

**Università degli Studi di Palermo**

**Facoltà di Scienze della Formazione**  
**Corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria.**

**PROBLEM SOLVING: analisi  
comparativa di diversi registri  
linguistici.**

**Tesi di:**

Giovanna Benigno  
Matricola 0367423

**Relatori:**

Prof.ssa Alessandra La Marca  
Prof. re Filippo Spagnolo

---

**Anno accademico 2004 /2005**

## INDICE GENERALE

### *INTRODUZIONE*

#### *CAPITOLO PRIMO: “ Un quadro generale sul problem solving”*

- 1.1 Il problem solving in psicologia..... pag. 7
- 1.2 Il problem solving nella psicologia della Gestalt..... pag. 9
- 1.3 Il problem solving nella prospettiva cognitivista..... pag. 16
- 1.4 Le rappresentazioni mentali delle situazioni problematiche... pag. 20
- 1.5 I riflessi del problem solving in campo educativo..... pag. 23
- 1.6 Il problem solving di tipo metacognitivo.....pag. 30
- 1.7 Il problem solving nell’insegnamento della matematica.....pag. 36
- 1.8 L’interpretazione di G. Polya sulla soluzione dei problemi.....pag. 41
- 1.9 L’importanza degli aspetti linguistici.....pag. 45

#### *CAPITOLO SECONDO: “Il lavoro sperimentale e la ricerca in didattica”*

- 2.1 Quadro di riferimento teorico..... pag. 51

#### *CAPITOLO TERZO: “Prima fase sperimentale”*

- 3.1 Premessa.....pag. 54
- 3.2 Obiettivo della sperimentazione.....pag. 54
- 3.3 Campione di ricerca.....pag. 56
- 3.4 La metodologia.....pag. 56
- 3.5 I testi dei problemi.....pag. 59
- 3.6 Analisi a priori delle strategie risolutive..... pag. 61
- 3.7 Analisi dei dati sperimentali.....pag. 64
- 3.8 Riflessioni conclusive.....pag. 69

## *CAPITOLO QUARTO: “Seconda fase sperimentale”*

4.1 Ipotesi sperimentale.....	pag. 73
4.2 Campione di ricerca.....	pag. 73
4.3 Metodologia.....	pag. 74
4.4 Problema A	
4.4.1 Drammatizzazione del problema .....	pag. 75
4.4.2 Il testo del racconto.....	pag. 78
4.4.3 Analisi a priori.....	pag. 79
4.4.4 Analisi quantitativa.....	pag. 80
4.4.5 Considerazioni sui risultati ottenuti.....	pag. 81
4.5 Problema B	
4.5.1 Testo del problema.....	pag. 82
4.5.2 Analisi a priori.....	pag. 83
4.5.3 Analisi quantitativa.....	pag. 83
4.5.4 considerazioni sui risultati ottenuti .....	pag. 84
4.6 Problema C	
4.6.1 Prima forma grafica.....	pag. 86
4.6.2 Analisi a priori.....	pag. 87
4.6.3 Analisi quantitativa.....	pag. 87
4.6.4 Considerazioni sui risultati ottenuti.....	pag. 89
4.7 Problema D	
4.7.1 Seconda forma grafica + tabella.....	pag. 90
4.7.2 Analisi a priori.....	pag. 92
4.7.3 Analisi quantitativa.....	pag. 92
4.7.4 Considerazioni sui risultati ottenuti.....	pag. 94
4.8 Analisi implicativa delle variabili.....	pag. 97

4.9 Analisi qualitativa dei protocolli.....pag.105

*CAPITOLO QUINTO: “Conclusioni e problemi aperti”*

*APPENDICE 1*

*APPENDICE 2*

*BIBLIOGRAFIA*

## ***Introduzione***

Di fronte alla domanda “che cos’è la matematica?”, la maggioranza delle persone denuncia smarrimento ed imbarazzo. La matematica si riduce ad un brutto ricordo dell’adolescenza, ad un insieme di regole per eseguire delle operazioni a risultato obbligatorio. Buona parte delle persone ritiene che la matematica serva a risolvere qualunque problema; un’altra parte la identifica con procedimenti di calcolo impiegati nella propria professione. Oggigiorno è difficile imbattersi in un’attività che, in qualche modo, non faccia ricorso alla matematica; probabilmente questo rifiuto-odio per essa è dovuto a qualche cosa di errato nel suo insegnamento. Questo aspetto è stato oggetto di discussione sin dagli anni ’60-’70, anni in cui fiorivano gli studi sulla didattica della matematica.

La ricerca attiva da parte dell’alunno deve occupare un posto centrale in una didattica moderna e le sue osservazioni devono costituire un fondamentale strumento d’apprendimento. Questa ricerca, non potendo essere imposta all’alunno, deve essere stimolata dal desiderio di risoluzione sorto all’impatto con un problema reale. Il bambino deve poter verificare da sé le possibili soluzioni e scoprirne la validità, avendo ovviamente

riconosciuto il diritto all'errore; in questo modo l'alunno acquista le nozioni fondamentali e s'impadronisce veramente del sapere.

L'insegnamento matematico non deve avere per fine né l'esecuzione di operazioni meccaniche né la risoluzione di problemi standardizzati, ma quello di educare l'alunno ad affrontare criticamente situazioni problematiche nuove con spirito d'inventiva e d'iniziativa.

Da una serie d'esperienze di tirocinio<sup>1</sup> ho potuto rilevare il carattere acritico che l'insegnamento della matematica assume nella pratica educativa con conseguenze scoraggianti per l'apprendimento: l'alunno si trova ad imparare a memoria le nozioni e ad applicarle pedissequamente non esercitando la propria capacità di risoluzione di situazioni problematiche .

Per i motivi di cui sopra, nasce l'esigenza di condurre un'indagine sperimentale che abbia come oggetto un modo nuovo di fare matematica, nel rispetto delle esigenze personali e di quella che è la natura di tale disciplina intesa come libera espressione della mente umana.

Indossare le vesti di ricercatore mi ha permesso di osservare l'alunno in classe, nel suo ambiente naturale, di allargare le mie vedute sull'insegnamento/apprendimento della matematica, realizzato secondo la metodologia del problem solving. Tale metodologia richiede non solo una nuova organizzazione della scuola, ma anche un nuovo atteggiamento degli

---

<sup>1</sup> Le attività di tirocinio cui si fa riferimento sono inerenti al Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria 3° anno (2003/2004).

insegnanti, i quali, oltre ad illustrare e spiegare i concetti, dovrebbero promuovere l'individuazione delle situazioni problematiche, sostenere e guidare gli alunni nella ricerca della soluzione senza mai sostituirsi a loro. E' dunque un impegno difficile per gli insegnanti di matematica, poiché la più grande virtù didattica richiesta a loro sarebbe quella di tacere. Scrive il Delessert<sup>2</sup> che l'insegnante deve avere <<*soprattutto il coraggio di non dire – e questo è il punto più difficile – tutto ciò che sa sulle questioni trattate*>>.

Questa indagine sperimentale si pone in primo luogo di indagare sulle concezioni spontanee che i bambini di 7 anni hanno in merito al concetto di “*problema*”, ed in secondo luogo di verificare, dopo la formulazione di una “*situazione-problema*” impiegando diversi registri linguistici, quale tra tali registri sarà scelto in misura maggiore dai bambini.

Il presente lavoro si articola in cinque capitoli. Il primo e il secondo capitolo trattano di argomenti d'ordine teorico che fanno riferimento rispettivamente al Problem solving in psicologia, pedagogia e matematica e al quadro teorico relativo alla ricerca sperimentale; nel terzo capitolo viene presentata una prima fase della ricerca sperimentale<sup>3</sup>; il quarto capitolo

---

<sup>2</sup> DELESSERT A., **Alcuni problemi che interessano la formazione degli insegnanti di matematica**, in: SITIA C. (a cura di), **La didattica della matematica oggi**, PITAGORA, BOLOGNA, 1979, p. 367

<sup>3</sup>La ricerca sperimentale secondo ZANNIELLO, seguendo lo schema classico, si articola in dodici fasi: l'individuazione del problema; la formulazione degli obiettivi

tratta della seconda fase sperimentale; nell'ultimo capitolo sono riportate le considerazioni conclusive e i problemi aperti.

---

della ricerca; la formulazione dell'ipotesi generale; l'esame degli studi che costituiscono i presupposti teorici della ricerca che si vuole condurre e che contribuiscono a definirne l'ambito e il campo; la formulazione operativa delle ipotesi particolari; la scelta del campione, la costruzione del disegno sperimentale, la rilevazione oggettiva e adeguata della situazione iniziale; l'azione del fattore sperimentale, la rilevazione dei dati; l'elaborazione dei dati; la valutazione dei risultati. (**La prepedagogicità della sperimentazione** a cura di GIUSEPPE ZANNIELLO (1997) Palumbo, Palermo)



## ***CAPITOLO PRIMO***

### **UN QUADRO GENERALE SUL PROBLEM SOLVING**

#### **1.1 IL PROBLEM SOLVING IN PSICOLOGIA**

*Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano. Si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano.*  
(G. POLYA)

“Problem solving: letteralmente, soluzione di problemi, l’espressione inglese è stata adottata in tutte le lingue. Rispetto alla parola italiana “soluzione” il termine inglese in “-ing” rafforza il significato di un atto in corso di svolgimento. Tale termine designa la situazione psicologica nella quale si viene a trovare una persona quando, in conformità ad una varietà di dati e anche di richieste, deve affrontare un problema; e anche quell’insieme di ricerche e di teorizzazioni che sono state dedicate allo studio psicologico dei suoi vissuti, così come alle difficoltà che essa incontra e agli elementi di facilitazione che può essa stessa introdurre o possono esserle messi a disposizione. In un certo senso possiamo dire che il “problem solving” è un atto d’intelligenza, nella misura però in cui questi non consiste solo nel comprendere una spiegazione fornita da altri, ma

comporta una partecipazione attiva e creativa, un qualche elemento di scoperta personale.”<sup>4</sup>

Lo studio della soluzione di problemi è un campo di ricerca originariamente creato dalla psicologia del pensiero, una branca della psicologia sperimentale, che si occupa dello studio fenomenologico delle diverse modalità ideative (immaginazione, ragionamento, ecc.), al fine di isolare i fattori psicologici che le determinano. In senso stretto la psicologia del pensiero si è però rivolta allo studio di problematiche specifiche quali la formazione dei concetti, la genesi e lo sviluppo del pensiero logico e la risoluzione di problemi; tale studio ha consentito di ampliare le nostre conoscenze sul funzionamento della mente.

Scrive il Kanizsa<sup>5</sup>: <<Un problema sorge quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un’attività **istintiva** o attraverso un comportamento **appreso**>>.

Affinché ci sia un problema devono verificarsi due condizioni: la presenza di una **motivazione** che spinge a perseguire un fine e **l’indisponibilità** della strategia necessaria per raggiungerlo. La motivazione, vale a dire la spinta ad agire, può essere rappresentata da un bisogno fisiologico o da

---

<sup>4</sup> M.LAENG, **Enciclopedia pedagogica**, EDITRICE LA SCUOLA, p. 9397

<sup>5</sup> KANIZSA G., **Il “problem solving” nella psicologia della Gestalt**, in: MOSCONI G., D’URSO V. (a cura di), **La soluzione dei problemi**, GIUNTI-BARBERA, FIRENZE, 1973, p. 35.

bisogni propri del soggetto (come la curiosità); di conseguenza il problema susciterà degli interrogativi, delle domande configurandosi come una “situazione problematica”.

Afferma il Kanizsa<sup>6</sup> che *<<si è sempre assunta l'esistenza del problema come un dato, come un fatto esistente per sé e non richiedente ulteriore comprensione...Ma questa assunzione del problema come dato dal quale partire è arbitraria: il problema non è un dato, un fatto naturale, ma è... un prodotto psicologico. Si converrà senza difficoltà che esiste un problema solo là e quando vi è una mente che vive una certa situazione come problema. Diciamo di più, e più esattamente: vi è problema solo quando la mente crea o determina il problema: vi è problema solo nella dimensione psicologica, non in quella naturale, od oggettiva>>*.

## **1.2 IL PROBLEM SOLVING NELLA PSICOLOGIA DELLA GESTALT**

Lo studio su come si svolgono i processi di pensiero di fronte ad una situazione problematica, è stato profondamente influenzato dalle concezioni teoriche e dalle analisi sperimentali degli psicologi di orientamento gestaltista, in particolare di Wertheimer, Köhler, Koffka, Duncker.

---

<sup>6</sup> KANIZSA G., op. Cit. p. 31

Il termine “problem-solving” s’incontra raramente negli scritti degli psicologi gestaltisti che preferiscono parlare di *pensiero produttivo*.

Questa preferenza mette in risalto la convinzione che l’attività non si riduca ad una mera riproduzione del passato, al riemergere di idee, di immagini, di comportamenti che sono già esistiti, ma che, accanto a quell’attività riproduttiva, ci siano anche processi che producono veramente il nuovo, che creano ciò che non è ancora stato, che fanno scaturire l’idea mai sorta prima, almeno nella mente di quel determinato organismo pensante.

Le ricerche degli psicologi della Gestalt sono rivolte a stabilire la fenomenologia di questi processi **produttivi** e le caratteristiche che li distinguono da quelli meramente **riproduttivi**, ad individuare le condizioni che li favoriscono e quelle che li ostacolano, a localizzare i momenti decisivi del processo, quando si sprigiona il lampo della comprensione.

Le prime ricerche condotte nello spirito di quest’indirizzo furono quelle di Köhler; egli studiò, tra il 1914 e il 1917, il comportamento di animali (e in particolare di scimpanzé) posti in situazioni problematiche molto semplici (ad esempio uno scimpanzé doveva trovare il modo di impossessarsi di una banana appesa al soffitto di una gabbia o collocata all’esterno di questa ad una certa distanza dalle sbarre, avendo a disposizione alcuni oggetti che avrebbero potuto utilizzare come strumenti: un bastone, una cassa, una scala portatile, ecc.). Köhler ha così potuto stabilire che questi animali sono

capaci di ristrutturazioni improvvise dell'ambiente, che costituiscono una soluzione del problema (ad es. portando la cassa, sino a poco prima usata solo come recipiente o sedile, sotto la banana e utilizzandola come mezzo per alzare il livello del pavimento, ecc.). Egli osservò che dal comportamento concreto dell'animale e dalla sua ristrutturazione oggettiva di tale ambiente era possibile risalire ai processi di ristrutturazione che potevano avere avuto luogo nella sua rappresentazione cognitiva dell'ambiente: << E' come se – osservò Köhler – nella mente dello scimpanzé due oggetti prima estranei uno all'altro fossero entrati fra loro in rapporto, nel senso di “mezzo-obiettivo”>>.

Köhler suppose che il pensiero ed il problem solving non erano la semplice somma di stimolo-risposta, ma che doveva in qualche modo avvenire una percezione globale del problema come totalità funzionale.

Il problema, cioè, diventava comprensibile e risolvibile proprio perché i rapporti tra gli elementi in gioco improvvisamente si mostravano agli occhi dell'individuo in tutta la loro evidente chiarezza. Questo fenomeno, vitale per l'evoluzione del processo di pensiero, fu indicato dai gestaltisti con il termine di *Einsicht* o, in inglese, *insight* che letteralmente significa “vedere dentro”, cioè intuire.

Fu però il lavoro di M. Wertheimer a chiarire il significato di “struttura” e di “insight” nell’ambito più specifico dell’insegnamento (ed in particolare proprio della matematica , campo prediletto dallo psicologo praghese).

Dal laboratorio, dove studiava la percezione, egli passò in classe, dove studiò gli allievi. Il pensiero che comprende una struttura venne da lui ribattezzato “pensiero produttivo”, cioè quel tipo di pensiero che, partendo da un problema, produce una struttura nuova avente carattere di soluzione.

Il lavoro di Wertheimer ha per oggetto il pensiero umano e si svolge attraverso un’analisi minuziosa ed affascinante del modo in cui concretamente una persona affronta un problema, si affatica intorno ad esso ed infine lo risolve. Egli ha analizzato, al riguardo, situazioni di vario tipo: alcune relative alla storia del pensiero scientifico, altre costituite da problemi aritmetici o geometrici adatti a bambini della scuola elementare o media (la scoperta delle regole per eseguire una sommatoria o per trovare l’area di un parallelogramma) ed altre ancora relative alla vita quotidiana (ad es. conciliare gli interessi divergenti di due persone trovando un obiettivo comune).

Secondo Wertheimer è necessario osservare la situazione liberamente, a mente aperta, con una visione complessiva, cercando di capire fino in fondo, di rendersi conto, di mettere in evidenza la relazione interna che esiste tra la forma e il compito assegnato giungendo, nei casi migliori, alle

radici della situazione, illuminando e rendendo trasparenti i caratteri di struttura essenziali.

Le caratteristiche delle soluzioni genuine, quelle soluzioni cioè auspicabili in una corretta procedura di insegnamento-apprendimento, sono dunque:

- Non essere legati, accecati da abitudini;
- Non limitarsi a ripetere pedissequamente ciò che viene insegnato;
- Non procedere con un modo di pensare meccanico, con un atteggiamento eminentemente analitico per mezzo di operazioni di analisi.

Dagli studi di Wertheimer prendono spunto quelli del suo allievo K. Duncker.

Egli ha studiato a fondo le situazioni in cui l'insight non ha luogo d'un tratto, ma (come comunemente accade) solo al termine di un lungo processo di ricerca nel corso del quale la prima fase è costituita da una soluzione del problema di partenza che però si rivela subito come troppo generica, permettendo solo di riformulare tale problema in termini più definiti, dando così avvio ad una seconda fase e poi ad altre, ciascuna delle quali rappresenta una soluzione rispetto al problema immediatamente precedente ma apre a sua volta un problema più specifico (un processo che

si sviluppa lungo una certa direzione di ricerca che appare promettente, e che tuttavia può non essere l'unica, o può avere diramazioni).

Scrive Dunker<sup>7</sup>: << *La forma finale di una particolare soluzione non si raggiunge generalmente in una sola tappa a partire dalla formulazione originaria del problema, al contrario, il principio, il valore funzionale della soluzione emerge tipicamente per primo, mentre la forma finale della soluzione in questione si sviluppa soltanto a mano a mano che questo principio diventa sempre più concreto. In altre parole, le proprietà generali o <<essenziali>> di una soluzione precedono geneticamente le proprietà particolari; queste ultime si sviluppano a partire dalle prime*>>.

Egli si è anche occupato delle strategie con cui può essere affrontato il problema distinguendo fra le “analisi dall’alto” (quelle cioè che prendono come punto di partenza l’obiettivo, e le richieste che esso pone), e le “analisi dal basso” (quelle cioè che prendono avvio da una considerazione del materiale a disposizione, e delle possibilità che esso offre, in vista di un certo obiettivo).

Un punto di grande interesse sia psicologico che pedagogico è quello delle difficoltà che il pensiero può incontrare nella ricerca di una soluzione.

Dunker ha messo in evidenza una difficoltà, di carattere generale, consistente nel fenomeno della *fissità funzionale*, ovvero nella tendenza ad

---

<sup>7</sup> Dal testo: K: DUNKER, On problem-solving, << Psychology Monographs>>58, 1945



utilizzare certi oggetti solo per quelle che sono le loro funzioni abituali (per es. un paio di forbici per tagliare) senza giungere a vedere che in certe situazioni essi potrebbero essere utilizzati per funzioni diverse e insolite (ad es. le forbici come compasso).

Un'altra difficoltà, che si presenta quando un problema è formulato verbalmente, consiste nelle cosiddette *implicazioni parassite* dei termini verbali ovvero in interpretazioni riduttive del significato di certe parole (esse hanno luogo ad es. quando alla parola "tavolo" viene associata l'idea che esso sia necessariamente "di legno", o alla parola "statua" l'idea che essa sia "di marmo") le quali limitano indebitamente le direzioni lungo le quali viene cercata una soluzione.

Fra le strategie che hanno un *valore euristico*, possono cioè rendere più facile la scoperta di una soluzione, un ruolo notevole può avere quella della *semplificazione*, consistente nel cambiare i dati di un problema sostituendoli con altri assai più semplici, senza tuttavia modificare la struttura del problema stesso, che è però in tal modo assai più evidente, rendendo più agevole la ristrutturazione.

Una notevole utilità possono avere le rassegne di *situazioni analoghe* già vissute, che (come osserva Duncker) possono suggerire, "per assonanza", delle proposte di soluzione e le esperienze di *brainstorming*, compiute sia in gruppo che individualmente, sulla base del principio che una certa idea

può favorire l'emergere di altre (per contrasto, per completamento, per differenziazione, ecc.).

### **1.3 IL PROBLEM SOLVING NELLA PROSPETTIVA COGNITIVISTA**

Anche nell'ambito del cognitivismo (indirizzo di ricerca che si è sviluppato in parallelo con l'affermarsi del computer e con le ricerche sulla cosiddetta "intelligenza artificiale"), l'interesse per il problem solving è presente sia come attenzione ai modi con cui il pensiero attinge al patrimonio delle conoscenze già acquisite e spesso strutturate nella forma di schemi corrispondenti ai vari tipi d'esperienza, sia come analisi assai più minuziosa (analoga a quella necessaria per la costruzione di un programma per il computer) dei singoli passaggi che, come nelle sequenze "problema-soluzione-nuovo problema" già considerate da Dunker, possono portare alla scoperta della soluzione.

Questo approccio ha potuto prendere corpo ed evolversi rapidamente nel campo della psicologia del pensiero, grazie all'uso crescente che a partire dagli anni cinquanta si fece di computer sempre più sofisticati per la soluzione di una svariata gamma di compiti: ad esempio giocare a scacchi, dimostrare teoremi di logica simbolica, comprendere il linguaggio naturale, ecc.

A forza di studiare simulazioni al calcolatore (o con il linguaggio del calcolatore) del comportamento umano, l'approccio informatico si è pian piano evoluto verso la formulazione vera e propria di programmi per il calcolatore destinati alla risoluzione di tipi sempre più ampi di problemi.

Si ha così un'interazione uomo-macchina nella quale all'uomo è lasciato il compito di scelta sul “cosa fare”, mentre alla macchina sul “come fare”.

Da un punto di vista cognitivista, il processo di soluzione di problemi coinvolge meccanismi riguardanti la memoria operativa, la memoria a breve e a lungo termine, procedure di pianificazione delle operazioni mentali e di rappresentazione delle informazioni.

Il problem solving è determinato secondo tre principali elementi:

- 1) Il problema in sé;
- 2) Lo spazio del problema;
- 3) Le strategie utilizzate per la soluzione.

#### 1) IL PROBLEMA

Ogni volta che ci si appresta a risolvere un problema, si utilizzano tre tipi d'informazioni:

- Informazioni riguardanti i dati del problema;
- Informazioni riguardanti le operazioni eseguibili sui dati;
- Informazioni riguardanti lo scopo che il problema definisce.

Queste informazioni, per essere adeguatamente manipolate dall'individuo, devono essere codificate in termini di simboli o strutture di simboli (Newell e Simon 1972); è necessario, tuttavia, definire in maniera più precisa il significato degli elementi del problema.

Le informazioni riguardanti i dati non si esauriscono ai soli oggetti o pezzi di materiale fisicamente presenti, ma consistono anche di assunzioni, definizioni e assiomi che possono essere fatti su quegli oggetti.

Le operazioni si riferiscono alle azioni che vengono eseguite su dati. Esse comprendono sia azioni di carattere manipolatorio (come le mosse nel gioco degli scacchi), sia operazioni di carattere strettamente cognitivo (come l'uso delle regole d'inferenza nei compiti di logica).

Lo scopo è il risultato che si deve ottenere attraverso le procedure di soluzione. Talvolta un problema è scomposto in sottoproblemi ognuno dei quali possiede uno scopo preciso, ossia un obiettivo parziale, consentendo di affrontare l'obiettivo finale con maggior facilità.

## 2) LO SPAZIO DEL PROBLEMA

Nella memoria dei soggetti messi di fronte a problemi da risolvere si determina una rappresentazione dell'area del problema come uno spazio di possibili situazioni da esaminare, allo scopo di trovare quella situazione che corrisponde alla soluzione.

Si deve perciò distinguere l'area del compito (il modo di descrivere il problema vero, dall'esterno, da parte di un osservatore onnisciente), dallo spazio del problema ( il modo in cui un determinato solutore si raffigura un compito per risolverlo).

