rappresentazione*"[30].

Per tentare di sintetizzare le numerose ricerche che trattano del ruolo del segno nel processo di costruzione del significato, possiamo affermare che ogni concetto in matematica:

[26] D'Amore, 2001, pag. 161.

[27] Per "concettualizzazione" qui s'intende la costruzione di un concetto, alla quale partecipa sia la parte istituzionale (il Sapere) che la parte personale (chiunque abbia accesso al Sapere). Il concetto è continuamente in fase di costruzione. Su come definire un "concetto" ne discute ampiamente D'Amore in (D'Amore, 2001, pag. 151 – 152).

[28] Vygotskij sostiene che il nostro funzionamento cognitivo è intimamente legato e influenzato dall'uso dei segni. Di conseguenza c'è un passaggio da ciò che i segni rappresentano a ciò che i segni ci consentono di fare (Vygotskij, 1992).

[29] D'Amore, 2001, pag. 155.

[30] Duval, 1998, citato in D'Amore, 2001, pag. 157.

- ha rinvii a "non-oggetti". La concettualizzazione non può basarsi su significati che poggiano sulla realtà concreta.
- è costretto a servirsi di rappresentazioni, dal momento che non esistono "oggetti reali"[31] che possano rievocarlo; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci.
- si parla più spesso in matematica di "oggetti matematici" che non di concetti matematici in quanto in matematica si studiano preferibilmente oggetti piuttosto che concetti (Duval, 1998).

La conseguenza, evidenziata da Raimond Duval, è l'esistenza di un paradosso cognitivo del pensiero matematico:

"(…)da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento

[31] "Oggetto reale" va inteso nel senso intuitivo di "cosa". Secondo la Metafisica di Aristotele la "cosa", in quanto parte del reale, è ciò che presenta le tre caratteristiche seguenti:

1. tridimensionalità;
2. accessibilità sensoriale multipla (cioè di più sensi alla volta) indipendente dalle rappresentazioni semiotiche;
3. possibilità di separazione materiale da altre parti della realtà, da altre "cose".

concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche"[32].

L'alunno non può entrare direttamente in contatto con l'oggetto matematico, per forza di cose dovrà riferirsi ad una specifica rappresentazione di quell'oggetto, finendo con identificare l'oggetto con la sua rappresentazione.

Nel momento in cui l'allievo si troverà nella necessità di accedere a quello stesso oggetto con un'altra modalità di rappresentazione, non sarà in grado di farlo, non possedendo né mezzi critici, né culturali, né cognitivi.

Oppure si può perdere di vista la costruzione del concetto, se l'allievo si limita ad imparare ad esprimerlo e a rappresentarlo con quanti più registri semiotici è possibile.

Sono caratteristiche della semiotica:

- la rappresentazione
- il trattamento
- la conversione

Preso un contenuto da rappresentare (A), si scelgono i suoi tratti distintivi, che dipendono dalle capacità semiotiche di rappresentazione del registro scelto per rappresentare A.

Infatti, scegliendo un registro diverso si fisserebbero altri tratti del contenuto da rappresentare: due rappresentazioni dello stesso oggetto, ma in registri linguistici differenti, hanno contenuti diversi[33].

[32] Duval, 1993, pag. 38, citato in D'Amore, 2001, pag. 156. D'Amore si chiede: "*In questo paradosso, così bene evidenziato da Raymond Duval, si può nascondere una potenziale causa di mancate devoluzioni*?".
[33] "*Una rappresentazione semiotica costituisce un significante diverso a seconda del significato di cui è significante*", D'Amore, 2001, pag. 172.

Una volta scelti i tratti distintivi del contenuto è possibile rappresentare A in un dato registro semiotico, per poi passare al trattamento, cioè all'elaborazione delle informazioni all'interno dello stesso registro.
Un'ultima attività cognitiva è la conversione, la trasformazione del contenuto in un registro semiotico diverso da quello di partenza.
La costruzione della conoscenza matematica dipende dalla capacità di saper utilizzare differenti registri di rappresentazione semiotica dello stesso concetto, quindi dalla capacità di rappresentarlo in un certo registro, di trattare le informazioni e di convertirle da un dato registro ad un altro.
Duval sottolinea, inoltre, due aspetti molto importanti dell'attività semiotica in matematica:

- la pluralità dei registri rappresentativi
- la coordinazione di tali registri.

Abbiamo già visto come diverse rappresentazioni dello stesso oggetto possano rappresentare contenuti differenti di quest'ultimo. È proprio per questo motivo che è importante e indispensabile una varietà di registri semiotici, affinché diverse rappresentazioni si completino a vicenda, evidenziando aspetti che con un solo registro linguistico non è possibile rilevare.
Nella complementarietà trova significato il coordinamento tra registri diversi, che permette allo studente di distinguere tra oggetti matematici e loro rappresentazione e lo rende in grado di utilizzare un oggetto matematico in situazioni differenti, effettuando una scelta consapevole del registro rappresentativo.

2.2. La rinuncia dell'allievo alla devoluzione: scolarizzazione e mancata noetica

Torniamo, in questo paragrafo, all'argomento trattato nel precedente capitolo, gli ostacoli nell'apprendimento della matematica.

Alla luce del dibattito teorico, di cui è stato ampliamente trattato sopra, possiamo interpretare in modo nuovo tali difficoltà.

D'Amore, a partire dalla sua teoria delle rappresentazioni in matematica, sostiene che:

"*La rinuncia dello studente alla devoluzione*[34] *(ovviamente inconsapevole), l'incapacità dello studente di implicarsi (…), assumendosi carico diretto e personale della responsabilità della costruzione della conoscenza, in ambiente scuola, sono legate all'incapacità (talvolta solo supposta) o di rappresentare, o di trattare o di convertire, a causa di una mancata didattica specifica a monte*"[35].

Una delle maggiori difficoltà cognitive di un allievo è proprio data dalle operazioni tipiche della semiotica:

- La scelta della modalità di rappresentazione del concetto all'interno di un registro semiotico stabilito, e la scelta dunque dei tratti considerati significativi per tale rappresentazione.
- La trasformazione di trattamento da una rappresentazione all'altra ma all'interno dello stesso registro.
- La trasformazione di conversione da una rappresentazione all'altra, ma passando da un registro all'altro.

[34] Per "*devoluzione*" si intende l'atto con il quale l'insegnante delega allo studente di farsi carico diretto della responsabilità della costruzione del proprio sapere. Quando l'allievo accetta l'apprendimento è possibile; in altri casi lo studente non accetta di impegnarsi personalmente, ed allora l'apprendimento è impossibile. La parola "devoluzione" è tratta dallo studio del diritto: si tratta di un passaggio di beni da una persona ad un'altra. La "*devoluzione*" è definita da Brousseau come "*L'atto attraverso il quale l'insegnante fa accettare all'allievo la responsabilità di una situazione di apprendimento (a – didattica) o di un problema ed accetta lui stesso le conseguenze di questo transfer*", Brousseau, 1986.

[35] D'Amore, 2001, pag. 165.

Lo studente, in tal modo, potrebbe giungere ad effettuare una scelta rinunciataria, che ha come diretta conseguenza la scolarizzazione dei saperi[36].

In particolare, alcune delle difficoltà più spesso riscontrate riguardano capacità come quella di risalire da una rappresentazione al contenuto rappresentato.

Padroneggiare le rappresentazioni semiotiche ed essere in grado di coordinare registri linguistici diversi è un modo per rendere lo studente responsabile della costruzione del proprio sapere.

Ma questo non basta: l'elemento chiave dell'apprendimento è la condivisione.

Gli oggetti matematici, così come li definisce J. Godino, sono "*entità culturali socialmente condivise*"[37]: questo è valido, naturalmente, anche per i registri di rappresentazione semiotica.

Essi nascono con una funzione comunicativa, quindi la loro costruzione è il risultato di una interazione tra individui che ne hanno condiviso i significati.

Negoziare le esperienze, i problemi, le soluzioni, socializzare le proprie esperienze e condividerle permette di apprendere in modo responsabile.

2.3. Lingua naturale e uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica

La lingua naturale, o "everiday language", è un registro di rappresentazione semiotica più complesso degli altri, in quanto è plurifunzionale.

---

[36] Per "*scolarizzazione dei saperi*" si intende l'atto, spesso inconsapevole, attraverso il quale l'allievo effettua una delega alla Scuola, in quanto istituzione, ed all'insegnante, in quanto rappresentante di quell'istituzione, il compito di selezionare per lui i saperi significativi.

[37] J. Godino, C. Batanero, 2000.

Duval distingue quattro funzioni discorsive, che caratterizzano la lingua naturale:

- funzione referenziale di designazione degli oggetti;
- funzione apofantica di espressione di enunciati completi;
- funzione di espansione discorsiva di un enunciato completo;
- funzione di riflessività discorsiva.

Ci siamo già occupati del ruolo svolto dalla visualizzazione, e quindi dalle rappresentazioni grafiche, nell'espressione e nella comprensione di un contenuto matematico. Ma, come sostiene D'Amore[38], la figura (grafici, tabelle, disegni…) non sempre è un aiuto alla risoluzione di problemi di matematica: a volte può confondere ulteriormente lo studente, il quale, dovendo lavorare con un doppio codice linguistico (quello scritto e quello figurale), può essere portato a credere di avere di fronte a sé due problemi, invece di due rappresentazioni semiotiche dello stesso problema.

In altre parole, non riesce a far convergere le diverse informazione suggerite da registri differenti.

Di tutt'altra natura è invece il disegno spontaneo. A volte l'allievo, nel tentativo di risolvere un problema di matematica, può ricorrere al disegno, per ricercare la strategia risolutiva adeguata.

Tali figure sono spontanee, e sono disegnate come supporto alla risoluzione e quindi sono figure risolutive.

D'Amore differenzia tali modalità di rappresentazione grafica dalle figure allegoriche: in alcuni casi i calcoli sono accompagnati da figure che non sono legate esplicitamente alla soluzione.

[38] D'Amore, 1995, pag. 329.

Capitolo 3
Il lavoro sperimentale

3.1. **Presentazione del lavoro sperimentale**

In questo capitolo viene presentata e descritta la fase della ricerca sperimentale, lavoro che ho condotto presso due scuole elementari: il Circolo Didattico “G. La Masa” e il Circolo Didattico “Nino Bixio”, entrambe di Palermo, nei mesi dicembre/gennaio dell’anno scolastico 2004/2005. Le classi coinvolte nel mio lavoro sperimentale sono state in tutto cinque, 4 quinte e una quarta, per un totale di 98 alunni tra gli 8 e i 10 anni. L’obiettivo che ha orientato la mia ricerca è stato quello di indagare sull’utilizzo spontaneo di differenti modalità di rappresentazione del significato di un testo matematico e dell’influenza che tali registri semiotici hanno nella risoluzione di una situazione – problema.

Per avviare l’indagine, il primo passo è stato quello di delineare una situazione – problema idonea allo scopo. Ho scelto un problema presentato in lingua naturale, che utilizza un linguaggio semplice, per facilitare la comprensione e la capacità di trasformazione linguistica.

Questo ha costituito la prima fase del lavoro sperimentale, quella che ho chiamato problema aperto, che costituisce una sorta di questionario, dal momento che mi è servito per indagare sulle modalità di utilizzo spontaneo di rappresentazioni semiotiche.

La progettazione del lavoro è continuata con la costruzione del fattore sperimentale. L’obiettivo era quello di verificare se avveniva un cambiamento nelle modalità di rappresentazione e di risoluzione nel campione sperimentale, e, se questo cambiamento avveniva, di quale entità, in seguito alla somministrazione di un problema presentato con uno specifico registro linguistico.

Infine, quale strumento di verifica, ho pensato di somministrare nuovamente il problema aperto a tutto il campione.

Prima di iniziare l'indagine sperimentale sul campo, è stata costruita l'analisi a – priori dei comportamenti attesi da parte degli allievi, uno strumento essenziale per affrontare ricerche di questo tipo, perché permette di rilevare in modo adeguato i dati utili e di analizzarli con gli strumenti della statistica. I dati rilevati in seguito a ciascuna fase sperimentale, infatti, oltre a completare l'analisi a – priori con i comportamenti non ipotizzati, sono stati sottoposti ad un'analisi descrittiva con l'aiuto di una tabella Excel per registrare la presenza/assenza di tali comportamenti, per ogni variabile "alunno". In seguito è stata effettuata la distribuzione delle frequenze in una tabella articolata in quattro colonne (modalità della variabile sotto esame, frequenza assoluta, frequenza relativa rispetto al totale degli alunni e frequenza relativa rispetto al totale delle risposte), e infine con l'utilizzo del programma Chic ho effettuata l'analisi delle similarità e quella delle implicazioni.

A completamento dell'analisi quantitativa dei dati, ho effettuato un'analisi personale, qualitativa, delle risposte, tenendo conto degli elaborati maggiormente significativi tra tutti i protocolli del campione.

La mia ricerca sperimentale ha, quale punto di partenza, la seguente ipotesi generale:

Ipotesi generale:

H^1: Se agli alunni viene presentato un problema in un registro linguistico differente dalla lingua naturale, allora le loro prestazioni nella risoluzione migliorano.

Sottoipotesi di ricerca:

H^a: Il linguaggio figurativo e quello tabulo - relazionale consentono una migliore interpretazione dei dati di un problema.

Ipotesi nulla:

H^o: Le strategie risolutorie non vengono influenzate dalla modalità di rappresentazione della situazione-problema.

Se accettiamo la nullità dell'H^o, dobbiamo accettare l'attendibilità dell'ipotesi contraria, quindi l'ipotesi che il registro linguistico influenza l'interpretazione dei dati.

Obiettivo generale:

Indagare sull'utilizzo e sulla comprensione di rappresentazioni linguistiche differenti durante la risoluzione di una situazione problematica, negli alunni del secondo biennio della scuola primaria.

Obiettivi specifici:

1. Rilevare le differenti strategie risolutive, all'interno di ciascun gruppo, rispetto alla risoluzione della situazione -problema proposta in quattro varianti linguistiche, durante la somministrazione del fattore sperimentale.
2. Verificare in che modo la proposta di un modalità di rappresentazione piuttosto che un'altra influenza i risultati della fase finale

3.2. La sperimentazione

Per falsificare l'ipotesi generale, il lavoro sperimentale è stato articolato in tre differenti fasi. E' necessario, infatti, in seguito alla formulazione delle ipotesi di ricerca, predisporre degli strumenti adeguati strumenti che ne permettano la falsificazione, che permettano di andare contro l'ipotesi. Infatti "*caratteristica fondamentale di una ipotesi è la sua* *falsificabilità, ovvero la possibilità, attraverso tentativi sistematici, di dimostrarne la falsità*”.

La prima fase consiste nella somministrazione di un problema aperto ad un campione di 98 alunni, scelti in modo casuale, di età compresa tra gli 8 e i 10 anni. Mi riferisco, dunque, ad un target di alunni frequentanti il secondo biennio della scuola primaria (4° -5° elementare).

Scopo di questa prima fase è quello di individuare le strategie risolutorie e l’adozione spontanea di una modalità di rappresentazione semiotica nei soggetti che costituiscono il campione.

Il problema aperto rappresenta un *compito di traduzione* da una modalità di rappresentazione all’altra.

Nello specifico si tratta di tradurre il problema *dal linguaggio naturale ad un altro,* scelto liberamente da ciascun allievo.

La seconda fase, che costituisce propriamente l’esperimento, consiste nella somministrazione di una stessa situazione-problema a quattro gruppi di soggetti, in differenti registri linguistici. Ad un primo gruppo di soggetti viene somministrata la situazione-problema che utilizza come modalità di rappresentazione semiotica il linguaggio naturale. Al secondo gruppo il problema viene presentato con un linguaggio figurativo: per interpretare il problema e trovare la soluzione, gli alunni possono dunque servirsi esclusivamente di immagini.

Al terzo gruppo viene somministrato il problema utilizzando il linguaggio tabulo-relazionale. Per questa modalità di rappresentazione mi sono servita di una tabella a doppia entrata, che mette in relazione i dati fondamentali del problema, consentendone una più facile interpretazione.

Il quarto gruppo di soggetti deve invece risolvere il problema che viene proposto con un linguaggio algoritmico-procedurale: la situazione-problema è stavolta suddivisa in quattro tappe, per ognuna delle quali i bambini devono specificare l’algoritmo risolutivo all’interno del diagramma indicato.

La terza fase sperimentale consiste nel proporre nuovamente a tutti i gruppi la situazione-problema iniziale, che prevede, in fase finale, la stessa identica consegna.

L’obiettivo di quest’ultima fase è quello di verificare quali effetti sono stati ottenuti in seguito all’introduzione del fattore sperimentale.

3.2.1. Il campione

Il lavoro è stato condotto su un campione di 98 bambini, di età compresa tra gli 8 e i 10 anni, frequentanti il secondo biennio della scuola primaria.

Si tratta di tre classi quinte appartenenti al circolo didattico “G. La Masa”, e di una quinta e di una quarta elementare dell’istituto “Nino Bixio”, entrambe di Palermo. Il lavoro si è svolto nei mesi di dicembre-gennaio 2004/2005.

In tutte le classi il mio intervento è stato precedentemente definito con l’insegnante dell’ambito logico-matematico di ciascuna classe, con la quale ho concordato le modalità di svolgimento di ogni prova (tempi, spazi, disposizione dell’aula).

Il mio intervento in classe è durato in media 60 minuti. Ogni classe, infatti, era invitata a risolvere tre compiti diversi: il problema aperto in fase iniziale, la situazione-problema e nuovamente il problema aperto in fase finale. Ho ritenuto opportuno dare circa 20 minuti di tempo per risolvere ogni compito.

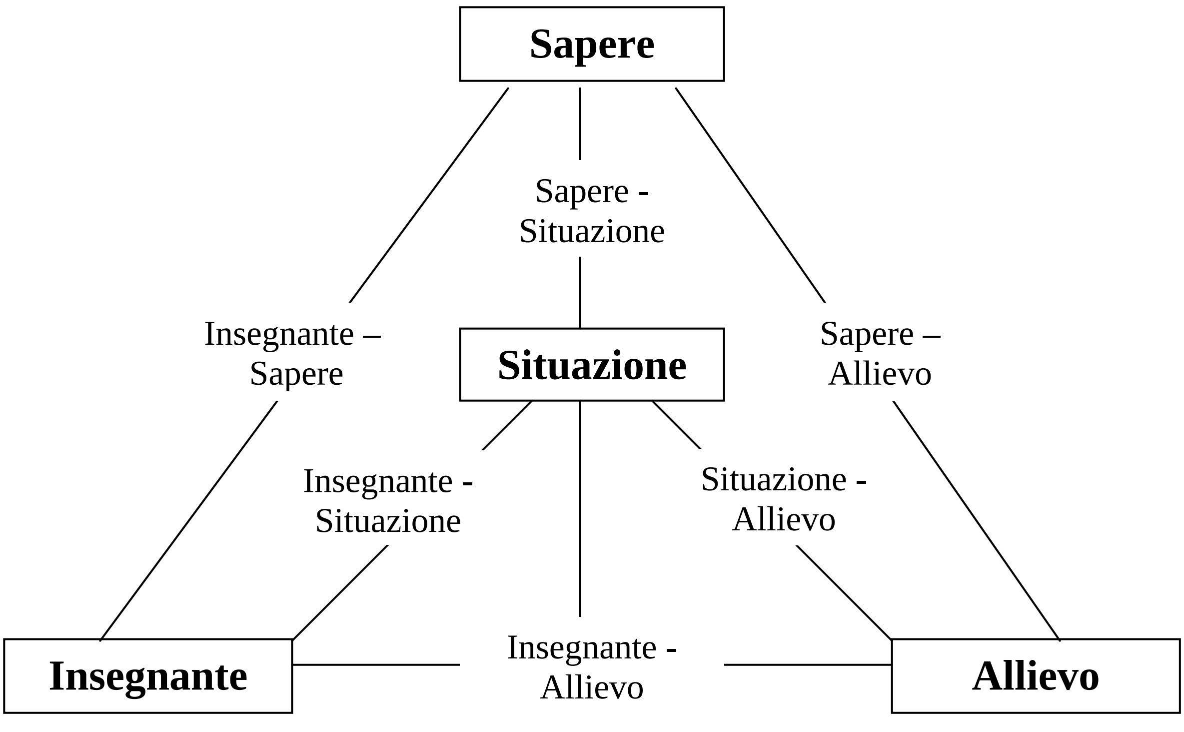
3.2.2. Quadro di riferimento teorico

Quale paradigma di riferimento teorico, ho adottato, durante il mio lavoro sperimentale, il paradigma della ricerca – azione, uno dei più diffusi e al quale si fa maggiormente riferimento nella ricerca in didattica.

La ricerca in didattica si pone come un meta-paradigma, dal momento che utilizza sia il paradigma della disciplina che il paradigma delle scienze sperimentali.

All'interno di tale paradigma rientra la "Teoria delle situazioni", di Guy Brousseau che prende in considerazione i possibili soggetti e le relative relazioni all'interno di una situazione didattica: il sapere, l'insegnante e l'allievo.

