**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PALERMO**
Facoltà: Scienze della Formazione
Corso di laurea: Scienze della Formazione Primaria
Indirizzo Scuola Elementare

# Concezioni spontanee dell'angolo in quinta elementare (9 – 10 anni) ed evoluzioni in situazioni a – didattiche

Studentessa:
Francesca Sardisco

Matricola n.
0386199

Relatori:
Prof. Filippo Spagnolo
Prof.ssa Anna Maria Parroco

Anno Accademico 2002/2003

# I N D I C E

# Premessa

Il lavoro di sperimentazione che si vuole affrontare in questa tesi è la diretta conseguenza delle lezioni di didattica della matematica svolte dal professore Filippo Spagnolo nei precedenti anni accademici.

In particolare con questa attività s'intendono classificare le concezioni spontanee degli alunni riguardanti l'angolo, utilizzando come strumento di rilevazione un questionario ed evidenziando inoltre come tali concezioni si evolverebbero in seguito alla somministrazione di situazioni a – didattiche.

A tal fine si analizzerà l'angolo sia sotto il profilo prettamente epistemologico che sotto l'aspetto storico - epistemologico; saranno successivamente presentati il lavoro sperimentale e le situazioni a – didattiche messe in atto dalle quali si trarranno e analizzeranno i dati che saranno punto di partenza per la ricerca.

# Capitolo 1

# L'angolo dal punto di vista Epistemologico e Storico - epistemologico

L'angolo è uno dei concetti geometrici che ha origini molto remote. La geometria infatti, con molta probabilità è nata dell'esigenza degli uomini di tracciare i confini dei campi e misurarne l'estensione.

Nell'antico Egitto il Nilo periodicamente straripava e invadeva i campi. Dopo ogni piena bisognava tracciare di nuovo i confini dei possedimenti che erano stati cancellati dalle acque.

I disegni delle terre coltivate erano allora riprodotti su papiri, secondo le indicazione degli agrimensori, che avevano il compito di misurare le terre.

Come strumento di misura utilizzavano delle corde, e per questo oltre che agrimensori venivano chiamati anche tenditori di corde. Grazie al loro lavoro era possibile ricostruire con precisione ciò che era scomparso con la piena del fiume.

Gli agrimensori per ridisegnare i confini dei campi dovevano tracciare prima degli angoli retti. Essi procedevano nel seguente modo: prendevano una corda e la dividevano in dodici parti uguali facendo dei nodi. Tre uomini tendevano poi la corda in modo tale da formare un triangolo i cui lati risultavano formati da: 3, 4, 5, segmenti di corda, ottenendo un triangolo con un angolo retto, qualsiasi fosse la misura della corda utilizzata.

Talete di Mileto (VI secolo a.C.), invece, iniziò a studiare le figure, in quanto tali, indipendentemente da possibili applicazioni pratiche, egli formulò poi le loro proprietà da un punto di vista generale, cercandone le basi logiche anche quando tali proprietà potevano apparire ovvie.

Talete dimostrò dunque :

1. l'uguaglianza di due angoli opposti al vertice;
2. l'uguaglianza degli angoli alla base di un triangolo isoscele;
3. il 2° criterio di uguaglianza dei triangoli;
4. la proprietà secondo la quale un angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.

Di lui, si dice, abbia stupito il re Amasi determinando l'altezza di un semplice obelisco con la semplice misurazione dell'ombra del suo bastone: se, ad esempio, il bastone era lungo i ¾ della sua ombra, la stessa cosa valeva per l'obelisco. Talete riusciva a trovare, con semplici confronti di triangoli, la distanza di una nave dal porto.

Nel V secolo a.C. Pitagora enunciò il famoso teorema, che porta il suo nome, sul triangolo rettangolo. Egli con i suoi discepoli si dedicò anche ad uno studio sistematico del parallelismo fra rette e da questo dedusse il noto teorema secondo il quale la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto.

Con Euclide (300 a.C. circa) la geometria divenne parte integrante del pensiero scientifico e si sviluppò libera da ogni altro legame. La sua opera infatti per molto tempo è stata considerata un modello di perfezione ed i suoi "*Elementi*" per molti secoli hanno costituto dopo la Bibbia il libro più letto, analizzato e sviscerato. Euclide tuttavia con ogni probabilità pare abbia attinto da quanto molti studiosi avevano già prodotto prima di lui.

Egli comunque operò una grande revisione, espose negli "*Elementi*", le conoscenze geometriche in modo logico e organico, con una nuova coordinazione dei primi concetti geometrici, articolati secondo uno schema più coerente: ventitré "Definizioni", cinque "Postulati" e le "Nozioni Comuni".

Nelle "Definizioni" in riferimento agli angoli Euclide afferma:

"VIII. Angolo piano è la inclinazione reciproca di due linee piane che si incontrano tra loro e che non giacciono entrambe su una medesima retta.

IX. L'angolo si dice rettilineo se le linee che lo comprendono sono rette.

X. Quando due rette, l'una innalzata sull'altra, formano angoli adiacenti uguali, ciascuno dei due angoli si dice retto e la retta innalzata si dice perpendicolare all'altra.

XI. Angolo ottuso è quello maggiore di uno retto.

XII. Angolo acuto è quello minore di uno retto."

Alle quali segue naturalmente il Postulato:

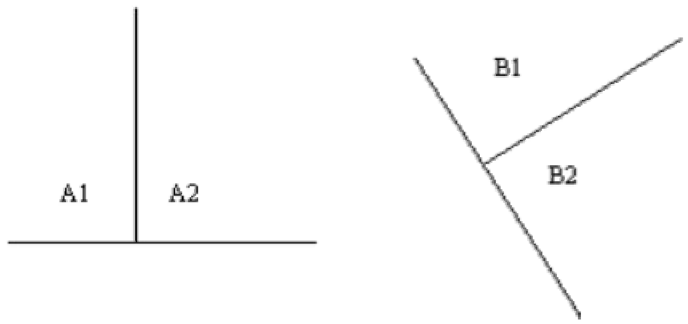
“IV. Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro”.

Euclide, non considera gli angoli come “porzioni di piano” (definizione che comparirà più tardi), ma ricorre all’idea di “inclinazione”; prendendo in considerazione anche gli angoli formati da due linee curve ed escludendo di fatto l’angolo piatto.

Notiamo anche che per gli angoli “adiacenti” Euclide non diede alcuna definizione; ma appare evidente che egli adoperò il significato da noi oggi utilizzato, anche se alle volte per “adiacente” si deve intendere il nostro “consecutivo”.

Si è inoltre molto discusso, anche contestando il matematico greco, sulla definizione X per non aver lo stesso precisato cosa intendesse per angoli uguali. Anche se per Euclide il concetto di uguaglianza non poteva essere che quello legato al cosiddetto trasporto rigido.