### 3) LE STRATEGIE DI SOLUZIONE

Operativamente l'attività del problem-solving consiste nell'eseguire sequenze di operazioni ordinate strategicamente verso una meta.

Newell e Simon [1972] hanno individuato tre strategie salienti nel comportamento del problem solving:

- Analisi mezzi-fini: procedura mediante la quale un problema viene scomposto in tanti sottoproblemi la cui soluzione consente di raggiungere la meta finale.
- Metodo della pianificazione: tende a semplificare lo spazio del problema attraverso l'eliminazione degli elementi di dettaglio, consentendo la riduzione del numero delle operazioni da compiere. Tale semplificazione comporta, di fatto, la determinazione di un nuovo problema, diverso da quello originario con una soluzione più facile che può essere utilizzata per risolvere il problema complesso originario.
- Ricerca a ritroso: a differenza delle strategie che procedono per sequenze di operazioni che partono da uno stato iniziale del

problema allo stato meta, cioè strategie che “guardano avanti”, essa segue un procedimento inverso, “a ritroso” appunto, anche attraverso la scomposizione del problema in sottoproblemi con mete circoscritte. Tale strategia è normalmente utilizzata nei compiti di geometria e nelle prove matematiche.

#### **1.4 LE RAPPRESENTAZIONI MENTALI DELLE SITUAZIONI PROBLEMATICHE**

Questo argomento, dato il ruolo centrale che tutti gli riconoscono nell’attività del problem solving, è stato studiato molto, e da vari punti di vista.

Piaget<sup>8</sup> ed Inhelder pubblicavano nel 1971 una distinzione tra:

- Immagini riproduttive (evocanti oggetti, situazioni o eventi noti);
- Immagini anticipatorie (rappresentanti oggetti costruiti solo mentalmente).

Essi affermavano che le immagini visive servivano da punto di partenza nell’attività di concretizzazione dei pensieri evocati dai simboli verbali e dai simboli matematici; questi ultimi, per la loro natura, sono astratti ma il solutore se ne fa un’immagine concreta (e questo è punto cruciale nel

---

<sup>8</sup> Dal testo: BRUNO D’AMORE, **Problemi**, FRANCO ANGELI, Milano, 1996, p.298

problem solving): proprio le immagini visive sono la chiave di volta di questa concretizzazione.

Sono stati compiuti vari studi sul passaggio dall'immagine interna alla parola e, in base a vari esperimenti, è stato mostrato che solo dopo una fase di familiarizzazione con il problema, il risolutore passa da una fase visiva (rappresentazioni interne ed esterne) ad una linguistica.

Bruner scrisse nel 1964: << *Per trarre beneficio dal contatto con eventi che ricorrono regolarmente nell'ambiente, dobbiamo rappresentarci in qualche modo. Liquidare questo problema come "pura memoria" equivale a falsarlo, poiché il fatto più importante nella memoria non è l'immagazzinare l'esperienza passata, ma piuttosto il recuperare ciò che interessa, in qualche forma utile. Ciò dipende da come l'esperienza passata è codificata ed elaborata, in modo che possa davvero essere rilevante e utilizzabile nel presente, quando occorre. Il prodotto finale di tale sistema di codificazione e d'elaborazione è quella che possiamo chiamare rappresentazione*>>.

Il concetto di **rappresentazione** è di importanza fondamentale perché sta ad indicare il "modello" secondo il quale il soggetto codifica la realtà o gli oggetti d'esperienza. E' in sostanza, una "trascrizione del reale nei termini delle categorie e degli schemi possibili al soggetto, che attraversano un

itinerario di trasformazioni successive secondo un principio che possiamo chiamare di “evoluitività rappresentazionale”.

Bruner distingue tre fasi di rappresentazione:

- Esecutiva: fase in cui il mondo del bambino appare dominato dal “linguaggio” dell’azione, la realtà è assimilata dal soggetto nei termini di ciò che si fa o che si può fare.
- Iconica: si passa dal concreto reale al mondo delle immagini mentali astratte; secondo Bruner in questa fase il bambino s’immagina, si raffigura una manipolazione o un’operazione, per ricrearla quando sarà necessario ( ad es. un bambino che deve ordinare oggetti in base ad una determinata proprietà, s’immagina la situazione iconicamente).
- Simbolica: questa fase consiste nella “rappresentazione attraverso dei simboli ( ad es. il linguaggio). In un contesto matematico quando il bambino entra in contatto con simboli astratti inizia una rappresentazione simbolica.

Per Bruner, questi tre modi di rappresentazione si sviluppano in quest’ordine e ciascuno di essi è la base cognitiva per il successivo; essi sono collegati in modo evolutivo.



Bruner afferma che qualunque idea o problema o conoscenza può essere presentato nei tre modi, nell'ordine detto, allo scopo soprattutto di “fondare” le immagini mentali a cui fare riferimento e porle alla base delle acquisizioni cognitive.

## **1.5 I RIFLESSI DEL PROBLEM SOLVING IN CAMPO EDUCATIVO**

Le ricerche sul “problem solving” possono avere molteplici riflessi sul piano dell'attività didattica. Si deve tenere presente che vi è una notevole predisposizione naturale dei bambini a porre agli adulti dei “perché”, a cercare delle spiegazioni (che spesso essi rielaborano spontaneamente, come accade nel caso dei fenomeni naturali, o di certi aspetti evidenti del comportamento umano).

La scuola dovrebbe alimentare e sviluppare ulteriormente questa tendenza naturale, sollecitando gli allievi *a scoprire problemi nuovi*, a formularli con chiarezza, a guardare sempre le cose e gli eventi con un atteggiamento di curiosità cognitiva, con un “occhio critico”.

“La curiosità cognitiva”, così come la creatività, è un tratto presente, sia pure in misura diversa, in ogni bambino, ed è educabile.

E' importante poi sviluppare via via la capacità di *elaborare i problemi*, e in pratica di affrontarli con la consapevolezza dei “trabocchetti” ai quali il

pensiero è esposto nel suo lavoro di ricerca, utilizzando gli atteggiamenti e i procedimenti euristici adatti.

Va poi tenuto conto che, se vi sono problemi per la cui soluzione è richiesta solo una ristrutturazione di *dati noti*, ve ne sono altri che richiedono invece, per essere risolti, la ricerca e l'introduzione di *dati nuovi*.

Questi ultimi sono particolarmente importanti per almeno tre ragioni. Anzitutto possono suscitare una motivazione positiva ad apprendere nuovi dati di conoscenza; in secondo luogo, tali nuovi dati si collegano con quelli già posseduti secondo un rapporto di complementarità, di reciproco completamento e supporto; in terzo luogo, le strutture cognitive che da essi hanno origine, perdurano molto più a lungo nella memoria proprio grazie al loro carattere organico, e possono per tale ragione anche essere ricostruite nella loro interezza nel caso in cui una loro parte sia andata perduta.

Tuttavia un insegnamento “per problemi” non è cosa semplice e meccanica. Non può essere ridotto ad una serie di problematiche fra loro scollegate, ma deve consistere nel fatto di far nascere in modo quasi naturale dalla soluzione di un certo problema altri problemi ad esso intrinsecamente connessi (anche su un piano interdisciplinare), che sviluppino via via il discorso dando a quest'ultimo, ed al sapere che ne deriva, un forte carattere di organicità.

I singoli problemi sollevati, i “perché” posti, non possono certo essere liquidati con una risposta immediata e quasi meccanica, ma devono invece dare luogo ad un’attività d’elaborazione del problema, attraverso una discussione di gruppo nel corso della quale ogni allievo è invitato a formulare delle ipotesi, attraverso conversazioni che arricchiscono il quadro introducendo nuovi esempi e nuovi riferimenti, ed anche attraverso osservazioni e ricerche guidate individuali o collettive o, talvolta, veri e propri esperimenti.

L’attività di *problem posing*<sup>9</sup> e di *problem solving* non devono essere identificate con quella di risoluzione di esercizi applicativi; esse sono attività più complesse. Gli esercizi applicativi possono essere risolti utilizzando concetti e regole già apprese, mentre la soluzione di un problema nuovo richiede capacità decisionali e l’utilizzazione di procedure e di strategie da scoprire. La strategia di risoluzione di un problema comporta l’esplorazione di regole (esperienze, procedure, leggi,...), l’analisi della situazione da più punti di vista, l’utilizzazione di regole anche nuove e la capacità di valutare la risolubilità del problema stesso.

Il *problem solving* potrebbe essere definito come un approccio didattico teso a sviluppare, sul piano psicologico, comportamentale ed operativo, l’abilità nella risoluzione di problemi.

---

<sup>9</sup>L’attività di *problem posing* consiste nel concettualizzare un problema, mediante una riflessione sulla situazione problematica nella quale l’allievo s’imbatte.

Il problem solving, pur essendo associato allo sviluppo delle abilità logico-matematiche di risoluzione di problemi, non si rivela l'unica area didattica che può giovare di dette abilità: “problem solving” in un’ottica interdisciplinare, può voler dire uso corretto dell'abilità di classificazione di situazioni problematiche e capacità, quindi, di risolvere problemi-tipo analoghi, siano essi pertinenti all'area logico-matematica o meno.

Inoltre il metodo di soluzione dei problemi (del quale il problem solving è una sfaccettatura) pone, come nucleo operativo, la scoperta ed il dominio di situazioni problematiche in generale, che possono sviluppare le potenzialità euristiche dell'allievo, e le sue abilità di valutazione e di giudizio obiettivo.

*“Il problem solver strategico è come un esperto marinaio che, in mezzo all'oceano, cerca di prevedere e programmare le proprie azioni sulla base delle condizioni del mare in quel momento. Deve prevedere l'insorgere di imprevisti e prepararsi ad affrontarli confidando soltanto sulla sua "consapevolezza operativa", non sul controllo assoluto degli eventi. Non solo, ma egli non conosce e non può conoscere né la profonda verità del mare né il perché dei suoi mutamenti. Eppure con questa sua conoscenza limitata al "come fare" attraversa gli oceani e fronteggia le tempeste adattando sempre il suo agire all'evolversi degli eventi”.*

*(La terapia dell'azienda malata, 2000)*

Il metodo della didattica per problemi consente agli allievi di imparare a risolvere, con gradualità, problemi sempre più complessi che gli permettono di acquisire abilità cognitive di livello elevato.

Un problema può essere una domanda che richiede una risposta precisa ed esauriente, oppure, un quesito che richiede l'individuazione o la costruzione di regole e di procedure che soddisfino condizioni predefinite e consentano di risolvere il quesito stesso.

Ritengo che la didattica per problemi abbia una cruciale valenza educativo-formativa e consenta di far acquisire ad ogni allievo gli obiettivi didattici pre-fissati (a livello disciplinare o pluridisciplinare).

L'attività di insegnamento-apprendimento per problemi deve consentire a ciascun allievo di:

- Ricercare dati ed informazioni;
- Fare stime e calcoli;
- Formulare ipotesi risolutive;
- Proporre soluzioni;
- Prendere decisioni.

La didattica per problemi deve essere intenzionale e funzionale rispetto agli obiettivi educativi e didattici da conseguire, in termini di conoscenze, competenze e capacità. Durante la soluzione di un problema l'allievo deve

essere messo dal docente in condizione di scoprire (e ri-scoprire) ed acquisire autonomamente conoscenze nuove.

E' importante sottolineare che, in questo tipo di didattica, devono essere rispettate alcune regole fondamentali di relazione:

- I problemi non devono essere imposti, in modo direttivo, ma essere discussi e condivisi dal gruppo classe e/o in piccoli gruppi;
- I docenti assumono la funzione di guida metodologica, di tutor, di assistenza e di consulenza per ciascun allievo o per il gruppo di alunni impegnato nella soluzione del problema;

Inoltre la didattica per problemi consente il conseguimento dei seguenti obiettivi per ciascun allievo:

- a) Imparare ad organizzare in modo significativo le proprie conoscenze;
- b) Imparare a valutare l'utilità delle conoscenze acquisite, rispetto agli obiettivi prefissati in termini di conoscenze, competenze e capacità;
- c) Sviluppare l'attitudine ad affrontare problemi nuovi ed imprevisti e a trasferire le conoscenze acquisite in contesti diversi (transfer);
- d) Decidere in condizioni d'incertezza oltre che di certezza;
- e) Sviluppare la capacità di dominare situazioni anche complesse;
- f) Apprendere ad utilizzare appropriati metodi di comunicazione oltre che di documentazione;
- g) Apprendere ad apprendere.

Quando un allievo s'imbatte in un problema, inizialmente ne sa molto poco, ma potrà diventare esperto di quel particolare problema, formulando ipotesi risolutive, seppure inadeguate ed insoddisfacenti, criticando, rivedendo ed affinando le ipotesi stesse, dopo averle messe alla prova.

Comprendere un problema, quindi, significa capirne le difficoltà, tentare di risolverlo con un'applicazione tenace e responsabile, con perseveranza e gratificazione intellettuale, legata alla soluzione del problema stesso. Con tale metodo si possono sviluppare alcuni aspetti fondamentali della personalità quali:

- 1) La responsabilità;
- 2) L'autonomia;
- 3) La fiducia in sé;
- 4) La stima di sé;
- 5) La cooperazione con gli altri;
- 6) La solidarietà;
- 7) Le capacità decisionali.

L'attività didattica deve essere progettata e programmata collegialmente facendo in modo che gli allievi risolvano i problemi in piccoli gruppi, costituiti ad es. da cinque studenti. I problemi possono essere scomposti in sottoproblemi, più semplici da risolvere. I gruppi scelgono un loro referente che illustra ai componenti degli altri gruppi le procedure che hanno

consentito la soluzione del problema. In tale fase, la funzione del docente consiste nell'insegnare agli allievi del gruppo classe a trovare la soluzione o le soluzioni (anche quelle non ottimizzate) del problema. Generalmente un problema ne genera un altro: la soluzione di un problema può essere, infatti, il presupposto per la posizione di un altro.

Il filosofo ed epistemologo K. Popper sostiene che:

*<<[...] la ricerca scientifica consiste nel risolvere problemi”, [...] la vita è costituita da problemi da risolvere>> e quindi che << apprendere a risolvere problemi significa apprendere a vivere [...]>>.*

## **1.6 IL PROBLEM SOLVING DI TIPO METACOGNITIVO**

Recenti studi sono proiettati all'applicazione di risoluzione di problemi mediante un approccio definito come problem solving di tipo metacognitivo; esso tende ad essere un'espansione applicativa del metodo classico.

L'approccio metacognitivo rende capaci di organizzare, dirigere e controllare i propri processi mentali, adeguandoli alle esperienze o al compito da svolgere, e rende possibile la costruzione del sapere partendo da strategie cognitive ed sperimentali elaborate personalmente, a partire dalle informazioni conosciute.



Lo sviluppo di un atteggiamento metacognitivo permette di potenziare le abilità già possedute, di acquisire una maggiore propensione nell'utilizzo delle strategie ed una maggiore consapevolezza delle finalità del compito, delle abilità e dei processi che vengono messi in atto per la sua esecuzione, della capacità di portarlo a termine; permette di organizzare il lavoro nelle sue fasi, di svolgere una forma di controllo e di valutazione del proprio operato e può anche essere elemento critico.

La tabella che segue sintetizza le principali relazioni che sussistono tra la tecnica del problem solving e le attività metacognitive che accompagnano l'uso di tale tecnica.

PROBLEM SOLVING	ATTIVITA' METACOGNITIVE DI CONTROLLO
<b>Comprensione</b>	<p><b>Prima di lavorare rifletti:</b></p> <p>Quello che vai ad affrontare è proprio un problema?  Cosa sai su come si fa?  Hai incontrato problemi simili?</p>
<b>Previsione</b>	<p><b>Prima di lavorare prevedi:</b></p> <p>Cosa ti può aiutare?  Quanto tempo hai?  Di quali/quantità strumenti hai bisogno?  Qual è l'ambiente in cui svolgerai il compito?</p>
<b>Pianificazione</b>	<p><b>Organizzati:</b></p> <p>Identifica il problema.  Vuoi/puoi lavorare da solo o in gruppo?  Reperisci materiali e strumenti.  Scegli i metodi di rappresentazione dei dati.  Stabilisci i tempi di lavoro.</p>
<b>Monitoraggio</b>	<p><b>Mentre svolgi il compito risolutivo controlla:</b></p> <p>Sei sulla strada giusta?  Cosa va eliminato o invece salvato?  Il compito ti sembra facile o difficile?  Se non riesci ad andare avanti, cosa fai?  Quella che hai trovato è la soluzione?</p>
<b>Valutazione</b>	<p><b>Quando hai risolto il problema, guarda indietro:</b></p> <p>Le tue previsioni e la tua pianificazione ti sono stati utili?  Hai lavorato bene?  Si sarebbe potuto fare in un altro modo?  Questa procedura di risoluzione può esserti utile in altri compiti?  C'è stato qualche problema insuperabile?</p>

Il problem solving metacognitivo diviene quindi un palestra per l'abilità di autoregolazione poiché, in modo sempre più puntuale, i ragazzi saranno in grado di monitorare i processi e di valutare i gradi di utilità, necessità ed appropriatezza dei diversi processi risolutivi, nonché di classificare le rappresentazioni personali di procedure, ed di attivare positivi transfer degli apprendimenti .

L'intuizione intesa come conoscenza diretta ed immediata della realtà, di un fenomeno, di una situazione, può giocare un ruolo importante nella soluzione di un problema.

Le difficoltà, per l'alunno, possono presentarsi in una delle seguenti fasi:

- a) Lettura del problema;
- b) Comprensione del problema;
- c) Applicazione di procedure risolutive;
- d) Codifica della risposta.

Le fasi di risoluzione di un problema, invece, possono essere le seguenti:

- 1) Presentazione del problema;
- 2) Riflessione sul problema;
- 3) Soluzione del problema;
- 4) Discussione in gruppo (brain storming).

Durante la tecnica del PS è possibile adottare il metodo del brain storming, il quale può essere utilizzato dal docente per animare i lavori di gruppo, soprattutto nella fase in cui si discute la soluzione di un problema.

Per semplificare la risoluzione di un problema si ricorre ad una sua modellizzazione, ossia ad una sua rappresentazione euristica che ne riproduce le caratteristiche essenziali.

Il modello interviene in due fasi relative alla soluzione di un problema:

- ✓ Quando dalla situazione problematica reale si arriva alla costruzione di un modello risolutivo;
- ✓ Quando dal modello si passa a ciò che il solutore deve fare per risolvere il problema.

Il modello preliminare alla soluzione di un problema può essere un modello già strutturato, oppure un modello formato solo in parte e, quindi, in via di formazione completa. Il modello può essere adeguato per risolvere il problema oppure non adeguato del tutto o solo in parte.

Esiste, per il problem solving, una varietà di modelli articolati in fasi. Secondo alcuni studiosi, per il modello classico si possono articolare quattro fasi:

- 1) Fase iniziale: il solutore tenta di comprendere ciò di cui tratta il problema che ha di fronte e ciò che deve fare;

- 2) Fase di attacco: il solutore saggia una prima ipotesi di soluzione, che deve essere riformulata in caso di non validità della stessa;
- 3) Fase di controllo: il solutore confronta la propria soluzione con lo stimolo posto dal problema, per valutarne l'efficacia;
- 4) Fase di estensione: la soluzione di un problema dovrebbe portare alla formulazione di un altro problema.

Inoltre in tale modello l'attività di problem solving è influenzata da condizioni esterne e da condizioni interne.

Le condizioni esterne sono costituite da:

- Stimoli verbali e non;
- Indicazioni, direttive finalizzate a favorire la concettualizzazione del problema;
- Istruzioni che hanno la funzione di agevolare la soluzione del problema.

Le condizioni interne sono legate alle differenze individuali e dipendono dalla:

- Quantità di informazioni immagazzinate;
- Facilità di richiamare alla memoria le informazioni stesse;
- Capacità di selezionare i concetti;
- Flessibilità nel formulare ipotesi;
- Capacità di saper confrontare il caso specifico con il caso generale.

## 1.7 IL PROBLEM SOLVING NELL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

Nelle “*Raccomandazioni per l’Attuazione delle Indicazioni Nazionali per i Piani di Studio Personalizzati nella Scuola Primaria*” del 2002, si rileva che “porsi e risolvere problemi” costituisce una procedura mentale che caratterizza tutto il pensiero matematico.

*<<L’atteggiamento problematico è connaturato con la mentalità della matematica e si comprende, quindi, l’importanza di questa procedura nel processo di insegnamento e apprendimento della matematica. Il risolvere problemi offre importanti occasioni agli alunni per costruire nuovi concetti, nozioni e abilità, per arricchire di significati nozioni già apprese e per verificare l’efficacia di apprendimenti già posseduti>>.*

Si vede quindi come il “problema” diventi il fulcro di tutto l’insegnamento matematico nella scuola primaria.

Che cosa si intende per problema?

Secondo il dizionario della lingua italiana G. Devoto-G.C.Oli, un problema è un *<<quesito che attende una soluzione (in matematica un quesito che richiede la determinazione o la costruzione di una o più entità che soddisfano a date condizioni fissate in precedenza)>>* e, secondo The American Heritage Dictionary, *<<a question put forward for consideration, discussion or solution; a question that exercises the mind>>*. (Un quesito

da prendere in considerazione, da discutere o da risolvere, un quesito che esercita la mente).

Nel documento di studio dell'Unione Matematica Italiana si può leggere che:

*in diversi contesti sperimentali, linguistici e matematici, in situazioni varie, relative a contesti scolastici ed extrascolastici porsi e risolvere problemi vuol significare:*

- *riconoscere situazioni problematiche e rappresentarle;*
- *avviare, discutere e comunicare strategie risolutive;*
- *risolvere problemi posti da altri;*
- *porsi e risolvere (nuovi) problemi.*

Si può quindi asserire che “porsi e risolvere problemi” vuol dire non solo imparare le cose della matematica, ma collocarsi già essenzialmente fra coloro che avranno assimilato l’abitudine di pensare (con metodo) anche al di fuori dell’ambiente scolastico.

Le *competenze* richieste per il nucleo di processo “Porsi e risolvere problemi” per la Scuola Elementare sono:

- partendo da situazioni concrete note all’allievo o proposte dall’insegnante, individuare gli elementi essenziali di un problema;

- selezionare le informazioni utili e prospettare una soluzione del problema;
- riflettere sul procedimento risolutivo seguito e confrontarsi con altre possibili soluzioni;
- individuare le informazioni necessarie per raggiungere un obiettivo in una situazione problematica (selezionando i dati forniti dal testo e quelli ricavabili dal contesto);
- individuare in un problema eventuali dati mancanti o sovrabbondanti o contraddittori;
- essere consapevole dell'obiettivo da raggiungere in una situazione problematica e del processo risolutivo seguito, con attenzione al controllo delle soluzioni prodotte;
- formalizzare il procedimento risolutivo seguito;
- stabilire la possibilità di applicare i procedimenti utilizzati in altre situazioni.

*Quali sono le caratteristiche del “Porsi e risolvere problemi?”*

Seguendo già l'accezione semantica, possiamo dire che porsi e risolvere problemi significa impegnarsi in un compito per il quale la “soluzione” non è nota in precedenza (per chi si trova di fronte alla situazione problematica). Soluzione di un problema deve essere naturalmente intesa in



senso lato ovvero sia come una risposta al quesito sia come un percorso risolutivo che a tale risposta conduce. Porsi un problema vorrà dire comprendere la situazione descritta, esplorare le cause e la sorgente degli eventi interessati, assimilare i dati e le conoscenze ad essi associate, chiedersi quali siano le “conseguenze” della situazione, così come è descritta ed in caso di modifiche, sia aggiuntive sia solo interpretative, individuare gli elementi significativi.

Per risolvere un problema si dovrà dar fondo alle proprie risorse, cimentarsi in campo aperto, esplorando fra le conoscenze possedute alla ricerca di quelle utili allo scopo del momento, sviluppare nuove conoscenze, variare i modi di utilizzare e compenetrare le conoscenze, discernere fra dati significativi (alla strategia risolutiva) e dati ridondanti, individuare eventuali dati mancanti e necessari al lavoro, controllare il processo risolutivo in riferimento all’obiettivo da raggiungere ed alla validità del prodotto ottenibile.

Nell’ambito di “porsi e risolvere problemi” il concetto stesso di *errore* cessa di avere la valenza usualmente negativa, acquisendo la sostanza di strumento concettuale atto al miglioramento strategico e di calcolo, delle capacità risolutive dell’alunno.