Tali soggetti sono in relazione tra di loro all'interno di un preciso ambiente e attraverso una situazione didattica, come è possibile rilevare osservando il seguente schema che mette in evidenza gli elementi costitutivi del fenomeno di apprendimento/insegnamento:



L’apprendimento non è una pura trasmissione di conoscenze, dall’insegnante all’allievo, ma è un momento significativo nel quale l’allievo interagisce attivamente e direttamente con l’ambiente circostante, in modo personale e soggettivo.

L’insegnante si pone quindi come un mediatore di conoscenze, non limitandosi alla semplice comunicazione di quest’ultime, ma stimolando una buona devoluzione del problema, una presa di coscienza della situazione – problematica: l’insegnante delega all’allievo di farsi carico diretto della responsabilità della costruzione del proprio sapere.

3.2.3. La metodologia

Prima di somministrare le diverse schede ai bambini, nelle varie classi, mi sono presentata a loro, chiarendo ogni dubbio circa la mia presenza in classe.

Ho spiegato loro che avevo bisogno della loro collaborazione per una ricerca e che dovevano eseguire alcune consegne, rassicurandoli del fatto che non c’era una valutazione. Questo li ha rassicurati molto e li ha messi in condizione di lavorare con maggiore tranquillità.

La maggior parte degli alunni ha accettato di collaborare, alcuni con molto entusiasmo, altri in maniera più “passiva”.

Una volta introdotta alla classe l’attività, ho distribuito a ciascun alunno una copia della prima scheda, il problema – questionario, senza dare alcuna indicazione. Dopo aver letto la consegna e il testo del problema ho dato 20 minuti per risolverlo, in modo individuale. La stessa cosa è avvenuta durante la somministrazione delle altre due schede.

Per svolgere le diverse fasi della sperimentazione in ciascuna classe è stata impiegata circa un ora; ho preferito sperimentare nelle prime ore della giornata (solitamente tra le 9:00 e le 10:00), per essere sicura che non fossero troppo stanchi per un'attività del genere.

3.3. **Analisi a - priori dei comportamenti attesi da parte degli allievi.**

Vengono riportate, per ciascuna situazione problematica, le possibili strategie di risoluzione ipotizzate.

L'analisi a priori comprende l'insieme di tutti quei comportamenti ipotizzabili dagli allievi nei confronti della "situazione-problema", cioè tutte le possibili strategie risolutive corrette e non. Si tratta, dunque, di una classificazione di comportamenti attesi da parte degli allievi. L'analisi a priori, oltre ad offrire l'opportunità di tabulare al meglio i dati ottenuti in seguito alla sperimentazione, consente di individuare:

- Lo "spazio degli eventi", cioè l'insieme delle possibili strategie risolutive corrette e non, che è possibile ipotizzare in quel contesto d'azione;
- Il "buon problema", quello che permette la migliore formulazione;
- Le variabili didattiche che permettono un cambiamento nei comportamenti degli allievi.

Inoltre permette di analizzare in modo più accurato lo strumento valutativo.

La costruzione dell'analisi a-priori è avvenuta in diverse fasi:

- Durante la costruzione del problema aperto, durante la fase iniziale;
- Dopo la somministrazione della situazione problema, proposta utilizzando le diverse varianti linguistiche, al campione preso in esame;
- Dopo la somministrazione del problema aperto, durante la fase finale.

In questo modo è stato possibile integrare le strategie ipotizzate con tutte quelle date dal campione e quelle non previste.

Viene presentato adesso l'elenco delle strategie risolutive ipotizzate, seguite da quelle effettivamente utilizzate dagli alunni che costituiscono il campione preso in esame e che sono state considerate nella tabulazione dei dati.

L'analisi a – priori effettuata per il problema aperto in fase iniziale è da considerarsi valida anche per la fase finale, dal momento che la situazione problematica è la stessa. Il P. A. F. è infatti da considerare come una fase di verifica: somministrando nuovamente il problema – aperto proposto ad apertura di sperimentazione, posso confrontare i dati ottenuti nei due momenti (iniziale e finale). Inoltre le strategie effettivamente utilizzate dagli alunni sono riportate tutte insieme, senza distinguere se sono state riscontrate in fase iniziale o in fase finale.

Problema aperto – Fase iniziale e finale (P.A.I. e P.A.F.)

"Quattro amici pagano € 12,50 per 3 coppe di gelato e un aperitivo. Sapendo che quest'ultimo costa € 3,50, qual è il prezzo di ogni coppa di gelato?.

Rappresenta il problema nel modo che preferisci (con un disegno, con una tabella, con un'espressione aritmetica ecc.) e trova la soluzione."

Ipotesi risolutive corrette:

S1. L'alunno procede alla risoluzione del problema come è abituato a fare solitamente: utilizza lo spazio a disposizione per scrivere da una parte i dati, da una parte il diagramma con le operazioni da svolgere, sotto le operazioni in colonna e infine scrive la risposta. Le operazioni che svolge sono:

- € 12,50 - € 3,50 = € 9,00
- € 9,00 : 3 = € 3,00

S2. L'alunno procede come nella S1 ma senza utilizzare la macchina delle operazioni (il diagramma).

S3. L'alunno procede esattamente come nella S1 o nella S2 ma, prima o subito dopo avere inserito i dati, li rappresenta attraverso una serie di disegni in sequenza o utilizzando dei simboli iconografici.

S4. L'alunno inizialmente disegna le tre coppe di gelato e l'aperitivo e indica il costo complessivo di tale insieme (€ 12,50). Poi passa alla risoluzione del problema come nella S1 o nella S2.

S5. L'alunno inizialmente disegna le tre coppe di gelato e l'aperitivo e indica il costo complessivo di tale insieme (€ 12,50). Poi disegna solo l'aperitivo e ne indica il costo (€ 3, 50). Risolve il problema come nella S1 o nella S2.

S6. L'alunno rappresenta il problema utilizzando soltanto dei disegni. Disegna tutti i dati come se fossero le vignette di un fumetto. Per ogni vignetta rappresenta l'operazione relativa e la risoluzione.

S7. L'alunno rappresenta il prezzo totale (€ 12,50) disegnando le banconote e le monete, alle quali sottrae il prezzo dell'aperitivo (€ 3,50) e infine divide per 3. Ogni volta disegna le banconote e le monete (può aggiungere o meno altri simboli iconografici).

S8. L'alunno utilizza solo una macchina di operazioni, senza aggiungere simboli o effettuare operazioni in colonna.

S9. L'alunno risolve il problema con una macchina di operazioni o con una tabella e le operazioni in colonna.

S10. L'alunno risolve il problema con simboli iconografici, con una macchina di operazioni e con le operazioni in colonna.

S11. L'alunno risolve il problema facendo solo le operazioni in colonna (esplicitando o meno la risposta).

S12. L'alunno risolve il problema attraverso un'espressione aritmetica, utilizzando adeguatamente le parentesi:

(€ 12,50 - € 3,50) : 3 =

Ipotesi risolutive errate:

E1. Rappresenta il problema, utilizzando uno qualunque dei registri linguistici, in maniera parziale e non lo risolve.

E2. Rappresenta il problema, utilizzando uno qualunque dei registri linguistici, ma commette errori di calcolo.

E3. Cerca di risolvere il problema utilizzando i dati forniti dal testo in modo casuale.

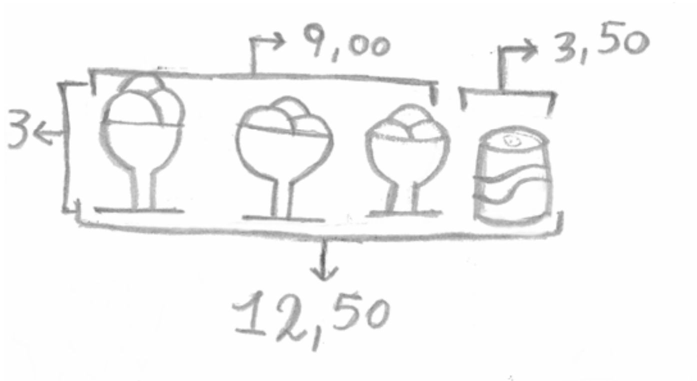
E4. L'alunno risolve il problema correttamente ma non risponde alla domanda finale.

E5. L’alunno, interpretando male il testo del problema, considera €12,50 come il costo totale delle tre coppe di gelato, quindi divide questo dato per 3 senza considerare più gli altri dati del problema.

E6. L’alunno cerca di rappresentare il problema solamente attraverso un disegno, ma non riesce a evidenziare i dati né a trovare la soluzione.

Strategie corrette non ipotizzate:

S13. L’alunno ha effettuato le operazioni in colonna e ha indicato il risultato. Alla fine ha schematizzato tutto il problema nel modo seguente:



S14. Risolve il problema con dati, operazioni e risposta, aggiungendo alla fine un disegno rappresentativo.

S15. L’alunno inizialmente disegna tre amici con una coppa di gelato e uno con un aperitivo e indica il costo complessivo. Poi effettua solo le operazioni in colonna.

S16. L’alunno rappresenta il problema attraverso una serie di simboli iconografici collegati tre di loro da simboli aritmetici.

S17. L’alunno rappresenta i vari prezzi con dei cerchietti vuoti (le monete) ed esplicita accanto al disegno le operazioni.

S18. L’alunno rappresenta il problema con una macchina di operazioni accompagnata da simboli iconografici.

S19. L'alunno rappresenta il problema dividendolo in varie tappe. Per ogni tappa fa un disegno simbolico e lo spiega utilizzando il linguaggio naturale e scrivendo le operazioni.

S20. L'alunno rappresenta il problema con un unico disegno nel quale viene indicata anche la soluzione.

S21. L'alunno utilizza simboli iconografici e operazioni in colonna (senza indicare dati, risoluzione e risposta).

S22. Come la S2 ma le operazioni sono scritte in modo lineare (espressione).

Strategie errate non ipotizzate:

E7. L'alunna effettua solo operazioni in colonna, utilizzando i dati apparentemente in modo casuale ed effettuando anche errori di calcolo.

La soluzione non viene indicata esplicitamente.

€ 12,50 - € 3,50 = 0000

3 : 0000 = 3000

Per la tabulazione dei dati relativi alle strategie corrette ed errate effettivamente utilizzate durante la somministrazione del problema aperto, sia in fase iniziale che in fase finale, ho utilizzato il programma Excel. Le relative tabelle vengono riportate in appendice.

Situazione problema n°1: lingua naturale

Leggi attentamente e risolvi il seguente problema:

Giulia, con i genitori e la sorellina, va al luna Park.
Alla cassa c'è il seguente cartello:

- Ingresso bambini: € 3,50
- Ingresso adulti: € 6,00

Il papà di Giulia paga con una banconota da € 50,00:
quanto riceverà di resto?

Ipotesi risolutive corrette:

A1. € 3,50*2 = € 7,00

€ 6,00*2 = € 12,00

€ 7,00 + € 12,00 = € 19,00

€ 50,00 - € 19,00 = € 31,00

L'alunno moltiplica il prezzo del biglietto di ingresso per i bambini per 2, interpretando opportunamente il testo. Poi moltiplica il prezzo del biglietto per adulti per 2 e somma i due risultati ottenuti. Infine risponde alla domanda del problema sottraendo al valore della banconota il prezzo da pagare.

A2. € 3,50 + € 3,50 = € 7,00

€ 6,00 + € 6,00 = € 12,00

€ 7,00 + € 12,00 = € 19,00

€ 50,00 - € 19,00 = € 31,00

A2 = A1 ma l'alunno addiziona prima i prezzi dei biglietti per bambini, poi i prezzi dei biglietti per gli adulti e somma i risultati ottenuti.

A3. € 3,50 + € 3,50 + € 6,00 + € 6,00 = € 19,00

€ 50,00 - € 19,00 = € 31,00

L’alunno somma tutti i singoli prezzi dei biglietti, ottenendo un unico risultato che sottrae al valore della banconota, ottenendo così la soluzione del problema.

A4. L’alunno applica una delle strategie corrette sopra indicate aggiungendo un disegno o dei simboli iconografici.

A5. L’alunno rappresenta il problema utilizzando esclusivamente una serie di disegni o simboli iconografici, pervenendo alla corretta soluzione.

A6. L’alunno utilizza una strategia corretta come la A1, la A2 o la A3 e in più aggiunge una macchina di operazioni o una tabella.

A7. L’alunno risolve il problema utilizzando solo una macchina di operazioni o costruendo una tabella.

A8. L’alunno considera il prezzo del biglietto per adulti e il prezzo del biglietto per bambini: somma insieme questi valori e li moltiplica per 2, poi procede come nella A1, nella A2 o nella A3:

€ 6,00 + € 3,50 = € 9,50

€ 9,50 * 2 = € 19,00

€ 50,00 - € 19,00 = € 31,00

Strategie corrette non ipotizzate: Non sono state rilevate ulteriori strategie corrette, in seguito alla sperimentazione con il campione preso in considerazione.

Strategie errate ipotizzate:

a1. L’alunno cerca di risolvere il problema utilizzando i dati forniti dal testo in modo casuale.

a2. L’alunno adotta una strategia di risoluzione adeguata ma commette errori di calcolo.

a3. L'alunno, interpretando male il testo del problema, considera un solo bambino e un solo adulto, quindi somma il prezzo di un biglietto per bambini (€ 3,50) con il prezzo di un biglietto per adulti (€ 6,00). Alla banconota da € 50,00 sottrae il valore trovato.

a4. L'alunno moltiplica il prezzo del biglietto di ingresso per i bambini per 2, poi moltiplica il prezzo del biglietto per adulti per 2 e somma i due risultati ottenuti senza rispondere alla domanda (non considera l'ultimo dato)

a5. L'alunno somma tutti i dati a sua disposizione:

€ 3,50 + € 6,00 + € 50,00

a6. L'alunno moltiplica tutti i dati a sua disposizione:

€ 3,50*€ 6,00* € 50,00

a7. L'alunno adotta una strategia di risoluzione errata e commette errori di calcolo.

Strategie errate non ipotizzate:

a8. L'alunno trova la soluzione esatta al problema, ma il procedimento risulta inadeguato: prima moltiplica € 6,00*2 (come nella S1), poi somma € 3,50 + € 3,50 (come nella S2) senza sommare i risultati ottenuti e infine esegue la seguente operazione: € 19,00 – € 50,00 = € 31,00.

Inoltre inverte l'ordine delle operazioni (la prima operazione scritta dal bambino
è: € 19,00 – € 50,00 = € 31,00, poi le altre due).

a9. L'alunno procede in questo modo:

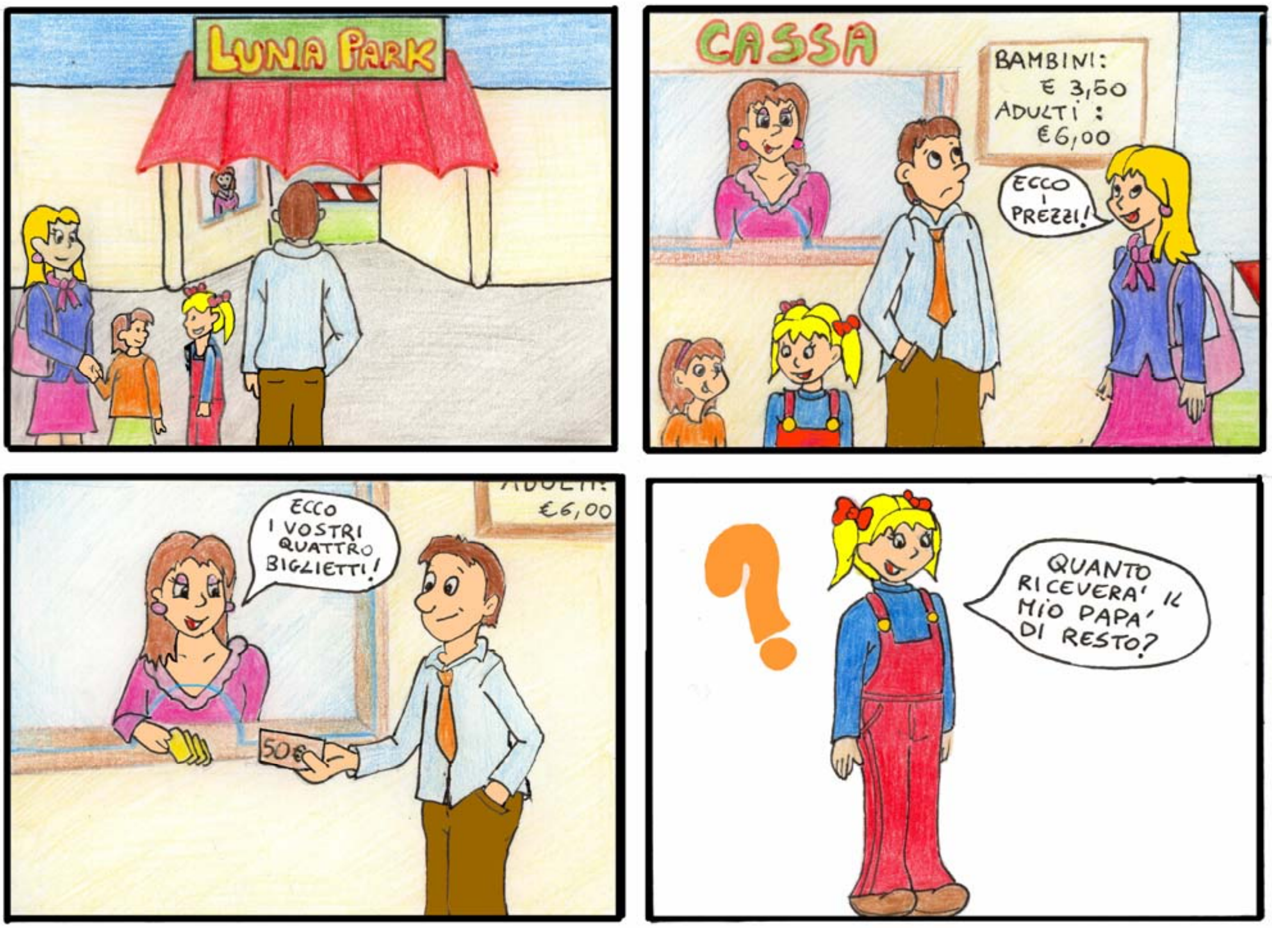
€ 3,50*2 = € 7,00

€ 6,00 + € 6,00 = € 12,00

Risposta: "In tutto il mio papà riceve di resto € 12,00".

Situazione problema n°2: linguaggio figurativo

Osserva attentamente le vignette:



Saresti in grado di rispondere alla domanda di Giulia?

Ipotesi risolutive corrette:

B1. € 3,50*2 = € 7,00

€ 6,00*2 = € 12,00

€ 7,00 + € 12,00 = € 19,00

€ 50,00 - € 19,00 = € 31,00

L’alunno moltiplica il prezzo del biglietto di ingresso per i bambini per 2, interpretando opportunamente il testo. Poi moltiplica il prezzo del biglietto per adulti per 2 e somma i due risultati ottenuti. Infine risponde alla domanda del problema sottraendo al valore della banconota il prezzo da pagare.

B2. € 3,50 + € 3,50 = € 7,00

€ 6,00 + € 6,00 = € 12,00

€ 7,00 + € 12,00 = € 19,00

€ 50,00 - € 19,00 = € 31,00

B2 = B1 ma l'alunno addiziona prima i prezzi dei biglietti per bambini, poi i prezzi dei biglietti per gli adulti e somma i risultati ottenuti.

B3. € 3,50 + € 3,50 + € 6,00 + € 6,00 = € 19,00

€ 50,00 - € 19,00 = € 31,00

L'alunno somma tutti i singoli prezzi dei biglietti, ottenendo un unico risultato che sottrae al valore della banconota, ottenendo così la soluzione del problema.

B4. L'alunno applica una delle strategie corrette sopra indicate aggiungendo un disegno o dei simboli iconografici.

B5. L'alunno rappresenta il problema utilizzando esclusivamente una serie di disegni o simboli iconografici, pervenendo alla corretta soluzione.

B6. L'alunno utilizza una strategia corretta come la B1, la B2 o la B3 e in più aggiunge una macchina di operazioni o una tabella.

B7. L'alunno risolve il problema utilizzando solo una macchina di operazioni o costruendo una tabella.

B8. L'alunno considera il prezzo del biglietto per adulti e il prezzo del biglietto per bambini: somma insieme questi valori e li moltiplica per 2, poi procede come nella B1, nella B2 o nella B3:

€ 6,00 + € 3,50 = € 9,50

€ 9,50 * 2 = € 19,00

€ 50,00 - € 19,00 = € 31,00

Strategie corrette non ipotizzate: Non sono state rilevate ulteriori strategie corrette, in seguito alla sperimentazione con il campione preso in considerazione.