Infine non può essere considerato ovvio e scontato il IV postulato poiché noi siamo abituati a pensare che gli angoli retti misurano 90°, per cui di fatto appare evidente che siano tutti uguali. In realtà è vero l’inverso. Il postulato IV garantisce che tutti gli angoli retti misurano 90° poiché non è affatto ovvio che i due angoli formati dalle rette perpendicolari siano uguali. E infatti:




sappiamo così dalla definizione che A1=A2 e che B1=B2, ma la definizione di angolo retto non ci dice nulla sull'uguaglianza tra A1=B1. D'altra parte l'uguaglianza tra gli angoli formati dalle rette di sinistra con quelli formati dalle rette di destra non ci viene dall'esperienza, non è un fatto empirico. Si tratta pertanto di una forma di conoscenza che Kant definisce giudizio sintetico a priori in quanto non è conseguenza logica e non deriva dall'esperienza.

Ai tempi di Euclide era comunque molto lontano quel salto di qualità che avremmo avuto soltanto dopo più di 2000 anni, cioè quando la matematica del XIX secolo avrebbe affinato i suoi strumenti di indagine critica che si sarebbero affinati ancor più nel XX secolo, raggiungendo un tale grado di perfezione che è difficile capire quali altri miglioramenti potranno essere conseguiti in futuro.

I limiti dell'impostazione euclidea non sfuggirono comunque a Hilbert, che sentì l'esigenza di una rifondazione della geometria realizzata nel suo famoso *Fondamenti della geometria* (Grundlagen der Geometrie).

Dai tempi di Euclide fino a Hilbert è trascorso un lungo periodo di tempo durato circa 2200 anni durante il quale la matematica è assurta al ruolo di regina delle scienze. Questo periodo è stato illuminato da grandi studiosi che ci hanno regalato risultati fondamentali nell'ambito della matematica e delle scienze esatte.

In tempi a noi più vicini nella geometria, vengono definiti col metodo assiomatico i concetti fondamentali in maniera implicita, attraverso le relazioni che esistono tra di loro. Tale metodo presuppone un'analisi intuitiva delle figure piane e spaziali dove le immagini più semplici sono i punti, le rette e i piani, questi ultimi considerati come un insieme di punti.

Questo metodo, inoltre, definisce il concetto di angolo su di un piano orientato come:

**Def. 1**: con il nome di *angolo* $< (s_1, s_2)$ si intende la coppia ordinata di due semirette $s_1$ ed $s_2$ (non necessariamente distinte) aventi l'origine in comune. $s_1$, $s_2$ si dicono lati, S si dice vertice dell'angolo. Un angolo con lati coincidenti si dice *angolo nullo*, se come lati delle rette si dice *angolo piatto*".[1]

Per poter confrontare gli angoli e addizionarli è necessario considerare opportune classi di angoli, che possono venire ordinate ciclicamente[2].

[1] Fritz Reinhardt, Heinrich Soeder, Atlante di matematica, editore Ulrico Hoepli, Milano, 1993 pag. 139

[2] Un insieme M si dice ordinato ciclicamente attraverso la relazione tre – adica se sono soddisfatti i seguenti assiomi:
(Z 1): se (a, b, c, ) ? Z allora a, b, e c sono a due a due distinti.
(Z 2) se a, b e c sono a due a due distinti e (a, b, c) non ? Z allora (c, b, a) ? Z.

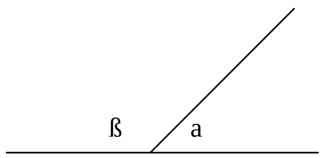
**Def. 3**: Un angolo che non sia né nullo né piatto si dice positivo (negativo) se il secondo lato giace sul lato positivo (negativo) del primo. Un angolo piatto è positivo.

Tale definizione si può trasportare da angoli a classi di angoli a attraverso i loro rappresentanti.

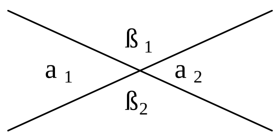
**Def. 5**: un angolo < ($s_1$, $s_2$) ? a si dice *retto*, se a è positivo e a + a viene rappresentato mediante un angolo piatto. Si dice *acuto* (*ottuso*) se a è minore (maggiore) della classe di un angolo retto.

Nella geometria euclidea elementare si possono stabilire le ampiezze degli angoli servendosi dei numeri reali. Infatti "per la misura degli angoli si può considerare l'arco di circonferenza unitaria che abbia centro in quel vertice, arco che ha origine nella parte positiva del primo lato e termina nella parte negativa del secondo"[3].

Due angoli aventi il vertice ed un lato in comune e l'altro lato appartenente ad una stessa retta si dicono *angoli adiacenti*. Essi hanno somma uguale a 180°. Due angoli i cui lati stanno due a due sulla stessa retta si dicono *angolo opposti*. Essi hanno la stessa ampiezza (simmetria rispetto ad un punto).




Angoli adiacenti




angoli opposti
(a $_1$, a $_2$) (ß $_1$, ß $_2$)

Importanti sono le proprietà degli angoli

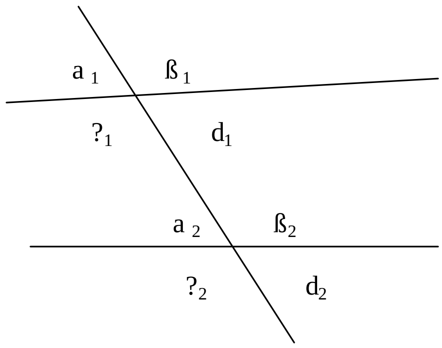
---

(Z 3): se (a, b, c) ? Z (a, c, d) ? Z allora anche (a, b, d) ? Z

[3] Fritz Reinhardt, Heinrich Soeder, Atlante di matematica, editore Ulrico Hoepli, Milano, 1993 pag. 121

ottenuti intersecando tre rette:

**Def. 6**: siano date due rette intersecanti una terza retta in due punti A e B, allora gli angoli di vertici A (B) aventi un lato passante per B (A) si dicono *angoli interni* gli altri si dicono *angoli esterni*. Un angolo esterno ed un angolo interno aventi vertici distinti che giacciono dallo stesso lato della retta secante si dicono *angoli corrispondenti*. Due angoli interni o esterni con vertici distinti che giacciono su lati diversi della retta secante si dicono *angoli alterni*.




Angoli corrispondenti:
(a$_1$, a$_2$) (ß$_1$, ß$_2$) (?$_1$, ?$_2$) (d$_1$, d$_2$)
Angoli alterni (a$_1$, ?$_2$) (ß$_1$, d$_2$) (?$_1$, a$_2$) (d$_1$, ß$_2$)

**Proposizione 4**: angoli corrispondenti e angoli interni alterni tagliati da una trasversale su de rette parallele hanno la stessa ampiezza (applicazione rispettivamente di una traslazione e di un movimento speculare rispetto ad un punti). Se angoli corrispondenti o angoli alterni hanno la stessa ampiezza allora le rette tagliate dalla trasversale sono parallele.