“Porsi e risolvere problemi” implica imparare a produrre congetture inizialmente semplici e magari non funzionanti, poi semplici ed adatte allo

scopo ed infine congetture con sfaccettature sempre più elaborate e complesse, che conducono ad avvicinamenti graduali e successivi alla soluzione. Un tale percorso “teorico e di lavoro” permette di accettare o rifiutare le ipotesi (sia tattiche sia strategiche) che possono via via presentarsi, e permette di affinare le congetture prodotte, sempre in vista di un accostamento graduale al prodotto finale.

Se da un problema nascono, come deve essere, nuovi problemi strettamente collegati al problema iniziale, sarà necessario, da parte dell’insegnante, creare il contesto adatto perché il bambino non solo non si senta disorientato se posto di fronte ad un nuovo momento di crescita, ma riesca a cogliere in pieno l’arricchimento conoscitivo che risolvere il problema, , gli può inaspettatamente offrire.

Da un punto di vista meramente disciplinare è altresì importante il “serbatoio” di conoscenze e strategie che si riesce ad avere a disposizione al momento di iniziare l’approccio al problema. In tale serbatoio dovranno essere presenti capacità grafiche e figurative, scelta di simboli e di notazioni, uso di diagrammi e di grafici, ragionamenti di tipo feedback (ovvero di tipo interattivo e retroattivo), capacità di riformulare il problema, pratica di schemi usuali di lavoro, conoscenza di comuni procedure algoritmiche, azioni metacognitive.

“Porsi e risolvere problemi” implica una riflessione attenta sul percorso seguito, favorendo la possibilità di eventuali altre “soluzioni”. Questo potrà permettere di acquisire il primo stadio di una capacità “decisionale” che, al termine del percorso scolastico ed al momento dell’entrata nel mondo della vita di ogni giorno, renderà consapevole – lo studente di ieri ed il cittadino d’oggi – che essere di fronte a più soluzioni, qualora ve ne siano, non è un impaccio, non deve creargli dubbi, ma anzi gli consente di scegliere la soluzione meno costosa, la più rapida, la più consona all’ambiente.

## **1.8 L’INTERPRETAZIONE DI GEORGE POLYA SULLA SOLUZIONE DEI PROBLEMI**

Nel campo del problem solving, il contributo di G. Polya è stato notevole. L’opera del matematico ungherese “*How to solve it*”(1945), (in italiano: come si risolvono i problemi), si può considerare seminale per tutte le ricerche successive in questo ambito.

In un altro suo libro<sup>10</sup> del 1963, Polya scrive:

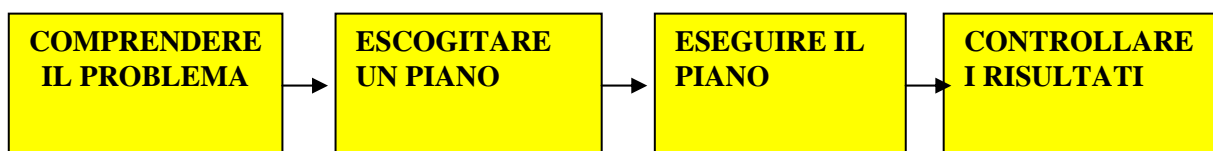
*<<In primo luogo voglio essere preciso su qual sia il primo e principale obiettivo dell’insegnamento della matematica, soprattutto nella scuola secondaria: insegnar a pensare. Ciò significa che l’insegnante non deve solo fornire informazioni, ma anche fare in modo che gli allievi sviluppino l’abilità di utilizzare le informazioni ricevute, insistendo sul saper fare, su*

---

<sup>10</sup> G. POLYA, On learning, teaching, and learning teaching, in: NCYM, Teaching and learning: A problem-solving focus, NCTM 1963.

*atteggiamenti favorevoli, su abiti mentali desiderabili. Ma devo precisare due punti: a) Il pensiero di cui parlo non è un sognare a occhi aperti, ma un “pensare diretto ad uno scopo” o un “pensare volontario”, un “pensiero produttivo”[e qui Polya cita M. Wertheimer]. Questo pensiero in prima approssimazione può essere identificato con la soluzione di problemi. Comunque l’abilità nel risolvere problemi la considero la principale delle finalità scolastiche. b) Il pensiero matematico non è puramente “formale”, non è preoccupato solo di assiomi, definizioni, prove rigorose; molte altre cose gli appartengono: generalizzare a partire da casi osservati; argomenti induttivi, argomenti per analogie, riconoscere un concetto matematico in una situazione concreta o saperlo estrarre da essa. L’insegnante ha molte opportunità per abituare i suoi alunni a questi processi informali di gran valore: insegniamo a provare con ogni mezzo, ma anche a congetturare.(...) Il saper fare in matematica è l’abilità a risolvere problemi, a trovare prove, a criticare argomenti a favore, a usare il linguaggio matematico con una certa fluidità, a riconoscere concetti matematici in situazioni concrete>>>.*

Fu Polya [1957], sulla scorta della propria esperienza di insegnante di matematica, ad indicare quattro stadi del processo di soluzione dei problemi:



Ciascuno di questi stadi ha un’importanza particolare.

Nel **primo stadio** si comprende il problema, cercando di rispondere alle seguenti domande:

- ❖ *Qual è l'incognita?*
- ❖ *Quali sono i dati?*
- ❖ *Qual è la condizione?*
- ❖ *E' possibile soddisfare la condizione?*

L'alunno pertanto, dopo aver letto più volte il testo del problema, ne individua, da vari punti di vista, le parti principali.

Ed inoltre, se vi è una figura connessa con il problema, egli cercherà di disegnarla, segnando opportunamente sopra di essa l'incognita ed i dati.

Nel **secondo stadio** si compila il piano di risoluzione.

Il cammino che dalla comprensione del problema conduce alla concezione di un piano, può essere lungo e tortuoso.

Secondo l'autore *<<il successo dipende da molti fattori; sono indispensabili non poche cognizioni già acquisite, un particolare abito mentale, la facoltà di sapersi concentrare sul problema ed infine un " pizzico di fortuna" >>.*

La compilazione di un piano è l'impresa più ardua nella risoluzione di un problema; pertanto essa può procedere per gradi.

Inizialmente si determinano i legami che intercorrono fra i dati e l'incognita, ed in seguito si compila un piano di risoluzione (indicando

solo per linee generali) quali calcoli, oppure quali costruzioni si devono eseguire per ottenere l'incognita.

Nel **terzo stadio** si procede allo sviluppo del piano.

Lo sviluppo del piano è invece un'impresa più semplice che richiede soprattutto pazienza e precisione. Il piano fornisce un abbozzo generale; i dettagli rientrano necessariamente in tale traccia e quindi vanno esaminati ad uno ad uno, pazientemente, finché ciascuno dettaglio non risulti perfettamente chiaro.

Nel **quarto stadio** si esamina attentamente il risultato ottenuto procedendo alla sua verifica ed alla sua discussione.

Spesso tale fase viene saltata, persino dagli studenti migliori, i quali una volta ottenuta la soluzione del problema e copiato in bella il loro problema, chiudono il quaderno passando ad altro.

In tale modo, essi trascurano una fase del lavoro tanto importante quanto istruttiva.

Infatti, conseguito il risultato finale, proprio attraverso la considerazione di questo e l'esame del procedimento con cui esso è stato ottenuto, l'alunno potrebbe approfondire le proprie conoscenze e sviluppare la propria abilità a risolvere problemi.

## **1.9 L'IMPORTANZA DEGLI ASPETTI LINGUISTICI**

La Didattica della Matematica ci indirizza oltre gli argomenti specifici della disciplina per rivolgersi alle strutture generali coinvolte nei processi di apprendimento/scoperta del pensiero matematico, il quale, nonostante l'insegnamento impartito nelle scuole, si sviluppa e nasce dal pensare.

In questa ottica si collocano le ricerche sui registri semiotici.

Questi studi di semiotica ripropongono in ambito matematico una domanda fondamentale sul funzionamento del pensiero: il ruolo cioè del segno, del simbolo nella concettualizzazione. La matematica costituisce un passaggio obbligato per tentare una risposta, dal momento che gli oggetti matematici sono per loro natura astratti, non riconducibili ad alcuna esemplificazione concreta.

Secondo R. Duval, uno dei primi didatti ad occuparsi di semiotica matematica, non c'è pensiero senza attività semiotica. Egli parte dal presupposto che l'attività mentale in matematica è un'attività cosciente, e quindi non può essere sviluppata ricorrendo alla ripetizione esasperata di esercizi, procedimenti, algoritmi.

Duval propone piuttosto il linguaggio, intendendolo più in generale come attività semiotica, quale strumento con cui controllare il pensiero.

In altre parole anche nella matematica, potenziando il linguaggio, sviluppiamo parallelamente la padronanza delle nostre attività mentali.

Un sistema simbolico però, per essere un registro rappresentativo che interviene nella concettualizzazione, deve avere determinate caratteristiche.

Caratteristica fondamentale del registro semiotico è la capacità di adempiere a tre funzioni meta-linguistiche:

- la comunicazione;
- la chiarificazione (oggettivazione, per se stessi);
- il trattamento (elaborazione delle rappresentazioni all'interno dello stesso registro).

Questi tre elementi rendono possibile un'evoluzione del registro semiotico utilizzato.

Secondo Duval lo sviluppo procede per progressiva differenziazione tra le funzioni meta-linguistiche di cui è capace un certo registro.

L'autore riporta l'esempio calzante dell'evoluzione della lingua naturale nel passaggio dall'argomentazione alla deduzione, che richiede appunto una differenziazione tra funzione comunicativa e trattamento; non che l'una sia più importante dell'altra, ma semplicemente la consapevolezza delle potenzialità espressive del registro richiede la differenziazione.



Altre importantissime potenzialità dell'attività semiotica in matematica consistono:

- nella pluralità dei registri rappresentativi;
- nella coordinazione tra questi registri.

La pluralità dei registri rappresentativi è vista non in termini di autosufficienza, ma di complementarità. In particolare è evidenziato il ruolo del binomio simbolo scritto-figura visiva:

*<<Il funzionamento cognitivo è nello stesso tempo linguaggio E immagine e non semplicemente linguaggio O immagine>> (Duval).*

Nella complementarità trova significato il coordinamento tra registri diversi, che permette allo studente di distinguere tra gli oggetti matematici e le loro rappresentazioni e lo rende in grado di utilizzare un oggetto matematico in situazioni differenti, effettuando una scelta consapevole del registro rappresentativo.

La rappresentazione semiotica gioca un ruolo talmente importante nell'attività matematica che un suo cattivo funzionamento è in grado di alterare profondamente l'immagine che l'allievo ha della matematica e di se stesso in quanto solutore di problemi matematici. Il fallimento non è solo cognitivo, quindi, ma anche e soprattutto emotivo:

*<<. . . questa incapacità conduce anche, di fronte a semplici questioni o problemi, alla sensazione di impotenza rispetto al vedere, al produrre,*

*anche la minima idea qualsiasi, anche solo per cominciare a provare>>*

(Duval).

Viceversa, lo sviluppo della coordinazione rivela un vero e proprio effetto a catena, che cattura l'iniziativa e l'interesse creativo dello studente ( un pò come i bambini quando vogliono imparare parole nuove, che chiedono insistentemente ‘ . . . e questo come si chiama?’).

Nello stesso tempo si pone all'insegnante la necessità di conoscere la consegna cognitiva insita nella consegna matematica e di esserne responsabile, facendola dunque oggetto del progetto educativo.

La consegna cognitiva (Duval) si articola essenzialmente in:

- differenziazione funzionale dei registri di rappresentazione;
- capacità di coordinazione tra registri.

Già semplici problemi matematici implicano, per arrivare alla soluzione, attività di conversione semiotica che non sono affatto scontate.

Un esercizio esplicito di conversione tra registri può aiutare nell'attività di coordinazione, solo se inserito in una situazione di cui lo studente riesce a cogliere l'utilità. Per approfondire questo punto focale è necessario allora chiedersi da dove provengano questi registri rappresentativi, così efficaci nello strutturare la conoscenza matematica.

Secondo J. Bruner:

***“è la cultura che ci fornisce gli strumenti per organizzare e capire il***

*nostro mondo in forme comunicabili [. . . ]. Senza questi strumenti, simbolici o materiali che siano, l'uomo non è una scimmia nuda, ma solo una vuota astrazione."*

Il fatto che i registri rappresentativi abbiano anche una funzione comunicativa fa sì che essi non possano nascere nel chiuso della mente o dell'esperienza di un individuo isolato, ma al contrario, siano il risultato delle interazioni tra individui, di campi di esperienze condivise.

L'elemento chiave dell'apprendimento è dunque la condivisione o, come dice Bruner, la negoziazione delle esperienze, dei problemi, delle intenzioni, delle soluzioni di ciascuno.

In questa ottica quindi l'insegnante è chiamato ad ideare occasioni e percorsi di coinvolgimento e responsabilizzazione dello studente nell'apprendimento della matematica anche attraverso le potenzialità della comunicazione.

## ***CAPITOLO SECONDO***

### **IL LAVORO SPERIMENTALE E LA RICERCA IN DIDATTICA**

#### **2.1 QUADRO DI RIFERIMENTO TEORICO**

La psicologia e, con essa, tutte le scienze dell'educazione studiano il fenomeno insegnamento/apprendimento intervenendo ognuna con il proprio modello di ricerca, quindi con un proprio paradigma.

Le scienze dell'educazione interpretano i “fenomeni didattici” secondo il loro punto di vista, ma nessuna di esse affronta *il punto di vista della disciplina*.

Tradizionalmente il punto di vista della disciplina è relegato allo studio di metodi di insegnamento/apprendimento, come ad esempio le didattiche disciplinari: “Didattica dell'italiano”, “Didattica delle matematiche ecc.”<sup>11</sup>

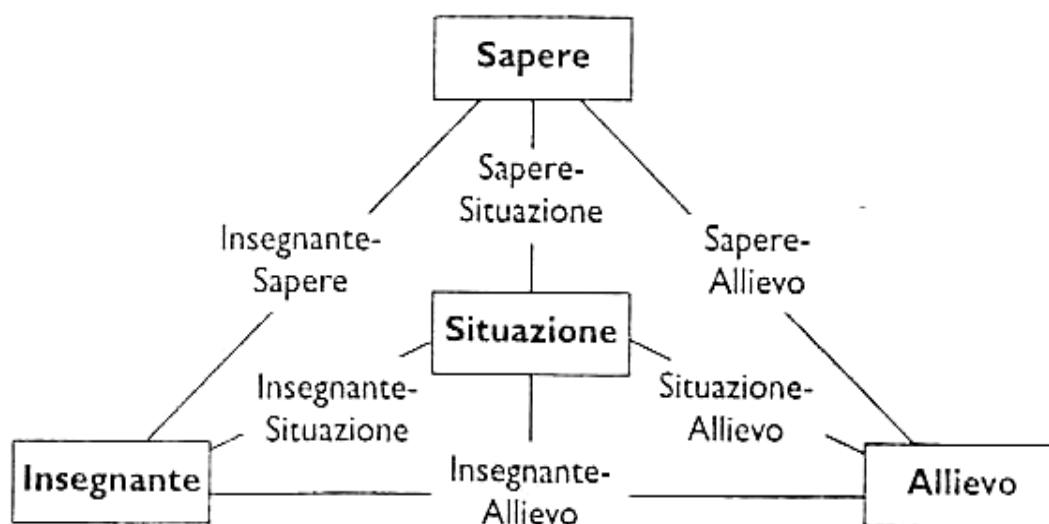
La ricerca in didattica pone l'attenzione sugli elementi costitutivi dei fenomeni di insegnamento/apprendimento cioè i possibili soggetti e le relative relazioni in una situazione didattica: il sapere, l'insegnante, l'allievo. Il paradigma della Ricerca in Didattica adottato in questa

---

<sup>11</sup> F. Spagnolo, **La ricerca in didattica**, Collana Saperi e Curricoli, Applicazione della ricerca in Didattica ai Laboratori Didattici Sperimentali; Atti del seminario di studi tenuto ad Isola delle Femmine dal 15 al 19 dicembre 1997. p. 18.

sperimentazione porta la firma del prof. G. Brousseau dell'università di Bordeaux: la teoria delle situazioni<sup>12</sup>.

Lo schema sottostante chiarisce il paradigma della ricerca in didattica:



Questo schema riassume le relazioni all'interno di un preciso ambiente e attraverso una situazione didattica ben organizzata. La relazione Insegnante-Sapere riguarda l'epistemologia dell'insegnante; la relazione Insegnante-Allievo riguarda l'insieme dei comportamenti di natura psicologica sia se si analizza la relazione Insegnante-Allievo che Allievo-Insegnante.

---

<sup>12</sup> F. Spagnolo, **Insegnare le matematiche nella scuola secondaria**. La Nuova Italia Editrice, Firenze, 1998 pag. 95.

La Situazione è l'insieme delle circostanze nelle quali si trova una persona (un gruppo, una collettività, ecc.), le relazioni che la uniscono all'ambiente e l'insieme dei dati che caratterizzano un'azione o un'evoluzione (azione in un certo momento).

Una situazione è didattica quando un individuo (in genere l'insegnante) ha l'intenzione di insegnare ad un altro individuo (in genere l'allievo) un determinato sapere.

Una situazione è di apprendimento quando permette ad un soggetto di passare da uno stato di conoscenza ad un altro di conoscenza.

Una situazione è a-didattica quando l'intenzione dell'insegnante non è esplicitata nei confronti dell'allievo. L'allievo sa che il problema propostogli è stato scelto per fargli acquisire nuova conoscenza e, nello stesso tempo, deve sapere che questa conoscenza è giustificata dalla logica interna della situazione. Nella situazione a-didattica riveste particolare importanza la "devoluzione", il processo attraverso il quale l'insegnante fa accettare all'allievo la responsabilità di una situazione di apprendimento.

L'apprendimento non è considerato come mera trasmissione di conoscenza da parte dell'insegnante all'alunno ma, come momento significativo, nel quale l'allievo ha la possibilità di rispondere all'ambiente circostante, in maniera completamente personale e soggettiva.

In tal senso, i compiti del docente all'interno della teoria possono essere individuati nei seguenti punti, egli deve:

- Individuare una buona situazione da proporre agli alunni;
- Controllare le dinamiche relazionali;
- Favorire una buona devoluzione del problema senza “comunicare” una conoscenza.

Ciò significa che il ruolo che assolve il docente, come mediatore di conoscenze, è determinante: egli, sulla base di una scrupolosa conoscenza degli allievi, deve ricontestualizzare e ripersonalizzare le conoscenze, frutto dell'adattamento ad una situazione specifica in riferimento ad un certo ambiente; il docente deve quindi fornire agli alunni gli strumenti e i mezzi necessari alla reale comprensione del sapere comunicato.

## ***CAPITOLO TERZO***

### **PRIMA FASE SPERIMENTALE**

#### **3.1 PREMESSA**

L'idea di una ricerca sperimentale in ambito matematico è nata dall'esperienza di tirocinio, durante la quale ho sviluppato un'unità di apprendimento sul tema "Porsi e risolvere problemi" .

Dopo avere presentato l'ipotesi della mia ricerca, mi soffermerò a descrivere la fase sperimentale.

Prima di iniziare l'indagine sperimentale ho eseguito l'analisi a priori dei comportamenti attesi dei bambini, ossia delle eventuali risposte (corrette ed errate), che gli alunni avrebbero ipoteticamente dato ad ogni quesito.

#### **3.2 OBIETTIVO DELLA SPERIMENTAZIONE E IPOTESI OPERATIVA**

Il fine del presente lavoro è quello di indagare sulle concezioni spontanee che i bambini di 2° elementare hanno rispetto all'idea di "PROBLEMA".



La formulazione di un'ipotesi di ricerca è una supposizione iniziale ammessa provvisoriamente come punto di partenza di una dimostrazione, di un ragionamento, volta a spiegare gli eventi di cui non si ha una perfetta conoscenza.

La caratteristica fondamentale di un'ipotesi è la sua falsificabilità, attraverso tentativi sistematici, nel tentare di confutarla.

Quindi la ricerca sperimentale parte da un'ipotesi generale.

Partendo dal presupposto che, la soluzione del problema, non essendo un semplice calcolo risolvibile con un esercizio, implica la compromissione dell'intelligenza, della comprensione e del ragionamento, il fine della mia ricerca sperimentale è stato quello di verificare se i bambini di 2° elementare ( 7 anni ):

- *hanno sviluppato le capacità di intuizione;*
- *mettono in atto processi deduttivi, per arrivare alla risoluzione di un problema;*
- *hanno potenzialità di capacità critica nella risoluzione di un problema.*

### **3.3 CAMPIONE DI RICERCA**

La sperimentazione è stata svolta nell'anno scolastico 2003/2004 nel periodo Maggio/Giugno ed è stata rivolta a 3 moduli (sei classi ) di seconda elementare.

Nell'indagine sono stati coinvolti 115 bambini di 7 anni provenienti da livelli socio – culturali diversi.

La scuola in cui è stata effettuata l'indagine sperimentale è il Circolo Didattico Statale di Belmonte Mezzagno.

### **3.4 LA METODOLOGIA**

La ricerca che ho condotto si è svolta in due fasi.

Nella prima fase ho eseguito un'intervista semi-strutturata a pochi bambini con domande aperte al fine di raccogliere informazioni utili alla sperimentazione e far emergere le concezioni spontanee dei bambini in merito al concetto di “problema”.

Ho formulato le seguenti domande ai bambini:

- *Che cosa è un problema?*
- *Come può essere un problema?*

Ecco qui di seguito le risposte con le esatte parole pronunciate dai bambini intervistati:

- *Un problema è quando si deve risolvere qualche cosa;*
- *Un problema è un testo con una domanda e dei dati;*
- *Il testo di un problema si deve analizzare, cioè si deve leggere e riflettere perché il testo ci dà informazioni;*
- *Non tutti i problemi si possono risolvere;*
- *Una situazione si può risolvere o no; il problema numerico si può risolvere sempre;*
- *Alcuni problemi si possono risolvere, ad es. ho perso le chiavi della macchina, chiamo aiuto per avere un passaggio;*
- *Un problema può essere con tanti numeri e tante parole;*
- *Un problema può essere con i numeri perché in matematica si studiano i numeri;*
- *Un problema può avere dati utili, inutili e anche dei dati che non ci sono;*
- *Un problema può essere una situazione con operazioni addizione, sottrazione, moltiplicazione e anche divisione (anche se non l'abbiamo studiato), dato mancante, dato inutile.*

Dalle precedenti risposte si evince che alcuni bambini hanno piuttosto chiaro il concetto di problema, inteso come situazione problematica, riuscendo a distinguerlo da un mero problema aritmetico.

Nella seconda fase ho somministrato a tutto il campione tre problemi A, B e C:

- Problema A: i bambini dovevano individuare una situazione problematica non risolvibile per mancanza di dati;
- Problema B: dato il testo di un problema con diversi quesiti finali, i bambini dovevano scegliere tra le domande poste quella a cui, utilizzando i dati del problema, effettivamente si poteva rispondere e motivare la loro scelta;
- Problema C: dato un problema con un testo più lungo rispetto ai precedenti e contenente dei dati inutili, i bambini, dopo averlo letto attentamente, dovevano individuare anche in questo caso (vedi problema B) la domanda pertinente e motivare la loro scelta.

### 3.5 I TESTI DEI PROBLEMI

#### **PROBLEMA A**

Guglielmo ha raccolto delle schede telefoniche.

Marco ne ha tredici meno di Guglielmo.

Puoi calcolare quante schede telefoniche ha collezionato Marco?

Motiva la risposta.

#### **PROBLEMA B**

Su uno scaffale ci sono 15 quaderni di matematica, 20 quaderni di italiano e 12 di storia.

Scegli la domanda giusta.

- 1** QUANTE MENSOLE HA LO SCAFFALE?
- 2** QUANTI SONO I QUADERNI DI SCIENZE?
- 3** QUANTI SONO I QUADERNI IN TUTTO?

Motiva la risposta

### **PROBLEMA C**

Leggi attentamente il testo del problema e indica con una crocetta la domanda più adatta e rispondi:

"All'uscita della scuola piove a dirotto. Molti bambini hanno l'ombrello: 15 ombrelli sono rossi, 12 gialli e 27 a spicchi colorati. Alcuni bambini hanno gli stivaletti di gomma e sguazzano in una pozzanghera, 4 bambini si riparano sotto la tettoia perché non hanno l'ombrello."