Strategie errate ipotizzate:

b1. L'alunno cerca di risolvere il problema utilizzando i dati forniti dal testo in modo casuale.

b2. L'alunno adotta una strategia di risoluzione adeguata ma commette errori di calcolo.

b3. L'alunno, interpretando male il testo del problema, considera un solo bambino e un solo adulto, quindi somma il prezzo di un biglietto per bambini (€ 3,50) con il prezzo di un biglietto per adulti (€ 6,00). Alla banconota da € 50,00 sottrae il valore trovato.

b4. L'alunno moltiplica il prezzo del biglietto di ingresso per i bambini per 2, poi moltiplica il prezzo del biglietto per adulti per 2 e somma i due risultati ottenuti senza rispondere alla domanda (non considera l'ultimo dato

b5. L'alunno somma tutti i dati a sua disposizione:

€ 3,50 + € 6,00 + € 50,00

b6. L'alunno moltiplica tutti i dati a sua disposizione:

€ 3,50*€ 6,00* € 50,00

b7. L'alunno adotta una strategia di risoluzione errata e commette errori di calcolo.

Strategie errate non ipotizzate:

b8. L'alunna prima sottrae al prezzo del biglietto per adulti il prezzo del biglietto per bambini (e nel farlo commette anche errori di calcolo):

€ 6,00 - € 3,50 = € 3,50

poi divide il risultato che ha ottenuto (e senza considerare la virgola) per € 50:

€ 350 : € 50 = € 7,00

b9. L’alunno moltiplica il prezzo del biglietto per bambini per 2, poi il prezzo del biglietto per adulti per 2 e infine divide il risultato ottenuto nell’ultima operazione per 4 (cioè il numero complessivo dei biglietti acquistati):

€ 3,50*2 = € 7,00

€ 6,00*2 = € 12,00

€ 12,00 : 4 = € 3,00

b10. L’alunno moltiplica il prezzo del biglietto per bambini per 2, poi il prezzo del biglietto per adulti per 2, poi moltiplica il risultato della prima operazione per 2 e il risultato di quest’ultima operazione sempre per 2:

€ 3,50*2 = € 7,00

€ 6,00*2 = € 12,00

€ 7,00*2 = € 14,00

€ 14,00*2 = € 28,00

Situazione problema n°3: linguaggio tabulo -relazionale

Un allegro pomeriggio

Ecco il costo dei biglietti del Luna Park:

	PAPA'	MAMMA	GIULIA	LAURA
ADULTI € 6,00	X	X		
BAMBINI € 3,50			X	X

Se il papà paga con una banconota da € 50,00, quanto riceverà di resto?
Spiega come hai fatto.

Ipotesi risolutive corrette:

C1. L'alunno individua correttamente i dati del problema: papà e mamma sono adulti e il costo di un biglietto per adulti è di € 6,00:

€ 6,00*2 = € 12,00

Giulia e Laura sono due bambine e il costo di un biglietto per bambini è di € 3,50:

€ 3,50*2 = € 7,00

Sommando i valori trovati si ottiene il prezzo totale che il papà di Giulia deve pagare:

€ 12,00 + € 7,00 = € 19,00

Infine l'alunno utilizza l'ultimo dato, al di fuori della tabella:

€ 50,00 - € 19,00 = € 31,00

C2. L'alunno individua correttamente i dati del problema: papà e mamma sono adulti e il costo di un biglietto per adulti è di € 6,00:

€ 6,00 + € 6,00= € 12,00

Giulia e Laura sono due bambine e il costo di un biglietto per bambini è di € 3,50:

€ 3,50 + € 3,50= € 7,00

Sommando i valori trovati si ottiene il prezzo totale che il papà di Giulia deve pagare:

€ 12,00 + € 7,00 = € 19,00

Infine l'alunno utilizza l'ultimo dato, al di fuori della tabella:

€ 50,00 - € 19,00 = € 31,00

C3. L'alunno, interpretando correttamente la tabella, somma tutti i singoli prezzi dei biglietti, ottenendo un unico risultato che sottrae al valore della banconota, ottenendo così la soluzione del problema.

€ 3,50 + € 3,50 + € 6,00 + € 6,00 = € 19,00

€ 50,00 - € 19,00 = € 31,00

C4. L'alunno considera il prezzo del biglietto per adulti e il prezzo del biglietto per bambini: somma insieme questi valori e li moltiplica per 2, poi procede come nella C1, nella C2 o nella C3:

€ 6,00 + € 3,50 = € 9,50

€ 9,50 * 2 = € 19,00

€ 50,00 - € 19,00 = € 31,00

C5. L'alunno applica una delle strategie corrette sopra indicate aggiungendo un disegno o dei simboli iconografici.

C6. L'alunno rappresenta il problema utilizzando esclusivamente una serie di disegni o simboli iconografici, pervenendo alla corretta soluzione.

C7. L’alunno utilizza una strategia corretta come la C1, la C2, la C3 o la C4 e in più aggiunge una macchina di operazioni.

C8. L’alunno risolve il problema utilizzando solo una macchina di operazioni.

Strategie corrette non ipotizzate:

C9. L’alunno utilizza una strategia corretta e in più descrive verbalmente il proprio processo di risoluzione.

C10. L’alunno è giunto alla soluzione corretta considerando dapprima il costo complessivo dei biglietti per gli adulti:

€ 6,00 + € 6,00 = € 12,00

Subito dopo al valore della banconota l’alunno sottrae il risultato ottenuto:

€ 50,00 - € 12,00 = € 38,00

Adesso considera anche il costo complessivo dei biglietti per bambini:

€ 3,50 + € 3,50 = € 7,00

valore che sottrae al valore ottenuto con l’operazione precedente:

€ 38,00 - € 7,00 = € 31,00.

Strategie errate ipotizzate:

c1. L’alunno cerca di risolvere il problema utilizzando i dati forniti dal testo in modo casuale.

c2. L’alunno adotta una strategia di risoluzione adeguata ma commette errori di calcolo.

c3. L’alunno interpretando male i dati forniti dalla tabella considera un solo bambino e un solo adulto, quindi somma il prezzo di un biglietto per bambini (€ 3,50) con il prezzo di un biglietto per adulti (€ 6,00). Alla banconota da € 50,00 sottrae il valore trovato.

c4. L’alunno adotta una delle strategie corrette ma non risponde alla domanda del problema perché non considera il dato al di fuori della tabella.

c5. L’alunno somma tutti i dati a sua disposizione:

€ 3,50 + € 6,00 + € 50,00

c6. L’alunno moltiplica tutti i dati a sua disposizione:

€ 3,50*€ 6,00* € 50,00

c7. L’alunno adotta una strategia di risoluzione errata e commette errori di calcolo.

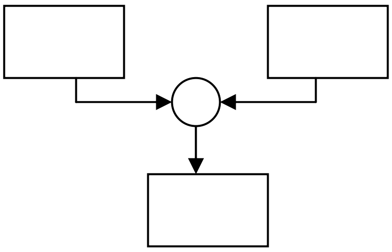
Strategie errate non ipotizzate:

c8. L’alunno adotta una strategia di risoluzione corretta ma si limita ad utilizzare i dati dentro la tabella, senza proseguire oltre.

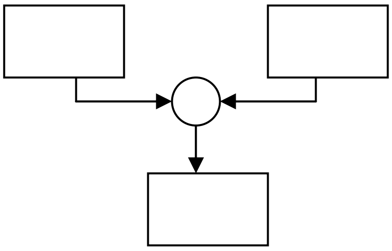
Situazione problema n°4: linguaggio algoritmico - procedurale

Leggi attentamente, completa e risolvi il problema:

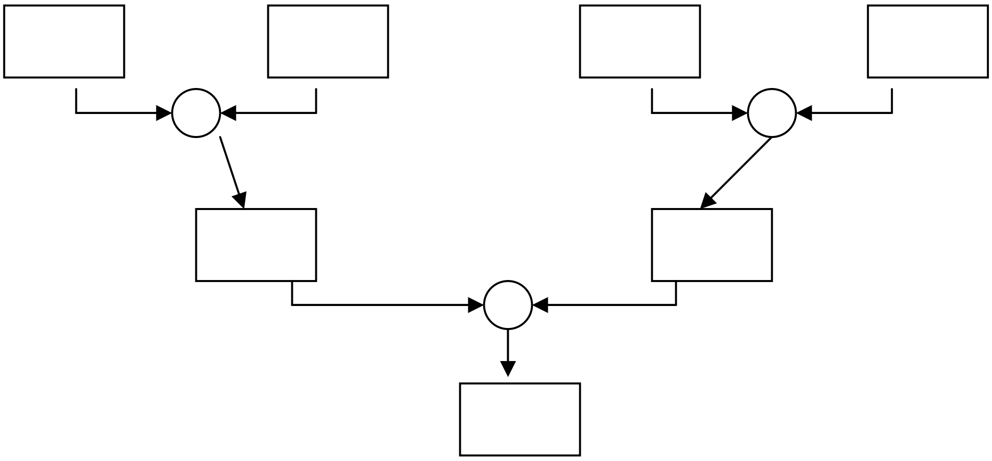
Prima tappa: Giulia, con i genitori e la sorellina, va al Luna Park. Per i bambini il costo del biglietto è di € 3,50.



Seconda tappa: per gli adulti il biglietto di ingresso costa € 6,00.



Terza tappa: quanto sarà il costo complessivo dei 4 biglietti?



Quarta tappa: il papà di Giulia paga con una banconota da € 50,00. Quanto riceverà di resto?
Completa la catena di operazioni aggiungendo la 4° tappa.

Ipotesi risolutive corrette:

D1. Prima tappa: € 3,50 + € 3,50 = € 7,00

Seconda tappa: € 6,00 + € 6,00 = € 12,00

Terza tappa: l'alunno riscrive le prime due operazioni e aggiunge

€ 7,00 + € 12,00 = € 19,00

Quarta tappa: € 50,00 - € 19,00 = € 31,00

D2. Prima tappa: € 3,50*2= € 7,00

Seconda tappa: € 6,00*2= € 12,00

Terza tappa: l'alunno riscrive le prime due operazioni e aggiunge

€ 7,00 + € 12,00 = € 19,00

Quarta tappa: € 50,00 - € 19,00 = € 31,00

D3. Prima tappa: € 3,50 + € 3,50 = € 7,00

Seconda tappa: € 6,00*2= € 12,00

Terza tappa: l'alunno riscrive le prime due operazioni e aggiunge

€ 7,00 + € 12,00 = € 19,00

Quarta tappa: € 50,00 - € 19,00 = € 31,00

D4. Prima tappa: € 3,50*2= € 7,00

Seconda tappa: € 6,00 + € 6,00= € 12,00

Terza tappa: l'alunno riscrive le prime due operazioni e aggiunge

€ 7,00 + € 12,00 = € 19,00

Quarta tappa: € 50,00 - € 19,00 = € 31,00

Nella D1, D2, D3 e D4 l'alunno aggiunge la 4° tappa del problema senza riscrivere la catena di operazioni completa.

D5. L'alunno, nell'ultima parte del problema riscrive completamente la catena di operazioni e aggiunge la 4° tappa.

Strategie corrette non ipotizzate:

D6. L'alunno per le prime due tappe procede come nella D1. Nella terza tappa moltiplica € 3,50*2 e € 6,00*2 e poi somma i risultati ottenuti.

D7. L'alunno adotta una delle strategie corrette e dopo aver aggiunto la 4° tappa del problema, esegue anche un'operazione in colonna

Strategie errate ipotizzate:

d1. L'alunno cerca di risolvere il problema utilizzando i dati forniti dal testo in modo casuale.

d2. L'alunno adotta una strategia di risoluzione adeguata ma commette errori di calcolo.

d3. L'alunno adotta una delle strategie corrette ma non aggiunge la 4° tappa del problema

d4. L'alunno adotta una delle strategie corrette ma invece di aggiungere la 4° tappa del problema, ottiene la soluzione alla domanda eseguendo un'operazione in colonna.

Strategie errate non ipotizzate:

d5. L'alunno nell'ultima tappa inverte l'ordine degli operatori:

€ 19,00 – € 50,00 = € 31,00

d6. L'alunno nell'ultima tappa esegue la seguente operazione:

€ 50,00 - € 12,00 = € 19,00

Capitolo 4
Analisi dei dati sperimentali

4.1. Analisi quantitativa dei dati sperimentali

In seguito alla somministrazione del problema aperto, sia in fase iniziale che in fase finale, al campione di 98 alunni, ho raccolto i protocolli di ciascuno di loro e li ho classificati in base all’analisi a-priori precedentemente effettuata, completata in seguito con le strategie, corrette ed errate, che ho riscontrato negli elaborati e che non avevo ipotizzato.

L’analisi dei dati relativi al problema aperto è effettuata applicando la statistica descrittiva, quindi con la costruzione di due tabelle realizzate in Excel e il calcolo della frequenza relativa percentuale, e attraverso l’uso di CHIC, un software statistico che permette di analizzare le implicazioni fra le variabili (strategie risolutorie). In particolare mi sono servita dell’analisi delle similarità di Lerman e dell’analisi delle implicazioni di Gras.

Inoltre ho effettuato un analisi descrittiva di ciascuna delle 4 varianti della situazione problema della seconda fase della sperimentazione, con la costruzione di 4 tabelle a doppia entrata alunni-strategie, realizzate sempre in Excel, e calcolando la distribuzione di frequenza e la frequenza relativa percentuale, sia in base al numero degli alunni che in base al totale delle risposte.

4.1.1. Analisi descrittiva

Per ciascuna situazione - problema somministrata, compreso il problema aperto in fase iniziale e finale, ho costruito una tabella a doppia entrata alunni-strategie, servendomi dei dati emersi sulla base dell’analisi a-priori.

In ogni tabella è stata indicata la presenza o assenza di una strategia, corretta o meno, utilizzando i seguenti valori:

- **1**: La strategia è stata utilizzata
- **0**: La strategia non è stata utilizzata

al fine di trattare statisticamente i risultati così raccolti, nonché di rendere più semplice il lavoro di analisi descrittiva.

Riporto le tabulazioni in Excel in appendice.

Per descrivere i dati così emersi ho eseguito la distribuzione di frequenze, la frequenza assoluta rispetto a ciascuna strategia riportata nell’analisi a – priori, la frequenza percentuale rispetto agli alunni e la frequenza percentuale rispetto alle risposte.

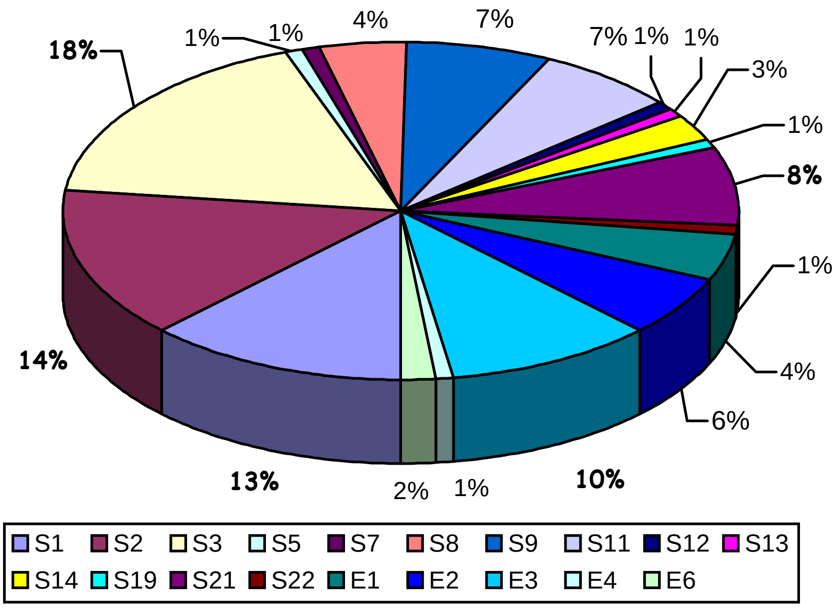
Infine ho indicato, per ogni situazione – problematica, il relativo aerogramma, un grafico a torta in 3D, per rappresentare graficamente la frequenza percentuale delle risposte.

Prima fase sperimentale: P. A. I.

Riguardo il problema aperto, somministrato in fase iniziale, emergono i seguenti dati:

Strategia	Frequenza assoluta	Percentuale (alunni)	Percentuale rispetto alle risposte
S1	15	15,30%	**12,5%**
S2	17	17,35%	**14,2%**
S3	21	21,42%	**17,5%**
S5	1	1,02%	**0,85%**
S7	1	1,02%	**0,85%**
S8	5	5,10%	**4,2%**
S9	8	8,16%	**6,7%**
S11	8	8,16%	**6,7%**
S12	1	1,02%	**0,85%**
S13	1	1,02%	**0,85%**
S14	3	3,06%	**2,5%**
S19	1	1,02%	**0,85%**
S21	9	9,18%	**7,5%**
S22	1	1,02%	**0,85%**
E1	5	5,10%	**4,2%**
E2	7	7,14%	**5,8%**
E3	12	12,24%	**10%**
E4	1	1,02%	**0,85%**
E6	2	2,04%	**1,7%**

Le frequenze relative percentuali, rispetto alle risposte totali date dal campione preso in esame, si possono rappresentare graficamente con il seguente aerogramma, per rendere maggiormente evidenti le caratteristiche distribuzionali delle strategie, corrette ed errate, utilizzate dagli allievi.



Le 12 strategie corrette che ho ipotizzato nell'analisi a priori le ho in seguito suddivise in 3 categorie:

- **Primo gruppo:** l'alunno rappresenta il problema nel modo "classico": dati, diagramma, operazioni in colonna, risposta. Può inserire o meno simboli iconografici, ma si caratterizzano come elementi poco rappresentativi della situazione problematica.
- **Secondo gruppo**: l'alunno rappresenta il problema utilizzando prevalentemente dei disegni, servendosi dunque del linguaggio figurativo.
- **Terzo gruppo**: tali strategie indicano una predisposizione a rappresentare il problema utilizzando un linguaggio tabulo-relazionale o algoritmico-procedurale. Spesso il problema è risolto indicando esclusivamente l'algoritmo risolutivo.

In seguito alla somministrazione, prima in fase iniziale e poi in fase finale, ho rilevato altre strategie che vanno a collocarsi in questi gruppi.

Inoltre è emerso un interessante risultato. Molte strategie che non avevo ipotizzato, utilizzano più di un registro linguistico per rappresentare il problema.

Dunque ho individuato un ulteriore gruppo di strategie corrette:

- **Quarto gruppo**: Strategie che utilizzano in modo coordinato più di un registro linguistico.

Le strategie di risoluzione corrette possono dunque essere raggruppate in questo modo:

1. **S1, S2, S3, S4, S5, S22**
2. **S6, S7, S20**
3. **S8, S9, S10, S11, S12, S18, S21**
4. **S13, S14, S15, S16, S17, S19.**

Analizzando le tipologie di risposte che ho raccolto e classificato, si possono rilevare alcuni dati particolarmente significativi, in fase iniziale:

- Il 77% del campione ha utilizzato una strategia corretta;
- La S3 (l'alunno procede alla risoluzione del problema come è abituato a fare solitamente, ma, prima o subito dopo aver inserito i dati, li rappresenta attraverso una serie di disegni in sequenza o simboli iconografici) è stata la strategia risolutiva maggiormente utilizzata, nel 17,5% dei casi; a questa seguono la S2 e la S1. Da notare che le strategie fanno riferimento tutte al 1° gruppo.
- Nel 45,9% dei casi si tratta di una strategia appartenente al gruppo n°1;
- Solamente lo 0,85% (cioè un solo alunno su 98) ha utilizzato una strategia del gruppo n° 2 (rappresentazione attraverso il disegno);
- Il 25,95% utilizza una strategia del gruppo n°3 (linguaggio tabulo – relazionale e algoritmico -procedurale);
- Solo il 4,2% ha rappresentato il problema servendosi di più registri linguistici coordinati (gruppo misto);

- Il 22,55% delle risposte indica l'uso di una strategia errata, in particolare la E3 nel 10% dei casi (E3: cerca di risolvere il problema utilizzando i dati forniti dal testo in modo casuale).

Dai dati rilevati emerge dunque che la modalità di rappresentazione più spontaneamente utilizzata dagli alunni che costituiscono il campione è quella classica. Gli alunni, infatti, sono soliti procedere in questo modo quando devono risolvere un problema, e questa percentuale era normale aspettarsela. Vedremo se, in seguito al fattore sperimentale, tale percentuale si sarà abbassata, in favore di un modalità di rappresentazione differente.

Seconda fase sperimentale

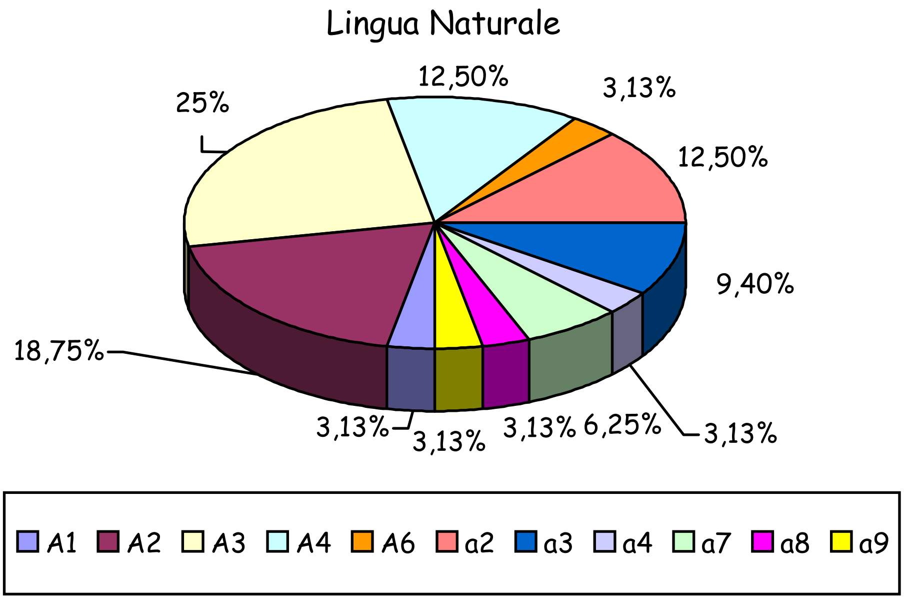
Ecco i dati che sono emersi in seguito alla somministrazione della situazione – problema nella seconda fase della sperimentazione.