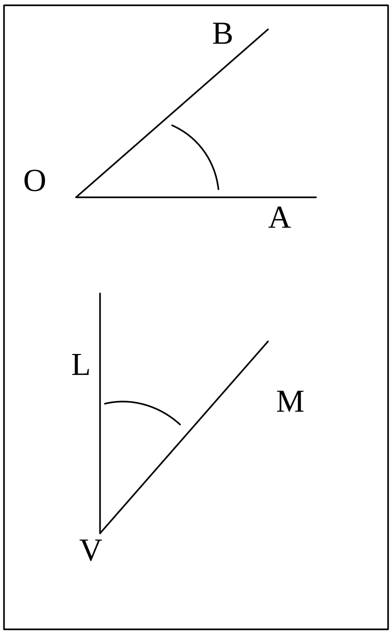
**Proposizione 5**: in un triangolo la somma degli angoli interni è uguale a 180°.

**Proposizione 6**: in un triangolo ogni angolo esterno ha ampiezza uguale alla somma degli angoli esterni non adiacenti ad esso.

Una differenza che vale la pena sottolineare è la definizione di angolo che Choquet ci da. Egli, dopo aver criticato le usuali definizioni di angolo, propone un'altra definizione o, meglio, definisce un'altra cosa: chiama angoli in P non delle figure, ma le rotazioni di centro P (cioè le isometrie che lasciano fisso il solo punto P), e lo fa dopo uno studio sistematico delle isometrie.

In base alla rotazione si ha la seguente definizione di angolo:

**Def. 1**: "Si dice **angolo orientato** un angolo AOB nel quale è stato fissato un verso di rotazione (orario od antiorario) cioè uno dei due ordinamenti nei quali si succedono le semirette di origine O contenute nell'angolo AOB. Se tale ordinamento fa passare dalla simmetria OA alla Semiretta OB, allora OA ed OB si dicono rispettivamente "primo lato" e "secondo lato".




Due **angoli orientati** AOB ed LVM si dicono **equivalenti** se hanno uguali ampiezze e versi; cioè se:

1. gli angoli (non orientati) AOB, LVM sono uguali;
2. i versi che fanno passare da OA ad OB e da VL a VM sono entrambi antiorari o entrambi orari."[4]

[4] Cateni L, Fortini R., Bernardi C., *Le figure geometriche*, 1988, Firenze pag. 89

"La rotazione di un angolo piatto con centro O non è altro che la simmetria di centro O"[5]

[5] Cateni L, Fortini R., Bernardi C., 1988 opera citata, pag. 90

# Capitolo 2

# Presentazione del lavoro sperimentale

Il lavoro sperimentale da me affrontato ha lo scopo di classificare le concezioni spontanee sull'angolo nei bambini di quinta elementare (9 – 10 anni) e l'evoluzione che tali concezioni subiscono dopo l'attivazione di una situazione a – didattica.

La sperimentazione è stata svolta nell'anno scolastico 2002/03 nel periodo Aprile – Maggio in due scuole di Palermo: l'Istituto Comprensivo Statale "Principessa Elena di Napoli" e la Scuola Elementare Statale "Ragusa Moleti". Nell'indagine sono stati coinvolti un numero complessivo di 97 alunni, di cui 77 del primo Istituto e 20 del secondo.

Il gruppo di alunni esaminato possiede delle conoscenze già acquisite nel corso dei precedenti anni scolastici, ma si deve considerare che alcune delle stesse vengono perse col passare del tempo.

L'area di ricerca è quella delle concezioni che hanno i bambini sull'angolo nella quinta classe della scuola di base, ricordando come il concetto di angolo nella scuola elementare venga presentato dai docenti in quarta e ripreso nelle quinte ad inizio di anno, propedeuticamente allo studio dei solidi e degli argomenti previsti nei Programmi nazionali.

La motivazione che mi ha spinto a fare questa sperimentazione è stata quella di verificare quanto sia di fatto sostanzialmente corretta l'ipotesi di come gli alunni abbiano una serie di concezioni errate sugli angoli.

Qualche esempio di idee preconcette fondamentalmente errate:

- l'angolo corrisponde all'arco che si traccia tra le due semirette per individuarne l'ampiezza;
- due angoli uguali ma con differente lunghezza delle semirette non sono uguali;
- l'angolo ottuso non è un angolo poiché è poco visibile agli occhi degli alunni.

Per verificare questa ipotesi di partenza ho utilizzato come strumento di rilevazione un questionario strutturato a domande aperte, volte a rilevare la qualità e il grado di conoscenza dell'alunno sul concetto di angolo.

Il test predisposto prevedeva sei quesiti ognuno dei quali riconduceva ad un tipo di angolo specifico: ottuso, acuto, due rette perpendicolari che formano quattro angoli retti, un angolo giro, un angolo diedro e un angolo nello spazio dato dall'intersezione di un piano ed una retta ad esso perpendicolare.

I risultati del questionario sono stati tabulati su un foglio EXCEL al fine di studiarne i dati attraverso dei grafici elaborati con il programma di statistica inferenziale CHIC.

In particolare in una classe ho anche applicato una situazione a – didattica da me progettata per poter osservare come si possa evolvere il concetto di angolo in ogni singolo alunno.

La verifica è stata effettuata somministrando nuovamente il test proposto ad apertura di sperimentazione e confrontando i risultati ottenuti nei due momenti (iniziale e finale).

## 2.1 Strumento per la sperimentazione: il questionario.

Raccogliere informazioni sulle concezioni dei bambini sull'angolo è molto difficile infatti come dice Rousseau: "L'arte d'interrogare non è facile come sembra. È molto più l'arte dei maestri che dei discepoli; bisogna aver già imparato molte cose per saper domandare ciò che ancora non si conosce" (J. J. Rousseau, La Nouvelle Héloise, V, lettre III).

In ogni situazione sperimentale è opportuno scegliere il metodo e gli strumenti idonei per raccogliere le informazioni necessarie al ricercatore, i mezzi usati più frequentemente sono i questionari, le interviste, i test, ecc…

Lo strumento da me scelto per raccogliere le concezioni spontanee sull'angolo nei bambini di quinta elementare (9 – 10 anni) e l'evoluzione che subiscono dopo l'attivazione di una situazione a – didattica è un questionario a risposte aperte.