1 QUANTI SONO GLI OMBRELLI ROSSI?

2 QUANTI BAMBINI HANNO L'OMBRELLO?

3 QUANTI BAMBINI NON HANNO L'OMBRELLO?

Perché hai scelto questa domanda?

### **3.6 ANALISI A PRIORI DELLE STRATEGIE RISOLUTIVE**

L'analisi a priori mi ha permesso di determinare le possibili strategie risolutive in riferimento alle situazioni problema e mi ha dato la possibilità di tabulare i dati emersi dalla somministrazione dei problemi.

Lo strumento dell'analisi a priori inoltre consente di poter focalizzare l'attenzione del ricercatore su una serie di aspetti interessanti, il primo dei quali può essere considerato lo "spazio degli eventi", ovvero l'insieme delle possibili risposte che si possono ipotizzare in uno specifico contesto.

Sulla base dello spazio degli eventi è possibile inoltre individuare sia il "buon problema", cioè quello che permette la migliore formulazione in termini ergonomici della conoscenza, sia le variabili didattiche che permettono di favorire un cambiamento nel comportamento degli allievi (Spagnolo, 1998, 268).

Di seguito sono riportate le analisi a priori svolte in relazione ai tre problemi; con le diciture A1, A2... B1, B2... C1, C2... si intendono le possibili strategie risolutive (corrette e non) rispettivamente del problema A, B e C.

### **ANALISI A PRIORI DELLE STRATEGIE DEL PROBLEMA A**

A1- I BAMBINI NON DANNO NESSUNA MOTIVAZIONE MA RISPONDONO CORRETTAMENTE

A2- I BAMBINI RISPONDONO CORRETTAMENTE MA DANNO UNA GIUSTIFICAZIONE SBAGLIATA

A3- PER ALTRI QUEL TREDICI IN MENO DI GUGLIELMO SI TRASFORMA NEL FATTO CHE MARCO HA TREDICI SCHEDE

A4- PER ALTRI IL PROBLEMA SI PUO' RISOLVERE PERCHE' GUGLIELMO NE HA DI PIU'.

A5- ALTRI SBAGLIANO SIA LA RISPOSTA CHE LA MOTIVAZIONE

A6- INDIVIDUANO LA SITUAZIONE PROBLEMATICAMENTE NON RISOLVIBILE PER MANCANZA DI DATI

A7- I BAMBINI RISPONDONO "SI PUO' FARE"

A8- I BAMBINI NON RISOLVONO IL PROBLEMA

### **ANALISI A PRIORI DELLE STRATEGIE DEL PROBLEMA B**

B1- I BAMBINI NON DANNO NESSUNA MOTIVAZIONE VALIDA MA SEGNANO LA DOMANDA GIUSTA

B2- I BAMBINI NON RISOLVONO IL PROBLEMA

B3- I BAMBINI RISPONDONO CHE NON VI SONO QUADERNI DI SCIENZE.

B4- I BAMBINI AGGIUNGONO AL TESTO DEL PROBLEMA I QUADERNI DI SCIENZE

B5- I BAMBINI SEGNANO LA DOMANDA CORRETTA MOTIVANDOLA

B6- I BAMBINI RISPONDONO CHE LE PRIME DUE DOMANDE NON SONO CORRETTE.



B7- I BAMBINI NON SOLO DANNO LA RISPOSTA CORRETTA  
MOTIVANDOLA, MA SOMMANO I QUADERNI

B8- I BAMBINI SBAGLIANO SIA LA DOMANDA CHE LA  
MOTIVAZIONE

### **ANALISI A PRIORI DELLE STRATEGIE DEL PROBLEMA C**

C1- I BAMBINI NON RISOLVONO IL PROBLEMA

C2- I BAMBINI NON DANNO NESSUNA MOTIVAZIONE VALIDA  
MA SEGNANO LA DOMANDA GIUSTA.

C3- I BAMBINI SEGNANO LA DOMANDA CORRETTA  
MOTIVANDOLA

C4- I BAMBINI NON SOLO DANNO LA RISPOSTA CORRETTA  
MOTIVANDOLA MA SOMMANO GLI OMBRELLI.

C5- BAMBINI SBAGLIANO SEGNANDO LA TERZA DOMANDA

C6- I BAMBINI SBAGLIANO SEGNANO LA PRIMA DOMANDA

C7- I BAMBINI SEGNANO LA DOMANDA GIUSTA PROCEDENDO  
PER ESCLUSIONE.

C8- I BAMBINI SBAGLIANO SIA LA MOTIVAZIONE CHE LA  
DOMANDA

### **3.7 ANALISI DEI DATI SPERIMENTALI**

Una volta eseguita l'analisi a priori mi sono occupata di sottoporre ai bambini in questione i tre problemi, raccogliendo ed analizzando in seguito tutte le informazioni relative alle loro risposte.

Per l'analisi descrittiva dei dati ho utilizzato il metodo della tabulazione tramite il foglio di lavoro Microsoft Excel costruendo tre tabelle<sup>13</sup>, una per ogni problema.

Tali tabelle riportano le risposte date da tutti i bambini delle sei sezioni.

La legenda delle tabelle:

- le lettere E , F, A, B, C, D indicano le sezioni delle classi;
- il numero indica il singolo bambino;
- il numero 1 indica la presenza della strategia utilizzata;
- il numero 0 indica l'assenza della strategia;
- A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 sono le strategie del problema A;
- B1, B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8 sono le strategie del problema B;
- C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8 sono le strategie del problema C.

Di seguito sono riportate le analisi quantitative svolte in relazione ai tre problemi e i corrispondenti grafici ricavati dai dati tabulati in Appendice 1.

---

<sup>13</sup> Vedi Appendice 1

## **ANALISI QUANTITATIVA DEL PROBLEMA A**

**A1- I BAMBINI NON DANNO NESSUNA MOTIVAZIONE MA RISPONDONO CORRETTAMENTE**

Il 6% dei bambini ha risposto che il problema non si poteva risolvere, senza, però, giustificare la risposta.

Quindi ha capito che mancava un dato, ma non ha saputo esprimerlo.

**A2- I BAMBINI RISPONDONO CORRETTAMENTE MA DANNO UNA GIUSTIFICAZIONE SBAGLIATA**

L'11% ha capito che il problema non è risolvibile, ma danno una giustificazione priva di senso.

**A3- PER ALTRI QUEL TREDICI IN MENO DI GUGLIELMO SI TRASFORMA NEL FATTO CHE MARCO HA TREDICI SCHEDE**

Il 3% degli alunni sbaglia perché associa a Marco le tredici schede sottratte a Guglielmo.

**A4- PER ALTRI IL PROBLEMA SI PUO' RISOLVERE PERCHE' GUGLIELMO NE HA DI PIU'.**

Il 5% Dà una giustificazione alla risposta sbagliata.

**A5- ALTRI SBAGLIANO SIA LA RISPOSTA CHE LA MOTIVAZIONE**

Il 4% non comprende appieno il problema e perciò sbaglia sia la risposta come la motivazione.

**A6- INDIVIDUANO LA SITUAZIONE PROBLEMATICAMENTE NON RISOLVIBILE PER MANCANZA DI DATI**

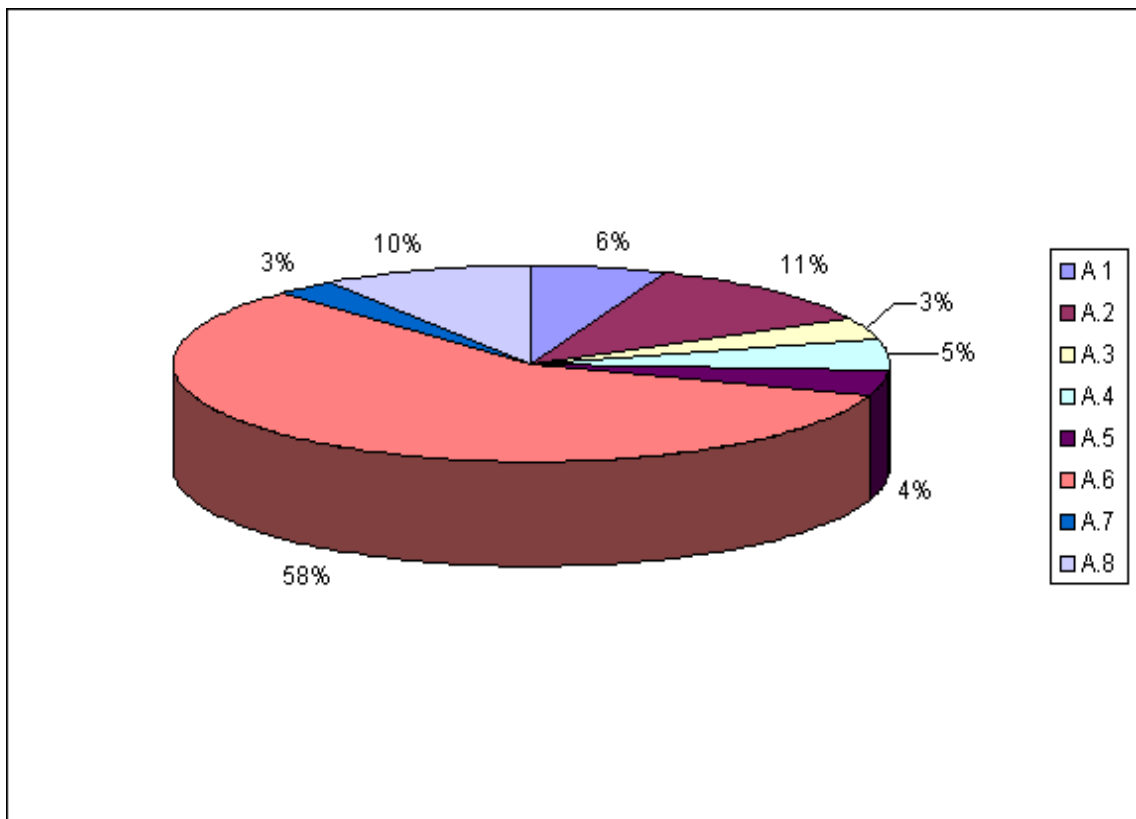
Il 58% avendo compreso il problema individua la situazione problematica dovuta alla mancanza di un dato.

**A7- I BAMBINI RISPONDONO "SI PUO' FARE"**

Il 3% si limita a scrivere che il problema può essere risolto.

**A8- I BAMBINI NON RISOLVONO IL PROBLEMA**

Il 10% non risolve il problema per incapacità di scrivere senza un aiuto esterno o mancata comprensione del testo.



### **ANALISI QUANTITATIVA DEL PROBLEMA B**

**B1- I BAMBINI NON DANNO NESSUNA MOTIVAZIONE VALIDA MA SEGNANO LA DOMANDA GIUSTA**

Il 15% degli alunni nonostante segni la domanda giusta, dalla motivazione data non si riesce a capire se realmente ha compreso il problema.

**B2- I BAMBINI NON RISOLVONO IL PROBLEMA**

Il 3% dei bambini non risolve il problema per incapacità di scrivere senza un aiuto esterno o mancata comprensione del testo.

**B3- I BAMBINI RISPONDONO CHE NON VI SONO QUADERNI DI SCIENZE.**

Nessuno dei bambini risponde in questo modo

**B4- I BAMBINI AGGIUNGONO AL TESTO DEL PROBLEMA I QUADERNI DI SCIENZE**

Nessuno risponde in questo modo

**B5- I BAMBINI SEGNANO LA DOMANDA CORRETTA MOTIVANDOLA**

Il 56% degli alunni comprende appieno il problema dando anche una motivazione pertinente.

**B6- I BAMBINI RISPONDONO CHE LE PRIME DUE DOMANDE NON SONO CORRETTE.**

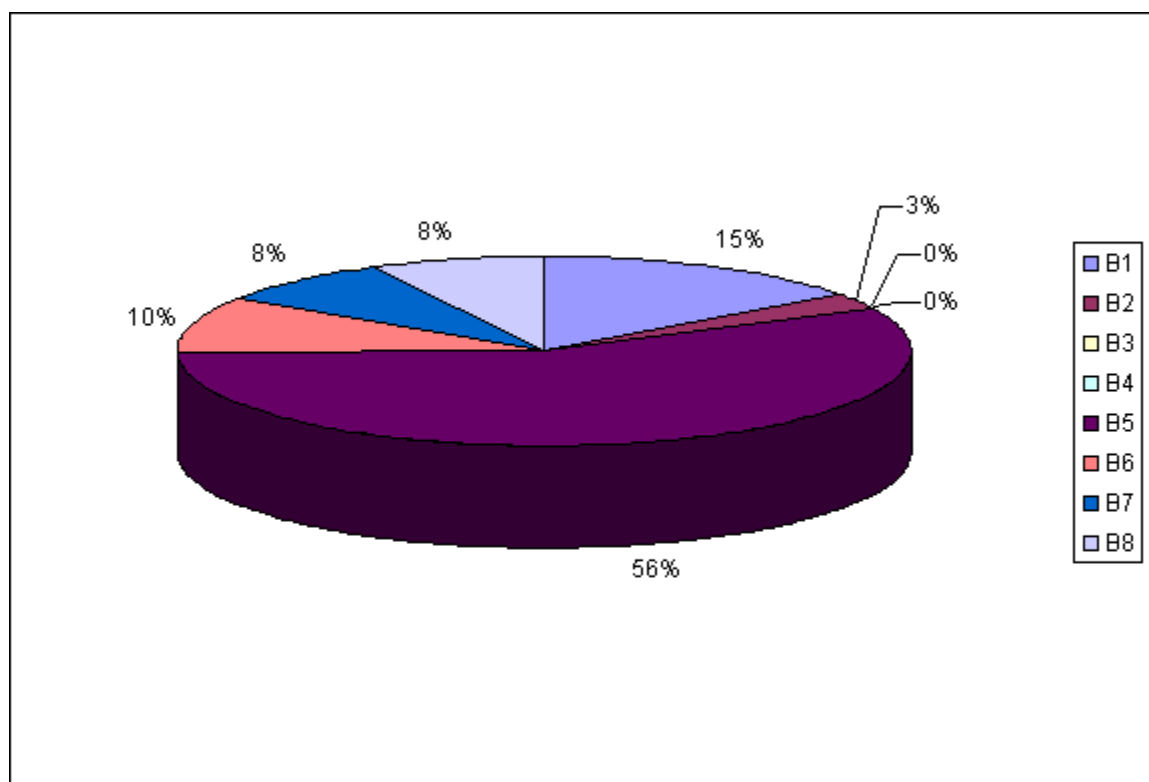
Il 10% dei bambini attua un processo di esclusione per arrivare alla domanda corretta.

**B7- I BAMBINI NON SOLO DANNO LA RISPOSTA CORRETTA MOTIVANDOLA, MA SOMMANO I QUADERNI**

L' 8% i bambini risolve il problema facendo una somma dei quaderni.

**B8- I BAMBINI SBAGLIANO SIA LA DOMANDA CHE LA MOTIVAZIONE**

L'8% degli alunni sbaglia completamente il problema.



## **ANALISI QUANTITATIVA DEL PROBLEMA C**

### **C1- I BAMBINI NON RISOLVONO IL PROBLEMA**

Il 3% dei bambini non porta a compimento lo svolgimento del problema sia perché non riesce a copiarlo che per mancata comprensione.

### **C2- I BAMBINI NON DANNO NESSUNA MOTIVAZIONE VALIDA MA SEGNANO LA DOMANDA GIUSTA.**

Il 17% dei bambini nonostante segni la domanda giusta non riesce a motivarla correttamente.

### **C3- I BAMBINI SEGNANO LA DOMANDA CORRETTA MOTIVANDOLA**

Il 40% dei bambini comprende il problema e lo motiva correttamente.

### **C4- I BAMBINI NON SOLO DANNO LA RISPOSTA CORRETTA MOTIVANDOLA MA SOMMANO GLI OMBRELLI.**

Anche se qualche bambino nella motivazione sostiene che occorre fare un'operazione nessuno fa il calcolo.

### **C5- BAMBINI SBAGLIANO SEGNANDO LA TERZA DOMANDA**

Il 25% dei bambini non comprende il testo e focalizza l'attenzione su un dato che è già dato e cioè il numero dei bambini che non hanno l'ombrello.

### **C6- I BAMBINI SBAGLIANO SEGNANO LA PRIMA DOMANDA**

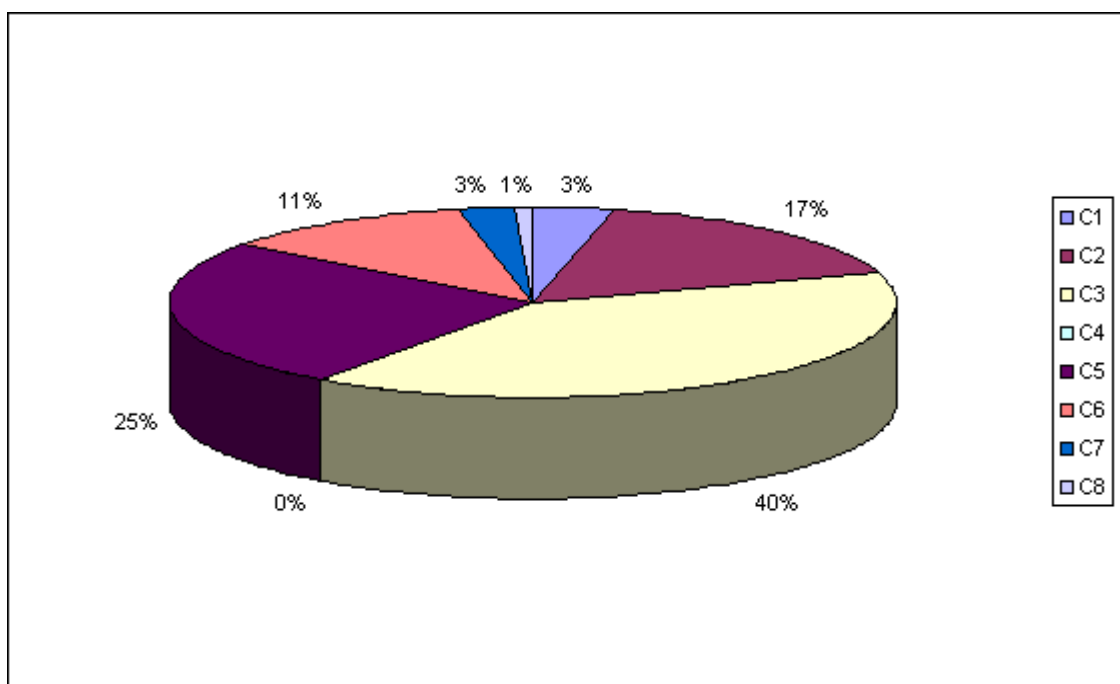
Anche l'11% dei bambini sbaglia poiché si basa su un dato che è già contenuto nel testo e cioè il numero di ombrelli rossi.

### **C7- I BAMBINI SEGNANO LA DOMANDA GIUSTA PROCEDENDO PER ESCLUSIONE.**

Il 3% dei bambini risponde correttamente solo avendo escluso le altre due assolutamente sbagliate.

### **C8- I BAMBINI SBAGLIANO SIA LA MOTIVAZIONE CHE LA DOMANDA**

L'1% dei bambini per mancata comprensione sbaglia sia la motivazione che la domanda.



### 3.8 RIFLESSIONI CONCLUSIVE

Dall'analisi dei dati sperimentali in riferimento alla situazione-problema A emerge che il 57% degli allievi ha utilizzato la strategia A6 riconoscendo che la situazione problematica non è risolvibile per mancanza di dati. Sulla base di questo risultato si evince dunque che la maggior parte degli allievi ha utilizzato uno schema di ragionamento di tipo deduttivo, mostrando buona capacità di intuizione e critica nella risoluzione del problema .

Per quanto concerne le altre strategie non ci sono percentuali particolarmente rilevanti; infatti l'11% degli allievi capisce che il problema non è risolvibile ma dà una motivazione errata, mentre il 6% non

dà alcuna motivazione. Soltanto il 10% degli allievi non risolve il problema per incapacità di scrittura o per mancata comprensione del testo.

Rispetto alla situazione-problema B, anche in questo caso più della metà degli allievi, cioè il 56% di loro, segna la domanda corretta dando una motivazione pertinente; un 8% esegue persino il calcolo aritmetico. Il 15% risponde correttamente ma non fornisce una motivazione valida. Il 10% individua la domanda corretta attuando un processo di esclusione tra le soluzioni proposte. In questo caso solo l'8% degli allievi sbaglia completamente il problema, mentre il 3% non lo risolve per incapacità di copiare il testo.

Nel caso della situazione-problema C meno della metà degli studenti con una percentuale del 40% trova la soluzione corretta. Tale risultato, peggiore rispetto ai problemi precedenti, era prevedibile a causa della maggiore difficoltà del caso C che presenta un testo prolisso e ricco di dati. Tale testo, infatti, risulta ostico e incomprensibile per il 37% dei bambini che danno una soluzione errata. Il 17% risponde correttamente ma non fornisce alcuna motivazione. Anche in questo caso, come in quello precedente il 3% degli allievi non fornisce alcuna risoluzione per incapacità di copiare il testo.

Dall'osservazione dei risultati non sono emerse grandi novità rispetto alle aspettative iniziali. Era chiaro sin dall'inizio che i bambini avrebbero avuto



maggiori incertezze nella risoluzione della situazione-problema C, a causa ovviamente della difficoltà del testo.

In conseguenza di ciò si è proceduto ad una seconda sperimentazione per verificare la possibilità di facilitare la comprensione del problema C, sottoponendolo agli studenti utilizzando registri linguistici differenti.

## ***CAPITOLO QUARTO***

### **SECONDA FASE SPERIMENTALE**

Riguardo la prima sperimentazione, in riferimento ai due problemi A e B, si è rilevato dalle risposte dei bambini che loro erano già stati abituati dall'insegnante ad affrontare situazioni problematiche di questo tipo, mentre il problema C risultava più difficoltoso in quanto richiedeva uno sforzo cognitivo maggiore.

La maggiore difficoltà era dovuta all'uso di un linguaggio più complesso che rendeva arduo rispondere in maniera immediata come nei precedenti problemi.

Quindi si è pensato di riformulare il problema C utilizzando diverse forme linguistiche.

<b>STORIA</b>	<b>LINGUAGGIO NATURALE</b>	<b>GRAFICO</b>
---------------	--------------------------------	----------------

I registri linguistici scelti per la sperimentazione sono dunque tre:

1. Il testo è stato riformulato come storia inventata e il problema è stato sottoposto agli allievi sotto forma di racconto drammatizzato.
2. Si è modificato il testo utilizzando una sintassi più semplice, frasi concise e brevi, ripetizione delle parole –chiave.
3. Si è utilizzata parte del testo originale coadiuvata da supporti grafici, cioè immagini rappresentanti i dati del problema.

#### **4.1 IPOTESI SPERIMENTALE**

Se formuliamo un problema utilizzando differenti registri linguistici, quali di questi sarà il più scelto dai bambini?

#### **4.2 CAMPIONE DI RICERCA**

Il campione di ricerca è lo stesso della precedente sperimentazione.

La sperimentazione è stata svolta nell'anno scolastico 2004/2005 nel periodo Ottobre/Novembre ed è stata rivolta ai 3 moduli (ormai di terza elementare) già coinvolti nella prima sperimentazione.

L'indagine ha interessato gli stessi 115 bambini, provenienti da livelli socio – culturali diversi, del Circolo Didattico Statale di Belmonte Mezzagno.

### 4.3 METODOLOGIA

La ricerca sperimentale si è svolta in due giorni differenti.

Una prima giornata ha previsto la drammatizzazione del racconto; successivamente è stato somministrato il problema in forma grafica e con linguaggio naturale.

Anche nella seconda sperimentazione si è fatto uso dell'analisi a priori dei comportamenti attesi e dell'analisi quantitativa dei risultati ottenuti tramite foglio excel. Si è utilizzato inoltre il software statistico CHIC per studiare le implicazioni tra le strategie individuate.

