

Università degli studi di Palermo
Facoltà di Scienze della Formazione

Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria

**“ I PROBLEMI DI
MATEMATICA ”**

UNA RICERCA NELLA SCUOLA PRIMARIA

Tesi di LAUREA di:
DEBORAH FRONTINI

Relatrice: Prof.ssa
ALESSANDRA LA MARCA

Relatore: Prof.re
FILIPPO SPAGNOLO

ANNO ACCADEMICO 2002 - 2003

Indice

Introduzione	3
Capitolo I La formazione matematica	
1.1 Matematica e formazione del pensiero	6
1.2 La matematica nasce dal problema	11
Capitolo II I problemi di matematica	
2.1 Che cosa è un problema	13
2.2 I problemi nei programmi della scuola elementare	16
2.3 Come si risolve un problema	24
Capitolo III La ricerca	
3.1 Presentazione del lavoro sperimentale	31
3.2 La sequenza delle domande nell'intervista semi - strutturata	35
3.3 Analisi a priori dei comportamenti attesi	37
3.4 Analisi dei dati sperimentali	46
3.4.1 Analisi descrittiva	46
3.4.2 Analisi implicativa	53
Capitolo IV Conclusioni	
4.1 Conclusioni del lavoro sperimentale	58
4.2 Conclusioni personali	59
Bibliografia	

INTRODUZIONE

Il presente lavoro, ponendosi come fine quello di indagare sulle concezioni che i bambini di 7-8 anni hanno sui problemi di matematica, nasce da un'accurata riflessione compiuta durante le ore di tirocinio effettuate nell'anno accademico 2001/2002 nel Circolo Didattico " E. De Amicis ".

Come previsto dalle attività di tirocinio¹, noi future insegnanti eravamo chiamate a svolgere, con i bambini di una classe scolastica, una lezione o un'unità didattica.

E' evidente che lo scopo era quello di darci la possibilità di compiere in prima persona i primi passi all'interno della futura professione. Infatti, partendo da quanto di teorico sapevamo, ci è stata data la possibilità di sperimentare il detto <<dal dire al fare c'è di mezzo il mare>>, ovvero di operare un primo controllo delle nostre capacità e/o delle nostre disposizioni professionali, nonché di comprendere il valore (ma anche i limiti) di un'adeguata preparazione di ogni singolo intervento didattico.

Pertanto, in collaborazione con il team accogliente della classe 3A- 3B decisi di strutturare un'unità didattica sul concetto di " problema ".

Il lavoro di elaborazione della lezione si distinse in più fasi.

Ogni fase assunse la sua importanza ma, in particolar modo dalla prima fase ottenni importanti informazioni.

Condussi, infatti, prima di programmare ogni possibile intervento didattico, delle brevi conversazioni cliniche con gli alunni al fine di rintracciare l'idea che i bimbi avevano riguardo allo specifico concetto di "problema".

Quando, infatti, cerchiamo di insegnare un argomento non possiamo pensare che i nostri allievi siano vuoti contenitori da riempire con la conoscenza (Schoenfeld, 1987): le convinzioni, o meglio i sistemi di

¹ Le attività di tirocinio a cui si fa riferimento sono inerenti al Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria, 4° anno (2001/02).

convinzioni influenzano il modo in cui l'argomento è percepito e quindi appreso.

Pertanto, partendo da questa consapevolezza proposi agli alunni le seguenti domande stimolo:

- Cosa è per te un problema matematico?
- Cosa fai quando risolvi un problema ?

Le risposte, apparse sin da subito molto interessanti, rivelarono delle importanti informazioni. Le concezioni che i bambini avevano sul problema di matematica non solo variavano incredibilmente ma soprattutto, si riflettevano sui comportamenti da mettere in atto nei processi risolutivi di un problema.

Pertanto, riflettendo sul mio ruolo d'insegnante, mi resi conto che per meglio interpretare i loro comportamenti durante la messa in atto dei processi risolutivi, era importante uscire fuori dal campo delle "impressioni", del "mi pare ", del "secondo me", e rivestire il ruolo del ricercatore; ruolo che secondo Gherardi (2000) permette all'insegnante un allargamento di vedute sul proprio agire in classe.

La dimensione della ricerca ha dunque permeato di sé l'intero lavoro che pur trovandosi composto di tre capitoli si divide sostanzialmente in due parti.

La prima parte costituita dal *primo e dal secondo capitolo* si sofferma a riflettere sul concetto di problema.

Ed in particolare, il primo capitolo inquadra il rapporto che oggi il "problema" ha con la formazione matematica. Mentre un tempo, infatti, educare alla matematica significava abituare a risolvere correttamente operazioni; oggi, secondo Pellerey (1984), significa sviluppare la capacità

di soluzione di problemi tramite forme rappresentative ed elaborative di tipo matematico.

Il secondo capitolo propone sulla parola “problema” una lunga serie di definizioni che, estrapolate sia dai testi di alcuni studiosi, sia dai testi dei programmi ministeriali, ne favorisce un’ampia riflessione.

La seconda parte costituita dal *terzo capitolo*, si sofferma sulla ricerca vera e propria, illustrandone dapprima la metodologia di ricerca utilizzata e procedendo in seguito con una sintetica esposizione dei risultati ottenuti.

Capitolo I La formazione matematica

1.1 Matematica e formazione del pensiero

In ogni impianto educativo scolastico di base è sempre stata presente la matematica.

Spesso, quando si parla del mondo della matematica, riferendosi al senso comune e alla cultura corrente, si allude ad un mondo di simboli e di idee con una realtà a sé stante, staccata dal contesto concreto.

E' questo un grosso pregiudizio responsabile della proverbiale disaffezione se non diffidenza verso questa scienza.

La matematica è spesso ricordata come una disciplina noiosa, frustrante, insomma antipatica. E, i motivi sono diversi.

Per molti, è una disciplina nella quale si studiano solo numeri e figure, se ne calcolano misure (lunghezze, aree, volumi ecc), e se ne studiano le proprietà.

Per alcuni studiare matematica, non è riflettere sul concreto, ma solo sull'astratto.

Per altri la matematica non è creativa, dato che è già tutta sistemata, formalmente perfetta; e, tranne qualche giochino da settimana enigmistica, non è divertente...

Tutte argomentazioni piuttosto diffuse che non tengono conto del valore profondo e complesso della matematica e del suo intrecciarsi nel vissuto umano e culturale.

La matematica, infatti, presenta due aspetti: se, per un verso, si sviluppa attraverso una serie di linguaggi simbolici, di forme e modi del pensare codificati all'interno di modelli astratti; per l'altro provvede alla formazione del pensiero, agendo sui processi mentali e sulle costruzioni logiche del ragionamento.

Scrive D'Amore (1987): «E' matematica la sistemazione di un ragionamento, la distinzione tra premesse e conclusione e la relativa verifica se tale conclusione derivi davvero dalle premesse; è matematica lo

studio di percorsi, l'organizzazione di un'attività, il confronto tra insiemi d'oggetti per stabilire quali dei due contenga più elementi dell'altro>> (pp.13).

In un' articolo del "L'Unità" del 14 Aprile 2000, M. Emmer si chiede se la matematica, nell'era dei computer, serva ancora.

Ebbene, in una civiltà come la nostra l'apprendimento della matematica finisce con l'essere un diritto di ogni singolo cittadino.

Al giorno d'oggi non sono più concepibili un'educazione e una formazione degne di questo nome se esse non comportano una parte, sempre più grande, di matematica.

Non che si tratti, beninteso, di formare dei professionisti della matematica. Ma è vero che, quale che sia la specializzazione prescelta, ci si trova quasi sempre nella necessità di adoperare nozioni matematiche: letterati (grammatici, fonetici, linguisti), storici (storia quantitativa), geografi, sociologi, psicologi, economisti hanno bisogno di maneggiare lo strumento matematico e di svolgere un tipo di attività intellettuale che è caratteristico della matematica. In questo senso, si deve sicuramente affermare che attualmente una buona preparazione alla vita non si può raggiungere senza il ricorso ad una formazione matematica.

<<Una formazione matematica [...] conferisce all'individuo un arricchimento concettuale che nessun'altra disciplina può dargli. Il concetto di numero, quello d'operazione, di verità matematica, di rapporto e di proporzionalità... fanno parte dell'equipaggiamento mentale dell'uomo moderno. Così pure una formazione matematica abitua gli allievi a superare la realtà concreta per esprimerla in un nuovo linguaggio purificato e più astratto, capace di rendere evidenti le somiglianze fra situazioni apparentemente ben lontane le une dalle altre>> (Mialeret, 1969, pp.26-27).

Studiare matematica è essenzialmente imparare a ragionare e abituarsi a prendere coscienza del proprio ragionamento.

Non si tratta dunque soltanto di far acquisire abitudini di ragionamento corretto, ma di allenare gli alunni a prendere coscienza degli stessi processi del loro pensiero.

Il pensiero, nei suoi vari aspetti, è da sempre considerato una caratteristica peculiare dell'uomo, la manifestazione più alta delle sue capacità: formarlo e svilupparlo diventa compito specifico di ogni progetto educativo.

Purtroppo, in tempi lontani si è assistito ad una sterile e controproducente lotta per la supremazia dei valori propri del pensiero linguistico – espressivo su quello matematico-scientifico.

Ora, finalmente, questa fase sembra del tutto superata e risulta ovvia la constatazione di quanto sia importante sviluppare anche la seconda forma.

Queste istanze sembrano essere ben presenti nei Programmi di matematica della scuola di base.

Al riguardo, infatti, si dice che: <<L'educazione matematica contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti: di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo e quindi di verifica o smentita. Essa tende a sviluppare, in modo specifico, concetti, metodi e atteggiamenti utili a produrre le capacità di ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà e a formare le abilità necessarie per interpretarla criticamente e per intervenire consapevolmente su di essa. [...] si favorirà così la formazione di un atteggiamento positivo verso la matematica intesa sia come valido strumento di conoscenza e di interpretazione critica della realtà sia come affascinante attività del pensiero umano>>.

Si evidenzia quindi, in sintesi, la necessità del potenziamento di facoltà mentali e dell'acquisizione di processi e procedimenti di matematizzazione ed applicazione al fine di rappresentare e controllare la realtà.