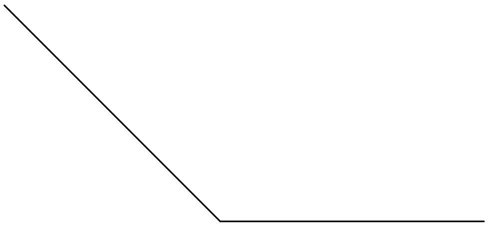
La scelta di somministrare un test a risposte aperte risponde all’esigenza di non condizionare anche con eventuali interventi involontari la risposta degli alunni intervistati. Essa infatti viene prodotta dai bambini in modo libero e permette allo stesso tempo al ricercatore di raccogliere una considerevole varietà di affermazioni e un quadro complessivo della situazione. Inoltre le domande aperte risultano in questo caso vantaggiose soprattutto se si posseggono pochi elementi conoscitivi sul fenomeno indagato e si vogliono conoscere nuovi dettagli.

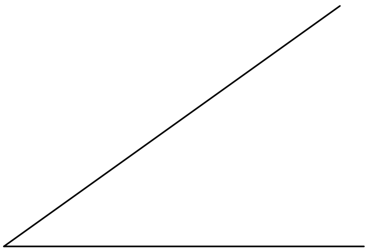
Uno svantaggio potrebbe naturalmente essere costituito dall’eccessivo sforzo di elaborazione necessario a rispondere a un questionario articolato con domande aperte, infatti la qualità delle risposte potrebbe dipendere dal livello culturale dell’alunno intervistato, ma è tuttavia un rischio previsto preventivato.

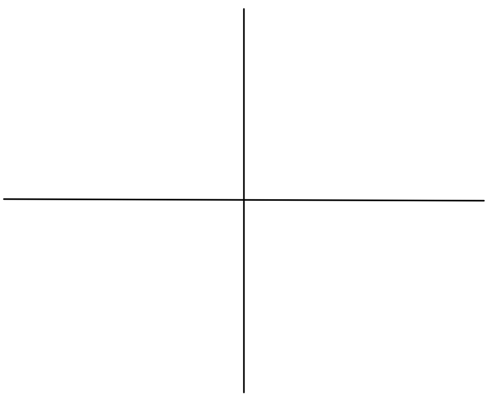
Il test di fatto presenta una sola richiesta “Segna con una X le figure che sono degli angoli e motiva la tua risposta” le figure mostrano sei differenti angoli.

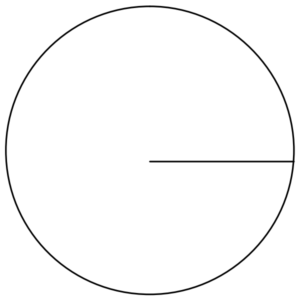
# Test:

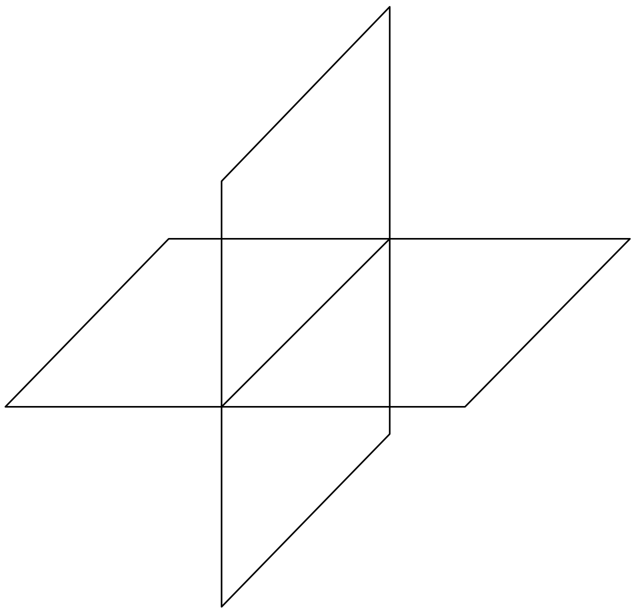
Segna con una X le figure che sono degli angoli e motiva la tua risposta:

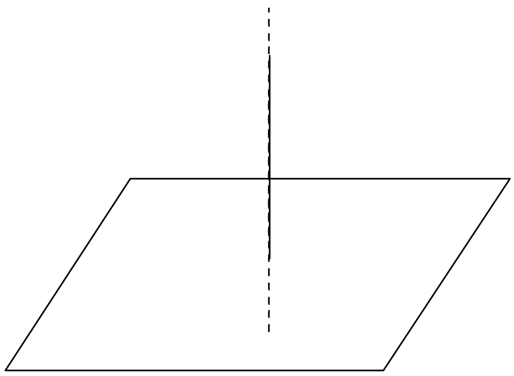












## 2.2 Analisi a priori dei comportamenti attesi:

Per ogni quesito sono stati individuati a priori dei “comportamenti attesi” ossia le eventuali risposte che gli alunni avrebbero ipoteticamente dato ad ogni quesito.

La caratteristica peculiare dei questionari a domanda aperta consiste nel fatto che l’intervistato, in questo caso l’alunno, ha il massimo grado di libertà nella risposta e può organizzare il suo linguaggio nel modo che gli è più usuale. Il questionario inoltre non deve far trapelare alcun suggerimento che possa condizionare la risposta.

Tuttavia un problema connesso a tali tipologie di questionari è di natura organizzativa: serve più tempo per rispondere ed è necessario ricondurre a un unico codice le diverse frasi usate per esprimere un concetto equivalente.

I risultati ottenuti dimostrano la sostanziale validità di tale tesi, infatti le risposte sono state varie: alcune vaghe e superficiali, altre precise e articolate e ancora giuste o errate ecc….. Per studiare i comportamenti attesi, ho comunque predisposto la seguente probabile classificazione delle risposte ottenute che è stata realizzata in modo tale da poter essere valida per tutte le figure del test.

| Angolo X |
|---|
| **1.** *Non riconosce nella figura l’angolo.* |
| **2.** *Riconosce l’angolo e lo classifica.* |
| **3.** *Riconosce l’angolo lo classifica correttamente ma da una spiegazione errata.* |
| **4.** *Riconosce l’angolo lo classifica e da una spiegazione corretta.* |
| **5.** *Riconosce l’angolo e lo classifica dandogli un nome errato e/o la spiegazione esatta o errata.* |
| **6.** *Riconosce che è un angolo e motiva la sua risposta dando una spiegazione fantasiosa.* |
| **7.** *Riconosce l’angolo e da una motivazione esatta o quasi esatta del perché è un angolo.* |
| **8.** *Riconosce l’angolo dandogli spiegazione errata.* |