1° gruppo. Lingua Naturale:

Strategia	Frequenza assoluta	Percentuale (alunni)	Percentuale rispetto alle risposte
A1	1	4,35%	**3,125%**
A2	6	26,1%	**18,75%**
A3	8	34,8%	**25%**
A4	4	17,4%	**12,5%**
A6	1	4,35%	**3,125%**
a2	4	17,4%	**12,5%**
a3	3	13%	**9,4%**
a4	1	4,35%	**3,125%**
a7	2	8,7%	**6,25%**
a8	1	4,35%	**3,125%**
a9	1	4,35%	**3,125%**

Totale alunni: 23

Totale risposte: 32



Come possiamo facilmente vedere dalla tabella relativa alle frequenze e osservando il grafico a torta, la strategia maggiormente utilizzata, con una frequenza del 25%, è stata la A3 (l'alunno somma tutti i singoli prezzi dei biglietti, ottenendo un unico risultato che sottrae al valore della banconota).

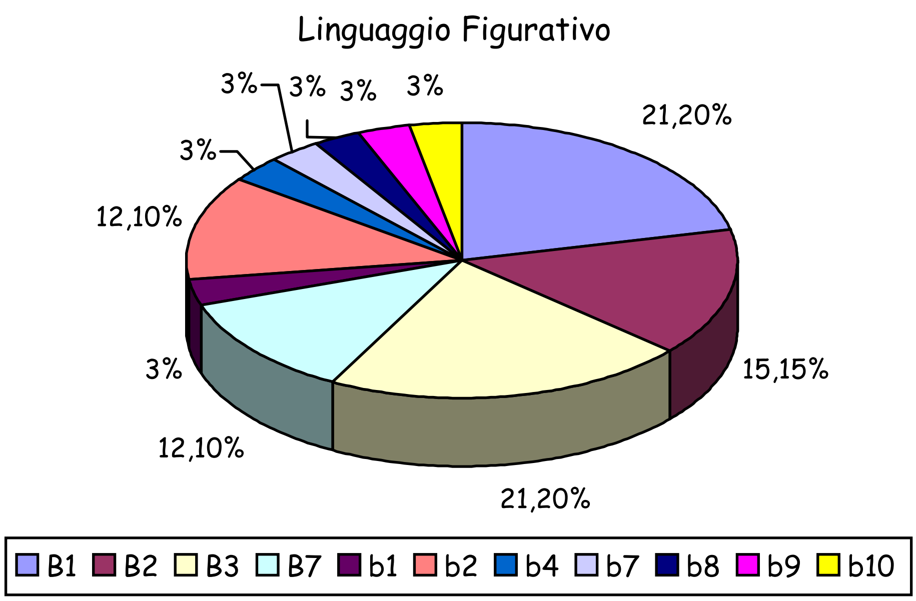
Le strategie A1, A2, A3 e A8 si riferiscono ad una modalità di risoluzione "classica" del problema. Questo, che possiamo individuare come un primo gruppo, ha riscontrato la frequenza maggiore, quasi la metà delle risposte erano di questo tipo (il 46,9%). Riscontriamo, dunque, anche qui come nella fase iniziale, una forte presenza di tali strategie nel procedimento di risoluzione. La strategia A5, relativa alla rappresentazione esclusivamente figurativa, non è stata riscontrata in nessun caso, così come la A7, relativa alla rappresentazione tabulo-relazionale e quella algoritmico-procedurale. La strategia A4 e la A6 costituiscono dei procedimenti risolutori che si avvalgono dell'utilizzo coordinato di più modalità di rappresentazione semiotica. La percentuale riferibile a quest'ultimo gruppo è del 15,6%. Percentuale delle strategie corrette adottate: 62,5%. Percentuale delle strategie errate: 37,5%

2° gruppo. Linguaggio Figurativo:

Strategia	Frequenza assoluta	Percentuale (alunni)	Percentuale rispetto alle risposte
B1	7	26,9%	**21,2%**
B2	5	19,2%	**15,15%**
B3	7	26,9%	**21,2%**
B7	4	15,4%	**12,1%**
b1	1	3,8%	**3%**
b2	4	15,4%	**12,1%**
b4	1	3,8%	**3%**
b7	1	3,8%	**3%**
b8	1	3,8%	**3%**
b9	1	3,8%	**3%**
b10	1	3,8%	**3%**

Totale alunni: 26

Totale risposte: 33



Osservando i dati emersi, relativamente al secondo gruppo, notiamo che le strategie B1, B2 e B3 hanno una frequenza maggiore rispetto alle altre.

Tali strategie, insieme alla B8 che non è stata utilizzata dal campione considerato, si riferiscono ad una modalità di risoluzione "classica" del problema. Questo primo gruppo di risposte costituisce una frequenza pari al 57,55%.

La strategia B7 (l'alunno risolve il problema utilizzando solo una macchina di operazioni o costruendo una tabella) è stata utilizzata nel 12,10% dei casi.

La frequenza percentuale degli errori è del 30 %, tra questi l'errore più frequente è il b2, cioè nel 12,10% dei casi gli alunni hanno adottato una strategia di risoluzione adeguata, ma commettendo errori di calcolo.

Percentuale delle strategie corrette adottate: 69,9%

Percentuale delle strategie errate: 30,1%

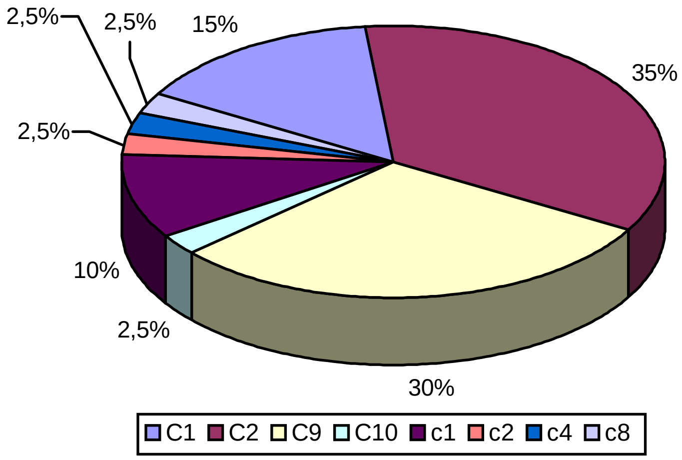
3° gruppo. Linguaggio Tabulo – relazionale:

Strategia	Frequenza assoluta	Percentuale (alunni)	Percentuale rispetto alle risposte
C1	6	26,1%	**15%**
C2	14	60,1%	**35%**
C9	12	52,2%	**30%**
C10	1	4,34%	**2,5%**
c1	4	17,4%	**10%**
c2	1	4,34%	**2,5%**
c4	1	4,34%	**2,5%**
c8	1	4,34%	**2,5%**

Totale alunni: 23

Totale risposte: 40

Linguaggio Tabulo - relazionale



In questo 3° gruppo la percentuale delle strategie corrette è notevolmente aumentata (82,5%). Allo stesso modo è diminuita la percentuale delle strategie errata, quasi si è dimezzata rispetto ai gruppi precedenti, passando dal 37% del primo gruppo e dal 30% del secondo gruppo al 17,5% in questo terzo gruppo.

Questo dato si pone come notevolmente significativo: è evidente che la modalità di rappresentazione tabulo – relazione costituisce un elemento facilitatore sia nella interpretazione dei dati che nella procedura da utilizzare per risolvere il problema.

Il fatto che il 35% degli alunni ha utilizzato la strategia C2 e il 30% la C9, è altrettanto significativo. Sia la C2 che la C9, insieme alla C1 (15%) e alla C10 (2,5%) si riferiscono ad un'unica categoria. Gli alunni che hanno utilizzato una di queste strategie hanno individuato correttamente i dati del problema, osservando i dati contenuti nella tabella e interpretandone in maniera adeguata le relazioni tra queste, e hanno proceduto come sono soliti fare: dati, operazioni in colonna, risposta.

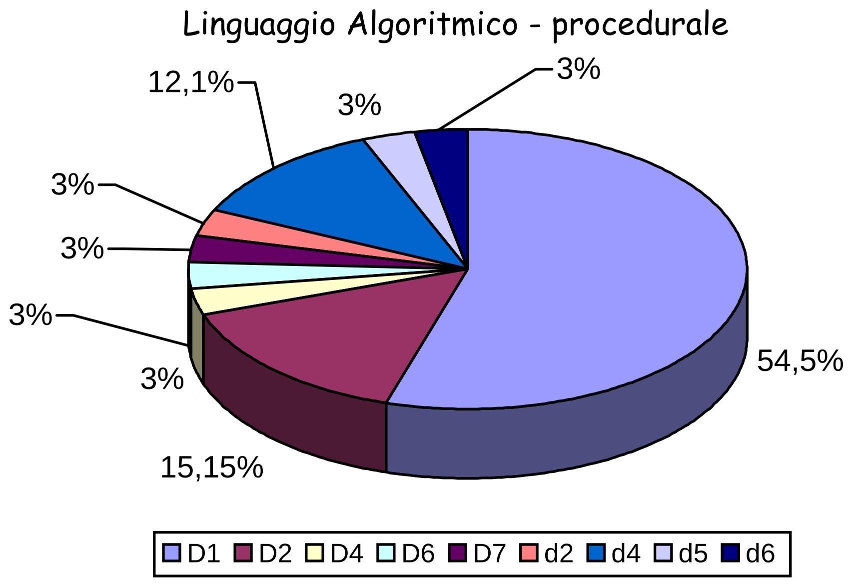
La percentuale totale di questo primo gruppo è dunque pari all'82,5% del totale delle risposte, che corrisponde alla percentuale delle strategie corrette adottate.

4° gruppo. Linguaggio Algoritmico – procedurale:

Strategia	Frequenza assoluta	Percentuale (alunni)	Percentuale rispetto alle risposte
D1	18	69,2%	**54,5%**
D2	5	19,2%	**15,15%**
D4	1	3,8%	**3%**
D6	1	3,8%	**3%**
D7	1	3,8%	**3%**
d2	1	3,8%	**3%**
d4	4	15,4%	**12,1%**
d5	1	3,8%	**3%**
d6	1	3,8%	**3%**

Totale alunni: 26

Totale risposte: 33



Notiamo subito una forte percentuale della strategia D1, pari al 54, 5%.

La D1 insieme alla D2, alla D4 e alla D6 sono tutte strategie molto simili tra di loro (percentuale totale: 75,7%). Le differenziano semplicemente il tipo di operazioni che l'alunno svolge, tutte accettabili allo stesso modo. Il procedimento è identico e questo è facilmente intuibile considerando la modalità di rappresentazione della situazione – problema.

Avendo di fronte una serie di diagrammi, ciascuno riferibili ad una tappa del problema e ad un algoritmo in particolare, la possibilità di scegliere una strategia piuttosto che un'altra è fortemente limitata dal diagramma stesso.

Il 3° delle risposte è riferito alla D7, strategia sostanzialmente identica alle precedenti, tranne per il fatto che l'alunno, oltre a completare i diagrammi e ad aggiungere l'ultima tappa del problema, esegue anche un'operazione in colonna.

L'errore più frequente (12,1% dei casi) è stato il d4: l'alunno adotta una delle strategie corrette ma invece di aggiungere la 4° tappa del problema, ottiene la soluzione alla domanda eseguendo un'operazione in colonna.

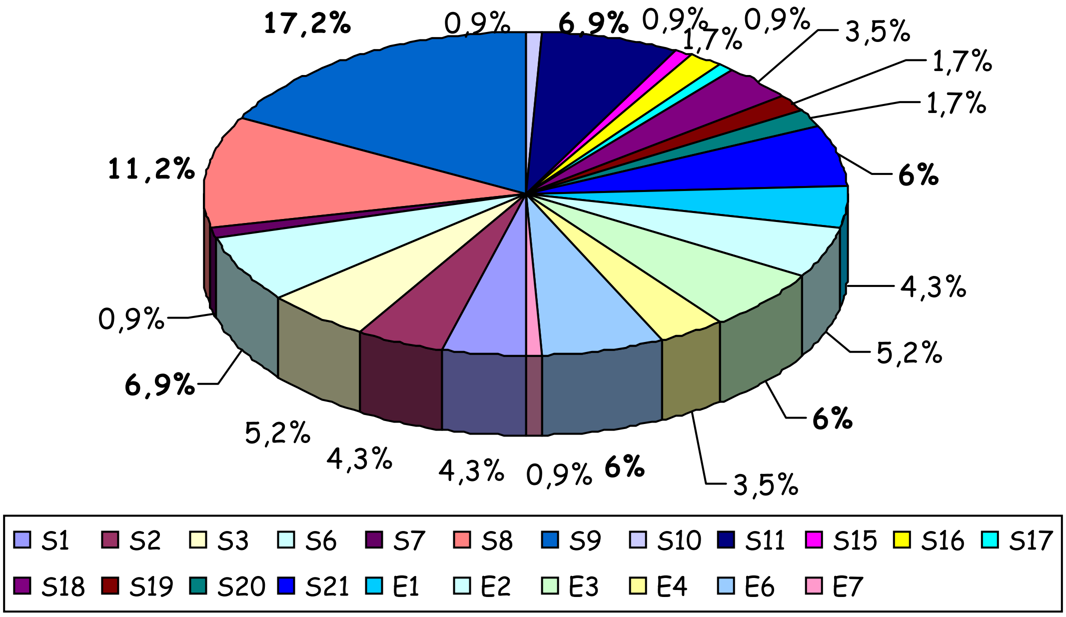
Percentuale delle strategie corrette adottate: 78,7%.

Percentuale delle strategie errate: 21,3%.

Terza fase sperimentale: P. A. F

Riguardo il problema aperto, somministrato in fase finale, emergono i seguenti dati:

Strategia	Frequenza assoluta	Percentuale (alunni)	Percentuale rispetto alle risposte
S1	5	5,10%	**4,3%**
S2	5	5,10%	**4,3%**
S3	6	6,12%	**5,2%**
S6	8	8,16%	**6,9%**
S7	1	1,02%	**0,9%**
S8	13	13,26%	**11,2%**
S9	20	20,40%	**17,2%**
S10	1	1,02%	**0,9%**
S11	8	8,16%	**6,9%**
S15	1	1,02%	**0,9%**
S16	2	2,04%	**1,7%**
S17	1	1,02%	**0,9%**
S18	4	4,08%	**3,5%**
S19	2	2,04%	**1,7%**
S20	2	2,04%	**1,7%**
S21	7	7,14%	**6%**
E1	5	5,10%	**4,3%**
E2	6	6,12%	**5,2%**
E3	7	7,14%	**6%**
E4	4	4,08%	**3,5%**
E6	7	7,14%	**6%**
E7	1	1,02%	**0,9%**



- La percentuale di strategie riconducibili al 1° gruppo si è notevolmente abbassata: dal 45,9% della fase iniziale al 13,8% della fase finale.

- Si è registrato un aumento di strategie appartenenti al 2° gruppo (dallo 0,85% al 9,5%) e al 3° gruppo (dal 25,9% al 45,7%).

La percentuale degli errori è rimasta più o meno la stessa, ma diverse sono le percentuali rispetto alla tipologia di errore. La strategie errata più frequente è la E2 nel 5,2% dei casi (rappresenta il problema utilizzando uno qualunque dei registri linguistici, ma commette errori di calcolo.)

4.1.2. Analisi implicativa delle variabili

L'analisi implicativa delle variabili è stata effettuata con l'utilizzo del programma CHIC (Classification hierarchique implicative et cohesive).

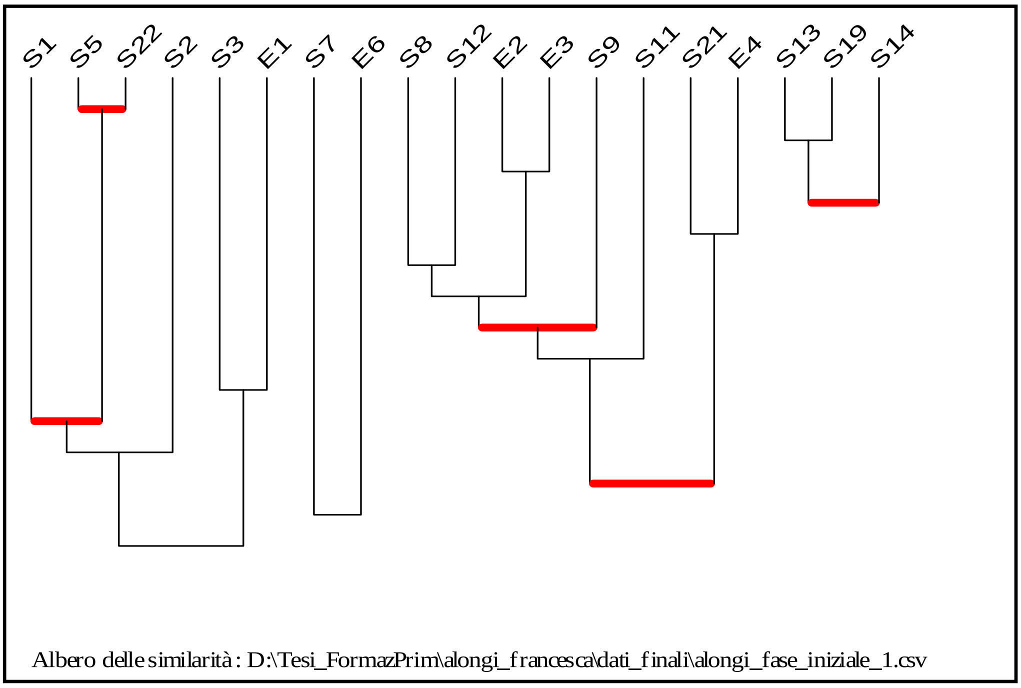
Tale software è uno strumento statistico, ideato dal prof. R. Gras nel 1997, nell'ambito delle ricerche riguardanti la Didattica della Matematica

Grazie a tale programma siamo in grado di ricavare differenti tipi di statistiche, tra le quali l'analisi delle similarità di Lerman e l'analisi implicativa di Gras.

L'analisi implicativa ha come obiettivo quello di verificare il grado di validità di una proposizione implicativa tra variabili binarie e non.

L'analisi delle similarità di Lerman permette di cogliere i rapporti di similarità (e il grado) tra le variabili considerate.

Fase iniziale: Grafico delle similarità



I nuclei di variabili che emergono dall'osservazione del grafico sono principalmente tre. È evidente una forte similarità tra le variabili S5 e S22, e tra queste e la S1. Inoltre osserviamo un buon grado di similarità tra la S14, la S13 e la S19.

Analizzando ciascun nucleo di variabili, possiamo ricavare i seguenti dati:

- Nel nucleo formato dalle variabili S1, S5 e S22 notiamo una forte similarità tra la S5 e la S22, variabili che si correlano con la S1, in modo meno intenso. Di questo primo gruppo fanno parte anche la S2, la S3 e la E1, ma il grado di similarità non è molto rilevante.
- Il secondo nucleo che possiamo rilevare è molto più numeroso del precedente, comprende infatti le variabili S8, S12, E2, E3, S9, S11, S21, E4.

La E2 e la E3 sono abbastanza simili, così come la S8 e la S12. Le due coppie di variabili, inoltre, presentano un certo grado di similarità con la S9.

Anche la S21 e la E4 sono abbastanza correlate e possiedono una certa somiglianza con il gruppo appena individuato.

- Nel terzo nucleo (S13, S19 e S14) si nota una buona similarità tra le variabili coinvolte, in particolare tra la S13 e la S19.