Può destare sorpresa, affermare che la matematica potenzia l'intuizione e l'immaginazione specie in chi ha avuto solo l'esperienza di un insegnamento matematico basato sull'acquisizione di definizioni e tecniche. Ma nonostante ciò, chi ha percorso questo cammino sa bene come l'intuizione sia il punto di partenza di ogni processo di astrazione e di come il sapersi porre dei problemi sia più produttivo del saperli solo risolverli.

Ciò non significa ovviamente porsi in atteggiamento di creatività irrazionale dal momento che è pur sempre vera l'affermazione di Polya (1979): << Uno sciocco può porre più domande di quante non ne sappiano risolvere nove saggi >> (pp.85).

Ove la matematica dà il suo massimo e più qualificato contributo è però nell'aspetto razionale del pensiero.

L'astrazione, la generalizzazione, la simbolizzazione sono modi particolari della nostra attività razionale, ma sono anche le caratteristiche fondamentali dell'attività matematica. Questa, infatti, muovendo dall'osservazione della realtà e dalla manipolazione del concreto, attraverso le operazioni mentali di discriminazione, confronto, associazione e tenuto conto di ciò che è invariante, elabora il modello generale, concettuale, simbolico, rappresentativo della realtà stessa. Questo modello, questo concetto può diventare a sua volta un concreto, innescando così un processo che tende a modelli sempre più astratti e generali. Nel contempo si attiva anche una sorte di spirale estremamente importante per la formazione del pensiero: partendo dalle operazioni sull'oggetto concreto, acquisita una prima astrazione ed operando una successiva generalizzazione, sarà possibile riaffrontare il concreto con strumenti ben più potenti.

Per questo è stato più volte affermato che la matematica più che un insieme di contenuti è soprattutto un modo di pensare: <<La matematica

non è una materia, è un metodo [...] il metodo che porta da situazioni fisiche a situazioni mentali, da strutture reali a strutture astratte, che però hanno a che fare con le strutture reali di partenza...>>(op. cit. Mialeret, pp.34).

Proprio perché è metodo importa dunque più “come si fa” che non “ciò che si fa”.

A livello di scuola elementare l’acquisizione del metodo si realizza in sintonia con la formazione del pensiero mediante l’organizzazione di esperienze e la riflessione su di esse.

Alla riflessione dovrà seguire l’acquisizione della capacità di prendere nota delle osservazioni e delle scoperte; ed infine di matematizzare la realtà, mediante la costruzione di un modello (geometrico, aritmetico...) sul quale e con il quale saper simulare la realtà stessa.

L’obiettivo può apparire ambizioso, ma è sicuramente perseguibile senza nascondere i pericoli insiti in ogni precocismo, ma neppure dimenticando l’ipotesi bruneriana, l’attività intellettuale è ovunque la stessa, alle frontiere della conoscenza come in un’aula di terza elementare, la differenza è nel grado, non nella specie.

1.2 La matematica nasce dal problema

<<Educare alla matematica – scrive il Pellerrey (1984) – significa in primo luogo abituare a porsi problemi significativi, a tradurli in rappresentazioni matematiche adatte, a controllarne la risolubilità, a trovare e interpretare correttamente e validamente le soluzioni più adeguate>> (pp.107-108).

Il punto di partenza per l'insegnamento della matematica è l'individuazione di un problema e la sua conseguente soluzione.

I programmi di matematica per la scuola elementare, valorizzano i problemi e ad essi fanno riferimento. E' una scelta fortemente innovativa, ma ben motivata, si afferma, infatti: <<Il pensiero matematico è caratterizzato dalla attività di risoluzione di problemi e ciò in sintonia con la propensione del fanciullo a porre domande e a cercare risposte>>.

Si tratta proprio di una nuova e precisa indicazione metodologica che riguarda l'intero processo di apprendimento della matematica e che cerca di conciliarsi con l'esigenza psicologica del bambino. In altre parole la matematica non si insegna per *numeri* e per *operazioni*, ma si insegna per *problemi*.

In questo secolo, infatti, la domanda di formazione matematica è profondamente mutata. Dalla richiesta di abilità di calcolo e di misurazione adeguate a chi doveva operare in una società inizialmente industrializzata, si è passati ad esigenze ben più profonde e complesse. Oggi è necessario saper usare concetti, principi e procedimenti matematici adeguati a leggere, interpretare, prevedere la realtà sia naturale, che sociale e tecnologica per poter così valutare, decidere ed agire in modo coerente e produttivo.

Il cuore di questo complesso di qualità personali sta nella capacità di soluzione di problemi tramite forme rappresentative ed elaborative di tipo matematico.

Non è tanto l'acquisizione di abilità sempre più veloci e precise di calcolo, cosa ormai definitivamente resa secondaria dalla presenza di macchine, quanto quella di individuare quali operazioni e procedimenti siano più adeguati alla situazione e al tipo di questioni affrontate.

Per questo è necessario:

- sapere inquadrare con chiarezza situazioni e problemi;
- isolare i punti di difficoltà e trovare valide forme rappresentative;
- operare su queste rappresentazioni fino ad individuare una configurazione che risulti più rispondente alle necessità emerse;
- tradurre la soluzione prefigurata nella realtà concreta da cui si era partiti.

Capitolo II I problemi di matematica

2.1 Che cos'è un problema?

Nel linguaggio comune il termine “problema” viene adoperato spesso in luogo di parole come <<difficoltà>>, <<ostacolo>>, <<dubbio>>, <<tormento>>, ecc.

Per Duncker (1973) il problema sorge quando un essere umano ha una meta e non sa come raggiungerla. Per la psicologia della gestalt (Kanizsa,1973) un problema sorge quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un'attività istintiva o attraverso un comportamento appreso. Il Colozza ancora nel 1899 osservava che ogni problema è un'indagine proposta alla nostra mente, una sfida all'intelligenza individuale. Per Polya (1979) <<se un desiderio fa venire subito in mente, senza alcuna difficoltà, qualche azione ovvia che, verosimilmente, ci fa ottenere l'oggetto desiderato, non c'è problema. Se, invece, non mi viene in mente nessuna di tale azione, ecco il problema. Quindi avere un problema significa: cercare coscientemente un'azione appropriata per ottenere uno scopo chiaramente concepito ma non immediatamente ottenibile [...]. Un problema è un “grande”problema se è molto difficile, è solo un “piccolo” problema se è solo di piccola difficoltà>> (pp.131).

Per Mosconi e D'Urso (1973) <<il problema non è un dato, un fatto naturale, ma è esso stesso – non solo la sua soluzione – un prodotto psicologico [...]. Vi è problema solo quando la mente crea o determina il problema: vi è problema solo nella dimensione psicologica, non in quella naturale o oggettiva>> (pp. 31).

Insomma un problema diventa tale solo quando qualcuno lo riconosce e lo vive come suo.

Nasce allora in lui uno stato di insoddisfazione che è la premessa di una tensione cognitiva; il soggetto vive quella situazione come insoddisfacente

e quindi come problematica fin quando non riesce a trovare da sé o non gli vengono forniti gli elementi sufficienti per annullare quella tensione.

Il problema può nascere nelle più diverse situazioni e non necessariamente solo da quelle matematiche. Abbiamo così problemi di ordine scientifico, storico, linguistico, pratico, ecc.

Il problema inoltre non è, né deve essere, soltanto quello che comporta il calcolo aritmetico, ma è anche quello che può essere risolto utilizzando conoscenze, concetti, procedimenti più generalmente matematici (problemi di logica, di probabilità, di scoperta di un algoritmo di un'azione complessa, ecc.).

C'è poi una differenza tra problema e problema per quanto riguarda la motivazione.

Una situazione può essere problematica per un bambino e viceversa non esserlo affatto per un altro. Quest'ultimo allora non è indotto a cercare consapevolmente un'azione adeguata per risolvere la situazione. Insomma non esiste << un >> problema valido per tutti e l'insegnante deve avere l'arte di << trovare >> problemi che coinvolgano pure bambini apparentemente disinteressati.

Queste prime riflessioni consentono già di distinguere il problema dall'esercizio.

Un problema è una situazione che differisce da un esercizio perché colui che deve risolverlo non ha disposizione un procedimento o algoritmo che possa con certezza condurlo a soluzione; per cui una stessa situazione può venir intesa come problema da una persona e come esercizio da un'altra.

La sostanziale differenza tra problema ed esercizio è chiaramente espressa dalle parole dell'Antiseri (1985) quando scrive: <<un problema è una domanda che, per essere soddisfatta, richiede una teoria nuova (una teoria non ancora conosciuta da chi si pone il problema), mentre l'esercizio è una domanda che presuppone già una teoria risolutiva>> (pp.8).

Con ciò non si intende abolire gli esercizi nell'attività scolastica. Essi vanno mantenuti nella programmazione, ma solo dopo che lo scolaro si è cimentato con il problema e cioè dopo la fase nella quale ha dovuto cercarsi le soluzioni. Lo scopo dell'esercizio è di consolidare e rendere sicuro quanto l'alunno ha precedentemente appreso.

Anche il grado di difficoltà del problema è importante per suscitare quella tensione cognitiva a cui abbiamo accennato.

Dove non c'è difficoltà non c'è problema. O meglio, se non c'è uno scarto sia pur minimo tra ciò che il bambino conosce e ciò che gli viene richiesto, non possiamo parlare di problema, ma solo di esercizio.

D'altra parte è anche vero che, se viene superata la soglia delle capacità infantili, lo scolaro si trova di fronte ad una situazione che è al di sopra delle sue possibilità di controllo e di soluzione e, quindi il problema proposto perde la sua validità di strumento efficace di apprendimento, perché è troppo difficile.

Più che di problema, dunque si dovrebbe parlare, come osservano opportunamente gli attuali programmi, di "situazione problematica".

Le situazioni problematiche vanno organizzate tenendo inoltre presente che l'alunno è stimolato ad uscire da esse finché il suo impegno è retto da curiosità, da interesse.

Tutto questo significa che la presentazione del problema necessita di un clima idoneo. Inoltre l'insegnante deve saper opportunamente creare le condizioni perché l'interesse e la curiosità del bambino rimanga sempre vivi, anche facendo ricorso alla novità, all'irreale, all'imprevedibile.