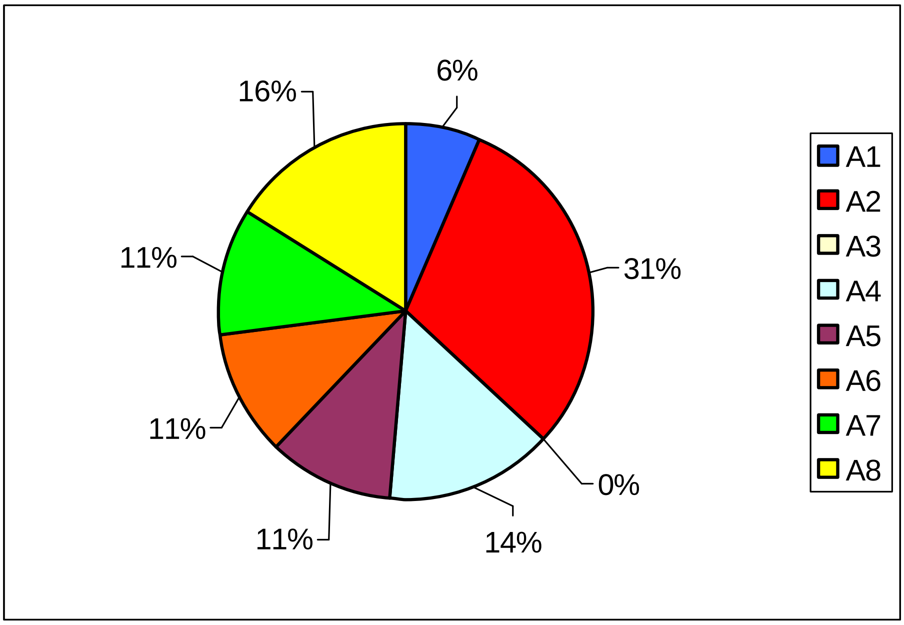
Dopo la somministrazione del test e lo studio dei dati rilevati attraverso il questionario, ho integrato la classificazione generica dei comportamenti attesi aggiungendo ad ogni modalità le risposte date dai bambini, associando ad ogni carattere la relativa frequenza.

La sintesi delle risposte si possono riassumere nelle seguenti distribuzioni di frequenza corrispondenti ad ogni figura del test:

| **A: angolo ottuso** | Tot. risp. |
|---|---|
| **1.** *Non riconosce nella figura l’angolo* | 7 |
| **2.** *Riconosce l’angolo e lo classifica* : è un angolo ottuso | 34 |
| **3.** *Riconosce l’angolo lo classifica correttamente ma da una spiegazione errata.* | 0 |
| **4.** *Riconosce l’angolo lo classifica e da una spiegazione corretta*:<br>- è un angolo ottuso perché è più grande di 90°<br>- perché deve avere un vertice e si chiama ottuso | 16 |
| **5.** *Riconosce l’angolo e lo classifica dandogli un nome errato e/o la spiegazione esatta o errata*:<br>- è un angolo acuto perché ha una linea curva e una dritta;<br>- è un angolo retto perché ha una linea obliqua e una retta che combaciano fra di loro è un angolo di 80°;<br>- è un angolo che si chiama ottusangolo o rettangolo perché ha un angolo (ottusangolo); | 12 |

| | |
|---|---|
| **6.** *Riconosce che è un angolo e motiva la sua risposta dando una spiegazione fantasiosa*:<br>- perché ha una linea obliqua che comunica tra di loro;<br>- perché è aperto; ha 2 aperture;<br>- ha doppie larghezze;<br>- è un poligono con due punte unite che formano un angolo;<br>- perché ha la forma di casa mia e ha un principio e una fine;<br>- perché è largo ed è a punta;<br>- perché ha un inizio e una fine;<br>- perché è un ottagono e ha un lato ottagonale);<br>- perché è concavo fra un vertice. | 12 |
| **7.** *Riconosce l'angolo e da una motivazione esatta o quasi esatta del perché è un angolo*:<br>- perché ha linee spezzate<br>- perché deve avere almeno 2 rette che si incontrano<br>- ha 2 rette che si incrociano in un punto che si chiama vertice<br>- perché è una figura delimitata da due linee semirette il punto in cui si uniscono si chiama vertice<br>- perché è una parte di piano compreso fra due semirette<br>- è formato da linee e vertici | 12 |
| **8.** *Riconosce l'angolo dandogli spiegazione errata:*<br>- è un angolo perché misura 90 ° (è formato da un angolo)<br>- ha la forma di un triangolo oppure perché ha tre lati.<br>- perché ha 1 lato e 1 punta<br>- Perché è una figura delimitata da una linea semiretta<br>- perché ha lo stesso vertice uguale<br>- è un angolo ottuso e misura 180° ed è una figura che ha due linee rette<br>- perché è una figura geometrica | 18 |

Le frequenze delle risposte ottenute per l'angolo ottuso si possono rappresentare graficamente con il seguente aerogramma al fine di rendere più evidenti le caratteristiche distribuzionali delle modalità di risposta sul collettivo preso in esame:




Dall'areogramma si evince che quasi tutti riconoscono che la figura è un angolo; in particolare:

56% Riconosce l'angolo correttamente

- 31% Lo classifica solamente
- 14% Lo classifica e dà una spiegazione corretta
- 11% Dà solo una spiegazione corretta

27% Riconosce l'angolo in modo errato

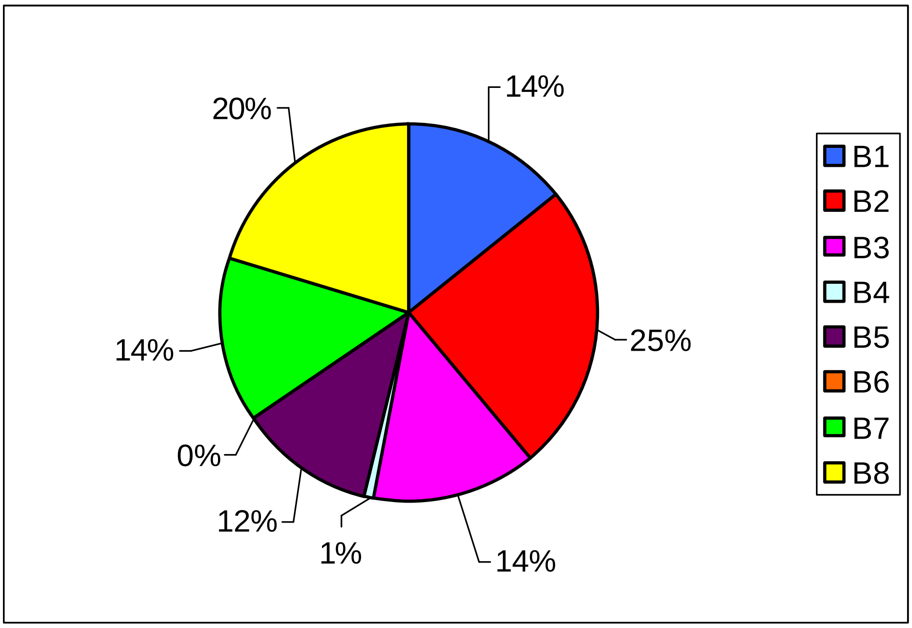
- 16% Non classifica l'angolo e dà solo una spiegazione errata
- 11% Classifica l'angolo in modo errato e la spiegazione può essere errata o esatta