I casi analizzati, con i corrispondenti registri linguistici, sono i seguenti:

<i><b>PROBLEMA</b></i>	<i><b>REGISTRO LINGUISTICO</b></i>
A	STORIA
B	LINGUAGGIO NATURALE
C	1° FORMA GRAFICA
D	2° FORMA GRAFICA

## **4.4 PROBLEMA A**

### **4.4.1 Drammatizzazione del problema**

Si è stabilito di utilizzare una forma linguistica come il racconto per rendere partecipi i bambini nella drammatizzazione del problema e cercare, in questo modo, di sviluppare in loro una certa elasticità mentale.

Grazie alla collaborazione delle insegnanti, che hanno attivamente partecipato alla drammatizzazione, i bambini si sono completamente immedesimati nella situazione, rimanendo stupiti nel rilevare i modi con i quali un problema può essere animato.

La drammatizzazione è stata svolta in due gruppi, ciascuno dei quali era formato da tre classi.

Per fare entrare maggiormente i bambini nella parte è stata ricreata l'ambientazione della storia e sono stati dati loro degli strumenti: ombrellini rossi, gialli e a spicchi colorati in numero uguale a quello previsto dal problema; strumenti per riprodurre il rumore della pioggia.

I bambini sono stati divisi in gruppi: 15 hanno avuto gli ombrellini rossi, 12 gialli e 27 a spicchi colorati e 4 bambini si sono riparati sotto una tettoia.

Alla fine della drammatizzazione è stato dato loro il testo della storia con i quesiti del problema.



Foto 1: un'insegnante recita la parte della maga



Foto 2: bambini con gli ombrellini gialli





Foto 3: bambini con gli ombrellini rossi e a spicchi colorati



Foto 4: bambini sotto la tettoia

#### 4.4.2 Il testo del racconto

### LA MAGA BESANA

Nel paese di Voltapagì vive Besana una maga molto strana che fa il bello e il cattivo tempo a secondo dell'umore. Quando Besana si sente buona spunta il sol leone, quando è cattiva vien giù l'acquazzone. In uno dei giorni belli i bambini organizzano una festa nella grande piazza del paese. Nel bel mezzo della festa si sente un grosso boato: è lo starnuto della strega che essendosi raffreddata è diventata cattiva, così scoppia un gran temporale e l'acqua vien giù a catinelle. Molti bambini, per fortuna, hanno l'ombrello e lo aprono: 15 ombrelli sono di colore rosso, 12 di colore giallo e 27 a spicchi colorati, alcuni bambini hanno gli stivaletti di gomma e sguazzano divertendosi in una pozzanghera, mentre 4 bambini impauriti si riparano sotto una tettoia perché non hanno l'ombrello.

La maga Besana, essendo birichina, si domanda:

Quanti sono gli ombrelli rossi?

Quanti bambini hanno l'ombrello?

Quanti bambini non hanno l'ombrello?

Vuoi aiutarla tu a scegliere la domanda giusta? Qual è?

Motiva la tua scelta \_\_\_\_\_



### **4.4.3 Analisi a priori**

L'analisi a priori è stata effettuata con le stesse modalità della prima sperimentazione. In questo caso con la dicitura A1, A2, A3 si intende la strategia risolutiva; con la dicitura AM1, AM2, AM3, AM4 si intende invece la motivazione addotta.

A1- I BAMBINI SCELGONO LA DOMANDA: QUANTI SONO GLI OMBRELLI ROSSI?

A2- I BAMBINI SCELGONO LA DOMANDA: QUANTI BAMBINI HANNO L'OMBRELLO?

A3- I BAMBINI SCELGONO LA DOMANDA: QUANTI BAMBINI NON HANNO L'OMBRELLO?

AM1- I BAMBINI RISPONDONO CHE SI DEVE SAPERE QUANTI BAMBINI HANNO L'OMBRELLO PERCHE' NELLA FAVOLA NON C'E' SCRITTO

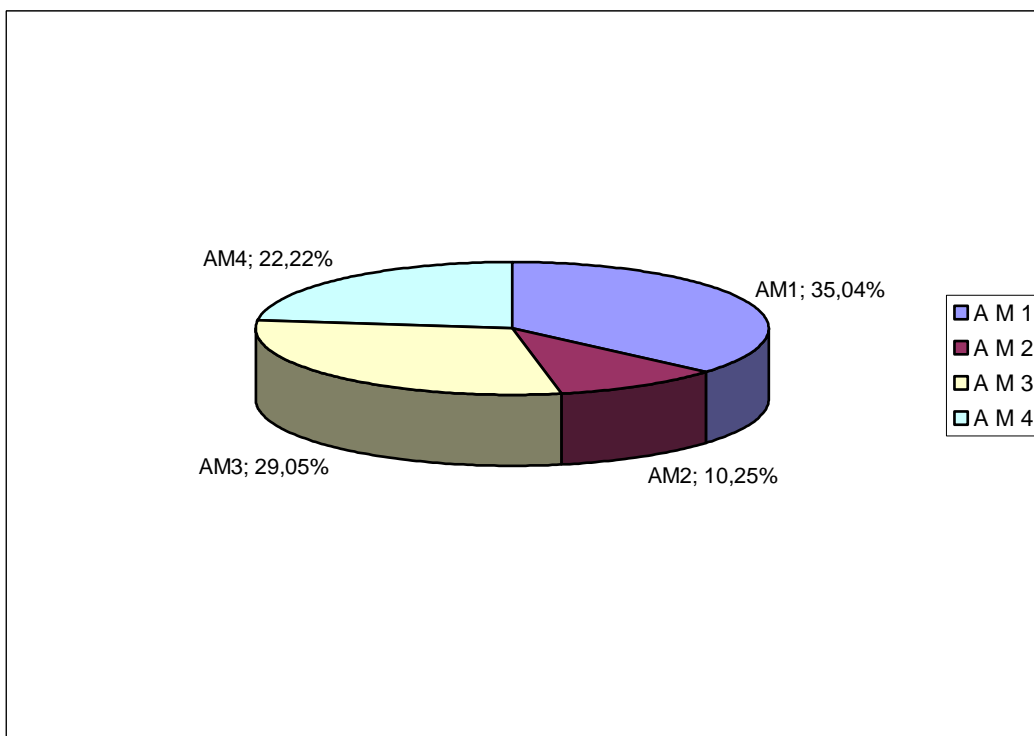
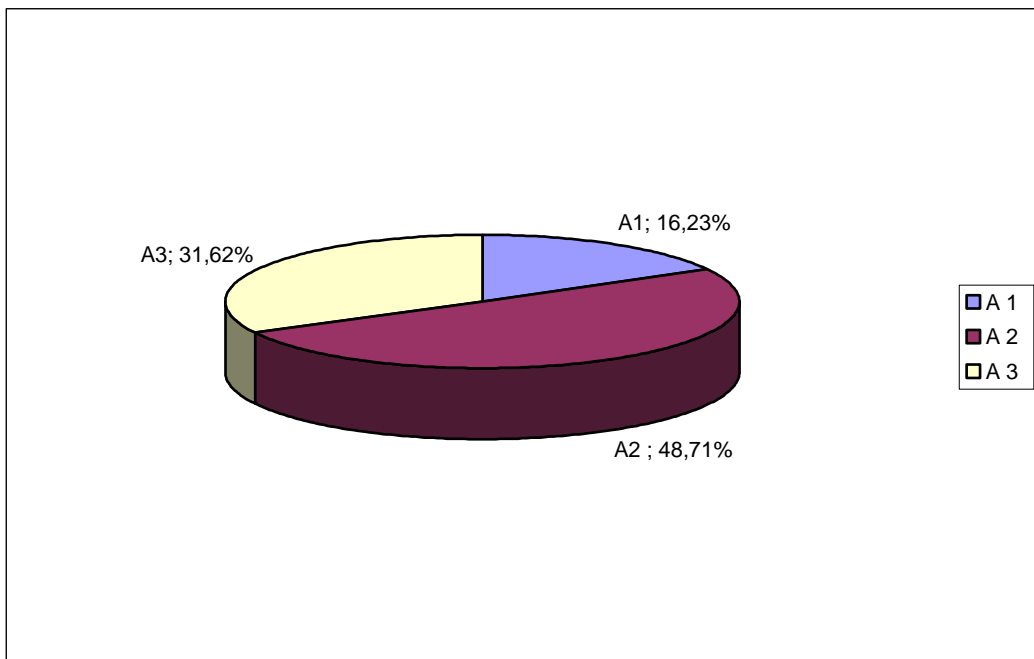
AM2- I BAMBINI NON HANNO L'OMBRELLO E SI RIPARANO SOTTO LA TETTOIA

AM3- I BAMBINI DANNO UNA MOTIVAZIONE FORNENDO UN DATO QUANTITATIVO

AM4- I BAMBINI NON DANNO UNA MOTIVAZIONE MA SEGNANO LA DOMANDA

#### 4.4.4 Analisi quantitativa

Di seguito sono riportati i grafici a torta relativi alle percentuali di bambini che hanno scelto le diverse risposte ai quesiti posti e le relative motivazioni.



#### **4.4.5 Considerazioni sui risultati ottenuti**

Dai grafici riportati si è potuto notare come la scelta della strategia per quasi il 48% dei bambini è ricaduta su A2. Il 32% degli allievi ha scelto A3, e il 16% A1. Per quanto riguarda invece la motivazione addotta non c'è una percentuale particolarmente rilevante rispetto alle altre, il 35% sostiene AM1, il 29% AM3, il 22% AM4 e il 10% AM2.

Riflettendo sui risultati ottenuti si devono sottolineare in particolare due aspetti relativi alle capacità dei bambini: la padronanza del registro linguistico e la padronanza della negazione.

L'acquisizione della padronanza del registro linguistico si evince dalla scelta congiunta da parte del bambino della strategia A2 e delle motivazioni AM1 o AM3.

Per quanto concerne invece la padronanza della negazione, essa è evidente nei bambini che hanno scelto la strategia A3 congiuntamente alla motivazione AM2 o AM3.

In sintesi raggruppando le variabili abbiamo:

**A 2 + A M 1+ A M 3 = SI RILEVA CHE I BAMBINI HANNO  
ACQUISITO LA PADRONANZA DEL  
REGISTRO LINGUISTICO**

**A3 + AM2 + AM3 = IL REGISTRO LINGUISTICO METTE IN  
EVIDENZA LA PADRONANZA DELLA  
NEGAZIONE**

## 4.5 PROBLEMA B

### 4.5.1 Testo del problema espresso in linguaggio naturale

All'uscita della scuola piove a dirotto.

Molti bambini hanno l'ombrello.

15 bambini hanno l'ombrello rosso.

12 bambini hanno l'ombrello giallo.

27 bambini hanno l'ombrello a spicchi colorati.

Alcuni bambini hanno gli stivaletti di gomma e sguazzano in una pozzanghera.

4 bambini si riparano sotto la tettoia perché non hanno l'ombrello.

Qual è secondo te la domanda più adatta al problema?

- 1) Quanti sono gli ombrelli rossi?
- 2) Quanti bambini hanno l'ombrello?
- 3) Quanti bambini non hanno l'ombrello?

Perché hai scelto questa domanda? \_\_\_\_\_

#### **4.5.2 Analisi a priori**

B1- I BAMBINI SCELGONO LA DOMANDA: QUANTI SONO GLI OMBRELLI ROSSI?

B2- I BAMBINI SCELGONO LA DOMANDA: QUANTI BAMBINI HANNO L'OMBRELLO?

B3- I BAMBINI SCELGONO LA DOMANDA: QUANTI BAMBINI NON HANNO L'OMBRELLO?

BM1- I BAMBINI RISPONDONO CHE SI DEVE SAPERE QUANTI BAMBINI HANNO L'OMBRELLO

BM2- I BAMBINI RISPONDONO CHE ALCUNI BAMBINI SI RIPARANO SOTTO LA TETTOIA PERCHE' NON HANNO L'OMBRELLO

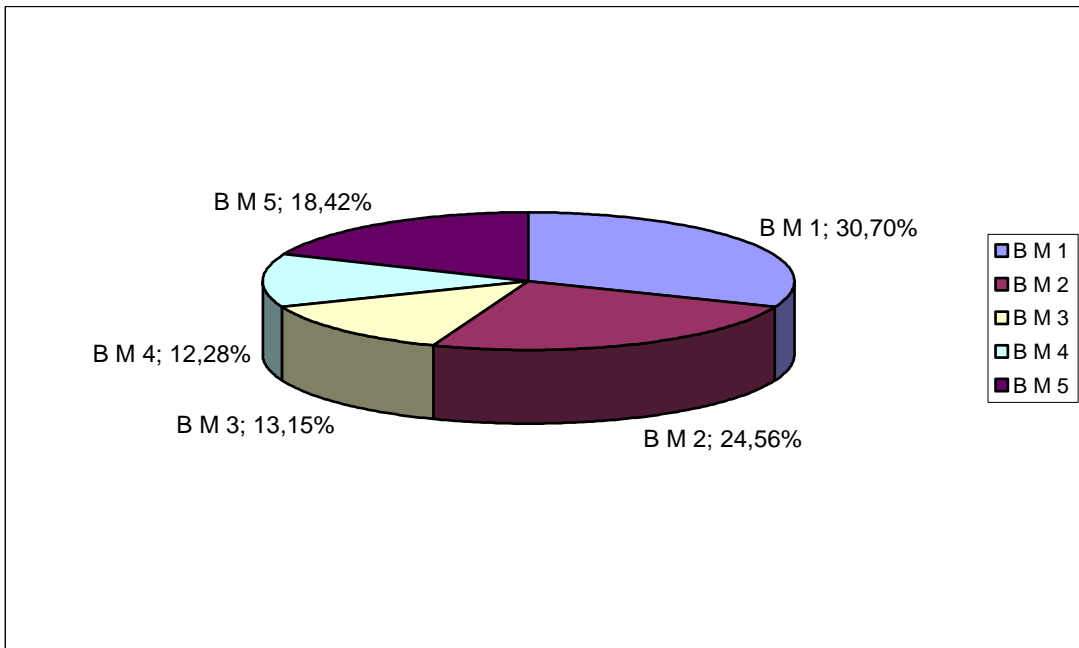
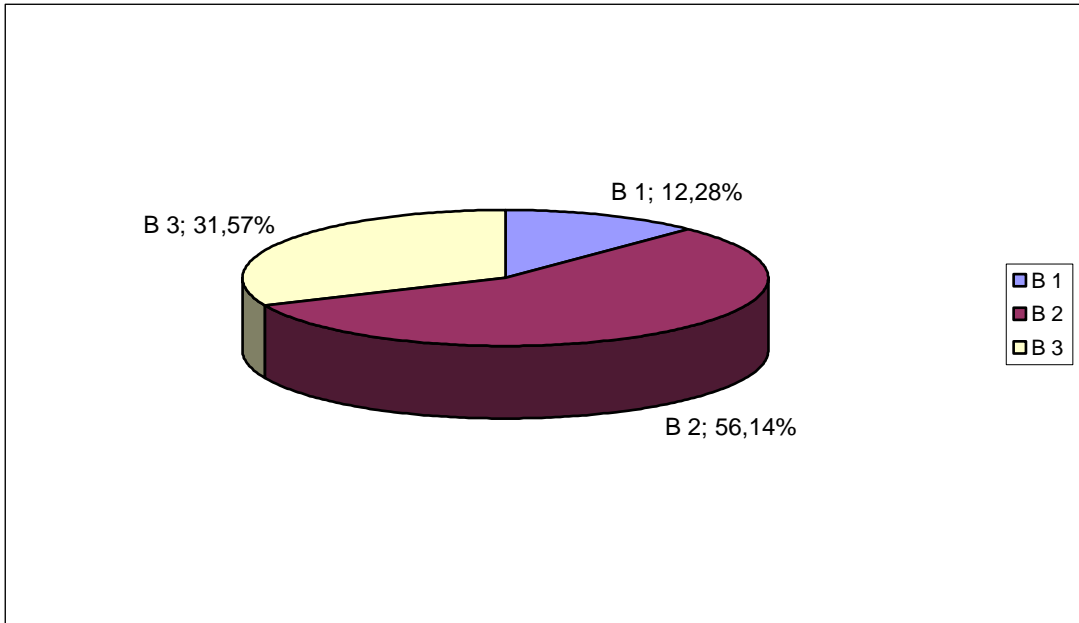
BM3- I BAMBINI RISPONDONO ALLA DOMANDA MA NON DANNO NESSUNA MOTIVAZIONE VALIDA

BM4- I BAMBINI DANNO UNA MOTIVAZIONE FORNENDO UN DATO QUANTATIVO

BM5- I BAMBINI RISPONDONO CHE LA DOMANDA SCELTA ERA LA PIU' ADATTA AL TESTO

#### **4.5.3 Analisi quantitativa**

Di seguito sono riportati i grafici a torta relativi alle percentuali di bambini che hanno scelto le diverse risposte ai quesiti posti e le relative motivazioni.



#### 4.5.4 Considerazioni sui risultati ottenuti

Dai grafici riportati si è potuto notare come la scelta della strategia per quasi il 57% dei bambini è ricaduta su B2. Il 32% degli allievi ha scelto B3,

e il 12% B1. Anche in questo caso per quanto riguarda invece la motivazione addotta non c'è una percentuale particolarmente rilevante rispetto alle altre, il 31% sostiene BM1, il 25% BM2, il 18% BM5, il 13% BM3 e il 12% BM4.

L'acquisizione della padronanza del registro linguistico si evince dalla scelta congiunta da parte del bambino della strategia B2 e delle motivazioni BM1 o BM4.

Per quanto concerne invece la padronanza della negazione, essa è evidente nei bambini che hanno scelto la strategia B3 congiuntamente alla motivazione BM2 o BM4.

In sintesi raggruppando le variabili abbiamo:

**B2 + BM1 + BM4 = SI RILEVA CHE I BAMBINI HANNO  
ACQUISITO LA PADRONANZA DEL  
REGISTRO LINGUISTICO**

**B3 + BM2 + BM4 = IL REGISTRO LINGUISTICO METTE IN  
EVIDENZA LA PADRONANZA DELLA  
NEGAZIONE**

## 4.6 PROBLEMA C

### 4.6.1 Prima forma grafica

Leggi attentamente il testo del problema e indica la domanda più adatta. All'uscita della scuola piove a dirotto. Molti bambini hanno l'ombrello:



15



12



27

Alcuni bambini sguazzano in una pozzanghera e hanno gli stivaletti di gomma



4 bambini si riparano sotto la tettoia perché non hanno l'ombrello.

- 1) Quanti bambini hanno l'ombrello?
- 2) Quanti bambini hanno l'ombrello rosso?
- 3) Quanti bambini non hanno l'ombrello?

La domanda adatta al problema è la numero.....

Perché \_\_\_\_\_



#### **4.6.2 Analisi a priori**

C1- I BAMBINI RISPONDONO: "QUANTI BAMBINI HANNO L'OMBRELLO?"

C2- I BAMBINI RISPONDONO:"QUANTI BAMBINI HANNO L'OMBRELLO ROSSO?"

C3- I BAMBINI RISPONDONO:" QUANTI BAMBINI NON HANNO L'OMBRELLO?"

CM1- I BAMBINI RISPONDONO CHE LA DOMANDA SCELTA è QUELLA PIU' ADATTA AL TESTO

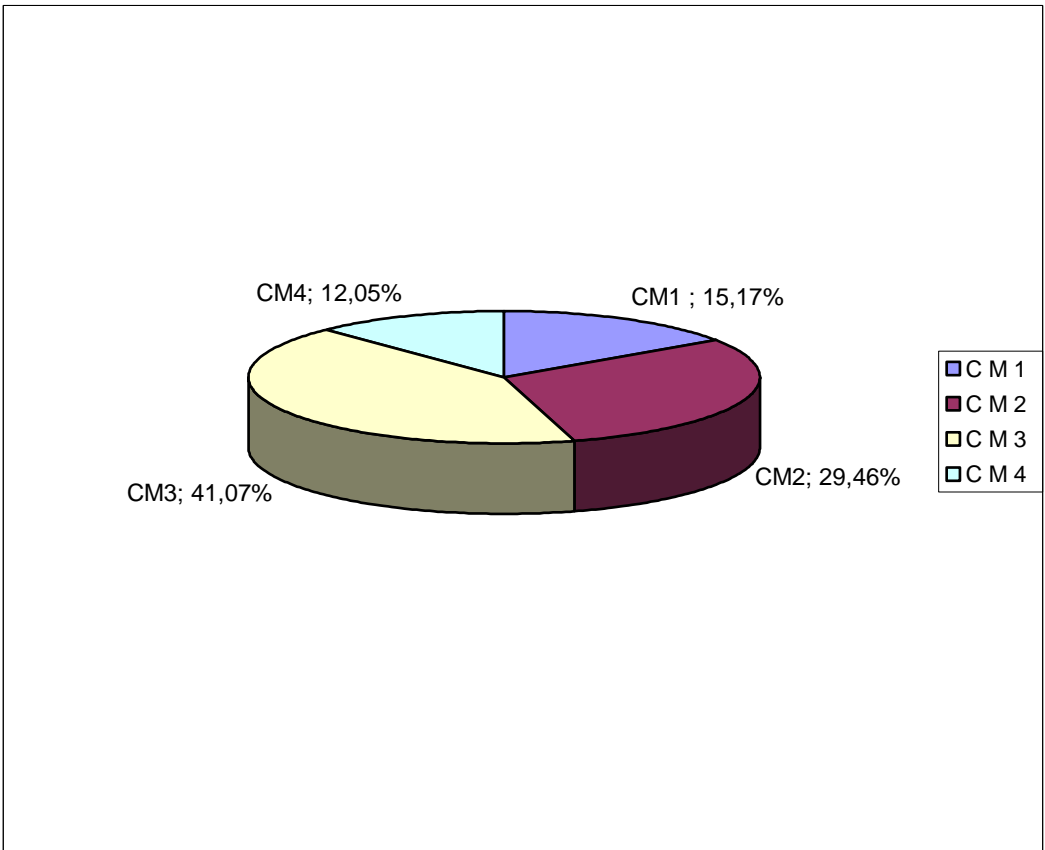
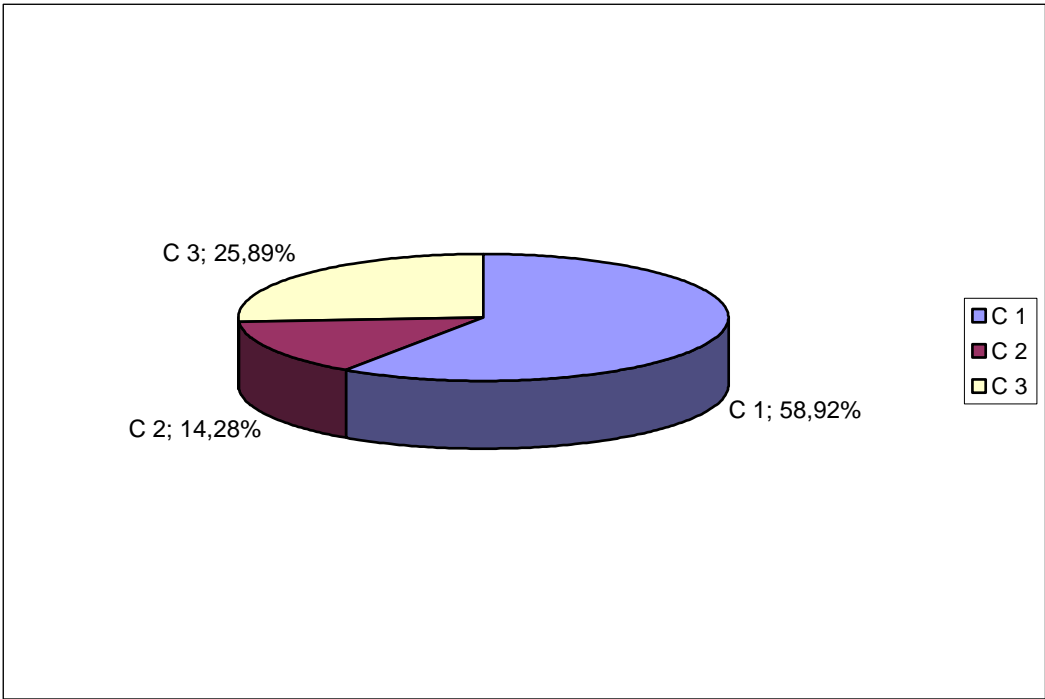
CM2- I BAMBINI RIPETONO I DATI QUANTITATIVI FORNITI DAL TESTO

CM3- I BAMBINI RISPONDONO CHE DALLE FIGURE NON SI CONOSCE IL TOTALE DEI BAMBINI CHE HANNO L'OMBRELLO

CM4- I BAMBINI FORNISCONO UNA MOTIVAZIONE NON VALIDA

#### **4.6.3 Analisi quantitativa**

Di seguito sono riportati i grafici a torta relativi alle percentuali di bambini che hanno scelto le diverse risposte ai quesiti posti e le relative motivazioni.