2.2 I problemi nei programmi della scuola elementare

Alla parola “problema”, come abbiamo visto, alcuni studiosi hanno dato diverse definizioni. La scuola per lo più identifica il termine con i tradizionali problemi di tipo aritmetico o geometrico cioè con l’applicazione di regole fisse a situazioni già schematizzate.

In realtà, i Programmi di matematica per la scuola elementare (D.P.R. n. 104 12 febbraio 1985) e i Nuovi Curricoli per la formazione di base (in attuazione della legge 30 del 2 febbraio 2000) non fanno riferimento a questo modo di intendere il problema ma ad una concezione più ampia che è stata oggi elaborata dall’odierna ricerca matematica.

Leggendo, infatti, i testi programmatici è possibile rintracciare alcune definizioni specifiche.

I problemi sono visti, infatti, come:

- Caratteristica del pensiero matematico;
- Punto di partenza per la fondazione e costruzione delle conoscenze;
- Verifica di:
 - Che cosa l’alunno ha appreso;
 - Quali strumenti e strategie utilizza;
 - Quali difficoltà incontra.

L’aspetto innovativo fondamentale, da cui derivano come logica conseguenza gli altri, è la stretta correlazione evidenziata tra il problema e il pensiero in generale (come espressione dell’intelligenza umana) e di quello matematico in particolare. Se infatti, la risoluzione dei problemi è il tipo più caratteristico e peculiare del pensiero volontario (William James), è evidente come si debba al termine “problema” un’accezione più ampia di quella comunemente intesa e riscontrabile nei sussidiari ed eserciziari e cioè quella di un racconto che presenta situazioni con elementi numerici e pone una o più domande la cui risposta richiede l’esecuzione di operazioni aritmetiche.

L'estensione dell'accezione è importante soprattutto dal punto di vista metodologico: presupponendo di dover affrontare problemi sia di contenuto matematico, sia di carattere generale, diventa fondamentale il ricorso alle strategie proprie della metodologia della ricerca.

Occorre, infatti, che i bambini proponano, senza paura di sbagliare, le loro ipotesi risolutive e che le mettano alla prova.

La preoccupazione sostanziale di questi programmi è, infatti, di evitare che nella scuola continuino a metter radici forme di insegnamento ripetitivo durante le quali lo scolaro impara contenuti, principi, regole, senza alcuna possibilità di verifica personale, senza un impegno diretto di scoperta.

Inoltre, un altro aspetto importante a cui spesso i testi programmatici, prima menzionati, fanno riferimento è la **praticità dei problemi**.

Occorre tener presente, infatti, che lo scopo della matematica che si studia nelle scuole elementari è di insegnare a risolvere i problemi numerici che si incontrano nella vita pratica.

Le nozioni matematiche di base vanno, infatti, fondate e costruite partendo da situazioni problematiche concrete, che scaturiscano da esperienze reali del fanciullo e che offrano anche l'opportunità di accertare quali apprendimenti matematici egli ha in precedenza realizzato, quali strumenti e quali strategie risolutive utilizza.

I problemi presi in esame, pertanto, saranno sempre desunti dalla vita reale e dall'esperienza del fanciullo. Come, infatti, afferma Rizzi (1986): <<i>problemi debbono, sin dall'inizio, inserirsi nel mondo del bambino. Così un campo di forma rettangolare o un solido a forma di piramide non ci sembrano buoni inizi, perché siamo sicuri che per gran parte dei bambini non sono esempi stimolanti>>(pp. 121).

Il principio che il problema debba essere ritrovato nelle esperienze infantili non vuol dire però che automaticamente tutte le esperienze infantili siano problematiche o possano essere trasformate in problemi.

Al contrario, bisogna prevedere che una scelta di esperienze sia in rapporto agli obiettivi e alle conoscenze matematiche in quel momento già possedute dal fanciullo.

Ad un certo momento del processo di apprendimento, infatti, non è più sufficiente partire da situazioni problematiche concrete, ma bisogna anche prevedere situazioni dalle quali far emergere problemi specifici. Al riguardo appare necessario che l'insegnante proponga una domanda alla quale nessuno scolaro aveva pensato, formuli un'ipotesi di soluzione diversa, suggerisca il ricorso a risoluzioni già sperimentate in altri casi.

Nell'insegnamento tradizionale della matematica il problema era sempre presentato in maniera uniforme e secondo codici e procedure molto rigidi. Doveva avere una e una sola soluzione, i dati del problema dovevano essere solo quelli necessari e sufficienti per poter giungere al risultato, la domanda doveva condurre in modo ineluttabile ad un tipo di risposta predeterminato e la risposta a sua volta non solo era l'unica possibile, ma era anche considerata inevitabilmente esatta, senza concedere nulla all'approssimazione.

I programmi del 1985 in realtà portano ad una rivoluzione in questo settore. Essi invitano l'insegnante a tener conto nel proprio insegnamento di tutta una serie di possibilità problematiche che sono nuove e diverse rispetto al modo tradizionale di considerare il problema.

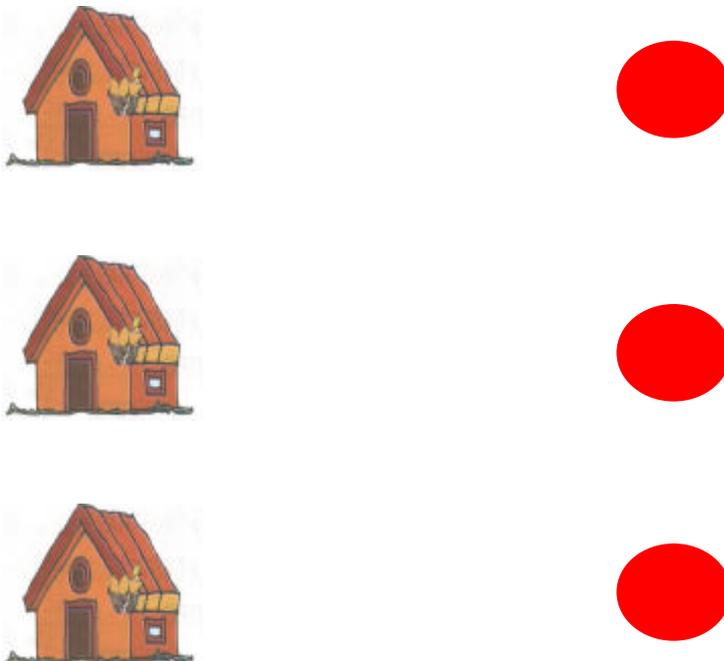
Nella scuola (come del resto succede nella realtà) il bambino deve essere messo di fronte a questioni più complesse:

a) Problemi che *non hanno risposta*.

E' assurdo, ad esempio, pensare di poter conoscere l'ultimo numero della serie dei numeri naturali ed è ugualmente impossibile trovare due numeri naturali (escludendo l'1) il cui prodotto sia un numero primo (3,5,7...).

Naturalmente non è tanto importante comunicare al bambino queste cose, ma quanto metterlo di fronte a scoperte di questo tipo stimolandolo a cercare i motivi per cui non è possibile raggiungere una risposta.

Impossibili sono non solo problemi aritmetici, ma anche problemi geometrici. Così ad esempio nella situazione schematizzata nel disegno che segue, fatta di tre case e di tre pozzi,



non si possono in alcun modo tracciare le strade in maniera che ogni casa si congiunga con ognuno dei tre pozzi senza dover ricorrere necessariamente a incroci, a gallerie o a ponti.

b) Problemi che offrono possibilità di risposte *diverse, ma tutte ugualmente accettabili.*

Un esempio è costituito dai seguenti quesiti :

- Nella vetrina di un negozio sono esposte delle gonne. Cinque sono rosse e tre sono a pieghe. Quante sono in tutto le gonne esposte? (in questo caso evidentemente le risposte esatte possono essere: 8, 7, 6,5).
- Scrivi il numero che puoi formare usare le cifre 1,2,3.
- Nella vetrina di un negozio di lampadari se ne vedono esposti a tre e a due luci; si contano in tutto 20 lampadine. Quanti sono i lampadari a tre luci? Quanti quelli a due?

N. lampadari a 2 luci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N. lampadari a 3 luci	6	/	/	4	/	/	2	/	/	/

c) Problemi con risposte che *richiedono approssimazione.*

Problemi di questo tipo sono comunissimi: ad es. per saldare una certa cifra, l'importo viene arrotondato in più o in meno. Ma è soprattutto nell'ambito della geometria che si incontrano problemi di questo genere. Quando si tratta ad esempio di calcolare la lunghezza esatta dell'aula o del banco o quando si deve trovare il numero di quadretti necessari per ricoprire una figura irregolare a contorni curvilinei.

d) Problemi con *dati carenti.*

Ad esempio:

- Daniela prepara una torta con 20 uova, 200 grammi di burro e 500 di farina. Quanto le viene a costare la torta, tralasciando la spesa per la cottura?²

In problemi di questa categoria i dati mancanti possono essere integrati dagli stessi alunni con opportune ricerche. Quasi tutti i problemi che si presentano nella vita sono di questa natura; saper risolverli significa, in primo luogo, saper trovare quali sono i dati mancanti, come e dove trovarli.

² Il problema è tratto da: SPERANZA F.- MEDICI CAFFARRA D. – QUATTROCCHI P. (1986), *Insegnare la Matematica nella scuola elementare*, Bologna, Zanichelli, pp.281

e) Problemi con *dati sovrabbondanti*.

Vediamo un esempio:

- Il perimetro di un rettangolo è 42 cm, la base misura 6 cm e l'altezza supera la base di 9 cm. Calcolare l'area del rettangolo³.

Riconoscere la presenza di dati sovrabbondanti è obiettivo non solo della matematica, ma diventa importante per la capacità di muoversi ed agire nella stessa vita quotidiana nella quale siamo sommersi da una molteplicità di informazioni tra le quali è necessario saper individuare quelle essenziali.

f) Problemi con *dati contraddittori*.

Come ad esempio, il seguente:

- Quante monete da 50 centesimi occorrono per formare 2,30 centesimi?