11% Riconosce l'angolo dando una risposta fantasiosa

14% Non riconosce nella figura l'angolo risposta fantasiosa

| **B: Angolo acuto** | Tot. Risp. |
|---|---|
| **1.** *Non riconosce nella figura l'angolo* | 16 |
| **2.** *Riconosce l'angolo e lo classifica*:<br>- è un angolo acuto | 28 |
| **3.** *Riconosce l'angolo lo classifica e da una spiegazione corretta*:<br>- è un angolo acuto perché è più piccolo di 90°<br>- perché deve avere un vertice e si chiama acuto | 16 |
| **4.** *Riconosce l'angolo lo classifica correttamente ma da una spiegazione errata*:<br>- è un angolo acuto perché misura 90° ed è una figura che ha due linee rette | 1 |
| **5.** *Riconosce l'angolo e lo classifica dandogli un nome errato e/o la spiegazione esatta o errata*:<br>- è un angolo ottuso perché sono due linee oblique<br>- è un angolo piatto<br>- angolo semiretto<br>- angolo retto<br>- perché è scaleno<br>- perché ha la punta come la freccia ed è retto | 13 |
| **6.** *Riconosce che è un angolo e motiva la sua risposta dando una spiegazione fantasiosa* | 0 |
| **7.** *Riconosce l'angolo e da una motivazione esatta o quasi esatta del perché è un angolo*:<br>- perché ha due linee una retta e un'altra obliqua<br>- perché ha le linee unite che formano una linea spezzata<br>- Perché è una figura delimitata da due linee semirette e il punto dove si uniscono si chiama vertice<br>- perché è una parte di piano compreso fra due semirette<br>- è formato da linee e vertici | 16 |
| **8.** *Riconosce l'angolo dandogli spiegazione errata*:<br>- ha la forma di un triangolo<br>- perché è un segmento (ha un lato)<br>- è un angolo ( ha la stessa forma di un angolo)<br>- è un angolo perché misura 90 °<br>- perché è una figura delimitata da una linea<br>- perché ha lo stesso vertice uguale<br>- è un angolo perché è profondo (largo con un lato) e a punta<br>- perché è una figura geometrica | 23 |

Le frequenze delle risposte ottenute per l'angolo acuto si possono rilevare in percentuali nel seguente areogramma:




Dall'areogramma si evince che quasi tutti riconoscono che la figura è un angolo; in particolare:

54% Riconosce l'angolo correttamente

- 25% Lo classifica solamente
- 14% Lo classifica e dà una spiegazione corretta
- 14% Dà solo una spiegazione corretta
- 1% Lo classifica e dà una spiegazione errata

27% Riconosce l’angolo in modo errato

20% Non classifica l’angolo e dà solo una spiegazione errata

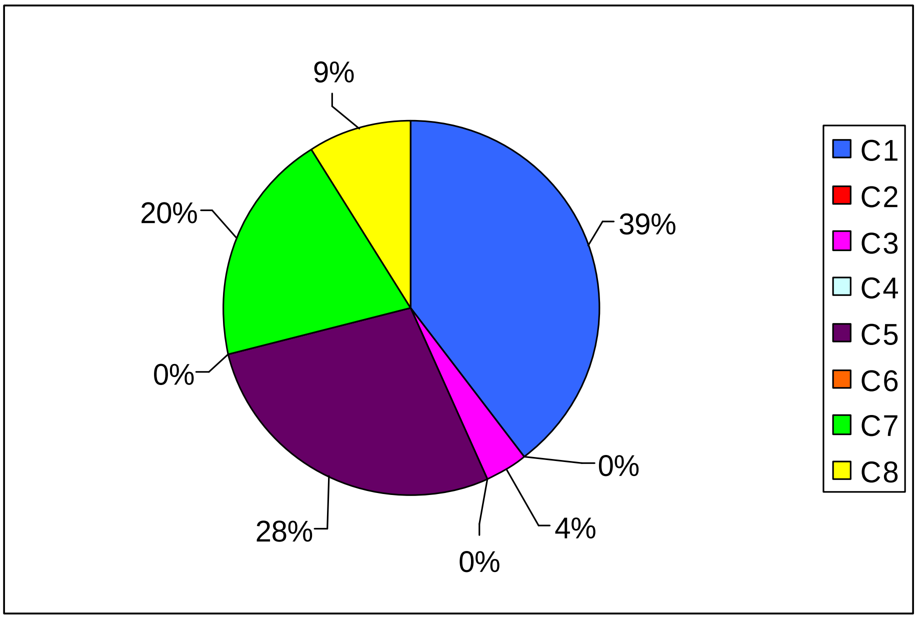
12% Classifica l’angolo in modo errato e la spiegazione può essere errata o esatta

14% Non riconosce nella figura l’angolo risposta fantasiosa

Nessuno cerca di dare una spiegazione fantasiosa alla figura.

| **C: Angoli retti formati da due rette perpendicolari** | Tot. Risp. |
|---|---|
| **1.** *Non riconosce nella figura l'angolo* | *44* |
| **2.** *Riconosce l'angolo e lo classifica*: angoli retti. | *0* |
| **3.** *Riconosce l'angolo lo classifica e da una spiegazione corretta:*<br>- è formato da angoli retti sono rette incidenti<br>- sono rette incidenti e formano 4 angoli retti<br>- sono 2 linee che si incrociano una verticale e una orizzontale e formano 4 angoli retti | *4* |
| **4.** *Riconosce l'angolo lo classifica correttamente ma da una spiegazione errata*. | *0* |
| **5.** *Riconosce l'angolo e lo classifica dandogli un nome errato e/o la spiegazione esatta o errata*:<br>- angolo occidentale<br>- angolo giro (misura 360°)<br>- è un angolo perché è acuto | *31* |
| **6.** *Riconosce l'angolo angolo e motiva la sua risposta dando una spiegazione fantasiosa* | *0* |
| **7.** *Riconosce l'angolo e da una motivazione esatta o quasi esatta del perché è un angolo*:<br>- è un angolo perché si incrociano<br>- è un angolo perché si incontrano formando ai lati degli angoli<br>- è un angolo perché si incrociano e nel centro c'è il vertice<br>- questa croce è formata da quattro angoli uguali che misurano ognuno 90°<br>- perché sono 2 rette che si incontrano<br>- Perché è una figura delimitata da una (due) linea semiretta<br>- è formato da linee e vertici | *22* |
| **8.** *Riconosce l'angolo dandogli spiegazione errata:*<br>- perché ha 4 linee uguali (ha 2 o 4 lati)<br>- perché deve avere un vertice<br>- perché è largo e lungo<br>- è formato da + 80°<br>- perché è una figura geometrica<br>- perché ha lo stesso vertice uguale | 10 |