#### **4.6.4 Considerazioni sui risultati ottenuti**

Dai grafici riportati si è potuto notare come la scelta della strategia per quasi il 59% dei bambini è ricaduta su C1. Il 26% degli allievi ha scelto C3, e il 14% C2.

In questo caso per quanto riguarda invece la motivazione adottata c'è una percentuale abbastanza rilevante rispetto alle altre, infatti il 41% sostiene CM3, mentre il 30% CM2, il 15% CM1, il 12% CM4.

Da tali dati si evince che i bambini hanno una rappresentazione iconica del problema.

L'acquisizione della padronanza del registro linguistico si evince dalla scelta congiunta da parte del bambino della strategia C1 e delle motivazioni CM1 o CM3.

Per quanto concerne invece la padronanza della negazione, essa è evidente nei bambini che hanno scelto la strategia C3 congiuntamente alla motivazione CM2.

In sintesi raggruppando le variabili abbiamo:

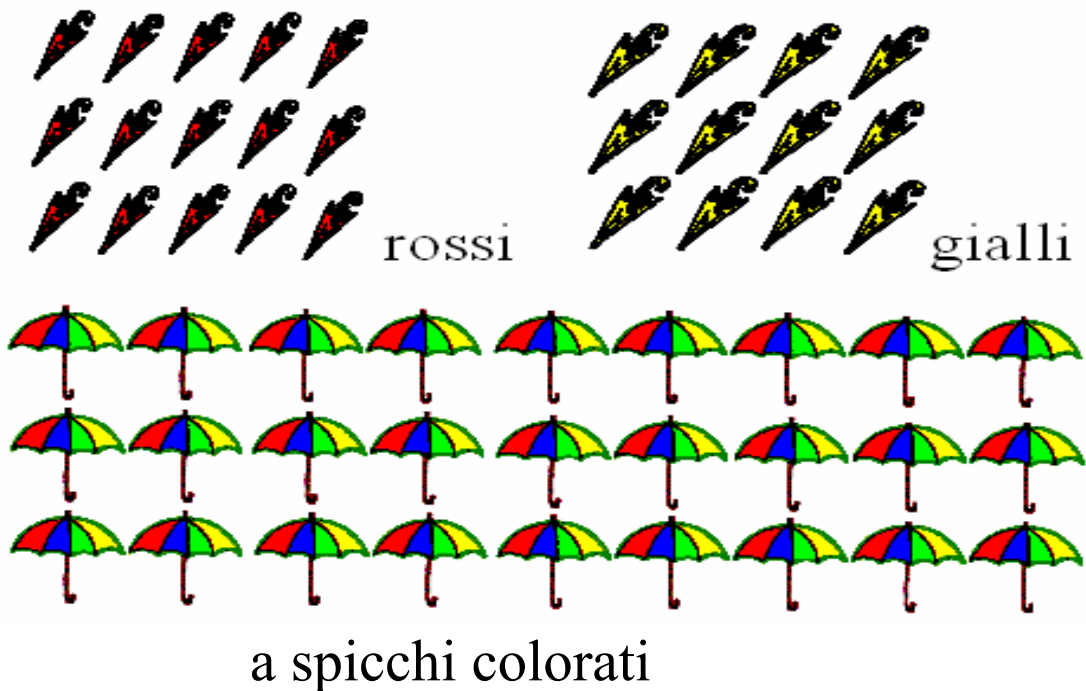
**C1 + CM1 + CM3 = PADRONANZA DEL  
REGISTRO LINGUISTICO**

**C3 + CM2 = IL REGISTRO LINGUISTICO METTE IN  
EVIDENZA LA PADRONANZA DELLA  
NEGAZIONE**

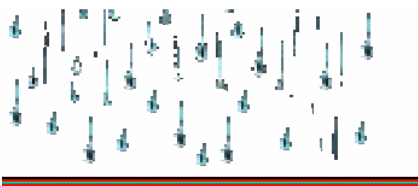
## 4.7 PROBLEMA D

### 4.7.1 Seconda forma grafica + tabella

Leggi attentamente il testo del problema e indica la domanda più adatta. All'uscita della scuola piove a dirotto. Molti bambini hanno l'ombrello:








Alcuni bambini sguazzano in una pozzanghera, e hanno gli stivaletti di gomma



4 bambini si riparano sotto la tettoia perché non hanno l'ombrello.



# COMPLETA LA TABELLA

Quanti bambini hanno l'ombrello giallo?

Quanti bambini hanno l'ombrello rosso?

Quanti bambini non hanno l'ombrello?

Quanti bambini hanno l'ombrello?

Perché hai scelto questa domanda?

Motiva la tua scelta

#### **4.7.2 Analisi a priori**

D1- I BAMBINI RISPONDONO: " QUANTI BAMBINI HANNO L'OMBRELLO GIALLO?"

D2- I BAMBINI RISPONDONO: " QUANTI BAMBINI HANNO L'OMBRELLO ROSSO?"

D3- I BAMBINI RISPONDONO: "QUANTI BAMBINI NON HANNO L'OMBRELLO?"

D4- I BAMBINI RISPONDONO:"QUANTI BAMBINI HANNO L'OMBRELLO?"

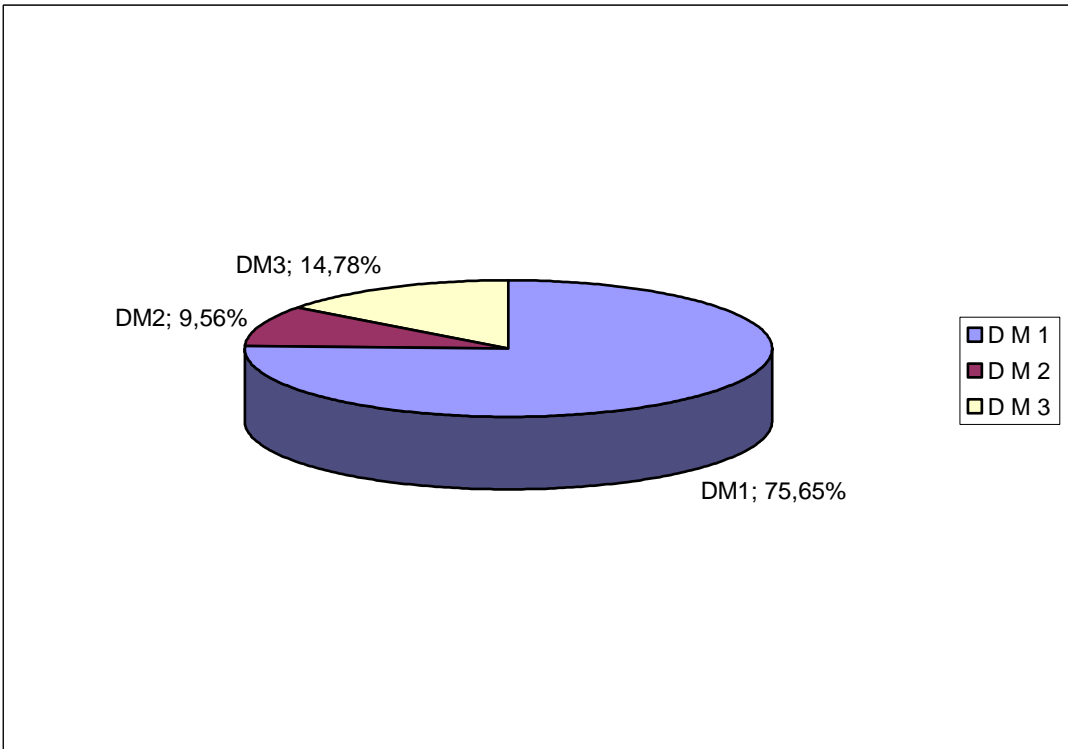
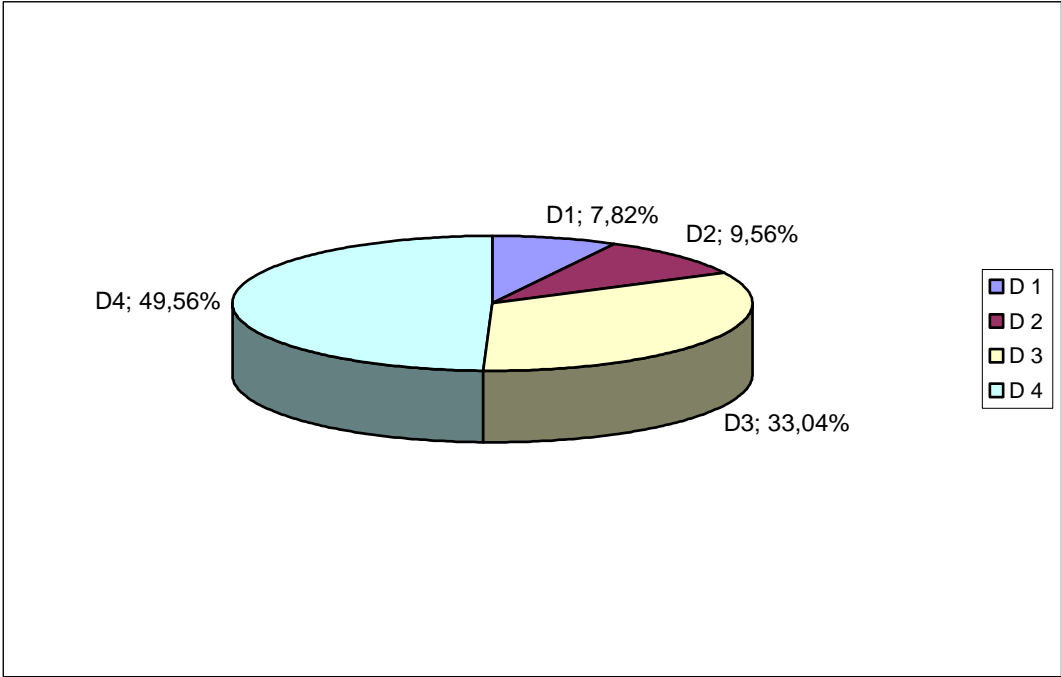
DM1- I BAMBINI RISPONDONO: "PERCHE' LI HO CONTATI".

DM2- I BAMBINI RISPONDONO CHE LA DOMANDA SCELTA è QUELLA PIU' ADATTA AL TESTO

DM3- I BAMBINI NON DANNO UNA MOTIVAZIONE VALIDA

#### **4.7.3 Analisi quantitativa**

Di seguito sono riportati i grafici a torta relativi alle percentuali di bambini che hanno scelto le diverse risposte ai quesiti posti e le relative motivazioni.



#### **4.7.4 Considerazioni sui risultati ottenuti**

Dai grafici riportati si è potuto notare come la scelta della strategia per quasi il 50% dei bambini è ricaduta su D4. Il 33% degli allievi ha scelto D3, e una minima percentuale ha scelto D1 e D2.

Per quanto riguarda invece la motivazione adottata c'è una percentuale molto rilevante rispetto alle altre, infatti il 75% sostiene DM1, i bambini sostengono quindi di aver contato gli oggetti.

I bambini non si sono creati soltanto una rappresentazione iconica del problema ma, dal momento che quasi tutti hanno completato la tabella scrivendo il numero degli ombrellini nella casella corrispondente, dimostrano di saper associare il simbolo al numero. Dato questo esito risulta quindi evidente come gli allievi abbiano già acquisito il concetto di "relazione".

L'acquisizione della padronanza del registro linguistico si evince dalla scelta congiunta da parte del bambino delle strategie D1, D2 O D4 e della motivazione DM1.

Per quanto concerne invece la padronanza della negazione logica, essa è evidente nei bambini che hanno scelto la strategia D3 congiuntamente alla motivazione DM1.



In sintesi raggruppando le variabili abbiamo:

D1 + DM1 = PADRONANZA DEL REGISTRO LINGUISTICO.

D2 + DM1 = PADRONANZA DEL REGISTRO LINGUISTICO

D4 + DM1 = PADRONANZA DEL REGISTRO LINGUISTICO

D3 + DM1 = REGISTRO LINGUISTICO METTE IN EVIDENZA LA  
PADRONANZA DELLA NEGAZIONE LOGICA.

## **4.8 ANALISI IMPLICATIVA DELLE VARIABILI**

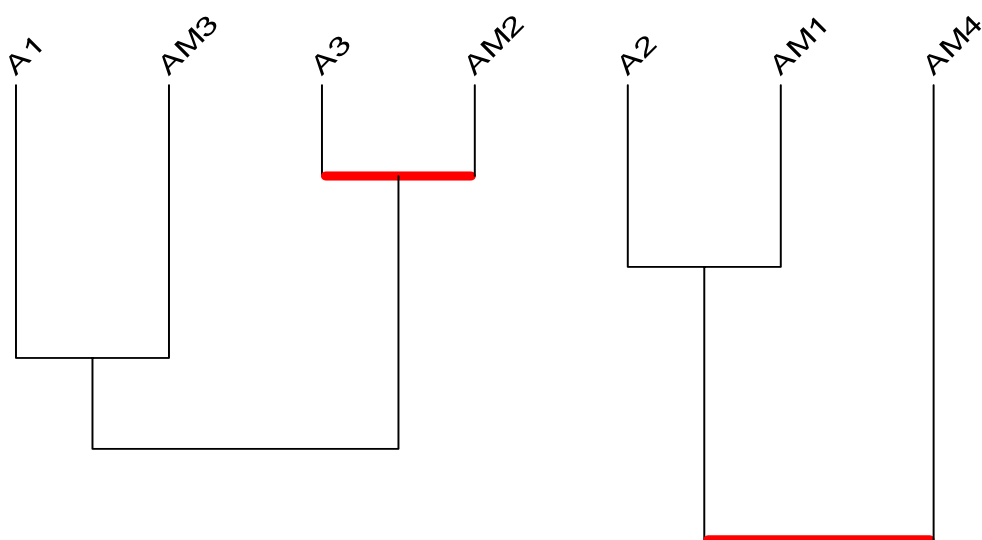
L'analisi implicativa è uno strumento che, con un lavoro di impostazione dei dati, consente una chiara visualizzazione, per mezzo di grafici, dei rapporti di implicazione e di similarità tra le variabili analizzate .

Lo strumento utilizzato per la costruzione del grafico delle similarità e del grafico implicativo delle variabili, a partire dalle strategie individuate attraverso l'analisi a priori, è il software di statistica CHIC (Classification hierarchique implicative et cohesive), messo a punto dal Prof. R. Gras e dai suoi collaboratori dell'università di Rennes che si occupano di ricerca in didattica.

In merito alla risoluzione dei problemi precedentemente proposti sono riportati di seguito soltanto i grafici delle similarità e implicativi dai quali è stato possibile ottenere informazioni significative.

▪ PROBLEMA A

Grafico delle similarità (relativo ai comportamenti degli alunni)



Albero delle similarità: D:\Tesi\_FormazPrim\benigno\Giovanna\benigno\_problema1\_1.csv

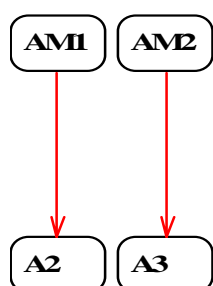
Dall'osservazione del grafico sopra riportato si delineano due raggruppamenti distinti:  $R1 = (A1, AM3, A3, AM2)$  ed  $R2 = (A2, AM1, AM4)$ . Nel primo gruppo si nota un'elevata similarità tra le strategie A3 e AM2 correlate in modo trascurabile con la coppia A1, AM3; nel secondo gruppo le strategie A2 e AM1 hanno una similarità molto alta, correlate in modo trascurabile con AM4.

- Del primo gruppo fanno parte coloro che hanno utilizzato le strategie A3 (cioè la domanda "Quanti bambini non hanno l'ombrello?") e

AM2 (“ I bambini non hanno l’ombrello e si riparano sotto la tettoia”) mettendo in evidenza, quindi, la padronanza della negazione logica;

- Al secondo gruppo appartengono gli alunni che nel caso del problema A utilizzano le strategie A2 ( scelgono la domanda “Quanti bambini hanno l’ombrello”?) e AM1 (scelgono la motivazione: “Si deve sapere quanti bambini hanno l’ombrello perché nella favola non c’è scritto”) rilevando, quindi, l’acquisizione della padronanza del registro linguistico.

### Grafico implicativo

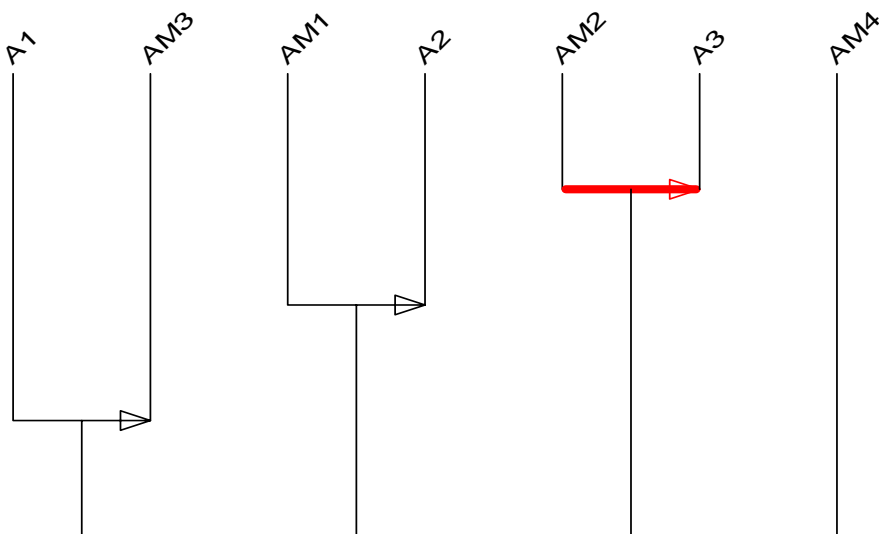


Grafo implicativo : D:\Te99F95n90\F85m\benigno\Giovanna\benigno problema1 1.csv

Dall'analisi del grafico implicativo emerge che le strategie AM1 E A2 hanno un'implicazione del 99% e questo significa che nel caso in cui l'allievo esplicita la motivazione AM1 allora ha precedentemente scelto la domanda A2.

Stessa implicazione abbiamo tra le variabili AM2 e A3, l'allievo pertanto, esplicitando la motivazione AM2, ha scelto la domanda A3.

**Albero Coesivo. Implicazioni tra gruppi di variabili**



Albero coesivo : D:\Tesi\_FormazPrim\benigno\Giovanna\benigno\_problema1\_1.csv

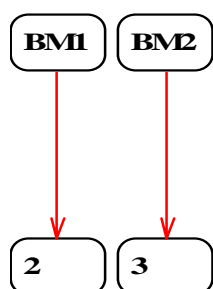
Dall'osservazione dell'albero coesivo si ha la conferma della forte implicazione sia tra le variabili AM2 e A3 che tra AM1 e A2.

Inoltre, come era già visibile dal grafico delle similarità, esiste un'implicazione, anche se meno significativa, tra A1 e AM3; i bambini, infatti, scegliendo la domanda A1 (“Quanti sono gli ombrelli rossi?”) nella motivazione forniscono un dato quantitativo.

- PROBLEMA B

In relazione a questo problema si è omesso di inserire il grafico delle similarità che non ha fornito informazioni significative.

**Grafico implicativo**



Grafo implicativo : D:\Te99F95n90.F85m\benigno\Giovanna\benigno problema2 1.csv

Dal grafico implicativo si evince che tra le variabili BMI e B2 c'è un'implicazione del 99%, quindi gli alunni che hanno scelto la variabile

BM1 (cioè coloro i quali affermano che in questo problema si deve sapere quanti bambini hanno l'ombrello), di conseguenza rispondono che la domanda adatta al testo è la numero 2 (cioè “ Quanti bambini hanno l'ombrello?”), dimostrando in tal modo di aver acquisito la padronanza del registro linguistico.

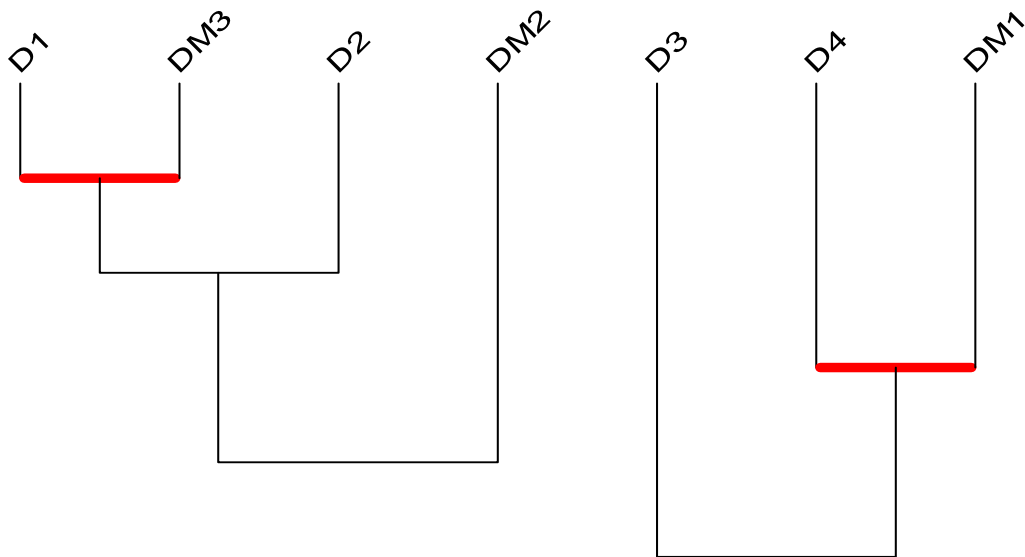
La stessa percentuale di implicazione esiste tra le variabili BM2 e B3; di conseguenza coloro i quali hanno scelto come motivazione (“Alcuni bambini si riparano sotto la tettoia perché non hanno l'ombrello”), hanno anche risposto che la domanda adatta al testo è la numero 3 (“Quanti bambini non hanno l'ombrello?”), evidenziando chiaramente la padronanza della negazione.

- PROBLEMA C

I grafici relativi al problema C non hanno dato risultati indicativi, pertanto non sono stati inseriti.

- PROBLEMA D

Grafico delle similarità



Albero delle similarità: D:\Tesi\_FormazPrim\benigno\Giovanna\benigno\_problema4.csv

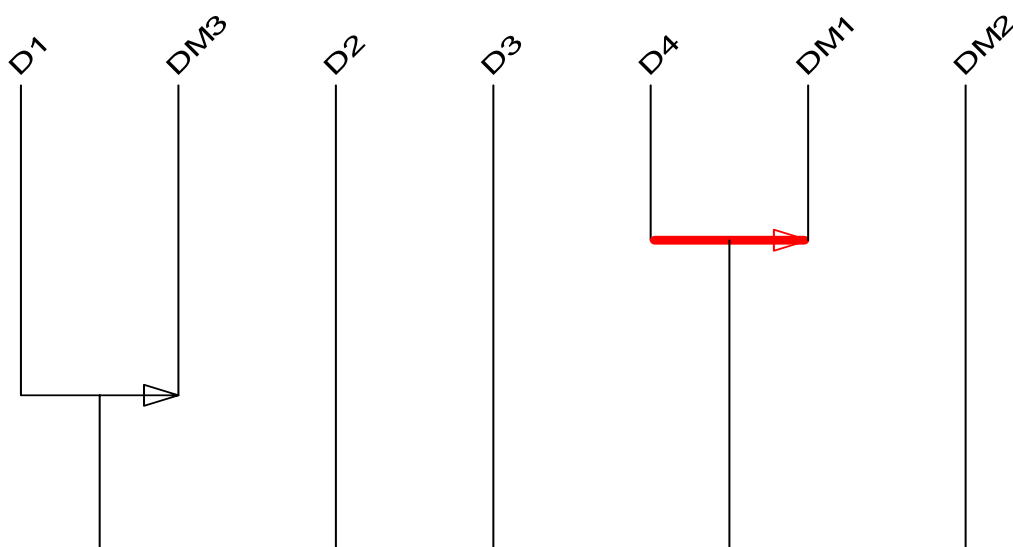
Dall'osservazione del grafico delle similarità si delineano due raggruppamenti distinti:  $R1 = (D1, DM3, D2, DM2)$ ,  $R2 = (D3, D4, DM1)$ .