Riconoscere in un problema la presenza di dati contraddittori equivale a riconoscere l'impossibilità di risolvere il problema stesso. Questo presuppone capacità di comprensione del testo e quindi anche capacità di individuare l'ostacolo o gli ostacoli che impediscono qualsiasi strategia risolutiva. Non è cosa da poco. Tutto questo concorre a far uscire il bambino da una concezione della matematica fatta da risposte rigide. Di fronte a queste situazioni bisogna però chiedere allo scolaro di scegliere le soluzioni più pratiche o quelle che, per le informazioni disponibili,

³ *Ibidem.*

risultano le più verosimili o quelle infine più adatte per ottenere un risultato.

2.3 Come si risolve un problema

Risolvere un problema significa secondo Varagnolo (1986): <<ricercare una sequenza di azioni che conduce dalla conoscenza di certe informazioni iniziali alla conoscenza di certe informazioni finali, dette risultati, che non comportino alcuna contraddizione con le informazioni iniziali>>(pp.10).

E' un processo che teoricamente non si conclude mai perché ogni soluzione, combinandosi con altri elementi, può determinare una nuova situazione problematica.

Lo studio della soluzione dei problemi è un ampio capitolo della psicologia sperimentale.

Il merito di avere inizialmente valorizzato questo tema spetta ai gestaltisti i quali hanno ravvisato nella soluzione di un problema il tipico atto di intelligenza. A segnare una data importante in questo campo di studio furono le ricerche di Kohler (1921) sulle scimmie antropoidi⁴.

Nel corso degli anni la soluzione dei problemi è diventata tuttavia oggetto di studio da parte di psicologi di formazione diversa e di diversi orientamenti teorici.

Al riguardo, l'opera del matematico ungherese George Polya (1945) si può considerare seminale per tutte le ricerche successive sul problem - solving.

Secondo G. Polya (1976) <<il processo di risoluzione di un problema si articola in quattro fasi ben distinte:

1. Comprensione del problema;
2. Compilazione di un piano di risoluzione
3. Sviluppo del piano di risoluzione;
4. Verifica del procedimento >> (pp.25)

⁴ Per un maggior approfondimento si veda:

KOHLER W. (1920), *L'intelligenza nelle scimmie antropoidi*, Firenze, Giunti – Barbèra. Tit.orig.: *Intelligenzprufungen an Menschenaffen*, Berlin, Springer, 1960.

Ciascuna di queste fasi ha un'importanza particolare.

Nella **prima fase** si comprende il problema, cercando di rispondere alle seguenti domande:

- *Qual è l'incognita?*
- *Quali sono i dati?*
- *Qual è la condizione?*
- *E' possibile soddisfare la condizione?*

L'alunno, pertanto, dopo aver letto più volte il testo del problema, ne individua le parti principali con molta attenzione e, da vari punti di vista. Ed inoltre, se vi è una figura connessa con il problema, egli cercherà di disegnarla, segnando opportunamente sopra di essa l'incognita ed i dati.

Nella **seconda fase** si compila il piano di risoluzione.

Qui, il cammino che dalla comprensione del problema conduce alla concezione di un piano, può essere lungo e tortuoso.

E, secondo l'autore <<il successo dipende da molti fattori; sono indispensabili non poche cognizioni già acquisite, un particolare abito mentale, la facoltà di sapersi concentrare sul problema ed infine un pizzico di fortuna>> (pp. 27).

La compilazione di un piano è l'impresa più ardua nella risoluzione di un problema; pertanto, essa può procedere per gradi.

Inizialmente si determinano i legami che intercorrono fra i dati e l'incognita. E solo dopo, si compila un piano di risoluzione indicando solo per linee generali, quali calcoli, oppure quali costruzioni si devono eseguire per ottenere l'incognita.

Nella **terza fase** si procede allo sviluppo del piano.

Lo sviluppo del piano è invece un'impresa molto più semplice che richiede soprattutto pazienza e precisione.

Il piano fornisce un abbozzo generale; ci si deve convincere che i dettagli rientrano necessariamente in tale traccia e quindi vanno esaminati ad uno ad uno, pazientemente, finché ciascuno di essi risulti perfettamente chiaro e non resti punto oscuro ove possa celarsi qualche errore.

Ed infine, nella **quarta fase** si esamina attentamente il risultato ottenuto procedendo alla sua verifica ed alla sua discussione.

Spesso tale fase viene frequentemente saltata. Persino gli studenti migliori, quando hanno ottenuto la soluzione del problema e hanno copiato in bella il loro problema, chiudono il quaderno, passando ad altro. In tale modo, essi trascurano una fase del lavoro tanto importante quanto istruttiva. Infatti, conseguito il risultato finale, proprio attraverso la considerazione di questo e l'esame del procedimento con cui esso è stato ottenuto, l'alunno potrebbe approfondire le proprie conoscenze e sviluppare la propria abilità a risolvere problemi.

Oltre George Polya anche altri autori hanno dato il loro contributo, proponendo un certo numero di modelli e descrizioni di processi che vengono attivati per raggiungere la soluzione di un problema. Secondo Rosetta Zan (1999) <<il processo di risoluzione di un problema si articola in alcune fasi tipiche: pianificazione; esecuzione; controllo>>.

Secondo Ashman e Conway (2001) <<il problem solving è una procedura sistematica che implica l'esame di tutte le informazioni e l'utilizzo razionale di tutti i metodi di cui disponiamo per affrontare un problema.

Esso può essere diviso in tre fasi principali:

1. *Analisi del problema.* La persona riceve e interpreta le istruzioni e definisce una procedura appropriata a quel tipo di problema. Questa fase rappresenta il primo approccio al problema, soprattutto se esso è di tipo sconosciuto. Se il problema è noto, questa fase viene eseguita molto velocemente.

2. *Applicazione della soluzione.* La persona utilizza concretamente le procedure (attività o elaborati) adatte al compito e le combina tra loro, analogamente ad un procedimento di dimostrazione in geometria. La sequenza delle attività può, comunque, essere ridotta ad un'unica attività se il tempo a disposizione è breve. Questa fase, quindi, trasforma le conoscenze in un insieme di operazioni di soluzione.
3. *Estensione.* Questa fase si applica quando l'abilità è ormai consolidata. Per esempio, una persona può affinare il proprio metodo di problem – solving cercando percorsi alternativi che possono portare ugualmente alla soluzione del problema. Gli esperti sono molto giudiziosi nella scelta del percorso e le conoscenze apprese nel corso della soluzione del problema possono modificare il loro metodo di ricerca. Tre sono i meccanismi che facilitano questa attività di ricerca. La generalizzazione, che consiste nel confronto tra tecniche diverse e nell'identificazione di elementi di esse che possono venire impiegati in tutta una serie di situazioni. La generalizzazione implica, dunque conoscenze che vanno oltre la messa a punto e l'uso delle tecniche iniziali. Vi è poi la discriminazione, che limita l'applicazione delle tecniche solo alle situazioni in cui esse possono venire impiegate con successo. Prende spesso la forma di un'operazione di controllo che verifica se il percorso scelto è adatto al problema. Da non dimenticare il rinforzo, che consolida le tecniche efficaci e indebolisce quelle più problematiche>> (pp. 119-120).

Bransford e Stein (1984) parlano di cinque componenti (IDEAL):

- *Identificazione*; identifica l'esistenza di una situazione problematica.
- *Definizione*; cerca di precisarla e di descriverla nel modo più accurato possibile.

- *Esplorazione*; esplora le possibili soluzioni alternative. Per far questo spezza il problema in sottoproblemi più affrontabili, richiama casi speciali già incontrati, lavora a ritroso.
- *Azione*; agisce sviluppando le ipotesi fatte.
- *Osservazione*; osserva i risultati ottenuti dalle operazioni eseguite e se si adattano bene ai termini del problema.

Scendendo più nel particolare, Mialaret (1969) individua, sfruttando tutti i metodi della psico – pedagogia, dall’analisi clinica più sottile fino alla più ampia e più tecnicamente elaborata delle inchieste, alcune grandi categorie di comportamento sui modi di procedere degli alunni durante la soluzione dei problemi.

Si trova innanzi tutto l’alunno che, ha una manifesta attitudine logica e che si comporta come si comporterebbe un adulto che ragiona matematicamente: questi casi senza essere rari non sono tuttavia molto frequenti e sono quelli dei ragazzi particolarmente dotati. Essi sono capaci di fare l’analisi del problema e di spiegare perché procedono in questo o in quell’altro modo; non soltanto il loro ragionamento è corretto, ma sono in grado di giustificare il loro itinerario intellettuale e, di prendere coscienza di tutti i loro modi di procedere.

In una categoria vicina a questa, si trovano quegli alunni che sono capaci di risolvere correttamente il problema senza saper spiegare le ragioni del loro modo di procedere.

La presa di coscienza delle operazioni mentali, che qui manca, esige in effetti la possibilità di un ripiegarsi su se stessi e suppone un certo livello di evoluzione psicologica.

Incontriamo poi quegli alunni che, senza trovare immediatamente la soluzione logica del problema, sono capaci di brancolare con intelligenza.

La scoperta della soluzione logica suppone la capacità di dominare largamente la questione proposta, e certi ragazzi non possono avere senz'altro un campo mentale così esteso. Essi procedono allora, a tentoni, ma i risultati di questi brancolamenti portano a poco a poco alla scoperta della soluzione.

Alcuni ragazzi si comportano diversamente. Essi ricercano delle soluzioni – tipo e applicano automatismi belli e fatti.

Altri sono incapaci di vedere il problema nel suo insieme.

Questi ragazzi danno l'impressione che il loro campo di coscienza sia eccessivamente ristretto e che risulti loro impossibile prendere in considerazione tutti gli elementi del problema. Non ne vedono che una parte; vale a dire, quando essi considerano una parte dell'enunciato dimenticano il resto.

Continuando ancora troviamo quei ragazzi che, davanti a un insieme di dati numerici e subito dopo un esame sommario dell'enunciato, si gettano letteralmente a capofitto nei calcoli.

Per loro un problema si riduce a operazioni da seguire; di fronte ad alcuni dati numerici e ad una vaga idea di riunione, si mettono ad addizionare i numeri senza avere alcuna visione d'insieme del problema da risolvere.

Quando gli si chiede perché hanno proceduto a quel modo, piuttosto che in un altro, non danno alcuna risposta se non che, in presenza di numeri, essi o vanno addizionati o vanno sottratti...