Le frequenze delle risposte ottenute per gli angoli retti formati da due rette perpendicolari si possono rilevare in percentuali nel seguente areogramma:




Dall'areogramma si evince che quasi tutti riconoscono che la figura è un angolo; in particolare:

| |
|---|
| 39% Non riconosce nella figura l'angolo risposta fantasiosa |

37% Riconosce l'angolo in modo errato

28% Classifica l'angolo in modo errato e la spiegazione può essere errata o esatta

9% Non classifica l'angolo e dà solo una spiegazione errata

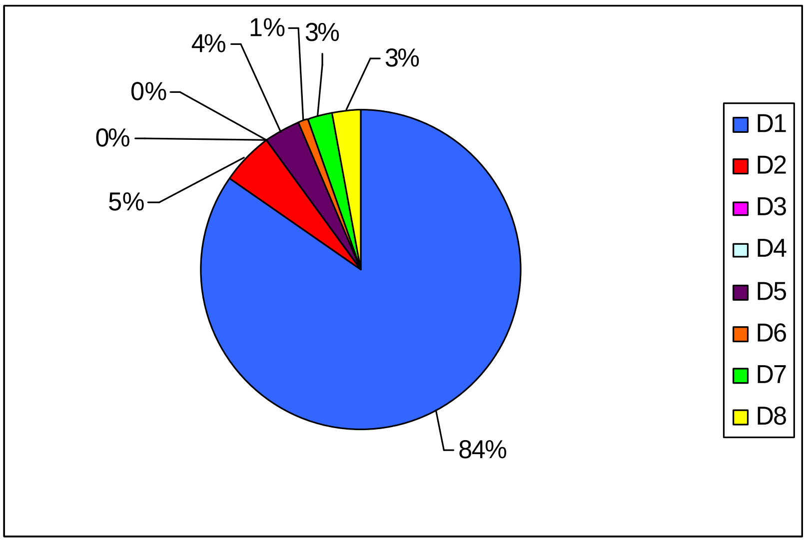
24% Riconosce l'angolo correttamente

4% Lo classifica e dà una spiegazione corretta

20% Dà solo una spiegazione corretta

| **D: Angolo giro** | Tot. Risp. |
|---|---|
| **1.** *Non riconosce nella figura l'angolo* | 94 |
| **2.** *Riconosce l'angolo e lo classifica*:è un angolo giro | 6 |
| **3.** *Riconosce l'angolo lo classifica e da una spiegazione corretta* | 0 |
| **4.** *Riconosce l'angolo lo classifica correttamente ma da una spiegazione errata* | 0 |
| **5.** *Riconosce l'angolo e lo classifica dandogli un nome errato e/o la spiegazione esatta o errata*:<br>- angolo piatto<br>- è piatto perché è un semi cerchio<br>- angolo pettuso | 4 |
| **6.** *Riconosce che è un angolo e motiva la sua risposta dando una spiegazione fantasiosa*:<br>- perché è un centrocampo | 1 |
| **7.** *Riconosce l'angolo e da una motivazione esatta o quasi esatta del perché è un angolo*:<br>- è un angolo perché è un cerchio<br>- perché è chiuso e tondo | 3 |
| **8.** *Riconosce l'angolo dandogli spiegazione errata*:<br>- perché ha una linea curva e una orizzontale<br>- perché è molto largo | 3 |

Le frequenze delle risposte ottenute per l'angolo giro si possono rilevare in percentuali nel seguente areogramma:



Dall’areogramma si evince che quasi tutti riconoscono che la figura è un angolo; in particolare:

84% Non riconosce nella figura l’angolo risposta fantasiosa.

8% Riconosce l’angolo correttamente.

5% Lo classifica solamente.

3% Dà solo una spiegazione corretta.

7% Riconosce l’angolo in modo errato.

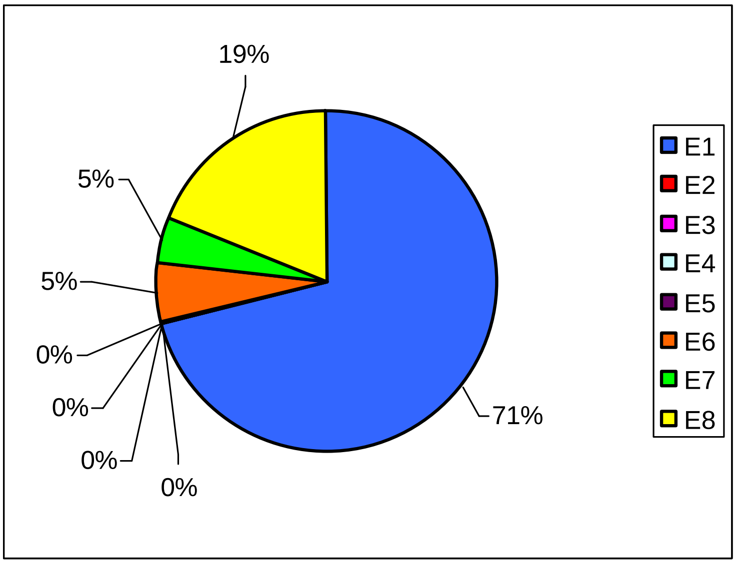
3% Non classifica l’angolo e dà solo una spiegazione errata.

4% Classifica l’angolo in modo errato e la spiegazione può essere errata o esatta.