In seguito all'analisi di questi dati, ho cercato di dare una spiegazione di queste similarità:

- Nel primo nucleo individuato, le tre variabili appartengono tutte alla modalità "classica" di risoluzione del problema. La S5, come la S22, si discosta leggermente da questa modalità di risoluzione, anche se complessivamente possiamo ricondurla al primo gruppo, per un semplice motivo: a differenza delle altre strategie classiche, la S5 è un procedimento più completo che si basa sull'analisi del costo complessivo e del costo unitario (inizialmente l'alunno mette in evidenza il costo complessivo, disegnando simbolicamente gli elementi del problema, e il l'unico elemento di cui conosce il costo unitario), mentre la S22 si scosta per il fatto che le operazioni non sono eseguite in colonna, ma in modo lineare, come se si trattasse di un'espressione:

(€ 12,50 - € 3,50) : 3 = € 3,00

- Le variabili che costituiscono il secondo nucleo, invece, sono tutte riconducibili al terzo gruppo di strategie che avevo individuato in precedenza, strategie che riflettono una modalità di rappresentazione di tipo algoritmico – procedurale o tabulo – relazionale. Discorso a parte per le variabili E2 ed E3, che si riferiscono a strategie errate, abbastanza frequenti in questo nucleo. I dati emersi sono facilmente spiegabili: l'uso dei dati in maniera casuale, unitamente agli errori di calcolo, sono strategie errate abbastanza frequenti quando gli alunni utilizzando processi risolutivi del tipo appena descritto. Puntare l'attenzione sulle operazioni da svolgere, concentrandosi quasi esclusivamente sui dati numerici che il testo fornisce, con lo scopo di trovare la soluzione, può indurre più facilmente, a mio avviso, a compiere errori nei calcoli, o ancora ad utilizzare alcuni dati in modo casuale, pur di svolgere l'algoritmo risolutivo.
- Nel terzo nucleo c'è una similarità forte tra le variabili S13, S19 e S14, non a caso le ritroviamo tutte nel gruppo di strategie che avevo denominato come "gruppo misto", quelle strategie, dunque, che utilizzano in modo coordinato differenti modalità di rappresentazione per risolvere il problema (solitamente linguaggio algoritmico – procedurale insieme a linguaggio iconico, oppure insieme al linguaggio naturale, o ancora tutte e tre i registri semiotici insieme, come nel caso della S19).

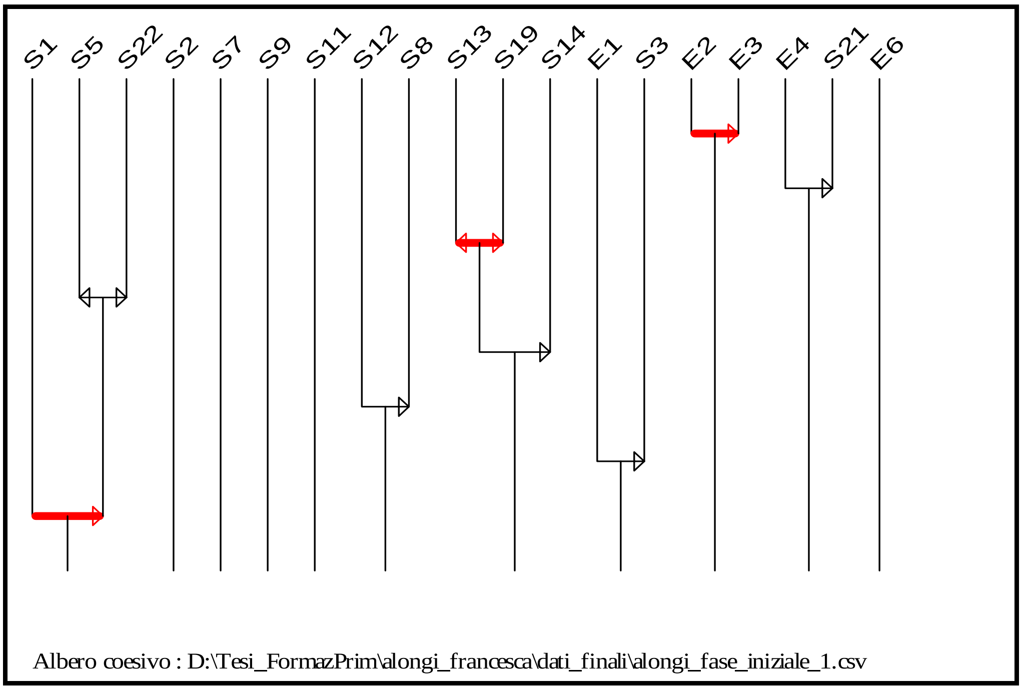
Possiamo, infine, notare la presenza di un quarto nucleo, individuato dalle strategie S6 ed S7. Entrambe fanno parte del secondo gruppo, quello che si riferisce alla modalità di rappresentazione figurativa: gli alunni, per rappresentare il problema, fanno un uso quasi esclusivo del disegno, che in questo caso ha una valenza semiotica molto forte.

Come possiamo facilmente notare, i nuclei che il grafico delle similarità ha messo in evidenza rispecchiano pienamente la precedente classificazione delle strategie in quattro sotto – gruppi da me effettuata, in seguito all'analisi a – priori.

Potremmo concludere dicendo che, almeno in questa prima fase, il campione al quale è stato sottoposto il problema – aperto è riconducibile ad alcuni profili ideali di alunni, in base alla modalità di rappresentazione semiotica più spontaneamente utilizzata per risolvere i problemi.

Tali "alunni ideali" si trasformeranno in variabili supplementari, al fine di effettuare un'analisi non più tra le singole variabili ma tra categorie di variabili.

Fase iniziale: Grafico delle implicazioni



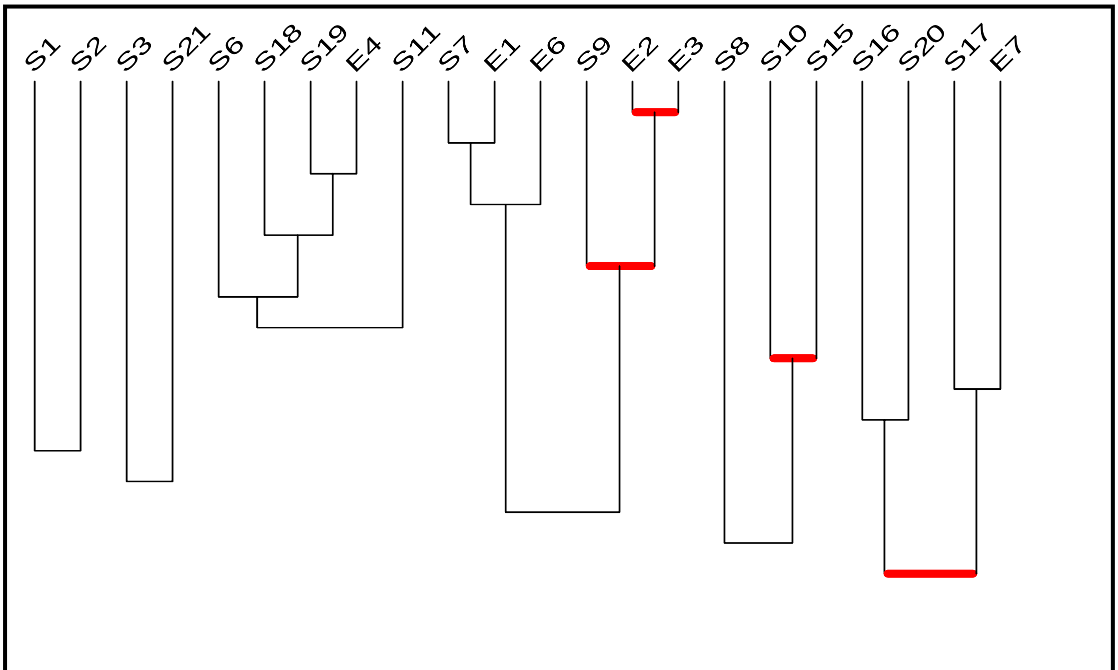
Lo strumento utilizzato per costruire il grafico implicativo delle variabili, a partire dalle strategie indicate nell'analisi a – priori, è il software CHIC.

Osservando con attenzione la rappresentazione grafica riportata sopra è possibile rilevare alcuni dati significativi, che confermano i dati precedenti:

- La E2 implica la E3: i due tipi di errori (errori di calcolo e utilizzo dei dati in maniera casuale), sono spesso correlati.
- Tra la S13 e la S19 c'è una doppia implicazione: anche nel grafico delle similarità il rapporto tra queste due strategie è particolarmente evidente.
- Si ripresenta il nucleo S1, S5 ed S22, come nel precedente grafico, ancora una volta queste strategie sono messe in relazione tra di loro.
- La E4 implica la S21: questo che emerge è un dato di non facile interpretazione: in che misura la mancata risoluzione del problema implica una modalità di rappresentazione di esso come nella S21 (l'alunno utilizza simboli iconografici e operazioni in colonna, senza indicare dati, risoluzione e risposta)? Una spiegazione potrebbe essere questa: dal momento che l'alunno non rispetta la classica procedura di indicare i dati, il diagramma, le operazioni e la risposta, in modo da individuare chiaramente gli elementi del problema, è più facile, per lui, perdere di vista la consegna finale del compito, cioè quella di dare una risposta (esplicita) alla domanda del problema.

Fase finale: Grafico delle similarità

Questo è il grafo delle similarità, rispetto ai dati che sono emersi nella terza fase sperimentale, quella finale:



Albero delle similarità : C:\Documents and Settings\Filippo Spagnolo\Desktop\alongi_finale1.csv

Dal grafico emergono alcuni nuclei di variabili. Una buona similarità è evidente tra le variabili E2 ed E3, tra queste e la S9, tra la S7 e la E1 e tra queste e la E6, tra la S10 e la S15 e tra la S19 e la E4.

Analizziamo adesso ciascun nucleo di variabili che nel grafico vengono indicate come fortemente simili:

- Nel nucleo formato dalle variabili E2, E3 e S9 notiamo una forte similarità tra la E2 e la E3, variabili che si correlano con la S9, anche se in modo meno intenso.
- Il secondo nucleo che possiamo rilevare è quello formato dalle variabili S7, E1 e E6. La S7 e la E1 presentano un buon grado di similarità. Queste presentano una similarità molto minore con E6.
- Nel terzo nucleo individuato (S8, S10 e S15) si nota una scarsa similarità tra le variabili coinvolte, tranne tra la S10 e la S15 che presentano una discreta similarità.

- Un quarto nucleo è identificato dalle seguenti variabili: S6, S18, S19, E4 ed S11. Una similarità forte la notiamo tra la S19 e la E4, gli altri legami sono trascurabili.
- Del quinto nucleo fanno parte la S16, la S20, la S17 e la E7. in questo gruppo la similarità tra la S16 e la S20 e quella tra la S17 e la E7 è molto debole.

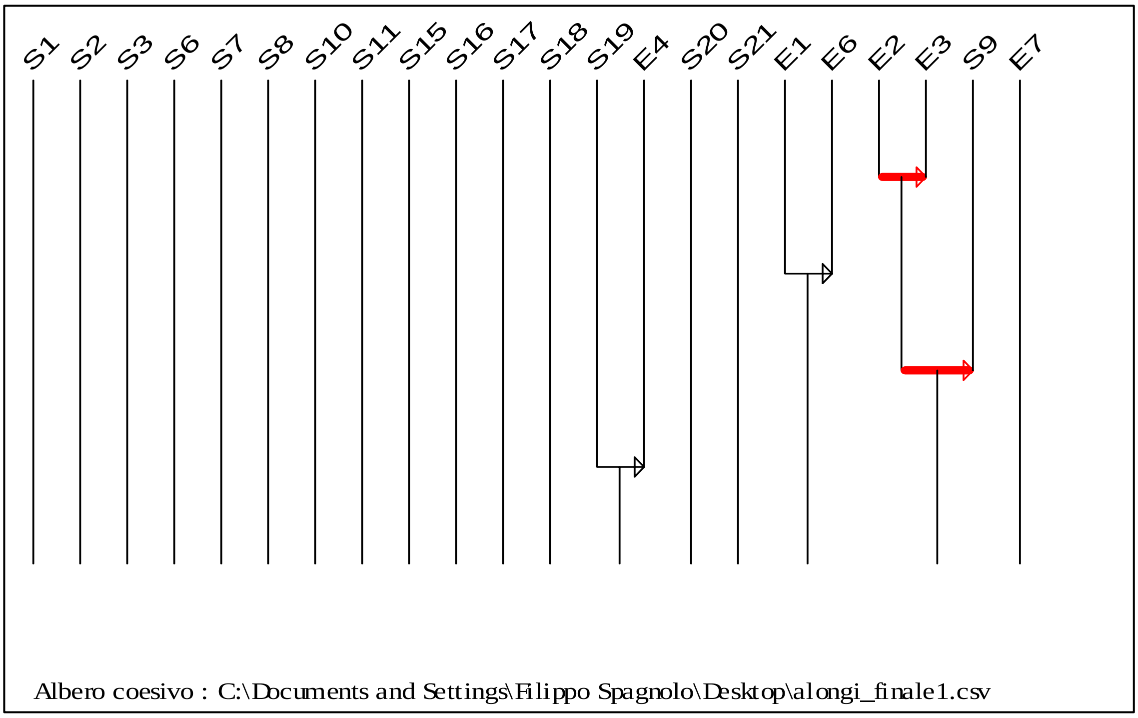
Gli altri dati emersi sono poco rilevanti. Se vogliamo dare un'interpretazione, una volta ottenute queste informazioni, possiamo dire che:

- Nel primo gruppo riscontriamo i soggetti che, durante la risoluzione di un problema tendono ad utilizzare i dati forniti dal testo in modo casuale e commettono anche errori di calcolo. La similarità con la S9 potrebbe far pensare che tali errori sono determinati dalla tendenza ad utilizzare i dati in modo immediato, cercando subito l'operazione da svolgere.
- Nel secondo gruppo la S7 è legata alla E1 in modo abbastanza intenso. Ciò potrebbe significare che il procedimento di risoluzione corretto adottato nella S7 è lungo e articolato e l'alunno perde di vista la consegna finale, cioè quella di trovare la soluzione alla domanda del problema.
- La S10 e la S15 (terzo nucleo insieme alla S8) sono simili, anche se appartengono a categorie di variabili differenti: la S10 appartiene al terzo gruppo (strategie che utilizzano un linguaggio tabulo – relazionale o algoritmico – procedurale), mentre la S15 appartiene al quarto gruppo (strategie che rappresentano il problema utilizzando vari registri linguistici). Sia nella S10 che nella S15 l'alunno utilizza simboli iconografici ed effettua le operazioni in colonna.
- Nel quarto nucleo si nota una forte similarità tra la S19 e la E4. La S19 è una strategia del 4° gruppo (gruppo misto), in particolare si riferisce alla divisione del problema in varie tappe, ognuna delle quali è

accompagnata da un disegno simbolico, dalla spiegazione in lingua naturale e dalle relative operazioni. L'uso di più rappresentazioni linguistiche può far confondere l'alunno, il quale svolge correttamente il problema ma lo lascia in sospeso, non rispondendo alla domanda finale.

Fase finale: Grafico delle implicazioni

Adesso vado ad analizzare le implicazioni tra le variabili.



Osservando attentamente la rappresentazione grafica possiamo rilevare alcune significative implicazione tra variabili, in particolare:

- La variabile E2 implica la E3. In analogia al grafico delle similarità, di cui ho ampiamente parlato sopra, anche in questo grafico notiamo un primo gruppo di variabili che presentano una forte relazione.

Sembrerebbe che l'utilizzo casuale dei dati forniti dal testo implichi una frequenza maggiore di errori di calcolo. L'implicazione contraria invece non si verifica: errare nei calcoli non vuol dire necessariamente non avere interpretato correttamente il problema.

Tale implicazione, a sua volta, implica la variabile S9. Anche in questo caso ritengo che la tendenza ad utilizzare in modo immediato i dati a cercare subito l'algoritmo risolutivo, spesso possa condurre gli allievi ad errori di questo tipo.

- La variabile E1 implica direttamente la E6, con un'intensità minore rispetto alla precedente implicazione. La rappresentazione parziale del problema, con l'utilizzo di uno qualunque dei registri linguistici, e quindi la sospensione del processo di risoluzione, implicherebbe anche una difficoltà ad evidenziare i dati utili a trovare la soluzione.

- Infine, con un'intensità ancora minore rispetto alle altre evidenziate. La strategia corretta S19 implica la strategia errata E4. Per dare una spiegazione a questo dato, faccio riferimento alla implicazione precedente: E1→E6.

La S19 è una strategia più complessa rispetto a molte altre: l'alunno rappresenta il problema dividendolo in varie tappe, per ogni tappa fa un disegno simbolico e lo spiega utilizzando il linguaggio naturale e scrivendo le operazioni. È richiesta, dunque, la capacità di coordinare diversi registri semiotici, procedimento che potrebbe condurre l'allievo a perdere di vista la consegna principale, cioè quella di trovare una soluzione al problema.[39]

Non è stata riscontrata la presenza di doppie implicazioni.

[39] E4: "Risolve il problema correttamente, ma non risponde alla domanda finale".

4.1.3. Variabili supplementari

Le variabili supplementari rappresentano dei profili ideali di bambini che ho classificato in base alla modalità di rappresentazione semiotica che hanno utilizzato per risolvere i problemi.

La variabile supplementare “classic”, corrispondente ad un preciso profilo di un allievo ideale, in questo caso un alunno che solitamente procede, nel risolvere un problema, in modo “classico”, avrà “1” in corrispondenza delle seguenti strategie: S1, S2, S3, S4, S5, S22

La variabile “icon”, con la quale ho denominato tutte le strategie appartenenti al 2° gruppo, si riferisce invece alla S6, alla S7 e alla S20.

La variabile “algo” si riferisce alle strategie che utilizzano un linguaggio algoritmico – procedurale o tabulo – relazionale e raggruppa, quindi, le seguenti variabili: S8, S9, S10, S11, S12, S18 e S21.

Infine, l’ultima variabile supplementare corrisponde al quarto gruppo di strategie, precedentemente individuate, denominata variabile “mix” (in quanto l’alunno ideale, corrispondente a tale profilo, utilizza in modo coordinato diverse modalità di rappresentazione semiotica), comprenderà le variabili S13, S14, S15, S16, S17 e S19 [40] .

Al grafico implicativo relativo alla fase iniziale e a quello relativo alla fase finale, sono state aggiunte le 4 variabili supplementari appena descritte. Osservando gli alberi gerarchici delle implicazioni che ho ottenuto[41], possiamo notare alcune interessanti informazioni.

Data la complessità dei grafici, ho cercato di estrapolare i dati maggiormente significati, quelli relativi all’implicazione tra gruppi di variabili e variabile supplementare, per capire quali e quante variabili implicano le variabili supplementare.

[40] Vedi analisi a – priori, cap. 3.3.
[41] I grafici ai quali mi riferisco sono consultabili in appendice, allegati n°7 a n°8.

Fase iniziale

La variabile supplementare “Icon” ha una doppia implicazione solo con un’altra variabile, la 5dA57. Ciò significa che, se volessimo trovare un alunno che corrisponda al profilo iconico, in fase iniziale, possiamo riferirci solo a questo allievo.

La variabile “Mix” è implicata solo da: 5bA11, 5bA19 e 5bA20. Anche qui posso fare la stessa osservazione che ho fatto per la variabile Icon. La variabile “Classic” è quella che implica il maggior numero di variabili, che potremmo identificare come gli allievi corrispondenti a questo profilo ideale: 5bA7, 5bA9 che possiede una doppia implicazione con 4bA79, 5bA10, 5bA12, 5bA14, 5bA15, 5bA16, 5bA18, doppia implicazione tra 5cA23 e 5cA29, la 5cA33 implica la 5bA21 e la 5bA32 (che sono caratterizzate da una implicazione reciproca), infine c’è una doppia implicazione anche tra 5cA25 e 5cA30.

La variabile “Algo” è rappresentata solamente dalle variabili 5dA60 e 5aA63.

Fase finale

La variabile supplementare “Icon” è implicata dalle seguenti variabili: 5bA3 che implica la 5bA11, 5bA9, 5bA13, 5bA16, 5bA18, 5bA20 e 5bA1.

Per la variabile “Mix” gli alunni maggiormente rappresentativi sono 5bA12 e 5dA52.

Il gruppo di variabili che implicano la variabile “Classic” sono: 5dA49, che implica 5dA46, la quale a sua volta implica 5dA41. La variabile 5cA39 e la 5dA40 sono caratterizzate da una doppia implicazione.

La variabile “Algo”, infine, implica un gran numero di variabili: 4bA97, AbA95, 4bA94, 4bA90, 4bA85, 4bA86, 4bA84, 4bA83, 4bA82, 4bA81, 4bA89, 4bA79, 4bA80, 5aA77, 5aA78, 4bA87, 4bA88.

4.2. Analisi qualitativa dei dati sperimentali

L'analisi qualitativa dei dati sperimentali è stata svolta tenendo in considerazione le produzioni grafiche effettuate dagli alunni, le tabulazioni e i grafici dei dati, relativamente alle diverse fasi del lavoro sperimentale.

Di seguito presento, per ciascuna situazione problematica, le risposte e i protocolli più significativi del campione preso in esame.

Prima fase sperimentale: P. A. I.

"Quattro amici pagano € 12,50 per 3 coppe di gelato e un aperitivo. Sapendo che quest'ultimo costa € 3,50, qual è il prezzo di ogni coppa di gelato?."

Rappresenta il problema nel modo che preferisci (con un disegno, con una tabella, con un'espressione aritmetica ecc.) e trova la soluzione.

In questa prima fase ho notato una forte tendenza a risolvere il problema in un modo che definisco "classico": da una parte l'alunno indica i dati, dall'altra il diagramma, sotto le operazioni in colonna e infine scrive la risposta.