Nel primo gruppo si nota un'elevata similarità tra le strategie D1 e DM3 correlate in modo trascurabile con la coppia D2, DM2. Nel secondo gruppo le strategie D4 e DM1 hanno una similarità molto alta, correlate in modo trascurabile con D3.



- Del primo gruppo fanno parte coloro che hanno utilizzato le strategie D1 (cioè la domanda “Quanti bambini hanno l’ombrello giallo?”) e DM3 (I bambini non danno una motivazione valida).
- Al secondo gruppo appartengono gli alunni che nel caso del problema D utilizzano le strategie D4 (scelgono la domanda “Quanti bambini hanno l’ombrello?”) e DM1 (rispondono che hanno capito quale era la domanda giusta perché hanno contato gli ombrelli) evidenziando, quindi, la padronanza del registro linguistico e l’acquisizione del concetto di relazione.

**Albero Coesivo. Implicazioni tra gruppi di variabili del problema D**



Albero coesivo : D:\Tesi\_FormazPrim\benigno\Giovanna\benigno\_problema4.csv

Dall'albero coesivo abbiamo la conferma della forte implicazione tra le variabili D4 e DM1.

#### **4.9 ANALISI QUALITATIVA DEI PROTOCOLLI**

Analizzando accuratamente i protocolli che riportano le risposte dei bambini, si è potuto notare come alcuni tra di essi siano particolarmente significativi in relazione alle risposte date. Per questo motivo si è ritenuto necessario riportare fedelmente di seguito alcune tra queste risposte:

- ◆ Maria Celeste, essendo rimasta particolarmente colpita dalla drammatizzazione, ha dato sempre la stessa risposta al problema esposto nelle quattro forme linguistiche: *“ho scelto questa domanda perché la strega Besana si è domandata quanti bambini avevano l'ombrello”*;
- ◆ Cristina ha così motivato la sua risposta al problema espresso in linguaggio naturale: *“ ho scelto questa domanda perchè alcuni bambini se non hanno l'ombrello si bagnano tutti”*;
- ◆ Giuseppe alla sua risposta al problema C nella prima forma grafica ha dato la seguente motivazione: *“ nei problemi matematici ti serve capire quanto viene il totale del numero dei dati”*;

- ◆ Sandy in risposta al problema D ha scritto: “ *non si parla più della maga ma si sommano gli ombrelli*”;
- ◆ Roberta ha dato sempre la stessa risposta ai quattro problemi: “*per me è giusta la domanda “quanti bambini non hanno l’ombrello?” perché la maga non può vedere i bambini sotto la tettoia*”;
- ◆ Chiara completando la tabella del problema D ha risposto: “*non abbiamo il dato di quanti bambini hanno l’ombrello quindi mi sembra la domanda più logica e matematica*”;
- ◆ Dario ha motivato in questo modo la risposta al problema in forma drammatizzata: “*perché ci sono tanti ombrelli di tanti colori e quindi si devono sommare tutti*”.

## ***CAPITOLO QUINTO***

### **CONCLUSIONI E PROBLEMI APERTI**

L'obiettivo della sperimentazione era quello di classificare le concezioni spontanee dei bambini di seconda elementare sul concetto di "problema".

Inizialmente si pensava di raggiungere tale obiettivo attuando un'unica sperimentazione, ovvero quella che si è indicata come "prima sperimentazione"; tale lavoro prevedeva la somministrazione di tre situazioni-problema di difficoltà crescente ai bambini di cui sopra.

Nel corso di questa prima fase di ricerca sperimentale, però, ci si è resi conto del fatto che i bambini a cui erano stati somministrati i problemi riscontravano grandi difficoltà di comprensione davanti al testo più complesso, lungo e ricco di dati.

Si è quindi ritenuto opportuno proseguire con una seconda fase di sperimentazione, attuando una riformulazione del testo del problema utilizzando diversi registri linguistici al fine di renderlo meno ostico.

Il testo è stato riformulato in primo luogo sotto forma di racconto drammatizzato, in secondo luogo si sono adoperati vocaboli semplici e una sintassi particolarmente lineare (frasi brevi e concise), in terzo luogo ci si è avvalsi della forma grafica sfruttando il supporto di immagini rappresentanti (qualitativamente o quantitativamente) i dati del testo.

Le aspettative, per questa seconda fase di lavoro, erano che i bambini avessero maggiore facilità di comprensione del testo nel caso in cui si sceglieva come registro linguistico quello del racconto drammatizzato, facendoli immedesimare completamente nei protagonisti di tale racconto.

Contrariamente a quanto ci si aspettava la forma linguistica maggiormente apprezzata dai bambini è stata quella iconica.

Gli allievi sono stati infatti attratti dalle immagini colorate, che rispecchiano in qualche modo le loro rappresentazioni mentali.

Traendo spunto dai risultati ottenuti ritengo sia possibile, in futuro, avviare ulteriori ricerche e sperimentazioni su alcuni problemi rimasti aperti:

- ◆ In che misura influiscono i processi emotivo-emozionali nell'apprendimento della matematica?
- ◆ Quali metodologie dovrebbero essere adottate per rendere l'apprendimento della matematica più divertente, creativo e stimolante?
- ◆ In che modo i bambini di culture diverse reagirebbero davanti alla risoluzione di un problema propostogli rappresentandolo in forma drammatizzata?
- ◆ Quanto e in che modo incide il contratto didattico nel processo di insegnamento-apprendimento?

## **APPENDICE 1**

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
A.E.1	0	0	0	0	0	1	0	0
A.E.2	0	0	0	0	0	1	0	0
A.E.3	0	0	0	0	0	1	0	0
A.E.4	0	0	0	0	0	1	0	0
A.E.5	0	0	0	0	0	1	0	0
A.E.6	0	0	0	0	0	1	0	0
A.E.7	0	0	1	0	0	0	0	0
A.E.8	0	0	0	0	0	1	0	0
A.E.9	1	0	0	0	0	0	0	0
A.E.10	0	0	0	0	0	0	0	1
A.E.11	0	0	0	1	0	0	0	0
A.E.12	0	0	0	0	0	1	0	0
A.E.13	0	0	0	1	0	0	0	0
A.E.14.	0	0	0	0	0	1	0	0
A.E.15	0	0	0	0	0	1	0	0
A.E.16	1	0	0	0	0	0	0	0
A.E.17	0	0	0	0	0	1	0	0
A.E.18	0	1	0	0	0	0	0	0
A.E.19	0	0	0	0	0	0	1	0
A.E.20	0	1	0	0	0	0	0	0
A.E.21	0	0	0	1	0	0	0	0
A.E.22	1	0	0	0	0	0	0	0
A.F.1	0	0	0	0	0	1	0	0
A.F.2	0	0	0	0	0	0	0	1
A.F.3	0	0	0	1	0	0	0	0
A.F.4	0	0	0	0	0	0	0	1
A.F.5	0	0	0	0	0	1	0	0
A.F.6	0	0	0	0	0	0	0	1
A.F.7	0	0	0	0	0	1	0	0
A.F.8	0	0	0	0	0	1	0	0
A.F.9	0	0	0	0	0	0	0	1
A.F.10	0	0	0	0	0	0	0	1
A.F.11	0	0	0	0	0	1	0	0
A.F.12	0	0	0	0	0	1	0	0
A.F.13	0	0	0	0	0	1	0	0
A.F.14	0	0	0	0	0	1	0	0
A.F.15	0	0	0	0	0	1	0	0
A.F.16	0	0	0	0	0	1	0	0
A.F.17	0	0	0	0	0	1	0	0
A.F.18	0	0	0	0	0	0	0	1
A.F.19	0	0	0	0	0	1	0	0
A.F.20	0	0	0	0	0	1	0	0
A.A.1	0	0	0	0	0	1	0	0
A.A.2	0	0	1	0	0	0	0	0
A.A.3	0	0	0	0	0	1	0	0
A.A.4	1	0	0	0	0	0	0	0
A.A.5	0	0	0	0	0	1	0	0

A.A.6	0	0	0	0	0	1	0	0
A.A.7	0	0	0	0	0	1	0	0
A.A.8	0	1	0	0	0	0	0	0
A.A.9	0	0	0	0	0	1	0	0
A.A.10	0	0	0	0	0	1	0	0
A.A.11	0	0	0	0	0	1	0	0
A.A.12	0	0	0	0	0	1	0	0
A.A.13	0	0	0	1	0	0	0	0
A.A.14	0	1	0	0	0	0	0	0
A.A.15	0	0	0	1	0	0	0	0
A.A.16	0	0	0	0	0	0	1	0
A.A.17	0	0	0	0	0	0	1	0
A.B.1.	0	1	0	0	0	0	0	0
A.B.2	0	1	0	0	0	0	0	0
A.B.3	0	0	0	0	0	1	0	0
A.B.4	0	0	0	0	0	1	0	0
A.B.5.	0	0	0	0	0	1	0	0
A.B.6	0	1	0	0	0	0	0	0
A.B.7	0	0	0	0	0	0	0	1
A.B.8	0	1	0	0	0	0	0	0
A.B.9	0	0	0	0	0	1	0	0
A.B.10	0	1	0	0	0	0	0	0
A.B.11	0	0	0	0	0	1	0	0
A.B.12	0	0	0	0	0	1	0	0
A.B.13	0	1	0	0	0	0	0	0
A.B.14	0	0	0	0	0	1	0	0
A.B.15	0	0	0	0	0	1	0	0
A.B.16	0	0	0	0	0	1	0	0
A.B.17	0	0	0	0	0	1	0	0
A.C.1	0	0	0	0	1	0	0	0
A.C.2	0	0	0	0	1	0	0	0
A.C.3	0	0	0	0	0	1	0	0
A.C.4	0	1	0	0	0	0	0	0
A.C.5	0	0	0	0	0	1	0	0
A.C.6	0	0	0	0	0	0	0	1
A.C.7	0	0	0	0	0	0	0	1
A.C.8	0	0	0	0	0	0	0	1
A.C.9	0	0	0	0	0	1	0	0
A.C.10	0	0	0	0	0	1	0	0
A.C.11	0	0	0	0	0	1	0	0
A.C.12	1	0	0	0	0	0	0	0
A.C.13	0	0	1	0	0	0	0	0
A.C.14	0	0	1	0	0	0	0	0
A.C.15	0	0	0	0	0	1	0	0
A.C.16	0	0	0	0	0	1	0	0
A.C.17	0	0	0	0	1	0	0	0
A.C.18	0	1	0	0	0	0	0	0
A.C.19	0	0	0	0	0	1	0	0
A.D.1	0	0	0	0	0	1	0	0
A.D.2	0	0	0	0	1	0	0	0

A.D.3	1	0	0	0	0	0	0	0
A.D.4	0	1	0	0	0	0	0	0
A.D.5	0	0	0	0	0	1	0	0
A.D.6	0	0	0	0	0	1	0	0
A.D.7	0	0	0	0	1	0	0	0
A.D.8	0	0	0	0	0	1	0	0
A.D.9	0	0	0	0	0	1	0	0
A.D.10	0	0	0	0	0	1	0	0
A.D.11	0	0	0	0	0	1	0	0
A.D.12	0	0	0	0	0	1	0	0
A.D.13	0	0	0	0	0	1	0	0
A.D.14	0	0	0	0	0	1	0	0
A.D.15	0	0	0	0	0	1	0	0
A.D.16	0	0	0	0	0	1	0	0
A.D.17	0	0	0	0	0	1	0	0
A.D.18	0	0	0	0	0	1	0	0
A.D.19	0	0	0	0	0	1	0	0
A.D.20	1	0	0	0	0	0	0	0

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8
B.E.1	0	0	0	0	1	0	0	0
B.E.2	0	0	0	0	1	0	0	0
B.E.3	0	0	0	0	1	0	0	0
B.E.4	0	0	0	0	1	0	0	0
B.E.5	0	0	0	0	1	0	0	0
B.E.6	0	0	0	0	1	0	0	0
B.E.7.	0	0	0	0	0	0	1	0
B.E.8	0	0	0	0	1	0	0	0
B.E.9	1	0	0	0	0	0	0	0
B.E.10	0	0	0	0	1	0	0	0
B.E.11	0	0	0	0	0	0	0	1
B.E.12	0	0	0	0	1	0	0	0
B.E.13	1	0	0	0	0	0	0	0
B.E.14	0	0	0	0	1	0	0	0
B.E.15	0	0	0	0	1	0	0	0
B.E.16	0	0	0	0	1	0	0	0
B.E.17	0	0	0	0	1	0	0	0
B.E.18	1	0	0	0	0	0	0	0
B.E.19	0	0	0	0	1	0	0	0
B.E.20	0	0	0	0	1	0	0	0
B.E.21	1	0	0	0	0	0	0	0
B.E.22	0	0	0	0	0	0	1	0
B.F.1	0	0	0	0	1	0	0	0
B.F.2	0	0	0	0	1	0	0	0
B.F.3	0	0	0	0	1	0	0	0
B.F.4	0	0	0	0	1	0	0	0
B.F.5	0	0	0	0	1	0	0	0
B.F.6	0	0	0	0	0	0	0	1
B.F.7	0	0	0	0	1	0	0	0
B.F.8	0	0	0	0	1	0	0	0



B.F.9	0	0	0	0	0	0	0	1
B.F.10	0	0	0	0	0	0	1	0
B.F.11	0	0	0	0	0	0	0	1
B.F.12	0	0	0	0	1	0	0	0
B.F.13	0	0	0	0	1	0	0	0
B.F.14	0	0	0	0	0	0	0	1
B.F.15	0	0	0	0	1	0	0	0
B.F.16	0	0	0	0	1	0	0	0
B.F.17	0	0	0	0	1	0	0	0
B.F.18	1	0	0	0	0	0	0	0
B.F.19	0	0	0	0	1	0	0	0
B.F.20	0	0	0	0	1	0	0	0
B.A.1	0	0	0	0	0	0	1	0
B.A.2	0	0	0	0	1	0	0	0
B.A.3	0	0	0	0	1	0	0	0
B.A.4	0	0	0	0	1	0	0	0
B.A.5	0	0	0	0	1	0	0	0
B.A.6	0	0	0	0	1	0	0	0
B.A.7	0	0	0	0	1	0	0	0
B.A.8	0	0	0	0	0	0	0	1
B.A.9	0	0	0	0	0	1	0	0
B.A.10	0	0	0	0	1	0	0	0
B.A.11	0	0	0	0	0	1	0	0
B.A.12	0	0	0	0	0	1	0	0
B.A.13	0	0	0	0	0	0	1	0
B.A.14	0	0	0	0	1	0	0	0
B.A.15	1	0	0	0	0	0	0	0
B.A.16	0	0	0	0	1	0	0	0
B.A.17	0	0	0	0	1	0	0	0
B.B.1	0	0	0	0	1	0	0	0
B.B.2	1	0	0	0	0	0	0	0
B.B.3	1	0	0	0	0	0	0	0
B.B.4	0	0	0	0	0	0	1	0
B.B.5	0	0	0	0	1	0	0	0
B.B.6	1	0	0	0	0	0	0	0
B.B.7	0	0	0	0	1	0	0	0
B.B.8	1	0	0	0	0	0	0	0
B.B.9	0	0	0	0	1	0	0	0
B.B.10	0	0	0	0	1	0	0	0
B.B.11	1	0	0	0	0	0	0	0
B.B.12	0	0	0	0	1	0	0	0
B.B.13	0	0	0	0	0	1	0	0
B.B.14	0	0	0	0	1	0	0	0
B.B.15	0	0	0	0	1	0	0	0
B.B.16	1	0	0	0	0	0	0	0
B.B.17	0	0	0	0	1	0	0	0
B.C.1	0	0	0	0	1	0	0	0
B.C.2	0	1	0	0	0	0	0	0
B.C.3	0	0	0	0	1	0	0	0
B.C.4	0	0	0	0	1	0	0	0

B.C.5	0	0	0	0	1	0	0	0
B.C.6	0	1	0	0	0	0	0	0
B.C.7	0	0	0	0	0	1	0	0
B.C.8	0	0	0	0	0	0	1	0
B.C.9	0	0	0	0	0	1	0	0
B.C.10	0	0	0	0	1	0	0	0
B.C.11	0	0	0	0	1	0	0	0
B.C.12	1	0	0	0	0	0	0	0
B.C.13	0	0	0	0	1	0	0	0
B.C.14	0	0	0	0	0	0	1	0
B.C.15	0	0	0	0	1	0	0	0
B.C.16	0	0	0	0	1	0	0	0
B.C.17	0	0	0	0	0	0	0	1
B.C.18	1	0	0	0	0	0	0	0
B.C.19	0	0	0	0	0	1	0	0
B.D.1	0	0	0	0	1	0	0	0
B.D.2	0	1	0	0	0	0	0	0
B.D.3	0	0	0	0	0	0	0	1
B.D.4	0	0	0	0	1	0	0	0
B.D.5	1	0	0	0	0	0	0	0
B.D.6	0	0	0	0	1	0	0	0
B.D.7.	0	0	0	0	0	0	1	0
B.D.8	0	0	0	0	0	0	0	1
B.D.9	0	0	0	0	1	0	0	0
B.D.10	0	0	0	0	1	0	0	0
B.D.11	0	0	0	0	1	0	0	0
B.D.12	1	0	0	0	0	0	0	0
B.D.13	0	0	0	0	0	1	0	0
B.D.14	0	0	0	0	1	0	0	0
B.D.15	0	0	0	0	1	0	0	0
B.D.16	0	0	0	0	0	1	0	0
B.D.17	0	0	0	0	0	1	0	0
B.D.18	0	0	0	0	1	0	0	0
B.D.19	0	0	0	0	0	1	0	0
B.D.20	1	0	0	0	0	0	0	0

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
C.E.1	0	0	0	0	1	0	0	0
C.E.2	0	0	1	0	0	0	0	0
C.E.3	0	0	0	0	0	1	0	0
C.3.4	0	0	1	0	0	0	0	0
C.E.5	0	0	1	0	0	0	0	0
C.E.6	0	0	1	0	0	0	0	0
C.E.7	0	0	0	0	1	0	0	0
C.E.8	0	0	0	0	1	0	0	0
C.E.9	0	1	0	0	0	0	0	0
C.E.10	0	0	0	0	0	1	0	0
C.E.11	0	0	0	0	1	0	0	0
C.E.12	0	0	1	0	0	0	0	0

C.E.13	0	0	0	0	1	0	0	0
C.E.14	0	0	0	0	0	1	0	0
C.E.15	0	1	0	0	0	0	0	0
C.E.16	0	0	0	0	0	1	0	0
C.E.17	0	1	0	0	0	0	0	0
C.E.18	0	0	0	0	0	1	0	0
C.E.19	0	0	1	0	0	0	0	0
C.E.20	0	1	0	0	0	0	0	0
C.E.21	0	0	0	0	0	1	0	0
C.E.22	1	0	0	0	0	0	0	0
C.F.1	1	0	0	0	0	0	0	0
C.F.2	1	0	0	0	0	0	0	0
C.F.3	0	1	0	0	0	0	0	0
C.F.4	0	0	0	0	1	0	0	0
C.F.5	0	0	1	0	0	0	0	0
C.F.6	0	0	0	0	0	1	0	0
C.F.7	0	1	0	0	0	0	0	0
C.F.8	0	0	1	0	0	0	0	0
C.F.9	0	0	0	0	1	0	0	0
C.F.10	0	1	0	0	0	0	0	0
C.F.11	0	0	0	0	1	0	0	0
C.F.12	0	0	0	0	1	0	0	0
C.F.13	0	0	1	0	0	0	0	0
C.F.14	0	0	0	0	1	0	0	0
C.F.15	0	1	0	0	0	0	0	0
C.F.16	0	0	1	0	0	0	0	0
C.F.17	0	0	1	0	0	0	0	0
C.F.18	0	1	0	0	0	0	0	0
C.F.19	0	0	1	0	0	0	0	0
C.F.20	0	1	0	0	0	0	0	0
C.A.1	0	0	1	0	0	0	0	0
C.A.2	0	0	1	0	0	0	0	0
C.A.3	0	0	1	0	0	0	0	0
C.A.4	0	0	1	0	0	0	0	0
C.A.5	0	0	1	0	0	0	0	0
C.A.6	0	0	1	0	0	0	0	0
C.A.7	0	0	1	0	0	0	0	0
C.A.8	0	0	1	0	0	0	0	0
C.A.9	0	0	1	0	0	0	0	0
C.A.10	0	0	0	0	0	0	1	0
C.A.11	0	0	0	0	0	0	1	0
C.A.12	0	0	1	0	0	0	0	0
C.A.13	0	0	1	0	0	0	0	0
C.A.14	0	0	1	0	0	0	0	0
C.A.15	0	0	1	0	0	0	0	0
C.A.16	0	0	0	0	1	0	0	0
C.A.17	0	0	1	0	0	0	0	0
C.B.1	0	0	1	0	0	0	0	0
C.B.2	0	1	0	0	0	0	0	0
C.B.3	0	1	0	0	0	0	0	0

C.B.4	0	0	0	0	1	0	0	0
C.B.5	0	0	1	0	0	0	0	0
C.B.6	0	1	0	0	0	0	0	0
C.B.7	0	0	1	0	0	0	0	0
C.B.8	0	0	0	0	0	1	0	0
C.B.9	0	1	0	0	0	0	0	0
C.B.10	0	0	0	0	1	0	0	0
C.B.11	0	0	1	0	0	0	0	0
C.B.12	0	0	0	0	0	1	0	0
C.B.13	0	0	0	0	0	1	0	0
C.B.14	0	1	0	0	0	0	0	0
C.B.15	0	0	1	0	0	0	0	0
C.B.16	0	0	0	0	1	0	0	0
C.B.17	0	0	1	0	0	0	0	0
C.C.1	0	0	0	0	1	0	0	0
C.C.2	0	0	0	0	1	0	0	0
C.C.3	0	0	0	0	1	0	0	0
C.C.4	0	0	1	0	0	0	0	0
C.C.5	0	0	1	0	0	0	0	0
C.C.6	1	0	0	0	0	0	0	0
C.C.7	0	0	1	0	0	0	0	0
C.C.8	0	0	0	0	1	0	0	0
C.C.9	0	0	0	0	1	0	0	0
C.C.10	0	0	1	0	0	0	0	0
C.C.11	0	0	1	0	0	0	0	0
C.C.12	0	0	0	0	0	0	1	0
C.C.13	0	0	1	0	0	0	0	0
C.C.14	0	1	0	0	0	0	0	0
C.C.15	0	1	0	0	0	0	0	0
C.C.16	0	0	0	0	0	1	0	0
C.C.17	0	0	0	0	1	0	0	0
C.C.18	0	0	1	0	0	0	0	0
C.C.19	0	0	1	0	0	0	0	0
C.D.1	0	0	1	0	0	0	0	0
C.D.2	0	0	0	0	0	1	0	0
C.D.3	0	0	1	0	0	0	0	0
C.D.4	0	1	0	0	0	0	0	0
C.D.5	0	1	0	0	0	0	0	0
C.D.6	0	0	1	0	0	0	0	0
C.D.7	0	0	0	0	0	0	0	1
C.D.8	0	0	0	0	1	0	0	0
C.D.9	0	0	0	0	1	0	0	0
C.D.10	0	0	0	0	1	0	0	0
C.D.11	0	0	0	0	1	0	0	0
C.D.12	0	0	0	0	1	0	0	0
C.D.13	0	0	0	0	1	0	0	0
C.D.14	0	0	0	0	1	0	0	0
C.D.15	0	0	0	0	1	0	0	0
C.D.16	0	0	1	0	0	0	0	0
C.D.17	0	0	1	0	0	0	0	0