L'autore distingue, inoltre, dalla precedente categoria quei ragazzi che sono incapaci di comprendere il testo stesso dell'enunciato.

Qui potremmo trovarci in presenza di due categorie di ragazzi: quelli che non presentano un livello mentale sufficiente, per i quali la mancata comprensione corrisponde ad un quoziente d'intelligenza inferiore alla media, e quelli la cui attività intellettuale invece si blocca in presenza di un vocabolario nuovo e troppo complicato.

Ed infine, ci sono anche quei ragazzi che fanno cose qualunque, non importa quali.

Si ha l'impressione di trovarsi di fronte ad alunni insufficientemente dotati intellettualmente, oppure che essi, presi dal panico davanti ad un enunciato, facciano una cosa purchessia perché sanno che occorre fare qualcosa, e questo è più importante che non trovare la soluzione giusta.

Nella situazione creata dalla presenza di un enunciato, compare una sorta di comportamento automatico e, siccome occorre fare qualcosa, il ragazzo si precipita su non importa che, e attraverso una specie di comportamento magico, rituale, trasforma i dati del problema in elementi della soluzione.

Capitolo III *La ricerca*

3.1 Presentazione del lavoro sperimentale

Finalità generale

- Scoprire le concezioni che i bambini hanno sui problemi.

Questa finalità è stata specificata ulteriormente in:

- Scoprire che cosa è per i bambini un problema di matematica;
- Scoprire le convinzioni che i bambini hanno sui comportamenti da mettere in atto di fronte al problema.

Ipotesi generale

- Gli alunni di 7 – 8 anni posseggono le loro convinzioni su cosa sia un problema di matematica e sui comportamenti da mettere in atto durante i processi di soluzione.

Ipotesi operativa

- Esistono una serie di cause, alcune individuabili nelle concezioni che i bambini hanno su cosa sia un problema di matematica, che concorrono in percentuale diversa a ciò che essi pensano siano i comportamenti da mettere in atto di fronte alla risoluzione di un problema matematico.

Campione

L'indagine è stata rivolta a 60 bambini (7 – 8 anni) frequentanti la 3^a A – 3^a B - 3^a C della scuola elementare del circolo didattico Edmondo De Amicis di Palermo nei mesi di novembre – dicembre 2002.

Metodo per la raccolta d'informazioni

Il lavoro d'indagine è consistito nell'attuazione di un'unica fase.

Per raggiungere gli obiettivi prima esposti è stata somministrata un'intervista semi-strutturata.

L'intervista è stata condotta, all'interno della classe durante le ore di matematica, in presenza della maestra Ferlito Santa, con gruppi di 4-5 bambini per volta (14 gruppi in tutto) scelti secondo un campionamento casuale.

Non si è stabilito, a priori, nessuna regola precisa circa la durata di ogni intervista.

Le risposte sono state tutte registrate e, in seguito annotate su delle apposite schede già strutturate che contenevano le analisi a priori costruite in tre momenti differenti:

- durante la costruzione dell'intervista;
- dopo un pre-test effettuato su due bambini di terza elementare;
- dopo la somministrazione del questionario al campione.

Pertanto, le risposte non previste sono state regolarmente aggiunte.

Le domande aperte poste ai bambini erano state stabilite in anticipo e avevano due obiettivi:

1. Scoprire che “ cosa è per i bambini un problema di matematica” (domande A - B -C).

In particolare:

Nella domanda “A” i bambini erano invitati a dire che cosa è per loro un problema di matematica. In questo modo erano stimolati a riflettere sulle proprietà del problema e a pensare, anche se non consapevolmente, ad una sua prima definizione.

Nella domanda “B” gli allievi dovevano scrivere il testo di un problema di matematica indicandone le caratteristiche.

Nella domanda “C” ad ogni alunno era chiesto di riconoscere tra i testi proposti (senza risolverli), quali a suo parere erano problemi di matematica, spiegandone il perché. A tal proposito venivano presentati 8 testi di problemi diversamente caratterizzati.

I testi 1 e 2 hanno configurazione tipica di problemi di compravendita e, hanno dati numerici. Ma non sono problemi poiché lo stato meta è totalmente avulso dal contesto e, la soluzione non è contenuta nell’enunciato.

Il testo 3 è un problema di vita reale, privo di dati numerici, a soluzioni multiple ma finite.

Il testo 4 dovrebbe sollecitare il senso comune, l’esperienza, l’osservazione e forse anche conoscenze scolastiche.

Il testo 5 presenta due caratteristiche: ha un dato non numericamente precisato, definito approssimativamente; la domanda è all’inizio dell’enunciato. E’ tuttavia un problema risolvibile con un’unica operazione.

I testi 6 e 7 posseggono dati numerici ma le situazioni sono inusuali per gli allievi; la soluzione non è conseguenza di operazioni sui dati numerici ma è la scelta fra un numero definito di possibilità.

Il testo 8 contiene dati numerici ma non ha soluzione poiché manca l’unico dato (numerico) che la rende possibile.

2. “ Conoscere le convinzioni che i bambini hanno circa i comportamenti da mettere in atto di fronte al problema: le domande permettono di ricostruire la rappresentazione dei processi di risoluzione (domanda E - F - G - H), degli obiettivi e, dell’attività di risoluzione di problemi (domanda D).

Analisi dei dati

L’analisi dei dati è stata ottenuta attraverso l’applicazione della statistica descrittiva (frequenza relativa percentuale) e attraverso l’uso del programma Chic⁵ che permette di studiare le implicazioni fra gli item.

⁵ I grafici elaborati dallo Chic danno la possibilità di controllare e scegliere il livello di accettabilità delle implicazioni desunte e le implicazioni stesse sono stabilite in accordo con le leggi probabilistiche della statistica inferenziale (GRAS P. (1997), “ Metodologia di analisi d’indagine”, *Quaderni di ricerca in didattica*, 7, 99-109).

3.2 La sequenza delle domande nell'intervista semistrutturata

- A. Che cos'è un problema di matematica?
- B. Quali caratteristiche deve avere per chiamarsi “problema di matematica”? Fai qualche esempio.
- C. Quali fra i seguenti testi è un problema di matematica e quale non lo è? Perché?
1. “ Giuseppe ha pescato 15 pesci. Suo fratello Gianni ne ha pescati 12. Il papà sarà soddisfatto della pesca, se rivende il pesce pescato a 30 euro?”
 2. “ Una torta costa 5 euro; un biglietto per lo stadio costa 2 euro. Quanto costerà un biglietto per il cinema?”
 3. “ Stai correndo inseguito da un compagno che ti vuole picchiare. Ad un certo punto la strada che hai preso è sbarrata da un muro. Puoi scavalcarlo o girarci intorno: cosa farai?”
 4. “Devi misurare la larghezza e la lunghezza della tua stanza e devi dire se la sua forma è rettangolare o quadrata. Hai a disposizione un rotolo di spago”.
 5. “Quanti soldi avevi in tasca se hai speso 7 euro in giornalotti, 2 euro in rosticceria e 3 euro in figurine, e ti rimangono ancora 20 euro?”
 6. Per il tuo compleanno ti sono state regalate 25 euro. Puoi comprarti qualcosa o metterle nel salvadanaio: cosa farai?
 7. Hai letto su un libro una storia di avventure che ti è molto piaciuta. Vorresti riviverla rappresentandola con i tuoi compagni. Ma siete solo in 4 e i personaggi della storia sono invece 5. Cosa pensi di fare?

8. La mamma va a fare la spesa e compra 4 pacchi di sale fino, 2 pacchi di riso e 3 di caffè a chicchi. Per la strada le cade la borsa e si rompe 1 confezione di sale e 1 di caffè. A casa riesce a dividere il sale dal caffè. Quanto tempo ci avrà messo?

D. Secondo te, a cosa serve un problema di matematica?

E. Nel risolvere un problema cosa ti interessa di più?

F. Se sbagli un problema, generalmente a cosa pensi sia dovuto?

G. Quando devi risolvere un problema di matematica, cosa fai ?

H. Per risolvere un problema cosa bisogna saper fare?

3.3 Analisi a priori dei comportamenti attesi

Accanto ad ogni risposta ipotizzata e non⁶, sono inseriti in percentuale i risultati della somministrazione. In alcuni casi si farà riferimento alle interviste che, riportate fedelmente con errori ortografici e/o sintattici, saranno introdotte da una sigla: il primo numero (da 1 a 14) indica il gruppo di appartenenza, il secondo (da 1 a 60) il numero progressivo delle interviste all'interno del gruppo e, la lettera finale (A,B, oC) la classe.

Domanda A. Che cos'è un problema di matematica?	Tot. Risp.	Tot.%
A1: un testo in cui ci sono dei numeri	18	30%
A2: un testo in cui c'è una domanda posta alla fine	4	7%
A3: una situazione difficile da risolvere	0	0
A4: un esercizio in cui bisogna chiedere le operazioni da fare – e poi farle	0	0
A5: un esercizio che si fa nell'ora di matematica	9	15%
A6: delle operazioni in successione	0	0
A7: un quiz che serve per vedere se hai capito ciò che hanno spiegato in matematica	0	0
<u>A8</u> : afferma "... per me un problema è una cosa che si fa sul quaderno a quadretti..."	1	2%
A9: un testo in cui ci sono dei numeri e una domanda	4	7%
A10: una situazione problematica che può essere risolta anche con i numeri	14	23%
A11: un tema di matematica	0	0
<u>A12</u> : afferma "...per me un problema è una domanda da risolvere con un'operazione..."	1	2%
A13: un quesito che ci fa esercitare sul ragionamento in matematica	0	0

⁶ Le risposte non previste sono contrassegnate da una sottolineatura.