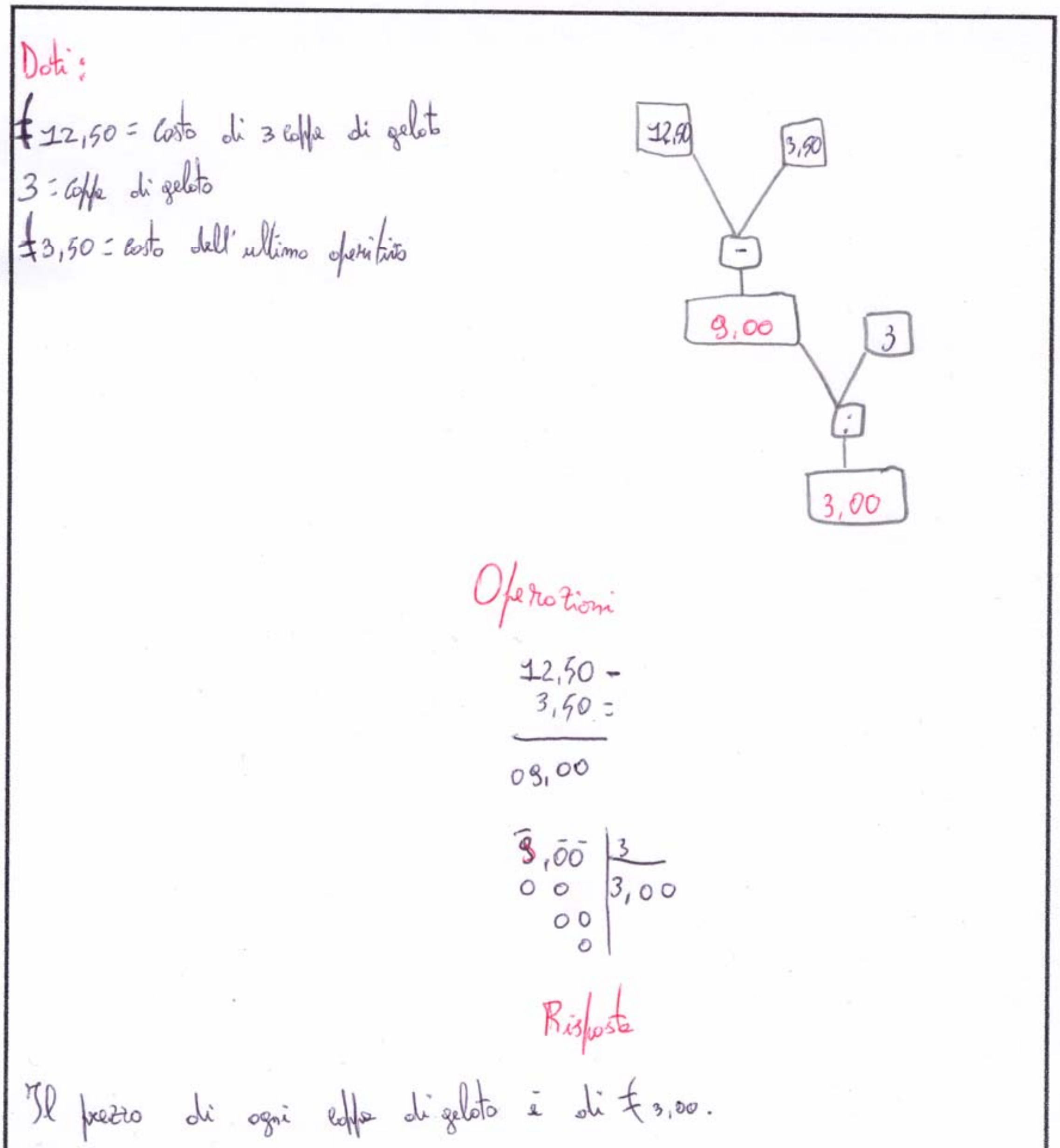
Questa tendenza è riscontrabile osservando i dati sperimentali raccolti: il 45% degli alunni in fase iniziale ha proceduto in questo modo.

Questa modalità di rappresentazione, così comunemente utilizzata, è con tutta probabilità dovuta al fatto che a scuola si fa riferimento quasi esclusivamente a questa procedura.

Gli alunni, di fronte alla consegna che richiedeva di tradurre liberamente il testo dal linguaggio naturale ad un altro, hanno avuto parecchie difficoltà a scostarsi da un tipo di rappresentazione che utilizzano in modo quasi automatizzato.

In questo senso, la scuola dovrebbe abituare gli alunni ad andare oltre le procedure meccaniche, a scoprire nuovi modi di porsi e risolvere problemi.

Ecco un esempio di quello che chiamo il “problema classico” (Protocollo FI5dA48):



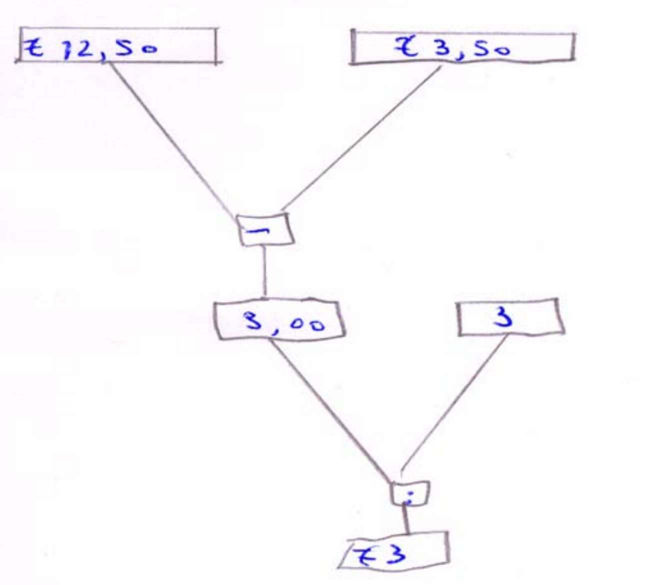
(Protocollo FI5dA48)

Nel protocollo indicato è stata utilizzata la strategia risolutiva S1, che insieme alla S2, S3, S4, S5 e S22, fa riferimento al primo gruppo di strategie.

Nella fase iniziale il 45,9% degli alunni ha utilizzato una strategia di questo tipo. Nella fase finale tale percentuale è notevolmente diminuita, passando al 13,8%.

Solitamente chi ha utilizzato in fase iniziale una strategia del primo gruppo, in fase finale ha invece rappresentato il problema utilizzando una strategia del terzo gruppo, ossia il linguaggio algoritmico – procedurale oppure quello tabulo – relazionale.

Nel 30% circa delle produzioni degli alunni ho riscontrato invece una rappresentazione di questo tipo (protocollo FI5dA60):

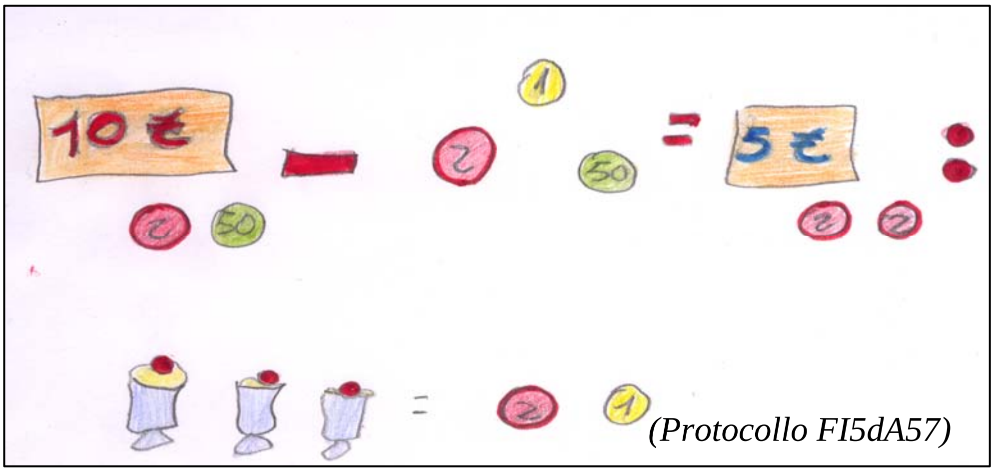


(Protocollo FI5dA60)

l'utilizzo del solo diagramma per risolvere il problema, o solamente delle operazioni in colonna, oppure di una tabella, è stato molto frequente, e rispecchia la modalità di rappresentazione algoritmico – procedurale utilizzata nel terzo gruppo di strategie corrette. Nello specifico il protocollo è stato catalogato come S8.

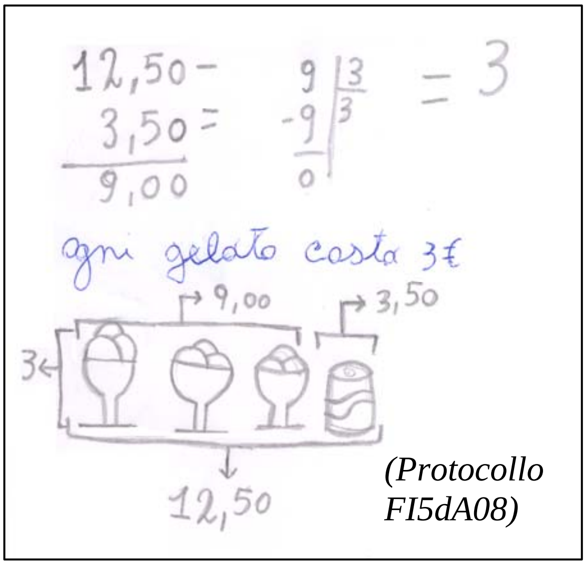
I bambini che hanno utilizzato in fase iniziale questo tipo di rappresentazione raramente in fase finale hanno utilizzato un registro differente, o se hanno cambiato hanno spesso utilizzato una strategia del primo gruppo.

In un solo caso su 98 (protocollo FI5dA57) è stato utilizzato, in questa fase, il linguaggio iconico per rappresentare il problema.



(Protocollo FI5dA57)

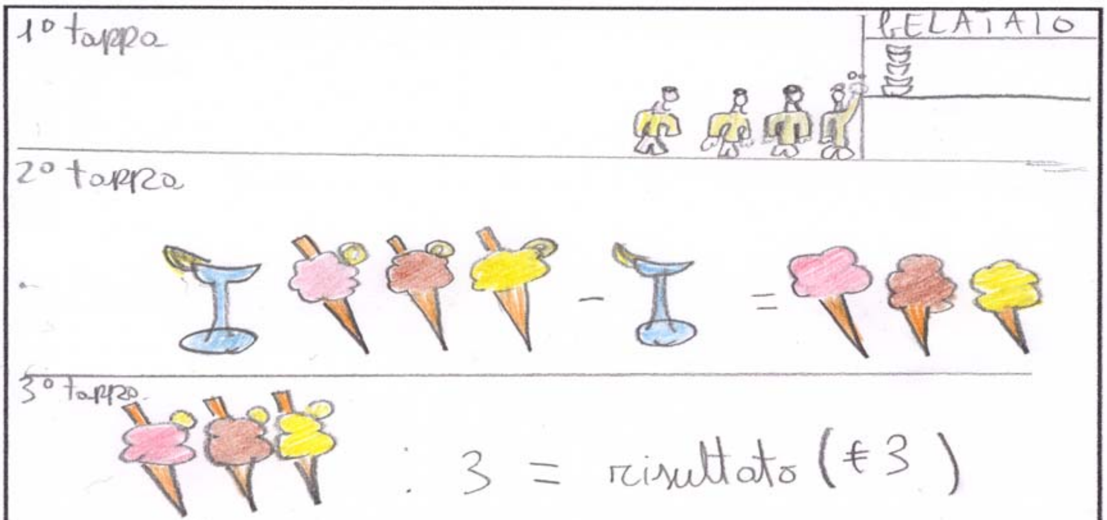
L'alunna ha rappresentato i dati del problema disegnando le banconote e le monete per indicare i prezzi e si è servita di questa rappresentazione grafica per trovare la soluzione.



(Protocollo FI5dA08)

Ho trovato particolarmente interessante l'elaborato di questo alunno (protocollo FI5bA08), il quale ha utilizzato una modalità di rappresentazione che ho voluto indicare, nell'analisi a –priori, come una strategia a parte (la S13) e che ho poi incluso nel 4° gruppo, il gruppo misto. Come si può osservare l'alunno, dopo aver effettuato le operazioni in colonna, ha rappresentato schematicamente i dati del problema, nello specifico gli elementi (rappresentati con simboli iconici) e i costi relativi. La capacità di rappresentazione dimostrata dall'alunno è, secondo me, molto interessante.

In un altro protocollo (FI5dA58) ho riscontrato un’altra modalità di rappresentazione interessante: l’alunno ha suddiviso il problema in diverse tappe, nella seconda e nella terza tappa ha individuato correttamente le operazioni da svolgere rappresentandole con dei disegni che dovrebbero



(Protocollo FI5dA58)

sostituire l’operazione.

In questo modo, però, non è possibile comprendere come è arrivato alla soluzione del problema, dal momento che non sono state esplicitate le operazioni svolte. Accanto ad ogni tappa l’alunno avrebbe dovuto indicare l’operazione relativa.

Seconda fase sperimentale

Osservando gli elaborati prodotti dai bambini in questa fase, ho notato una certa omogeneità nelle strategie risolutorie adottate da ciascun gruppo.

Nel primo gruppo, al quale ho somministrato la situazione – problema nella variante linguistica “lingua naturale” (5°C e parte della 4°B), ho riscontrato poca varietà di strategie.

Come è possibile notare, osservando i grafici e le tabulazioni, le variabili A1, A2, A3, A4, A6 costituiscono le strategie corrette utilizzate.

Una forte percentuale ha utilizzato la A2, la A3 e la A4, tutte molto simili. Tali strategie, infatti, si delineano come procedimenti di risoluzione classici: le differenziano soltanto il tipo di operazioni svolte, la presenza o meno di simboli iconografici o di un diagramma.

In questo primo gruppo nessun soggetto ha rappresentato il problema ricorrendo ad una serie di disegni o all'uso coordinato di differenti registri linguistici. I protocolli raccolti sono tutti molto simili, sia in 5°C che in 4°B.

La percentuale di errori nel primo gruppo è quella più alta, rispetto agli altri gruppi (37,5% sul totale delle risposte), e si tratta soprattutto di errori di calcolo.

Anche nel secondo gruppo (5°D e parte della 4°B, linguaggio figurativo) si è presentata la stessa identica situazione. Qui però le motivazioni sono differenti: la presentazione di una situazione problematica sotto forma di vignette richiedeva un lavoro diverso, ossia quello di interpretare le situazioni descritte con i disegni, comprenderne adeguatamente il significato ed estrapolare i dati utili alla risoluzione del problema.

L'omogeneità di tipologie di strategie utilizzate era prevedibile: gli alunni hanno indicato esclusivamente le operazioni da svolgere e dopo averle eseguite hanno indicato la soluzione trovata.

Le difficoltà in questo gruppo sono diminuite, gli errori sono scesi al 30%, e si tratta ancora nel 12% dei casi di errori di calcolo, quindi non legati ad una errata interpretazione del testo iconico.

Nel terzo gruppo (5°A e parte della 4°B, linguaggio tabulo – relazionale) è stata riscontrata una situazione analoga. Tutti i bambini hanno effettuato esclusivamente operazioni, seguite nella maggioranza dei casi dalla descrizione verbale del proprio processo di risoluzione, ad esempio:

(TR5aA67) "*Ho sommato quanto pagavano mamma e papà e poi ho sommato quanto pagavano i bambini e poi il risultato degli adulti e dei bambini li ho sommati e infine ho fatto quanto ha dato papà meno quanto pagavano tutti e quattro*".

(TR5aA69) "*Ho moltiplicato 6,00€ per 2 e ho avuto 12,00€, poi ho moltiplicato 3,50€ per 2 e ho avuto 7,00€, poi ho sommato i due risultati. Infine ho fatto 50,00€ meno 19,00 e di risultato ho avuto 31,00€*"

(TR5aA77) "*Si addiziona prima il costo del biglietto che paga papà e mamma. Poi addiziono il costo del biglietto di Laura e Giulia. Poi addiziono la somma dei biglietti di papà e mamma e quello delle bambine. In fine sottraggo la banconota che dà papà e il risultato della somma dei biglietti e mi viene il risultato*".

La percentuale degli errori si è ulteriormente abbassata, passando al 17,5%, errori che riguardano soprattutto l'utilizzo dei dati in maniera casuale.

Nel 4° gruppo (5°B e parte della 4°B, linguaggio algoritmico – procedurale) più della metà degli alunni ha utilizzato la strategia D1 e il 15% la D2, gli altri hanno utilizzato la D4, la D6 e la D7. la tipologia di strategie risolutorie, anche in questo caso, non è molto variegata. Possiamo spiegare facilmente questo fenomeno, considerando la natura del compito: trattandosi di una serie di diagrammi gli alunni dovevano semplicemente individuare l'operazione adeguata e trascriverla. Le poche variazioni riscontrate tra una risposta e l'altra riguardano la scelta dell'operazione da effettuare, (ad es. 3,50€ + 3,50€ = 7,00€ invece di 3,50€ * 2= 7,00€).

Le strategie errate (21%) si riferiscono soprattutto alla errata interpretazione della richiesta finale del problema, quella di aggiungere la quarta e ultima tappa per completare la catena di operazioni. Nel 12% dei casi gli alunni hanno ottenuto la soluzione alla domanda eseguendo un'operazione in colonna.

Terza fase sperimentale: P.A.F.

Importanti cambiamenti si sono verificati in seguito alla somministrazione in fase finale del problema aperto. Sembrerebbe che l'introduzione del fattore sperimentale, rappresentato dalla situazione – problema nelle quattro varianti linguistiche, abbia influenzato la modalità di rappresentazione del problema negli alunni. Infatti, come già precedentemente ho evidenziato attraverso l'analisi descrittiva dei dati raccolti, le percentuali relative a ciascun gruppo di variabili è cambiata notevolmente.

Il gruppo al quale ho somministrato il problema in lingua naturale ha, almeno in parte, utilizzato in fase finale strategie diverse rispetto alla fase iniziale, nella quale la maggioranza degli allievi aveva utilizzato una strategia del primo gruppo. Adesso invece si riscontra una buona percentuale di strategie del terzo gruppo (algoritmico – procedurale e tabulo – relazionale).

Il 2° gruppo (linguaggio figurativo) ha in parte continuato ad utilizzare strategie del primo gruppo e in parte strategie del terzo gruppo. Mi aspettavo l'utilizzo di modalità di rappresentazione iconica in fase finale, ma ciò non è avvenuto.

Nel 3° gruppo (linguaggio tabulo – relazionale) è stata riscontrata una forte influenza del fattore sperimentale, infatti si è passati da un alta percentuale di strategie del primo gruppo in fase iniziale, ad una maggioranza di strategie del terzo gruppo in fase finale.

Infine nel 4° gruppo (algoritmico – procedurale) ho notato un aumento di strategie riconducibili al 4° gruppo (uso coordinato di varie modalità di rappresentazione) e al 2° (linguaggio figurativo).

Un dato emerso, che ritengo degno di attenzione, è l’aumento delle percentuali di strategie che utilizzano il linguaggio figurativo e quello algoritmico – procedurale e tabulo – relazionale per rappresentare il problema.

Osservando gli elaborati ho notato rappresentazioni più creative rispetto alla fase iniziale, una varietà maggiore nella tipologia delle strategie utilizzate e un maggiore utilizzo di tabelle per mettere in relazione i dati del problema e di disegni.

Di seguito ho riportato alcuni degli elaborati che ritengo particolarmente significativi.

In questo protocollo è possibile notare una modalità di rappresentazione che ho riscontrato molto raramente negli elaborati degli alunni. La presenza della “nuvoletta”, del ballon, è indicativa di un processo di ragionamento “pensato”.

(protocollo FF5bA5)

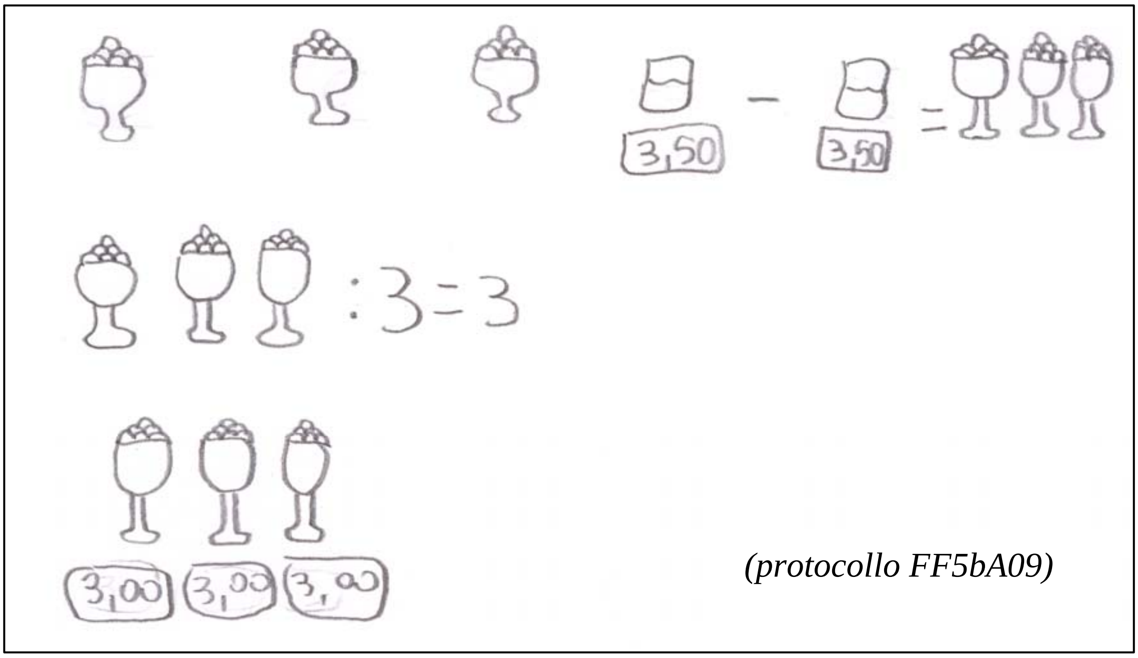
L’alunna inserisce le operazioni da svolgere all’interno della nuvoletta, come se il bambino raffigurato stesse ragionando sulla situazione – problematica. Potremmo definirlo un processo metacognitivo.