C.D.18	0	0	0	0	1	0	0	0
C.D.19	0	0	1	0	0	0	0	0
C.D.20	0	0	0	0	0	1	0	0

## *APPENDICE 2*

	A1	A2	A3	A M 1	A M 2	A M 3	A M 4
A.A.1	0	0	1	0	0	1	0
A.A.2	0	1	0	1	0	0	0
A.A.3	0	1	0	1	0	0	0
A.A.4	0	0	1	0	1	0	0
A.A.5	0	1	0	1	0	0	0
A.A.6	0	1	0	1	0	0	0
A.A.7	0	0	1	0	0	0	0
A.A.8	0	1	0	0	0	0	1
A.A.9	0	1	0	0	0	0	1
A.A.10	0	1	0	0	0	0	1
A.A.11	0	1	0	0	0	0	1
A.A.12	0	1	0	1	0	0	0
A.A.13	0	0	1	0	1	0	0
A.A.14	0	1	0	1	0	0	0
A.A.15	0	1	0	1	0	0	0
A.A.16	0	1	0	0	0	0	0
A.A.17	0	1	0	0	0	1	0
A.A.18	0	1	0	1	0	0	0
A.A.19	0	1	0	1	0	0	0
A.A.20	0	1	0	0	0	1	0
A B 1	1	0	0	0	0	1	0
A B 2	1	0	0	0	0	1	0
A B 3	0	1	0	1	0	0	0
A B 4	0	0	1	0	0	0	1
A B 5	0	0	1	0	0	1	0
A B 6	0	1	0	1	0	0	0
A B 7	0	1	0	1	0	0	0
A B 8	0	1	0	0	0	1	0
A B 9	0	1	0	0	0	1	0
A B 10	0	1	0	1	0	0	0
A B 11	0	0	0	0	0	0	1
A B 12	0	1	0	1	0	0	0
A B 13	0	1	0	1	0	0	0
A B 14	0	0	1	0	0	0	1
A B 15	1	0	0	0	0	0	1
A B 16	0	1	0	0	0	0	1
A B 17	0	0	1	0	0	1	0
A B 18	0	0	1	0	0	0	1
A B 19	0	1	0	0	0	1	0
A C 1	1	0	0	0	0	0	1
A C 2	0	1	0	1	0	0	0
A C 3	0	0	1	0	1	0	0
A C 4	1	0	0	0	0	1	0
A C 5	0	1	0	0	0	0	1
A C 6	0	1	0	0	0	0	1
A C 7	0	0	0	0	0	0	1

AC 8	0	0	1	1	0	0	0
AC 9	0	1	0	1	0	0	0
AC 10	0	1	0	1	0	0	0
AC 11	0	1	0	0	0	0	1
AC 12	0	0	1	0	1	0	0
AC 13	0	0	1	0	0	0	1
AC 14	1	0	0	0	0	1	0
AC 15	0	0	0	0	0	0	1
AC 16	0	1	0	1	0	0	0
AC 17	0	0	1	0	0	1	0
AC 18	0	1	0	1	0	0	0
AC 19	0	1	0	1	0	0	0
AC 20	0	1	0	0	0	0	1
AD 1	0	0	1	0	0	1	0
AD 2	0	0	1	0	1	0	0
AD 3	0	0	1	0	0	1	0
AD 4	0	1	0	0	0	1	0
AD 5	1	0	0	0	0	1	0
AD 6	1	0	0	0	0	1	0
AD 7	0	0	0	0	0	0	1
AD 8	0	1	0	0	0	1	0
AD 9	0	1	0	0	0	1	0
AD 10	0	1	0	0	0	0	1
AD 11	0	1	0	1	0	0	0
AD 12	0	0	1	0	0	1	0
AD 13	0	1	0	1	0	0	0
AD 14	0	1	0	1	0	0	0
AD 15	0	1	0	0	0	1	0
AD 16	0	0	1	0	0	0	1
AD 17	0	0	1	0	0	1	0
AE 1	0	1	0	0	0	1	0
AE 2	1	0	0	1	0	0	0
AE 3	0	1	0	0	0	0	0
AE 4	0	0	1	0	0	1	0
AE 5	0	1	0	1	0	0	0
AE 6	1	0	0	1	0	0	0
AE 7	0	0	1	0	0	0	1
AE 8	1	0	0	0	0	1	0
AE 9	0	1	0	1	0	0	0
AA 10	0	0	1	0	1	0	0
AE 11	0	0	1	0	1	0	0
AE 12	0	0	1	0	1	0	0
AE 13	1	0	0	0	0	1	0
AE 14	1	0	0	0	0	0	1
AE 15	1	0	0	0	0	1	0
AE 16	1	0	0	0	0	1	0
AE 17	0	0	1	0	1	0	0
AE 18	0	0	1	0	1	0	0
AE 19	1	0	0	1	0	0	0
AE 20	0	1	0	0	0	1	0

A E 21	0	0	1	0	0	1	0
A F 1	0	1	0	1	0	0	0
A F 2	0	1	0	0	0	0	1
A F 3	0	1	0	0	0	0	1
A F 4	0	0	1	0	1	0	0
A F 5	0	1	0	1	0	0	0
A F 6	0	0	1	0	0	1	0
A F 7	0	0	1	1	0	0	0
A F 8	1	0	0	0	0	0	1
A F 9	1	0	0	1	0	0	0
A F 10	0	1	0	1	0	0	0
A F 11	1	0	0	1	0	0	0
A F 12	0	0	1	1	0	0	0
A F 13	0	1	0	1	0	0	0
A F 14	0	0	1	0	0	1	0
A F 15	0	0	1	1	0	0	0
A F 16	0	0	1	0	0	1	0
A F 17	0	1	0	1	0	0	0
A F 18	0	0	1	0	1	0	0
A F 19	0	1	0	1	0	0	0
A F 20	0	0	1	1	0	0	0

	B 1	B 2	B 3	B M 1	B M 2	B M 3	B M 4	B M 5
B.A.1	0	1	0	1	0	0	0	0
B.A.2	0	1	0	1	0	0	0	0
B.A.3	0	0	1	0	1	0	0	0
B.A.4	0	0	1	0	1	0	0	0
B.A.5	0	1	0	0	0	1	0	0
B.A.6	0	1	0	1	0	0	0	0
B.A.7	1	0	0	0	0	1	0	0
B.A.8	0	1	0	1	0	0	0	0
B.A.9	0	0	1	0	0	1	0	0
B.A.10	0	1	0	0	0	1	0	0
B.A.11	0	1	0	1	0	0	0	0
B.A.12	0	0	1	0	0	0	1	0
B.A.13	0	1	0	0	0	1	0	0
B.A.14	0	1	0	1	0	0	0	0
B.A.15	0	1	0	1	0	0	0	0
B.A.16	0	1	0	1	0	0	0	0
B A.17	0	0	1	0	0	0	1	0
B.A.18	0	0	1	0	0	1	0	0
B.A.19	0	1	0	0	0	1	0	0
B.A.20	0	1	0	1	0	0	0	0
B A 21	0	0	1	0	0	0	1	0
B A 22	0	1	0	0	0	1	0	0
B B 1	0	1	0	0	0	0	1	0
B B 2	0	1	0	1	0	0	0	0
B B 3	0	1	0	0	0	0	1	0



BB 4	0	1	0	1	0	0	0	0
BB 5	0	1	0	0	0	1	0	0
BB 6	0	1	0	0	0	1	0	0
BB 7	0	1	0	1	0	0	0	0
BB 8	0	1	0	0	0	0	1	0
BB 9	0	1	0	1	0	0	0	0
BB 10	0	1	0	1	0	0	0	0
BB 11	0	1	0	1	0	0	0	0
BB 12	0	1	0	1	0	0	0	0
BB 13	0	1	0	1	0	0	0	0
BB 14	0	1	0	0	0	1	0	0
BB 15	0	1	0	0	0	1	0	0
BB 16	0	1	0	1	0	0	0	0
BB 17	0	1	0	1	0	0	0	0
BB 18	0	1	0	0	0	1	0	0
BC 1	0	0	1	0	1	0	0	0
BC 2	0	1	0	1	0	0	0	0
BC 3	0	0	1	0	1	0	0	0
BC 4	0	1	0	1	0	0	0	0
BC 5	0	0	1	0	0	0	0	1
BC 6	1	0	0	0	0	0	1	0
BC 7	0	1	0	0	0	0	1	0
BC 8	0	1	0	0	0	0	0	1
BC 9	0	1	0	1	0	0	0	0
BC 10	0	0	1	0	1	0	0	0
BC 11	1	0	0	0	0	0	1	0
BC 12	1	0	0	0	0	0	0	1
BC 13	0	1	0	1	0	0	0	0
BC 14	0	0	1	0	0	0	0	1
BC 15	0	1	0	0	0	0	0	1
BC 16	0	0	1	0	1	0	0	0
BC 17	0	0	1	0	0	0	1	0
BC 18	0	0	1	0	0	0	0	1
BC 19	0	1	0	0	0	0	0	1
BC 20	1	0	0	0	0	0	0	1
BD 1	1	0	0	0	0	0	1	0
BD 2	0	1	0	1	0	0	0	0
BD 3	0	0	1	0	1	0	0	0
BD 4	0	0	1	0	0	0	0	1
BD 5	0	1	0	0	0	0	0	0
BD 6	0	1	0	1	0	0	0	0
BD 7	0	1	0	1	0	0	0	0
BD 8	0	1	0	0	0	0	0	1
BD 9	0	0	1	0	1	0	0	0
AD 10	0	0	1	0	1	0	0	0
BD 11	0	1	0	1	0	0	0	0
BD 12	0	1	0	1	0	0	0	0
BD 13	0	0	1	0	1	0	0	0
BD 14	0	0	1	0	1	0	0	0
BD 15	1	0	0	0	0	0	0	1

BD 16	0	1	0	0	0	0	0	1
BD 17	0	0	1	0	1	0	0	0
BD 18	0	1	0	1	0	0	0	0
BE 1	0	1	0	0	0	0	0	1
BE 2	0	1	0	0	0	0	0	1
BE 3	1	0	0	0	0	0	0	1
BE 4	0	0	1	0	1	0	0	0
BE 5	0	1	0	0	0	0	0	1
BE 6	0	0	1	0	1	0	0	0
BE 7	1	0	0	0	0	0	1	0
BE 8	0	0	1	0	1	0	0	0
BE 9	0	1	0	0	0	0	0	1
BA 10	0	0	1	0	0	0	0	1
BE 11	0	1	0	1	0	0	0	0
BE 12	1	0	0	0	0	0	1	0
BE 13	0	0	1	0	1	0	0	0
BE 14	0	0	1	0	1	0	0	0
BE 15	1	0	0	0	0	0	1	0
BE 16	1	0	0	0	0	0	0	1
BE 17	0	1	0	0	1	0	0	0
BE 18	0	1	0	0	0	1	0	0
BE 19	0	1	0	1	0	0	0	0
BF 1	0	1	0	0	1	0	0	0
BF 2	0	1	0	0	0	0	0	1
BF 3	1	0	0	1	0	0	0	0
BF 4	0	1	0	1	0	0	0	0
BF 5	0	0	1	0	1	0	0	0
BF 6	0	1	0	1	0	0	0	0
BF 7	0	0	1	0	1	0	0	0
BF 8	0	1	0	1	0	0	0	0
BF 9	0	1	0	0	0	1	0	0
BF 10	0	0	1	0	1	0	0	0
BF 11	1	0	0	0	0	0	0	1
BF 12	0	0	1	0	1	0	0	0
BF 13	0	0	1	0	1	0	0	0
BF 14	0	0	1	0	1	0	0	0
BF 15	0	1	0	0	1	0	0	0
BF 16	0	0	1	0	1	0	0	0
BF 17	0	0	1	0	1	0	0	0

	C 1	C 2	C 3	CM 1	CM 2	CM 3	CM 4
C.A.1	1	0	0	1	0	0	0
C.A.2	0	0	1	0	1	0	0
C.A.3	0	0	1	0	1	0	0
C.A.4	1	0	0	0	0	1	0
C.A.5	0	0	1	0	1	0	0
C.A.6	0	0	0	0	0	0	1

C.A.7	1	0	0	0	0	1	0
C.A.8	1	0	0	0	0	1	0
C.A.9	1	0	0	0	0	1	0
C.A.10	1	0	0	0	0	1	0
C.A.11	1	0	0	0	0	0	1
C.A.12	1	0	0	1	0	0	0
C.A.13	1	0	0	0	0	1	0
C.A.14	1	0	0	0	0	1	0
C.A.15	1	0	0	0	0	1	0
C.A.16	1	0	0	0	0	1	0
C.A.17	1	0	0	0	0	1	0
C.A.18	1	0	0	0	0	1	0
C.A.19	1	0	0	0	0	1	0
C.A.20	1	0	0	1	0	0	0
CB 1	1	0	0	0	0	1	0
CB 2	1	0	0	0	0	1	0
CB 3	1	0	0	0	0	1	0
CB 4	1	0	0	0	0	1	0
CB 5	1	0	0	0	0	0	1
CB 6	1	0	0	1	0	0	0
CB 7	1	0	0	0	0	1	0
CB 8	1	0	0	0	0	1	0
CB 9	1	0	0	0	0	1	0
CB 10	0	0	1	1	0	0	0
CB 11	1	0	0	0	0	1	0
CB 12	0	1	0	1	0	0	0
CB 13	0	1	0	1	0	0	0
CB 14	1	0	0	0	1	0	0
CB 15	1	0	0	1	0	0	0
CB 16	1	0	0	0	0	1	0
CB 17	1	0	0	0	0	1	0
CB 18	1	0	0	0	0	1	0
CC 1	0	0	1	1	0	0	0
CC 2	1	0	0	0	0	0	1
CC 3	0	0	1	1	0	0	0
CC 4	1	0	0	0	0	1	0
CC 5	0	1	0	1	0	0	0
CC 6	1	0	0	0	0	1	0
CC 7	1	0	0	1	0	0	0
CC 8	0	0	1	0	1	0	0
CC 9	0	0	1	0	0	1	0
CC 10	1	0	0	0	0	1	0
CC 11	0	0	1	0	1	0	0
CC 12	0	0	1	0	1	0	0
CC 13	1	0	0	0	0	1	0
CC 14	1	0	0	0	0	0	1
CC 15	0	0	1	0	1	0	0
CC 16	0	1	0	0	0	0	1
CC 17	0	0	1	0	1	0	0
CC 18	1	0	0	0	0	1	0

CC 19	1	0	0	0	0	1	0
CC 20	0	1	0	1	0	0	0
CC 21	0	0	1	0	1	0	0
CD 1	1	0	0	0	0	0	1
CD 2	0	0	1	0	1	0	0
CD 3	1	0	0	0	0	1	0
CD 4	1	0	0	0	0	0	1
CD 5	0	0	1	0	1	0	0
CD 6	1	0	0	0	0	1	0
CD 7	1	0	0	0	0	1	0
CD 8	1	0	0	0	0	1	0
CD 9	1	0	0	0	0	0	1
CD 10	1	0	0	0	0	1	0
CD 11	0	1	0	1	0	0	0
CD 12	0	0	1	0	1	0	0
CD 13	1	0	0	0	0	1	0
CD 14	1	0	0	0	0	1	0
CD 15	1	0	0	0	0	1	0
CD 16	0	1	0	0	0	0	1
CD 17	0	0	1	0	1	0	0
CD 18	1	0	0	0	0	1	0
CE 1	0	1	0	0	1	0	0
CE 2	1	0	0	0	0	1	0
BE 3	0	0	1	0	1	0	0
CE 4	1	0	0	1	0	0	0
CE 5	0	0	1	0	1	0	0
CE 6	0	1	0	0	1	0	0
CE 7	0	1	0	0	1	0	0
CE 8	0	0	1	0	0	0	1
CE 9	1	0	0	0	0	0	1
CA 10	0	0	1	0	1	0	0
CE 11	0	1	0	0	1	0	0
CE 12	1	0	0	0	0	1	0
CE 13	1	0	0	1	0	0	0
CE 14	1	0	0	0	0	1	0
CE 15	1	0	0	0	0	1	0
CE 16	0	1	0	0	0	0	1
CE 17	0	0	1	0	1	0	0
CE 18	0	0	1	0	1	0	0
CF 1	0	1	0	0	1	0	0
CF 2	0	1	0	0	1	0	0
CF 3	1	0	0	0	0	1	0
CF 4	0	0	1	0	1	0	0
CF 5	1	0	0	1	0	0	0
CF 6	0	1	0	0	1	0	0
CF 7	1	0	0	0	0	1	0
CF 8	1	0	0	0	0	1	0
CF 9	0	0	1	0	1	0	0
CF 10	0	0	1	0	1	0	0
CF 11	0	0	1	0	1	0	0

CF 12	0	0	1	0	1	0	0
CF 13	0	0	1	0	1	0	0
BF 14	1	0	0	0	0	0	1
CF 15	1	0	0	0	0	1	0
CF 16	1	0	0	0	0	1	0
CF 17	0	1	0	0	1	0	0

	D1	D2	D3	D4	DM 1	DM 2	DM 3
D.A.1	0	0	1	0	0	1	0
D.A.2	0	0	0	1	0	0	1
D.A.3	0	0	1	0	0	0	1
D.A.4	0	0	1	0	1	0	0
D.A.5	0	0	0	1	0	1	0
D.A.6	0	0	0	1	1	0	0
D.A.7	0	0	1	0	1	0	0
D.A.8	0	0	0	1	1	0	0
D.A.9	0	0	0	1	1	0	0
D.A.10	0	0	0	1	1	0	0
D.A.11	0	0	0	1	1	0	0
D.A.12	0	0	0	1	1	0	0
D.A.13	0	0	0	1	1	0	0
D.A.14	0	0	0	1	1	0	0
D.A.15	0	0	0	1	1	0	0
D.A.16	0	0	0	1	1	0	0
D.A.17	0	0	0	1	1	0	0
D.A.18	0	0	0	1	1	0	0
D.A.19	0	0	0	1	1	0	0
D.A.20	0	0	1	0	1	0	0
D.A.21	0	0	1	0	1	0	0
DM 22	1	0	0	0	0	0	1
DB 1	0	0	1	0	1	0	0
DB 2	0	0	0	1	1	0	0
DB 3	0	0	0	1	1	0	0
DB 4	0	0	1	0	1	0	0
DB 5	0	0	0	1	1	0	0
DB 6	0	0	0	1	1	0	0
DB 7	0	0	1	0	1	0	0
DB 8	0	0	0	1	0	0	1
DB 9	0	0	0	1	0	1	0
DB 10	0	0	0	1	1	0	0
DB 11	0	0	0	1	1	0	0
DB 12	0	0	0	1	1	0	0
DB 13	0	0	0	1	1	0	0
DB 14	0	1	0	0	0	0	1
DB 15	0	0	0	1	0	1	0
DB 16	0	0	1	0	1	0	0
DB 17	0	0	0	1	1	0	0
DB 18	0	0	0	1	1	0	0

DC 1	1	0	0	0	0	0	1
DC 2	0	0	0	1	1	0	0
DC 3	0	0	1	0	0	1	0
DC 4	0	0	0	1	0	1	0
DC 5	0	1	0	0	1	0	0
DC 6	0	1	0	0	1	0	0
DC 7	1	0	0	0	1	0	0
DC 8	0	0	0	1	0	1	0
DC 9	0	0	0	1	1	0	0
DC 10	0	0	1	0	1	0	0
DC 11	1	0	0	0	1	0	0
DC 12	0	0	0	1	1	0	0
DC 13	0	0	0	1	1	0	0
DC 14	0	0	1	0	1	0	0
DC 15	0	1	0	0	0	0	1
DC 16	1	0	0	0	1	0	0
DC 17	0	0	1	0	1	0	0
DC 18	0	0	1	0	1	0	0
DC 19	0	0	0	1	1	0	0
DC 20	0	0	1	0	0	0	1
DD 1	0	0	1	0	1	0	0
DD 2	0	0	0	1	1	0	0
DD 3	0	0	0	1	1	0	0
DD 4	0	0	1	0	1	0	0
DD 5	0	0	1	0	0	0	1
DD 6	0	0	1	0	1	0	0
DD 7	0	0	0	1	0	1	0
DD 8	1	0	0	0	0	0	1
DD 9	0	0	0	1	1	0	0
DD 10	0	0	0	1	1	0	0
DD 11	0	0	0	1	1	0	0
DD 12	0	1	0	0	1	0	0
DD 13	0	0	1	0	1	0	0
DD 14	0	0	0	1	0	0	1
DD 15	0	0	1	0	1	0	0
DD 16	0	0	0	1	1	0	0
DD 17	0	0	0	1	1	0	0
DD 18	0	0	1	0	1	0	0
DE 1	0	1	0	0	0	0	1
DE 2	0	0	0	1	1	0	0
DE 3	0	1	0	0	1	0	0
DE 4	0	0	0	1	1	0	0
DE 5	1	0	0	0	0	0	1
DE 6	1	0	0	0	0	1	0
DE 7	0	0	0	1	1	0	0
DE 8	0	0	1	0	1	0	0
DE 9	0	1	0	0	0	1	0
DE 10	0	0	0	1	1	0	0
DE 11	0	0	1	0	1	0	0
DE 12	0	0	1	0	1	0	0

DE 13	0	0	1	0	1	0	0
DE 14	0	0	1	0	1	0	0
DE 15	1	0	0	0	0	1	0
DE 16	0	1	0	0	0	0	1
DE 17	0	1	0	0	1	0	0
DE 18	0	0	0	1	1	0	0
DE 19	0	0	1	0	1	0	0
DF 1	0	0	0	1	1	0	0
DF 2	0	0	0	1	1	0	0
DF 3	0	0	1	0	1	0	0
DF 4	0	0	1	0	0	0	1
DF 5	0	0	0	1	1	0	0
DF 6	0	0	0	1	1	0	0
DF 7	0	0	0	1	1	0	0
DF 8	0	0	1	0	0	0	1
DF 9	0	0	0	1	1	0	0
DF 10	0	0	1	0	1	0	0
DF 11	0	0	1	0	1	0	0
DF 12	0	0	1	0	1	0	0
DF 13	0	0	1	0	1	0	0
DF 14	0	0	0	1	0	0	1
DF 15	0	1	0	0	1	0	0
DF 16	0	0	0	1	1	0	0
DF 17	0	0	1	0	1	0	0
DF 18	0	0	1	0	1	0	0

## Bibliografia

- \_ Brousseau G. “*Théorie des Situations Didactiques*”, La Pensée, Grenoble, 1998
- \_ D’Amore B. “*Didattica della matematica*”, Pitagora editrice, Bologna 2001
- \_ D’Amore B. “*Problemi*”, Pedagogia e psicologia della matematica nell’attività di problem solving, ed. Franco Angeli, Milano, 1996
- \_ Dunker K. “*On problem-solving*”, << Psychology Monographs >>, trad. It. “*La psicologia del pensiero produttivo*”, Giunti-Barbera, Firenze, 1969
- \_ Duval R. “*Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*”, in annales de Didactique et de Sciences Cognitives, ULP, IREM Strasbourg, 1993
- \_ Duval R. “*Semiosis et pensée humaine*”, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne, Peter Lang, 1995
- \_ Job R. e Rumiati R. “*Linguaggio e pensiero*”, Il Mulino, Bologna, 1984
- \_ Kanizsa G. “*Il problem solving nella psicologia della Gestalt*”, in Mosconi G. D’Urso V. (a cura di ), *La soluzione dei problemi*, Giunti-Barbera, Firenze, 1973
- \_ Laeng M. “*Enciclopedia pedagogica*”, Editrice La Scuola
- \_ La Marca A. “*Didattica e sviluppo della competenza metacognitiva. Voler apprendere per imparare a pensare*”, Palumbo, Palermo, 1999
- \_ Mosconi G. D’Urso V. “*La soluzione dei problemi*”, Giunti, Barbera, Firenze, 1973
- \_ Polya G. “*Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico*”, Tit. orig.: “*How to solve it*”, 1° ed. italiana, Feltrinelli, Milano, 1967



- \_ Polya G. *“La scoperta matematica”*. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi, Tit. orig.: *“Mathematical Discovery”*, vol. II, 1° ed. italiana, Feltrinelli, Milano, 1970
- \_ Spagnolo F. *“Insegnare la matematica nella scuola secondaria”*, La Nuova Italia, Firenze, 1998
- \_ Spagnolo F. *“Ricerca in didattica”*, Collana Saperi e Curricoli, Applicazione della Ricerca in Didattica ai Laboratori Didattici Sperimentali, Atti del Seminario di studi tenuto a Isola delle femmine dal 15 al 19 Dicembre 1997, a cura dell’IRRSAE Sicilia
- \_ Zanniello G. *“La prepedagogicità della sperimentazione”*, Palumbo, Palermo, 1997

*Rivolgo un particolare ringraziamento al caro professore Filippo Spagnolo per avermi guidata nel mio lavoro con grande disponibilità e professionalità.*

*Grazie alla prof. ssa Alessandra La Marca, per la sua disponibilità e la sua cortesia.*