A14: una specie di indovinello	0	0
A15: un esercizio per la mente	0	0
A16: una serie di domande che formano un test	0	0
A17: una situazione da risolvere con l'aiuto della matematica	0	0
A18: un testo presentato dalla maestra di matematica	8	13%
<u>A19</u> : afferma: “ .. <i>per me un problema di matematica è un problema di una persona però da risolvere con i numeri...</i> ”	1	2%

Domanda B. Quali caratteristiche deve avere per chiamarsi “problema di matematica”? Scrivi l’esempio di un problema di matematica.	Tot. Resp.	Tot.%
B1: dei numeri	39	65%
B2: dei numeri e una domanda posta alla fine	9	15%
B3: un testo	5	8%
B4: una domanda	1	2%
<u>B5</u> : afferma “... <i>dei personaggi che si trovano in difficoltà...</i> ”	2	3%
<u>B6</u> : afferma “... <i>deve avere almeno due numeri...</i> ”	1	2%
B7: una situazione problematica	3	5%
<p data-bbox="308 902 1054 1153">B8: scrivendo il testo di un problema non elabora una struttura problematica significativa, ma dà un’eccessiva enfasi alla storia e ai numeri dimenticando addirittura la domanda. Pertanto produce un testo inserendo solo dati numerici.</p> <p data-bbox="308 1216 1054 1301">Ecco riportati fedelmente alcuni esempi dei testi scritti:</p> <p data-bbox="308 1364 1054 1854"><< <i>Una bambina ha 124 fiocchetti 50 si sono ammuffati. Una sua amica la va a trovare e gliene regala 140. Nei giorni seguenti ne indossa 95 e si rompono. Sua madre ne prende 70 e le porta a lavoro. Suo fratello ne butta via 8 perché non gli piacevano. La bambina il giorno dopo ne compra 10 colorati di colori diversi. Il giorno dopo che era il suo compleanno ne indossa 6 perché va in dei posti e compra 50 vestiti, 4 fiocchi e 20 camicine.</i> >> [3. 12. A]</p> <p data-bbox="308 1917 1054 2022"><< <i>La mamma ha comprato 20 cioccolatini e Daniele 6</i> <i>Le hanno messe tutte insieme.</i> >> [4. 14. A]</p>	26	43%

<p><i><< Un bambino ha 14 cioccolatini e 5 sono andati a male. Una bambina ha 30 palline e ne perde 10. Un cane ha 10 ossi e ne rubano 5. >> [8. 31. B]</i></p> <p><i><< Un cartolaio a 13 scatole di matite. Viene un ragazzo e ne compra 4, 2 scatole lui e 2 scatole per il suo fratellino. >> [1. 4. A]</i></p> <p><i><< Un uomo compra un giacchetto di pelle di orso a 50 euro. Gli fanno lo sconto del 50%>> [2. 5. A]</i></p> <p><i><< La mamma ha comprato 20 cioccolatini e Daniele 6 Le hanno messe tutte insieme. >> [14. 60. C]</i></p>		
<p>B9: scrive il testo di un problema inserendo alla fine una domanda estranea o inconsistente con la situazione problematica proposta</p> <p>Ecco riportati fedelmente alcuni esempi dei testi scritti:</p> <p><i><< Giovanni ha 68 figurine di calciatori ma ha 44 doppioni e li scambia con Filippo, gliene regala anche 16. Quante figurine ha Filippo adesso?>> [1. 3. A]</i></p> <p><i><< Su un autobus pieno di gente, salgono 3 persone. Alla prima fermata ne scendono 5 e alla seconda metà di 8. Quante persone rimangono sull'autobus?>> [5. 18. A]</i></p> <p><i><< Un negoziante vende a 1 euro una bottiglia di acqua. Quanto guadagna in tutto? >> [10. 41. B]</i></p>	11	18%

<p>B10: scrive il testo di un problema inserendo sia i dati numerici sia una domanda</p> <p>Ecco riportati fedelmente alcuni esempi dei testi scritti (gli esempi riportano “storie” già viste con minime variazioni):</p> <p><i><< Mario a 10 funghi e Laura ne a 20. Domanda Quanti funghi ci sono in tutto?>> [5.18. A]</i></p> <p><i><< Se Mauro ha 10 penne e Luca ne ha 40 quante penne in tutto?>> [1. 3. A]</i></p> <p><i><< Luca ha 5 palloncini e Lucia 3. Quanti palloncini hanno in tutto?>> [11. 46. C]</i></p> <p><i><< Luca ha 35 caramelle, Lorenzo ne ha 40 e franco ne ha 34. Problema Quante caramelle in tutto hanno i tre bambini?>> [12. 51. C]</i></p> <p><i><< Carlo ha 19 palline, Mario ne ha 112 se le uniscono, quante palline hanno complessivamente?>> [10. 41. B]</i></p> <p><i><< Luigi a 35 caramelle ne da 10 al suo amico. Quante caramelle gli rimangono?>> [6. 24. B]</i></p> <p><i><< La mamma compra 8 uova ne frigge 5. Quante ce ne rimangono?>> [9. 33. B]</i></p> <p><i><< La mamma di davide va a fare la spesa e compra una scatola di uova che costa 7 euro. Quanto costeranno 3 scatole di uova?>> [12. 52. C]</i></p>	23	38%
B11: scrive il testo inserendo una domanda alla fine ma nessun dato numerico	0	0

Domanda C: Quali fra i seguenti testi è un problema di matematica e quale non lo è? Perché?	Tot. Resp.	Tot.%
C1: riconosce come problema ogni situazione che contiene dei numeri e una domanda	16	27%
C2: riconosce come problema ogni situazione in cui ci sono dei numeri	19	32%
C3: riconosce come problema ogni situazione che termina con un punto interrogativo	2	3%
C4: riconosce come problema ogni situazione in cui sono presenti dei personaggi in difficoltà	2	3%
C5: svolge le operazioni dei testi (anche se non era previsto) e riconosce come problema ogni situazione in cui si ottengono dei risultati numerici	15	7%
C6: afferma “... i test proposti sono tutti problemi perché sono stati presentati nell’ora di matematica...”	9	15%
C7: afferma che il test n.1 non è un problema perché non si possono utilizzare i dati per risolvere il problema	0	0
C8: afferma “...il test n.2 non è un problema perché la domanda non si riferisce ai dati...”	1	2%
C9: afferma “...i test n.3 e 4 non sono problemi perché non ci sono dati numerici”	15	25%
C10: afferma “...il test n.4 non è un problema perché non ha il punto interrogativo...”	3	5%
C11: afferma “...il test n.6 non è un problema perché c’è solo un numero e per essere un problema deve avere almeno due numeri...”	2	3%
C12: afferma “...i testi n. 3, 6,7 sono delle decisioni da prendere e quindi non sono problemi...”	2	3%

Domanda D. Secondo te, a cosa serve un problema di matematica?	Tot. Resp.	Tot.%
D1: per imparare a fare bene i conti	22	37%
D2: afferma “ <i>per me un problema non serve a niente...</i> ”	1	2%
D3: per imparare a ragionare	10	17%
D4: per riconoscere l’intelligenza del ragazzo o della ragazza	2	3%
D5: per mettere alla prova l’intelligenza di chi ha studiato	6	10%
D6: ad esercitare la mente	4	7%
D7: per esercitarsi sul ragionamento sulla matematica	13	22%
D8: per farci riflettere	2	3%

Domanda E. Nel risolvere un problema cosa ti interessa di più?	Tot. Resp	Tot.%
E1: svolgere subito le operazioni	25	42%
E2: intuire prima il procedimento di soluzione e poi se è il caso fare le operazioni	7	12%
E3: saper rilevare i dati più importanti	3	5%
E4: capire la domanda	9	15%
E5: leggere il testo attentamente e poi provare a fare le operazioni	5	8%
E6: indovinare le operazioni giuste	6	10%
E7: eseguire le operazioni senza errore di calcolo	5	8%
E8: afferma: “... <i>capire quello che il testo richiede e poi le operazioni da fare...</i> ”	3	5%

Domanda F. Se sbagli un problema, generalmente a cosa pensi sia dovuto?	Tot. Risp	Tot.%
F1: un errore di calcolo	24	40%
F2: un errore nella scelta delle operazioni da fare	9	15%
F3: alla lunghezza del testo del problema	4	7%
F4: all'argomento del problema	0	0
F5: a poco impegno	4	7%
<u>F6</u> : afferma: "...sbaglio spesso i problemi perché non capisco quello che leggo..."	2	3%
<u>F7</u> : afferma: "... sbaglio il problema perché ho poca intelligenza..."	2	3%
<u>F8</u> : afferma: "... sbaglio i problemi quando i numeri sono molto grandi..."	5	8%
<u>F9</u> : afferma "... sbaglio il problema perché dimentico di considerare tutti i dati..."	10	17%

Domanda G. Quando devi risolvere un problema di matematica, cosa fai ?	Tot. Risp	Tot.%
G1: cerco di ricordarmi se ho già fatto un problema uguale	3	5%
G2: cerco di capire cosa vuole la domanda	13	22%
G3: provo a svolgere subito le operazioni tra i numeri	19	32%
G4: ricopio il testo, riscrivo i dati e poi faccio le operazioni	10	17%
G5: leggo il testo e provo a capire qual è la situazione da risolvere	8	13%
G6: afferma: "... provo le operazioni che sembrano più adatte ai numeri e alle parole del problema, e poi scelgo quello che torna meglio..."	4	7%
<u>G7</u> : afferma: "... in un problema basta guardare bene certe parole e si capisce subito l'operazione da fare..."	3	5%

Domanda H. Per risolvere un problema cosa bisogna saper fare?	Tot. Risp	Tot.%
H1: saper fare bene i calcoli	32	53%
H2: saper disegnare	0	0%
H3: capire quello che si legge	15	25%
<u>H4</u> : afferma: "... <i>bisogna saper imparare i trucchi...</i> "	3	5%
H5: bisogna impegnarsi sul serio	10	17%

3.4 Analisi dei dati sperimentali

3.4.1 Analisi descrittiva

Le percentuali più significative delle risposte, sono qui di seguito riportate.

Le prime tre domande (domanda: A, B, C) mi hanno permesso di tracciare un profilo significativo sulle idee possedute dai bambini circa il problema di matematica.

Dalla lettura dei dati emerge, infatti, un quadro piuttosto completo e articolato di come i bambini vedono il problema.

Secondo le risposte date alla domanda A, le percentuali più significative fanno riferimento a tre grandi modelli concettuali di problema posseduti dai bambini.