Tutti i dati del testo vengono utilizzati in modo adeguato, anche se non tutti sono ben esplicitati: non viene indicato, ad esempio, il costo dell'aperitivo, anche se il dato viene utilizzato nell'operazione, non è esplicitato il significato del dato "12, 50" che rappresenta il costo totale e inoltre non sono rappresentati tutti i soggetti della situazione. Tuttavia la modalità di rappresentazione ci fa ben comprendere i processi di ragionamento adottati dall'alunna.

Nell'elaborato successivo, invece, possiamo notare l'utilizzo di simboli iconici che non hanno lo scopo di rappresentare la situazione problematica, ma servono a raffigurare simbolicamente i dati del problema. La striscia iniziale rappresenta una prima operazione: all'insieme iniziale, il cui costo totale non è indicato (tre coppe di gelato e un aperitivo) viene sottratto uno dei suoi elementi, cioè l'aperitivo. Il risultato di questa operazione è ciò che rimane dell'insieme di partenza, le tre coppe di gelato (resto).

Nella seconda striscia viene invece effettuata una divisione per trovare il costo unitario: le tre coppe di gelato costano 9,00€, anche se il dato non viene esplicitato, il costo totale diviso il numero degli elementi dà come risultato 3 (€).

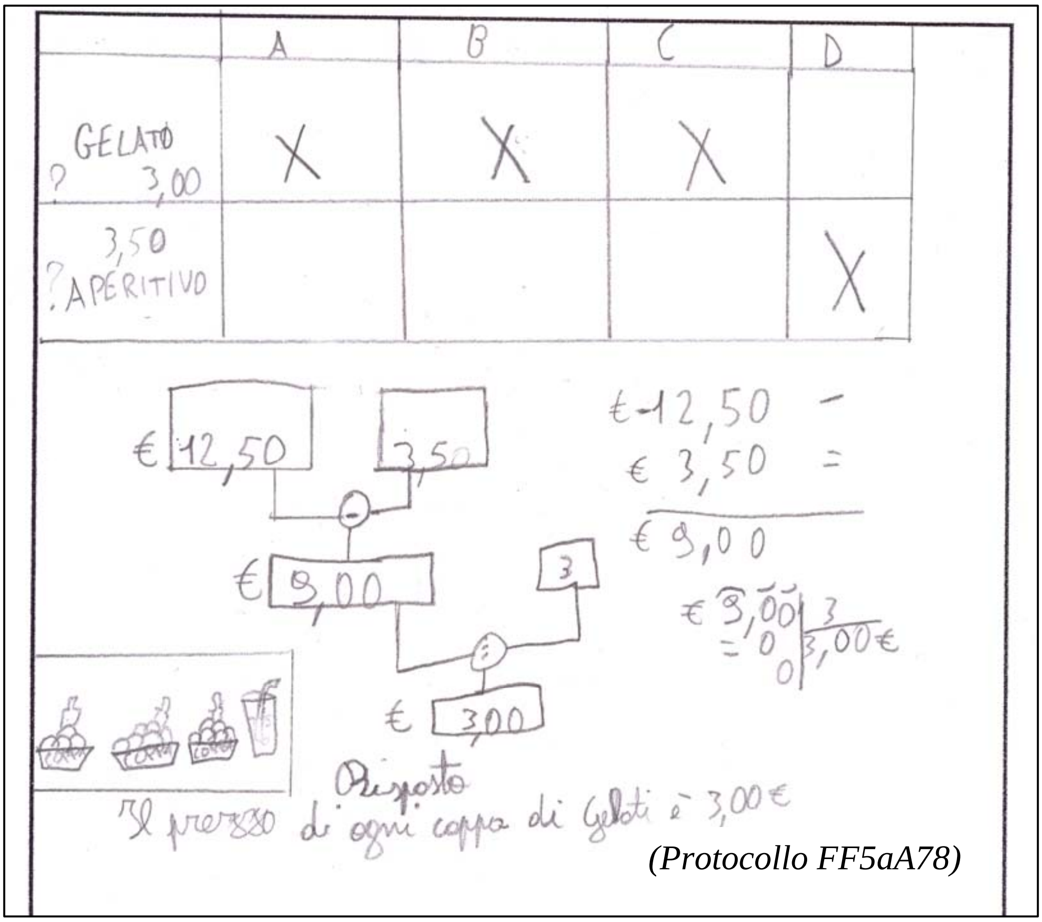
Nella terza striscia, infine, l'alunno disegna nuovamente le coppe e sotto ognuna di esse scrive il prezzo, che rappresenta la soluzione del problema.



(protocollo FF5bA09)

Un altro protocollo ci mostra una modalità diversa di rappresentazione del significato del testo del problema. L’alunno ha utilizzato inizialmente una tabella a doppia entrata, indicando da una parte la variabile “amici”, indicati con le lettere maiuscole dell’alfabeto A, B, C e D, e dall’altra i prodotti acquistati e il loro costo: gelato e aperitivo. La variabile gelato inizialmente doveva essere stata scritta senza l’indicazione del prezzo, dal momento che ancora il dato non era conosciuto (notiamo la presenza del punto interrogativo, che rappresenta l’incognita). L’utilizzo della tabella è adeguato, i dati sono messi correttamente in relazione tra di loro (la casella barrata da una “X” rappresenta appunto una relazione tra due variabili). Il procedimento risolutivo continua poi con una macchina di operazioni (linguaggio algoritmico – procedurale), con le operazioni in colonna (operazioni del tutto aggiuntive, dal momento che l’alunno è giunto alla soluzione attraverso il diagramma) e infine sono stati inseriti simboli iconografici che non hanno una vera e propria valenza rappresentativa.

Questo è il protocollo appena descritto.

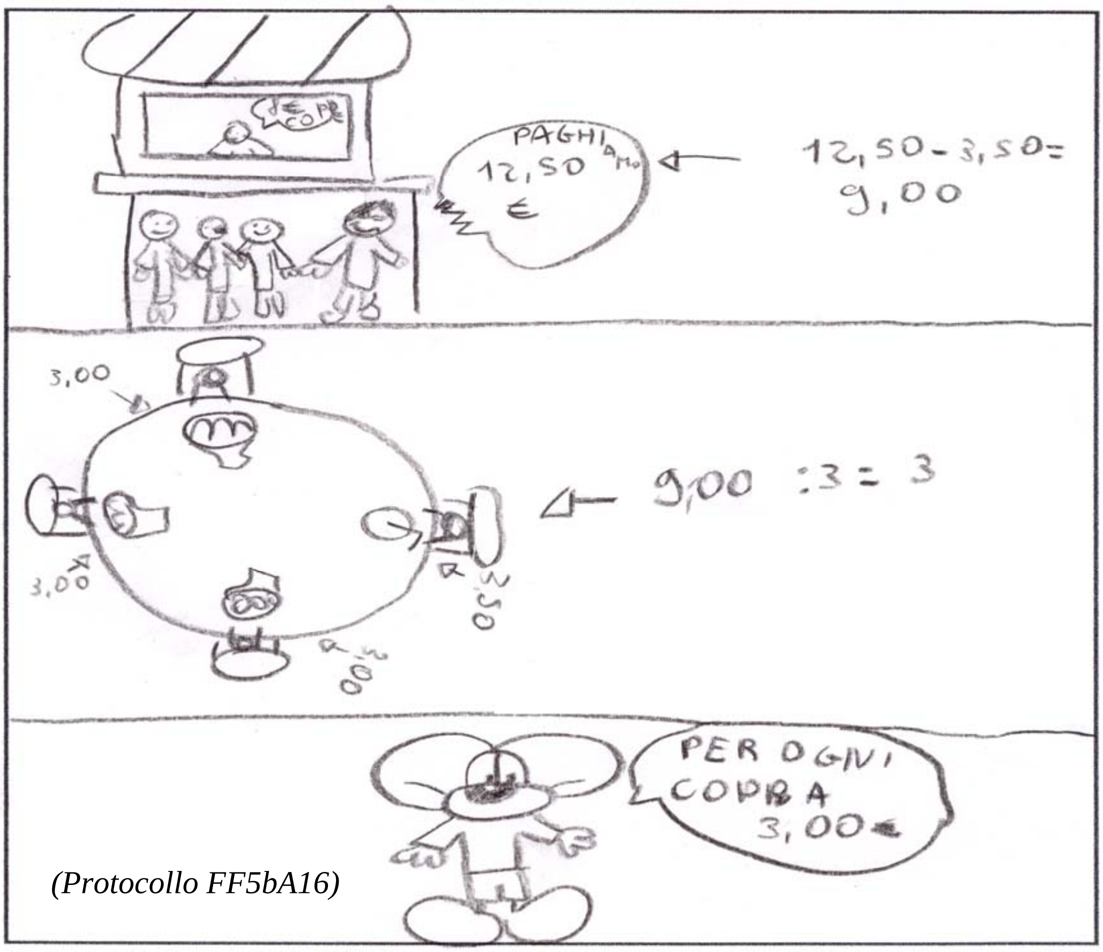


(Protocollo FF5aA78)

Infine, voglio mostrare quest'ultimo elaborato che mi ha incuriosita.

Si nota immediatamente l'utilizzo insolito dello spazio a disposizione: il foglio è stato suddiviso in tre strisce, come se si trattasse di una serie di vignette di un fumetto.

L'elaborato rispecchia la modalità di rappresentazione figurativa, infatti è stato classificato, nelle tabulazioni, come una strategia del secondo gruppo (S6 = "*L'alunno rappresenta il problema utilizzando soltanto dei disegni. Disegna tutti i dati come se fossero le vignette di un fumetto. Per ogni vignetta rappresenta l'operazione relativa e la risoluzione*.").



(Protocollo FF5bA16)

L’alunna ha rappresentato nella prima striscia la prima parte del problema, indicando correttamente tutti gli elementi: i quattro amici, il bar, il conto totale. Poi ha indicato la relativa operazione sottraendo al costo totale il prezzo dell’aperitivo (il dato però non viene esplicitato).

Nella seconda striscia (“vignetta”) ha rappresentato un tavolo nel quale sono seduti i quattro amici, e per ognuno di loro viene indicata la quota da pagare. Accanto c’è la divisione che l’alunna ha fatto per arrivare a questa conclusione.

Infine un personaggio, che sembra totalmente estraneo alla situazione appena raffigurata, risponde alla domanda finale del problema.

Capitolo 5
Conclusioni e problemi aperti

5.1. Conclusioni del lavoro sperimentale

Al termine della sperimentazione posso effettuare alcune importanti conclusioni:

- La modalità di rappresentazione semiotica che, in fase iniziale, costituiva il registro maggiormente utilizzato nella risoluzione del problema, la modalità "classica", è diminuita notevolmente, in seguito all'introduzione del fattore sperimentale.
- È aumentata la rappresentazione figurativa e l'utilizzo coordinato di diversi registri linguistici (variabile Icon e Mix).
- La modalità di rappresentazione algoritmico – procedurale e quella tabulo – relazionale (variabile Algo) in fase iniziale è rappresentata, idealmente, da pochi alunni mentre in fase finale rappresenta il registro maggiormente utilizzato dagli allievi.

Ritornando all'ipotesi di partenza, quindi, possiamo constatare se è stata falsificata o meno:

<u>Ipotesi generale:</u>

H^1: Se agli alunni viene presentato un problema in un registro linguistico differente dalla lingua naturale, allora le loro prestazioni nella risoluzione migliorano.

<u>Sottoipotesi di ricerca</u>:

H^a: Il linguaggio figurativo e quello tabulo - relazionale consentono una migliore interpretazione dei dati di un problema.

Riguardo l'ipotesi generale, in effetti, gli alunni ai quali ho sottoposto, durante la somministrazione del fattore sperimentale, il problema in linguaggio figurativo, tabulo – relazionale o algoritmico – procedurale, hanno ottenuto dei risultati migliori, rispetto al gruppo al quale ho somministrato il problema in lingua naturale.

Quindi i risultati che ho ottenuto nella 2° fase sperimentale, quella relativa alla situazione-problema in 4 varianti linguistiche, inducono a ritenere attendibile l'ipotesi di partenza: la modalità di rappresentazione influenza la risoluzione del problema. Nello specifico, l'utilizzo di un registro linguistico diverso dalla lingua naturale influenza in modo positivo le prestazioni del campione preso in esame.

Ma la diminuzione degli errori non implica, di per sé, che un registro semiotico sia migliore di un altro. A livello di interpretazione dei dati, posso concludere, il registro tabulo relazionale è quello che consente agli alunni di procedere al meglio, perché induce a fare meno errori di interpretazione del testo.

Ma in che modo la somministrazione della situazione – problema (fattore sperimentale) ha influenzato la fase finale?

Se mettiamo in correlazione i dati raccolti in fase iniziale e in fase finale è facile concludere che la modalità di risoluzione classica, modalità di rappresentazione molto utilizzata in modo "spontaneo" dagli alunni, è stata quasi del tutto scartata in fase finale, a favore di altri tipi di rappresentazione, come quella figurativa e algoritmico – procedurale. Quest'ultimo tipo di rappresentazione, insieme a quella tabulo – relazionale, è stata la più adottata in fase finale.

Alla luce dei dati raccolti, è possibile interpretarli in diversi modi. L'influenza del fattore sperimentale sulla modalità di rappresentazione in fase finale potrebbe essere determinata, ancora una volta, dal contratto didattico che, implicitamente, la serie di situazioni - problema ha creato.

I dati che ho raccolto e analizzato potrebbero non essere attendibili, almeno in parte, dal momento che tra la fase iniziale e la fase finale è stato introdotto un registro semiotico specifico che può aver indotto i ragazzi a interpretar in un altro modo la consegna: rifare il problema seguendo l'esempio che la maestra ci ha mostrato. Ancora una volta, una richiesta esterna, a livello implicito, può avere un'influenza molto forte sulla "spontaneità" della rappresentazione.

Ma se osserviamo con attenzione i dati, ci accorgiamo che spesso ciò non è avvenuto. Dalla visione delle tabelle excel emerge con chiarezza un dato che ritengo significativo: le strategie utilizzate sono molto simili all'interno di ciascuna classe.

Trovandosi di fronte ad un problema aperto, all'inizio della sperimentazione, gli alunni hanno proceduto senza alcuna influenza, se non quella, molto forte, del contratto didattico.

Non è un caso se, pur di fronte ad una richiesta di rappresentazione libera, la maggioranza del campione in esame ha proceduto come d'abitudine. Pochissimi elaborati, in fase iniziale, si distinguono per la loro creatività, per la loro capacità di cogliere il contenuto matematico e trasformarlo con un linguaggio spontaneo, che non sia influenzato dalle richieste esterne.

Fino a che punto possiamo essere sicuri che la modalità "classica" di rappresentare una situazione problematica sia utilizzata spontaneamente (e compresa) da un allievo e che, invece, non sia solo il frutto di un adesione, quasi subita, a modelli semiotici che non corrispondono al suo modo di percepire e simbolizzare la realtà? I bambini sono abituati a concentrarsi sugli elementi numerici dell'enunciato, la situazione nella quale questi dati si inseriscono (e all'interno della quale acquistano un senso), tutto il resto è come una cornice, che può anche essere tralasciata (mi metto nei panni di un bambino: lui è consapevole, più o meno implicitamente, che l'importante è fare bene i calcoli, con le virgole al posto giusto). Mortificante per lo sviluppo cognitivo del bambino, concentrarsi solo su questo, dal momento che ben poche strategie risolutive si possono ideare, perché il contratto didattico si impone in modo determinante, e le capacità di risolvere problemi, trovare soluzioni originali, argomentare le proprie idee quasi si atrofizzano.

Con questo non intendo dire che utilizzare il ragionamento aritmetico e la modellizzazione numerica per risolvere problemi non sia didatticamente appropriato: ritengo che sia per lo meno discutibile concentrare l'attenzione solo sull'algoritmo risolutivo, senza preoccuparsi di conoscere le strategie e il procedimento che hanno permesso all'allievo di giungere a quel risultato.

5.2. Problemi aperti

In base ai risultati ottenuti con il mio lavoro sperimentale, ho individuato una serie di problemi aperti, questioni da chiarire e spunti di riflessione che possono costituire un punto di partenza per ulteriori indagini sperimentali:

- Quanto influisce la scolarizzazione e il contratto didattico sull'adozione "spontanea" di una modalità di rappresentazione piuttosto che un'altra?
- Al fine di coinvolgere gli alunni che hanno più difficoltà ad entrare in sintonia con l'astrazione propria della matematica, quali strategie di azione è più utile adottare?

- Esistono delle predisposizioni naturali verso l'ambito logico matematico che influenzano la scelta di una modalità di rappresentazione semiotica?
- In che modo i fattori culturali possono incidere su tale scelta? Differenti approcci alla matematica e differenze di ordine culturale implicano anche differenti rappresentazioni di un concetto matematico? Sarebbe interessante avviare una ricerca di questo tipo con un campione multiculturale[42].
- La lingua naturale come rappresentazione semiotica di un oggetto matematico: quali differenze esistono tra la dimensione dell'oralità e quella della scrittura? Quali processi cognitivi gli alunni mettono in atto nell'uno e nell'altro caso?
- Insegnare matematica ad alunni provenienti da gruppi linguistici diversi: ostacoli nella didattica della disciplina e individuazione di metodologie alternative.

[42] A tal proposito si consiglia di consultare l'articolo di A. Gagatsis: "*Processi di traduzione e concetti di funzione*", 2000. Nell'articolo si esaminano le abilità degli allievi greci (14 – 15 anni) di fare delle traduzioni di un tipo di rappresentazione ad un'altra nel dominio delle relazioni e delle funzioni, e si intende verificare se gli allievi greci presentano le stesse difficoltà degli allievi francesi.

APPENDICE

Allegato n°1

Tabulazione dei dati relativi alle strategie corrette ed errate effettivamente utilizzate durante la somministrazione del problema aperto (fase iniziale).

	S1	S2	S3	S5	S7	S8	S9	S11	S12	S13	S14	S19	S21	S22	E1	E2	E3	E4	E6
5bA1	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
5bA3	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
5bA5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
5bA6	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA7	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA9	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA10	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA12	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA13	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA14	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA15	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA16	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA17	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA18	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA21	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	S1	S2	S3	S5	S7	S8	S9	S11	S12	S13	S14	S19	S21	S22	E1	E2	E3	E4	E6
5cA22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0
5cA23	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA24	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA25	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5cA27	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA28	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA29	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA30	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA31	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA32	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA33	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA34	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA35	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA36	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA37	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

5cA38	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA39	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	S1	S2	S3	S5	S7	S8	S9	S11	S12	S13	S14	S19	S21	S22	E1	E2	E3	E4	E6
5dA40	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA41	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA42	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA43	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	**1**	0
5dA45	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA46	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA47	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA48	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA49	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA50	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA51	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA52	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA53	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA54	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA55	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA56	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5dA57	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA58	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
5dA59	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA60	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	S1	S2	S3	S5	S7	S8	S9	S11	S12	S13	S14	S19	S21	S22	E1	E2	E3	E4	E6
5aA61	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5aA62	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
5aA63	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5aA64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
5aA65	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5aA66	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0
5aA67	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5aA68	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5aA69	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5aA70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5aA71	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0
5aA72	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5aA73	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5aA74	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
5aA75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5aA76	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
5aA77	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5aA78	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
	S1	S2	S3	S5	S7	S8	S9	S11	S12	S13	S14	S19	S21	S22	E1	E2	E3	E4	E6
4bA79	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA80	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4bA81	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
4bA82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	**1**	0	0	0
4bA83	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
4bA84	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA85	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
4bA86	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	**1**	**1**	0	0
4bA87	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA88	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
4bA89	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA90	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA91	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA92	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0
4bA93	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA94	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA95	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA96	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
4bA97	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA98	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tot. 98	**15**	**17**	**21**	**1**	**1**	**5**	**8**	**8**	**1**	**1**	**3**	**1**	**9**	**1**	**5**	**7**	**12**	**1**	**2**

Tot. Risposte:120

LEGENDA:

La tabella riporta le strategie utilizzate dai bambini, in fase iniziale, nelle 5 classi che costituiscono il campione.

- Il numero 5 (o 4) seguito dalle lettere minuscole a, b, c, d indica la classe di appartenenza del bambino e la sezione;
- I codici A1, A2, A3, …., A98, indicano i bambini e i loro protocolli;
- I codici S1, S2, ..., S22, indicano le strategie corrette indicate nell'analisi a – priori;
- I codici E1, E2, …, E6, indicano le strategie errate indicate nell'analisi a – priori;
- Il numero "1" indica l'utilizzo della strategia (corretta o errata) da parte dell'alunno;
- Il numero "0" indica l'assenza della strategia.

Allegato n°2

Tabulazione dei dati relativi alle strategie corrette ed errate effettivamente utilizzate durante la somministrazione del problema aperto (fase finale)

	S1	S2	S3	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	E1	E2	E3	E4	E6	E7
5bA1	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5bA2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
5bA3	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5bA5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
5bA6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5bA9	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5bA11	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA13	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA16	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA17	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
5bA18	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
5bA20	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	S1	S2	S3	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S15	S16	S17	S18	S19	S20	S21	E1	E2	E3	E4	E6	E7
5cA22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0
5cA23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0

5cA24	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA25	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0
5cA27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA28	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
5cA30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5cA31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
5cA32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
5cA33	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA34	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5cA36	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA37	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
5cA39	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	S1	**S2**	**S3**	**S6**	**S7**	**S8**	**S9**	**S10**	**S11**	**S15**	**S16**	**S17**	**S18**	**S19**	**S20**	**S21**	**E1**	**E2**	**E3**	**E4**	**E6**	**E7**
5dA40	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA41	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA42	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA43	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA44	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5dA45	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA46	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA47	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA48	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA49	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
5dA51	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA52	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA53	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

5dA54	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA55	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA56	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5dA57	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA58	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA59	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA60	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	S1	**S2**	**S3**	**S6**	**S7**	**S8**	**S9**	**S10**	**S11**	**S15**	**S16**	**S17**	**S18**	**S19**	**S20**	**S21**	**E1**	**E2**	**E3**	**E4**	**E6**	**E7**
5aA61	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5aA62	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**	0
5aA63	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5aA64	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5aA65	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5aA66	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**	0
5aA67	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5aA68	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0
5aA69	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5aA70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5aA71	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5aA72	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5aA73	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5aA74	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	**1**	0	0	0
5aA75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5aA76	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0
5aA77	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5aA78	0	0	**1**	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	S1	**S2**	**S3**	**S6**	**S7**	**S8**	**S9**	**S10**	**S11**	**S15**	**S16**	**S17**	**S18**	**S19**	**S20**	**S21**	**E1**	**E2**	**E3**	**E4**	**E6**	**E7**
4bA79	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA80	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA81	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA82	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

4bA83	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA84	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA85	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA86	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA87	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA88	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA89	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA90	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA91	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA92	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0
4bA93	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0
4bA94	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA95	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA96	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA97	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA98	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
Tot. 98	**5**	**5**	**6**	**8**	**1**	**13**	**20**	**1**	**8**	**1**	**2**	**1**	**4**	**2**	**2**	**7**	**5**	**6**	**7**	**4**	**7**	**1**

Tot. Risposte: 116

LEGENDA:

La tabella riporta le strategie utilizzate dai bambini, in fase finale, nelle 5 classi che costituiscono il campione.

- Il numero 5 (o 4) seguito dalle lettere minuscole a, b, c, d indica la classe di appartenenza del bambino e la sezione;
- I codici A1, A2, A3, …., A98, indicano i bambini e i loro protocolli;
- I codici S1, S2, ..., S21, indicano le strategie corrette indicate nell'analisi a – priori;
- I codici E1, E2, …, E7, indicano le strategie errate indicate nell'analisi a – priori;
- Il numero "1" indica l'utilizzo della strategia (corretta o errata) da parte dell'alunno;
- Il numero "0" indica l'assenza della strategia.

Allegato n° 3

1° GRUPPO: Lingua Naturale

Tabulazione dei dati relativi alle strategie corrette ed errate effettivamente utilizzate durante la somministrazione della situazione problema n°1 (Lingua Naturale):

	A1	A2	A3	A4	A6	a2	a3	a4	a7	a8	a9
5cA22	0	0	**1**	0	0	**1**	0	0	0	0	0
5cA23	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA24	0	**1**	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
5cA25	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA26	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA27	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA28	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
5cA29	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA30	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
5cA31	0	0	0	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0
5cA32	0	0	0	0	0	0	**1**	0	**1**	0	0
5cA33	0	0	0	0	0	0	**1**	0	**1**	0	0
5cA34	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA35	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5cA36	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA37	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5cA38	0	0	0	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0
5cA39	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
4bA79	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA80	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
4bA81	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA82	0	**1**	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0
4bA83	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**

LEGENDA: La tabella riporta le strategie utilizzate del gruppo n° 1.

- Il numero 5 (o 4) seguito dalle lettere minuscole a, b, c, d indica la classe di appartenenza del bambino e la sezione;
- I codici che seguono indicano i bambini e i loro protocolli;
- I codici A1, A2, ..., A6, indicano le strategie corrette indicate nell'analisi a – priori;
- I codici a2, a3, …, a9, indicano le strategie errate indicate nell'analisi a – priori;
- Il numero "1" indica l'utilizzo della strategia (corretta o errata) da parte dell'alunno;
- Il numero "0" indica l'assenza della strategia.

Allegato n° 4

2° GRUPPO: Linguaggio Figurativo

Tabulazione dei dati relativi alle strategie corrette ed errate effettivamente utilizzate durante la somministrazione della situazione problema n°2 (Linguaggio Figurativo):

	B1	B2	B3	B7	b1	b2	b4	b7	b8	b9	b10
5dA40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5dA41	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA42	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA43	0	0	0	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0
5dA44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5dA45	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA46	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA47	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA48	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA49	0	0	**1**	0	0	**1**	0	0	0	0	0
5dA50	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA51	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
5dA52	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA53	0	0	0	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0
5dA54	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA55	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA56	0	0	0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0
5dA57	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA58	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
5dA59	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5dA60	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA84	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA85	0	**1**	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
4bA86	0	**1**	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
4bA87	**1**	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0
4bA88	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0

LEGENDA: La tabella riporta le strategie utilizzate del gruppo n° 2.

- Il numero 5 (o 4) seguito dalle lettere minuscole a, b, c, d indica la classe di appartenenza del bambino e la sezione;
- I codici che seguono indicano i bambini e i loro protocolli;
- I codici B1, B2, B3, B7, indicano le strategie corrette indicate nell'analisi a – priori;
- I codici b1, b2, b4, …, b10, indicano le strategie errate:
- Il numero "1" indica l'utilizzo della strategia (corretta o errata) da parte dell'alunno;
- Il numero "0" indica l'assenza della strategia.

Allegato n°5

3° GRUPPO: Linguaggio Tabulo - relazionale

Tabulazione dei dati relativi alle strategie corrette ed errate effettivamente utilizzate durante la somministrazione della situazione problema n°3 (Linguaggio Tabulo - relazionale):

	C1	C2	C9	C10	c1	c2	c4	c8
5aA61	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0
5aA62	0	0	0	0	0	0	0	0
5aA63	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0
5aA64	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0
5aA65	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0
5aA66	0	**1**	0	0	0	0	0	**1**
5aA67	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0
5aA68	**1**	0	0	0	0	0	0	0
5aA69	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0
5aA70	0	**1**	0	0	0	0	0	0
5aA71	0	0	0	0	**1**	0	0	0
5aA72	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0
5aA73	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0
5aA74	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0
5aA75	0	**1**	0	0	0	0	**1**	0
5aA76	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0
5aA77	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0
5aA78	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0
4bA89	0	**1**	0	0	0	0	0	0
4bA90	0	**1**	0	0	0	0	0	0
4bA91	0	**1**	0	0	**1**	0	0	0
4bA92	0	**1**	0	0	**1**	0	0	0
4bA93	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0

LEGENDA:

La tabella riporta le strategie utilizzate del gruppo n° 3.

- Il numero 5 (o 4) seguito dalle lettere minuscole a, b, c, d indica la classe di appartenenza del bambino e la sezione;
- I codici che seguono indicano i bambini e i loro protocolli;
- I codici C1, C2, C9, C10, indicano le strategie corrette indicate nell'analisi a – priori;
- I codici c1, c2, c4, c8, indicano le strategie errate indicate nell'analisi a – priori;
- Il numero "1" indica l'utilizzo della strategia (corretta o errata) da parte dell'alunno;
- Il numero "0" indica l'assenza della strategia.

Allegato n°6

4° GRUPPO: Algoritmico - procedurale

Tabulazione dei dati relativi alle strategie corrette ed errate effettivamente utilizzate durante la somministrazione della situazione problema n°4 (Algoritmico - procedurale):

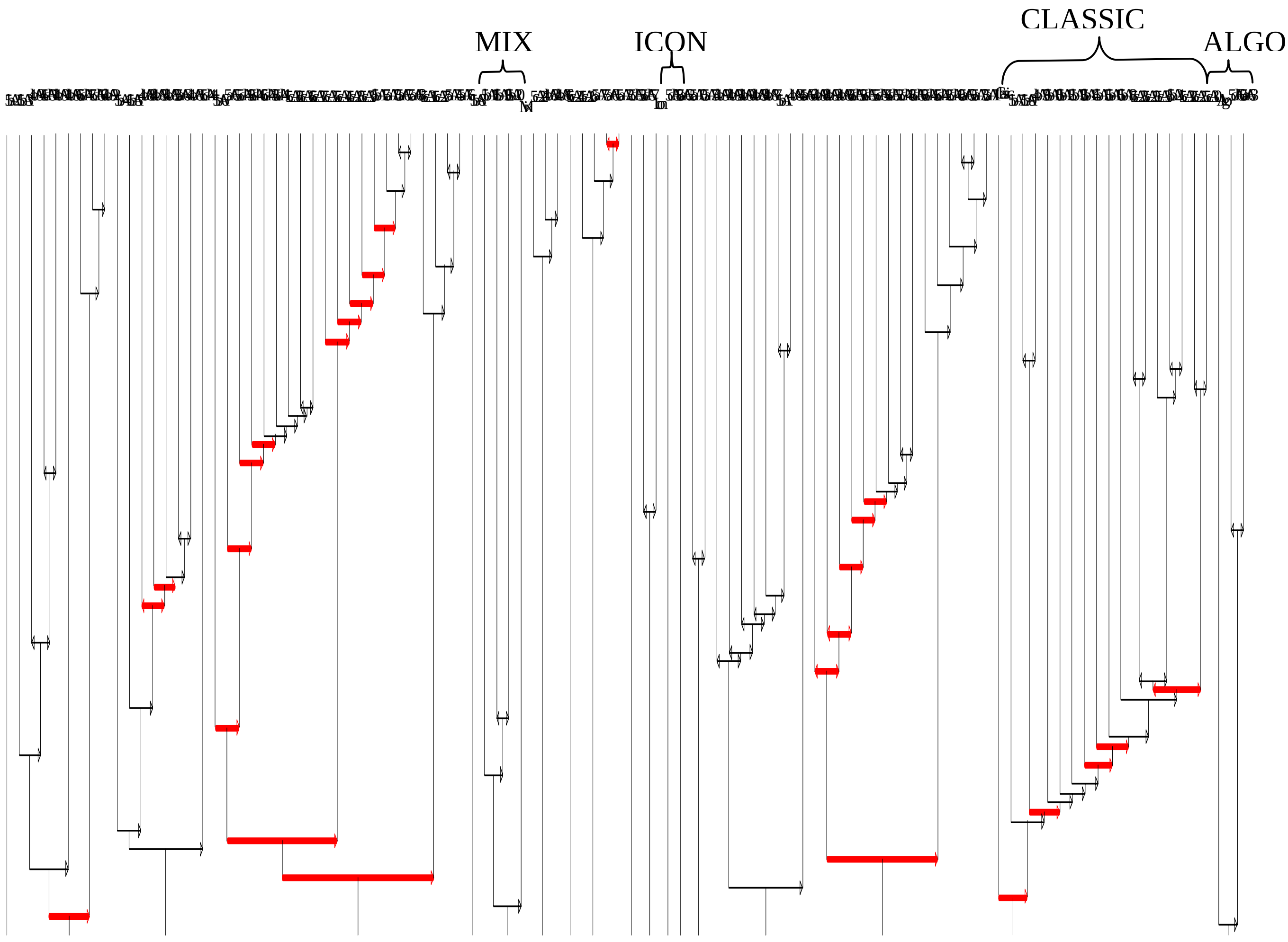
	D1	D2	D4	D6	D7	d2	d4	d5	d6
5bA1	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA2	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
5bA3	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA4	**1**	0	0	0	0	0	0	**1**	0
5bA5	**1**	0	0	0	**1**	0	0	0	0
5bA6	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA7	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA8	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
5bA9	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA10	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
5bA11	**1**	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5bA12	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
5bA13	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA14	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
5bA15	**1**	0	0	0	0	0	**1**	0	0
5bA16	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
5bA17	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA18	**1**	0	0	0	0	0	0	0	**1**
5bA19	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
5bA20	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
5bA21	**1**	0	0	0	0	0	**1**	0	0
4bA94	**1**	0	0	0	0	**1**	0	0	0
4bA95	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA96	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA97	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
4bA98	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0

LEGENDA: La tabella riporta le strategie utilizzate del gruppo n° 4.

- Il numero 5 (o 4) seguito dalle lettere minuscole a, b, c, d indica la classe di appartenenza del bambino e la sezione;
- I codici che seguono indicano i bambini e i loro protocolli;
- I codici D1, D2, D4, D6, D7 indicano le strategie corrette indicate nell'analisi a – priori;
- I codici d2, d4, d5, d6 indicano le strategie errate indicate nell'analisi a – priori;
- Il numero "1" indica l'utilizzo della strategia (corretta o errata) da parte dell'alunno;
- Il numero "0" indica l'assenza della strategia.

Allegato n°7

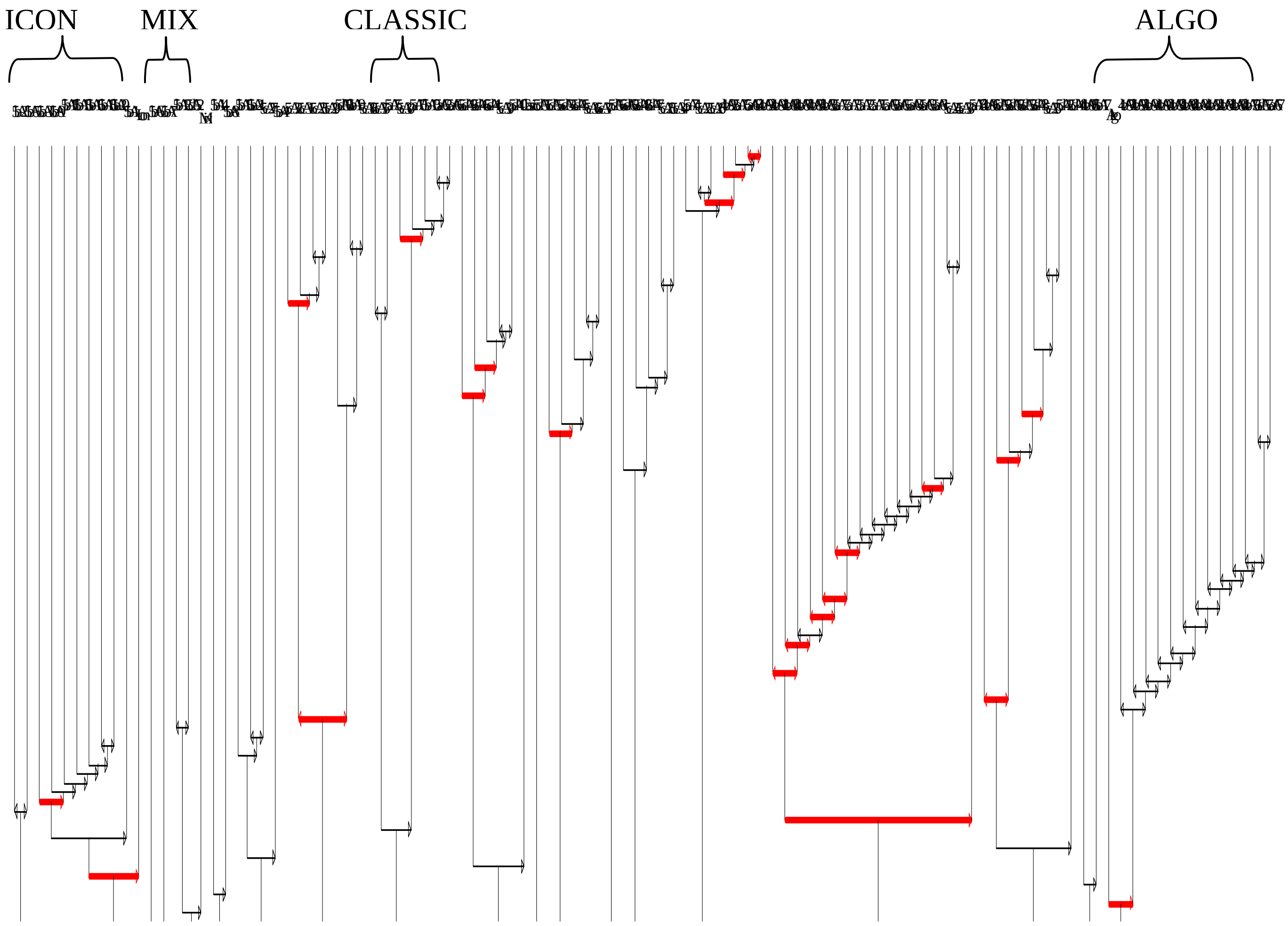
Il grafico implicativo relativo alla fase iniziale, con l'aggiunta delle variabili supplementari.



Albero coesivo : C:\Documents and Settings\Filippo Spagnolo\Desktop\alongi_fase_iniziale_trasp_1.csv

Allegato n°8

Il grafico implicativo relativo alla fase finale, con l'aggiunta delle variabili supplementari.



Albero coesivo : C:\Documents and Settings\Filippo Spagnolo\Desktop\alongi_fase_finale_trasp_1.csv

BIBLIOGRAFIA

1. 15-17 novembre 2001,*“Matematica 2001”*, XXII Convegno UMI-CHM, Ischia.

2. Brousseau, G. (1983), *Ostacles epistemologiques en mathématique.* Recherches en Didactique des Mathématiques, 4, 2;

3. Chevallard Y. (1991). *Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique.* Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble. LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble;

4. D’Amore, B. (1993), *Problemi*, Angeli, Milano.

5. D'Amore B. (1995), *Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica*. La matematica e la sua didattica, n°3, 328 – 370;

6. D’Amore B. (1999), *Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull’apprendimento della matematica*. L’insegnamento della Matematica e delle scienze integrate;

7. D’Amore B. (2001), *Concettualizzazione, registri di rappresentazione semiotica e noetica nella didattica della matematica*. La matematica e la sua didattica. Ricerche sul funzionamento del sistema allievo-insegnante-sapere: motivazioni della mancata devoluzione, n°2, 150 - 173;

8. Duval R. (1993). *Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée,* in Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, ULP, IREM Strasbourg;

9. Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne, Peter Lang;

10. Ferrari P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Pitagora editrice;

11. Fischbein, E. (1993), *The theory of figural concepts*. Educational Studies in Mathematics, n° 24, 139-162;

12. Gagatsis, A. (1995), *Modi di valutazione della leggibilità dei testi matematici.* La matematica e la sua didattica,n° 2, 136-146;

13. Gagatsis A., (1997), *Problemi di interpretazione connessi con il concetto di funzione*. La matematica e la sua didattica, n°2, 132 – 149;

14. Gagatsis A., Demetriou A., Afantiti Th., Michaelidou E., Panaoura R., Shiakalli M., & Christoforides M. (1999), *L'influenza delle Rappresentazioni "Semiotiche" nella Risoluzione di Problemi Additivi*. La matematica e la sua didattica, n° 2, 382 – 403;

15. Godino J., Batanero C. (2000), *Significato istituzionale e personale degli oggetti matematici*. La matematica e la sua didattica, n°3.

16. Godino J. (2001), *Significato e comprensione dei concetti matematici*. La matematica e la sua didattica, n°3.

17. Gras R. (1997), *Metodologia di analisi d'indagine*, Quaderni di ricerca in didattica, 7, 99-109.

18. G.R.I.M. (2002), *Quaderni di ricerca in didattica*, supplemento al n°10, Palermo;

19. Laborde, C. (1995), *Occorre imparare a leggere e scrivere in matematica?* La matematica e la sua didattica n° 2, 121-135;

20. Lakoff, G., Núñez R.E. (1997), *The Metaphorical Structure of Mathematics*, Mathematical Reasoning, Lawrence Erlbaum Associates, 21-89.

21. Maier H. (1995), *Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi*. La matematica e la sua didattica n° 3, 298 – 305;

22. Vygotskij, L. S. (1992), *Pensiero e linguaggio*, Laterza, Bari.

23. Spagnolo F. (1998), *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, La Nuova Italia, Firenze.