Si distinguono, infatti,

- coloro i quali identificano il problema di matematica con una struttura linguistica formale, che può essere caratterizzata: da un testo in cui ci sono dei numeri (A1, 30%); da una domanda posta alla fine (A2, 7%); da un testo contenente sia i numeri sia una domanda (A9, 7%);
- coloro (A10, 23%) per cui il problema è visto come una situazione da risolvere con i numeri;
- coloro (A5, 15%) per cui il problema è un esercizio che si fa nell'ora di matematica e coloro (A18, 13%) per cui il problema è precisamente un testo presentato dalla maestra di matematica;

Altre informazioni rilevanti ci vengono fornite dalle risposte alla domanda B.

Per definire le caratteristiche del problema matematico, gli allievi esplicitano le seguenti proprietà:

- (B1, 65%) avere dei numeri;
- (B2, 17%) avere una domanda posta alla fine;
- (B3, 8%) avere un testo;
- (B7, 5%) avere una situazione problematica;
- (B5, 3%) avere dei personaggi che si trovano in difficoltà.

Nello scrivere l'esempio di un testo di un problema si individuano:

- i soggetti (B8, 43%), che scrivono il testo di un problema, preoccupandosi solo di inserire i dati numerici ma nessuna domanda;
- i soggetti (B10, 38%), che si preoccupano di scrivere un testo inserendo sia i dati numerici sia una domanda;
- i soggetti (B9, 18%) che scrivono il testo di un problema inserendo alla fine una domanda estranea alla situazione problematica proposta;

Altre percentuali significative sono fornite dalle risposte alla domanda C. Esse suggeriscono di identificare diverse categorie di soggetti:

- il soggetto che riconosce il problema da caratteristiche formale del testo, quali la presenza di numeri e/o una domanda:
 - Gli alunni (C2, 32%) che riconoscono come problema ogni situazione in cui ci sono dei numeri. In particolare, il 25% dei bambini (C9), afferma che i testi n°3 e 4 non sono problemi perché non ci sono dati numerici.
 - Gli alunni (C1, 27%) che riconoscono come problema ogni situazione che contiene sia dei numeri sia una domanda.
 - Gli alunni (C3, 3%) che riconoscono come problema ogni situazione che termina con una domanda.

- il soggetto che riconosce il problema da elementi contingenti, come lo svolgersi durante l'ora di matematica.
 - i soggetti (C6, 15%) che riconoscono tutti i testi proposti come problemi matematici perché sono stati presentati nell'ora di matematica

I dati finora emersi offrono a mio parere una chiave interpretativa estremamente efficace per la lettura delle informazioni successive.

Nell'analizzare i dati precedenti è apparso chiaro, infatti, come i bambini nel considerare un problema danno maggiore importanza all'aspetto formale (in particolare alla presenza dei numeri) piuttosto che alla vera situazione problematica.

Questo, pertanto, riflettendosi sia nello scrivere l'esempio di un problema di matematica (domanda B) sia nel riconoscerlo (domanda C); potrebbe anche condizionare la scelta dei processi risolutivi da mettere in atto. Al riguardo le domande D - E - F- G – H mi hanno permesso di ricavare utili informazioni.

Domanda D

Dalle risposte ricavate da questa domanda è stato possibile rintracciare quali funzioni riconoscono i bambini all'attività di risoluzione dei problemi.

In particolare è stato possibile notare essenzialmente posizioni differenti.

Il problema viene visto come:

- occasione di consolidamento di abilità.

Per il 37% dei bambini un problema serve per imparare a fare bene i conti (D1);

- occasione di ragionamento.

Per il 22% degli alunni un problema serve per esercitarsi sul ragionamento della matematica (D7); per il 17% per

imparare a ragionare (D3); per il 7% per esercitare la mente (D6) e per il 3% per farci riflettere (D8).

- verifica delle proprie capacità o della propria preparazione.

Per il 10% degli alunni un problema serve per mettere alla prova l'intelligenza di chi ha studiato (D5); per il 3% per riconoscere l'intelligenza del ragazzo/a (D4).

Inoltre sono pochi (D2, 1%) coloro che pensano che un problema non serva a niente. Al riguardo sarebbe interessante approfondire la conoscenza sui motivi che hanno indotto tale risposta.

Domanda E

Dalle risposte alla domanda E si è potuto rintracciare i processi che più interessano ai bambini nel risolvere un problema.

E così, come si sospettava mentre al 42% degli alunni interessa di più svolgere subito le operazioni (E1), solo al 12% interessa intuire prima il procedimento e poi se è il caso fare le operazioni (E2). E in quest'ultimo caso, infatti, il 5% afferma che nel risolvere un problema interessa di più capire quello che il testo richiede e poi le operazioni da fare (E8);

Inoltre appare importante osservare anche le altre percentuali:

- al 15% interessa capire la domanda (E4);
- al 10 % interessa indovinare le operazioni giuste (E6);
- al 8% interessa eseguire le operazioni senza errore di calcolo (E7);

Domanda F

Altre percentuali significative sono ottenute dalle risposte alla domanda F.

Se un bambino sbaglia un problema pensa che sia dovuto a:

- (F1, 40%) un errore di calcolo
- (F9, 17%) dimenticanza nel considerare tutti i dati;
- (F2, 15%) un errore nella scelta delle operazioni da fare;
- (F8, 8%) presenza nel testo di numeri troppo grandi;
- (F3, 7%) lunghezza del testo del problema;
- (F5, 7%) poco impegno;
- (F6, 3%) poca comprensione del testo del problema;
- (F7, 3%) poca intelligenza.

Domanda G

Anche altri risultati appaiono importanti.

Ecco cosa fa un bambino quando deve risolvere un problema:

- (G3, 32%) prova a svolgere subito le operazioni tra i numeri;
- (G2, 22%) cerca di capire subito cosa vuole la domanda;
- (G4, 17%) ricopia il testo, riscrive i dati e poi fa le operazioni;

- (G5, 13%) legge il testo e prova a capire qual è la situazione da risolvere;
- (G6, 7%) prova le operazioni che sembrano più adatte ai numeri e alle parole del problema, e poi sceglie quello che torna meglio;

Domanda H

Ed infine ecco che cosa bisogna saper fare, secondo un bambino, per risolvere un problema:

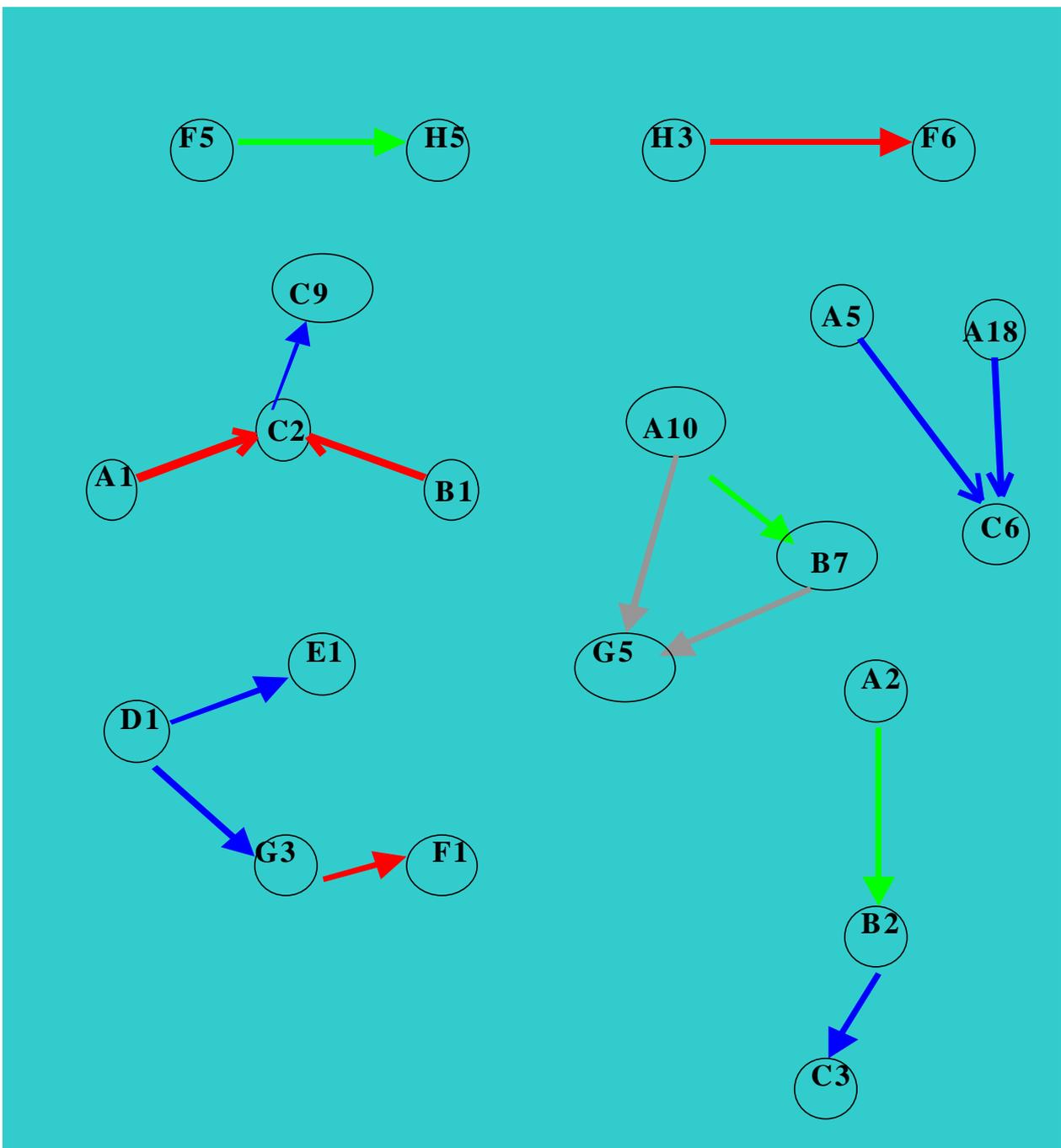
- (H1, 53%) saper fare bene i calcoli;
- (H3, 25%) capire quello che si legge;
- (H5, 17%) impegnarsi sul serio;
- (H4, 5%) saper imparare i trucchi.

3.4.2 Analisi implicativa delle variabili

Tentando di dare significato ai legami e ai cammini implicativi tra le risposte, si è cercato di rintracciare tra esse interessanti relazioni.

I grafici elaborati con lo Chic:

1. Il grafico implicativo



Osservando i grafici dello chic è possibile notare come esistono delle relazioni fra le risposte.

In particolare si è individuato che:

1. Le risposte A1 (un problema di matematica è un testo in cui ci sono dei numeri) e B1 (un problema di matematica per chiamarsi così deve avere dei numeri) implicano la risposta C2 (fra i testi di problemi presentati si riconosce come problema matematico ogni situazione in cui ci sono dei numeri), la risposta C9 (afferma che i test n.3 e4 non sono problemi perché non ci sono dati numerici) e la risposta B8 (scrive il testo di un problema dando maggiore enfasi alla storia e ai numeri dimenticando la domanda).

I concetti secondo cui un problema di matematica è un testo in cui ci sono dei numeri (A1) e, la presenza dei numeri è la caratteristica di un problema (B1), sembrano essere le cause per cui:

- il 32% dei bambini riconosce come problema ogni situazione che presenta dei numeri (C2);
 - il 25% afferma: “ i testi di problemi n° 3 e 4 non sono problemi perché non ci sono dati numerici”(C9);
 - il 43% dei bambini scrive il testo di un problema dando un'eccessiva enfasi alla storia e ai numeri (B8);
2. La risposta A10 (un problema di matematica è una situazione problematica che può essere risolta anche con i numeri) implica la risposta B7 (un problema di matematica per essere tale deve avere una situazione da dover risolvere);
 3. Le risposte A10 e B7 a sua volta implicano la risposta G5 (quando risolvo un problema leggo il testo e provo a capire qual è la situazione da risolvere);

4. La risposta D1 (secondo me un problema di matematica serve per imparare a fare bene i conti) implica la risposta E1 (nel risolvere un problema mi interessa di più svolgere le operazioni) e la risposta G3 (quando devo risolvere un problema di matematica provo a svolgere subito le operazioni).

I bambini pensano che un problema di matematica serva a imparare a fare i conti (D1). Di conseguenza nel risolvere un problema, essi sembrano maggiormente interessati a svolgere subito le operazioni, anche se alle volte non hanno ancora capito la vera situazione problematica.

5. La risposta G3 (quando devo risolvere un problema di matematica provo a svolgere subito le operazioni) implica fortemente la risposta F1 (se sbaglio un problema generalmente penso che sia dovuto ad un errore di calcolo).

I bambini nel risolvere un problema di matematica provano a svolgere subito le operazioni di conseguenza se lo sbagliano pensano sia dovuto ad un errore di calcolo piuttosto che ad altri tipi di errori.

6. La risposta F5 (generalmente se sbaglio un problema penso sia dovuto a poco impegno) implica la risposta H5 (per risolvere un problema bisogna impegnarsi sul serio).

Secondo pochi bambini lo sbagliare un problema è dovuto a poco impegno (F5) di conseguenza per risolverlo bene è necessario impegnarsi sul serio.

7. La risposta H3 (per risolvere un problema bisogna capire quello che si legge) implica la risposta F6 (sbaglio spesso un problema perché non capisco quello che leggo).

Capire quello che si legge (H3) è un fattore che incide in modo significativo sugli sbagli che si commettono nel risolvere un problema (F6).

8. Le risposte A5 (un problema di matematica è un esercizio che si fa nell'ora di matematica) e A18 (un problema di matematica è un testo presentato dalla maestra di matematica) implicano la risposta C6 (i testi di problemi presentati vengono riconosciuti come “problemi di matematica” perché sono stati presentati nell'ora di matematica). Coloro i quali considerano il problema come un esercizio che si fa nell'ora di matematica (A5) e, quelli che lo individuano come testo presentato dalla maestra di matematica (A18), sono indotti a riconoscere un problema dal semplice fatto di essere stato presentato nell'ora di matematica.
9. La risposta A2 (un problema è un testo in cui c'è una domanda posta alla fine) implica la risposta B2 (un problema di matematica per essere considerato tale deve avere una domanda posta alla fine). Il fatto di considerare la domanda posta alla fine una caratteristica dei problemi deriva dall'idea che il problema è un testo in cui c'è una domanda posta alla fine.
10. La risposta B2 (un problema di matematica per essere considerato tale deve avere una domanda posta alla fine) implica la risposta C3 (fra i testi di problemi presentati riconosce come “problema matematico” ogni situazione che termina con un punto interrogativo).

Capitolo IV *Conclusioni*

4.1 Conclusioni del lavoro sperimentale

I dati che abbiamo presentato, seppure relativi ad un numero basso di soggetti, hanno permesso di verificare l'ipotesi operativa secondo la quale esistono una serie di cause, alcune individuabili nelle concezioni che i bambini hanno su cosa sia un problema di matematica, che concorrono in percentuale diversa a ciò che essi pensano siano i comportamenti da mettere in atto di fronte alla risoluzione di un problema matematico.

A seguito, infatti, delle risposte date è apparso che nel definire un problema:

- Un'alta percentuale (circa il 44%) di bambini dà maggiore importanza all'aspetto formale (in particolare il 30% alla presenza dei numeri), di conseguenza:
 1. riconosce come problema di matematica tutti quei testi che si presentano con numeri e/o domanda;
 2. produce testi di problemi facendo molta attenzione all'aspetto formale piuttosto che alla vera situazione problematica;
 3. durante le attività di risoluzione si interessa di svolgere subito le operazioni senza aver capito in alcuni casi cosa il problema realmente chiede;
- Una discreta percentuale (circa il 30%) di bambini dà maggiore importanza alla situazione in cui il problema viene presentato. Molti di essi, infatti, individuano il problema come testo presentato dalla maestra di matematica, pertanto sono indotti a riconoscerlo dal semplice fatto di essere stato presentato nell'ora di matematica.
- Una piccola percentuale (circa il 23%) di bambini dà maggiore importanza alla situazione problematica in sé, pertanto nel risolvere un

problema si interessa di capire prima quello che il testo richiede e poi le operazioni da fare.

4.2 Conclusioni personali

Il paradigma utilizzato per elaborare questa tesi, mi ha permesso di confrontarmi con un modo nuovo di fare scuola. La dimensione della ricerca, infatti, permette di avvicinarsi al sapere in modo critico e di problematizzare la realtà al fine di comprenderla.

L'opportunità di condurre un'indagine sperimentale in campo educativo mi ha dato la possibilità di completare ed arricchire di nuove riflessioni il percorso formativo scandito dalle esperienze del tirocinio e dallo studio delle diverse discipline.

Grazie a questa esperienza di ricerca, infatti, ho maturato la consapevolezza della necessità di una nuova figura docente che assuma un atteggiamento scientifico nei confronti dei propri risultati e di quelli dei propri alunni. Un insegnante che non si limiti a leggere, a ripetere o a catalogare i fatti e i risultati che di volta in volta scaturiscono dal proprio intervento, ma che li metta alla prova, li sperimenti attraverso la continua ricerca di strumenti, metodi e di tutto ciò che può contribuire a quell'innalzamento di qualità formativa, oggi da più parti invocato. L'assunzione di un tale atteggiamento permette all'insegnante non solo di conoscere meglio la realtà scolastica all'interno della quale opera, in termini di competenze e di abilità possedute dagli alunni, ma soprattutto di approcciarsi ai problemi dell'insegnamento con particolare sensibilità e con un'ottica razionale.

In questo senso, il presente lavoro ha dato la possibilità di essere protagonisti del processo di insegnamento-apprendimento, un processo all'interno del quale si è cercato di non limitare la propria azione nel

classificare i bambini in base alle convinzioni che hanno, ma di cercare di portare alla luce le teorie che essi hanno costruito.

Bibliografia

ANTISERI D. (1985), “Insegnare per problemi”, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 2.

ASHMAN A. F. – CONWAY R. N. F (2001), *Guida alla didattica metacognitiva per le difficoltà di apprendimento*, Trento, Erickson. Tit. orig.: *Cognitive strategies for special education*, New York, Routledge, 1989.

BRANSFORD J. D. – STEIN B. S. (1984), *The Ideal problem solver*, Belmonte, Wadsworth.

D'AMORE B. (1987), *Approcci matematici nella scuola dell'infanzia*, Firenze, La Nuova Italia.

DE LANDSHEERE G. (1978), *La formazione degli insegnanti domani*, Roma, Armando.

DUNCKER K. – KRECHEVSKY I. (1973), “Il conseguimento della soluzione”, in MOSCONI G. – D'URSO V., *La soluzione di problemi*, Firenze, Giunti – Barbera.

GHERARDI V. (2000), *Insegnare nella scuola primaria. La ricerca nella didattica*, Roma, Carocci.

GRAS P. (1997), “Metodologia di analisi d'indagine”, *Quaderni di ricerca in didattica*, 7, 99-109.

KANIZSA G. (1973), “Il problem – solving nella psicologia della gestalt”, in MOSCONI G. – D'URSO V., *La soluzione di problemi*, Firenze, Giunti – Barbera.

MIALERET G. (1969), *L'apprendimento della matematica. Saggio di psicopedagogia*, Roma, Armando. Tit. orig.: *L'apprentissage des mathématiques. Essai de psycho-pédagogie*, Bruxelles, Charles Dessart, 1967.

MOSCONI G. – D'URSO V.(1973), *La soluzione di problemi*, Firenze, Giunti – Barbera.

PELLEREY M. (1984), “ Una matematica di base per il cittadino di domani” in AA.VV., *I nuovi programmi della scuola elementare*, Teramo, Lisciani e Giunti.

POLYA G. (1976), *Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico*, Milano, Feltrinelli. Tit. orig.: *How to solve it*, Princeton, Cpyright, 1945.

POLYA G. (1979), *La scoperta matematica, capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi, volume 1*.

RIZZI B. (1986), “ La matematica nasce dal problema”, in LAENG M. (a cura di), *I nuovi programmi della scuola elementare*, Teramo, Lisciani e Giunti.

SPERANZA F.- MEDICI CAFFARRA D. – QUATTROCCHI P. (1986), *Insegnare la Matematica nella scuola elementare*, Bologna, Zanichelli.

VARAGNOLO L. (1986), *Informatica nella scuola di base*, Padova, Cedam.

ZAN R. (1999), “Superare l'approccio locale alle difficoltà d'apprendimento”, *L'educazione matematica*, 3, 127-136.