1% Riconosce l’angolo dando una risposta fantasiosa.

| E: Angolo diedro | | Tot. risp. |
|---|---|---|
| **1.** | *Non riconosce nella figura l'angolo* | 79 |
| **2.** | *Riconosce l'angolo e lo classifica* | 0 |
| **3.** | *Riconosce l'angolo lo classifica e da una spiegazione corretta.* | 0 |
| **4.** | *Riconosce l'angolo lo classifica correttamente ma da una spiegazione errata.* | 0 |
| **5.** | *Riconosce l'angolo e lo classifica dandogli un nome errato e/o la spiegazione esatta o errata.* | 0 |
| **6.** | *Riconosce che è un angolo e motiva la sua risposta dando una spiegazione fantasiosa*:<br>- si perché ha la circonferenza di una stanza<br>- perché è come se fosse delle punte di un pavimento<br>- è un angolo perché ha le punte aguzze<br>- è un angolo perché sembra una scatola<br>- è come un cubo | 6 |
| **7.** | *Riconosce l'angolo e da una motivazione esatta o quasi esatta del perché è un angolo*:<br>- perché misura 90°;<br>- perché deve avere almeno 2 rette che si incontrano;<br>- è un angolo perché ha la forma di due fogli orizzontale e verticale. | 5 |
| **8.** | *Riconosce l'angolo dandogli spiegazione errata*:<br>- sono due angoli acuti e due ottusi perché sono due parallelogrammi (erano quadrati);<br>- è una angolo perché ha 2 linee verticali, 2 orizzontali e 4 oblique;<br>- è un angolo perché ha lati uguali e angoli uguali fra loro;<br>- è una figura formata (ha degli) da 11 angoli;<br>- è formato da angoli acuti;<br>- perché deve avere un vertice;<br>- è un angolo perché è una linea che inizia e che finisce;<br>- questo è un angolo perché ha otto (7 0 72 ed è a forma di croce) lati;<br>- perché è grande (è largo);<br>- perché è chiuso. | 21 |

Le frequenze delle risposte ottenute per l’angolo diedro si possono rilevare in percentuali nel seguente areogramma:




Dall’areogramma si evince che quasi tutti riconoscono che la figura è un angolo; in particolare:

71% Non riconosce nella figura l’angolo risposta fantasiosa

5% Riconosce l’angolo correttamente — 5% Dà solo una spiegazione corretta

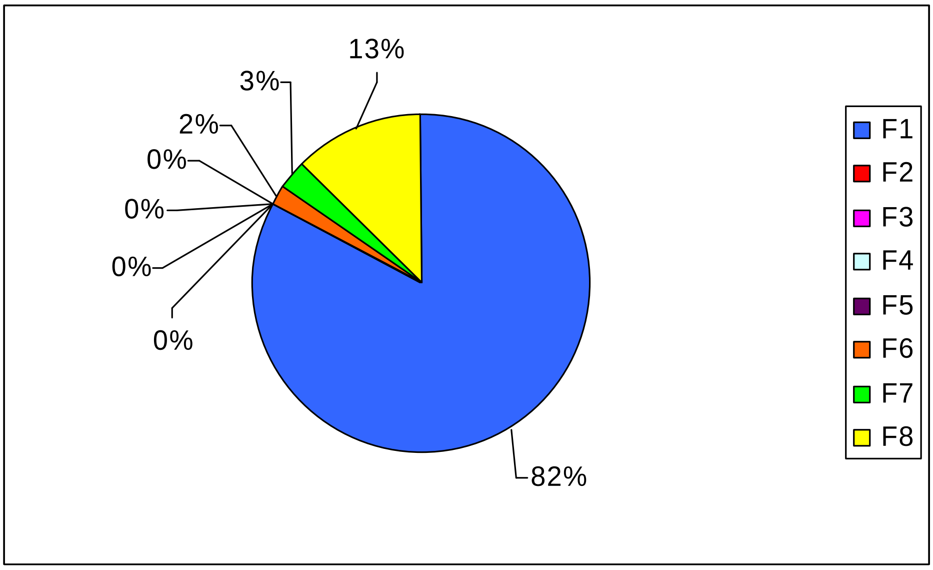
19% Riconosce l’angolo errata — 19% Non classifica l’angolo e dà solo una spiegazione errata

5% Riconosce l’angolo dando una risposta fantasiosa

Nessuno classifica l'angolo poiché non lo conoscono, solo pochi riconoscono nella figura un angolo ma di questi non tutti rispondono correttamente.

| **F: Angolo nello spazio formato da un piano ed una retta ad esso perpendicolare** | Tot. risp. |
|---|---|
| **1.** *Non riconosce nella figura l'angolo* | 92 |
| **2.** *Riconosce l'angolo e lo classifica* | 0 |
| **3.** *Riconosce l'angolo lo classifica e da una spiegazione corretta* | 0 |
| **4.** *Riconosce l'angolo lo classifica correttamente ma da una spiegazione errata* | 0 |
| **5.** *Riconosce l'angolo e lo classifica dandogli un nome errato e/o la spiegazione esatta o errata* | 0 |
| **6.** *Riconosce che è un angolo e motiva la sua risposta dando una spiegazione fantasiosa*:<br>- perché finisce con una punta (ha una punta rialzata) | 2 |
| **7.** *Riconosce l'angolo e da una motivazione esatta o quasi esatta del perché è un angolo*:<br>- perché deve avere almeno (ha) 2 rette che si incontrano<br>- è un angolo perché ha una retta che non ha né inizio né fine | 3 |
| **8.** *Riconosce l'angolo dandogli spiegazione errata*:<br>- sono due angoli acuti e due ottusi perché è un trapezio e un trapezio ha 4 angoli<br>- perché è un parallelogramma<br>- perché è un rettangolo con una linea in mezzo<br>- ha due angoli acuti (ci sono gli angoli nella figura)<br>- perché deve avere un vertice<br>- è un angolo perché è acuto<br>- perché ha 4 lati | 14 |

Le frequenze delle risposte ottenute per l’angolo nello spazio formato da un piano ed una retta ad esso perpendicolare si possono rilevare in percentuali nel seguente areogramma:




Dall’areogramma si evince che quasi tutti riconoscono che la figura è un angolo; in particolare:

82% Non riconosce nella figura l’angolo risposta fantasiosa

3% Riconosce l’angolo correttamente

3% Dà solo una spiegazione corretta

13% Riconosce l’angolo errata

13% Non classifica l’angolo e dà solo una spiegazione errata

2% Riconosce l’angolo dando una risposta fantasiosa

Come per l'angolo diedro anche questo angolo nello spazio non viene riconosciuto dai bambini e in pochissimi azzardano una risposta quasi esatta.

# Capitolo 3

# Le situazioni a – didattiche

Nel corso della loro carriera scolastica, gli alunni sviluppano riguardo alla matematica una serie di “credenze” più o meno corrette che si ripercuotono sulle prestazioni. Il bambino, ad esempio, può convincersi che occorra essere dei geni per essere bravi in matematica, oppure che le difficoltà di un problema dipendano dalla grandezza dei numeri che contiene.

La scuola elementare, che offre al bambino una prima alfabetizzazione matematica, fin dai primi anni richiede all’alunno di essere strategico, di formulare ipotesi, di verificarle, di fare previsioni e progettazioni. I Nuovi Programmi per la Scuola Elementare (DPR 12/02/1985 n. 104) esprimono questa nuova concezione di insegnamento e di apprendimento e riconoscono che la formazione del pensiero in generale e gli apprendimenti disciplinari nello specifico sono in stretta relazione con i processi di pensiero sopraordinati e con quelli metacognitivi.

Un approccio promettente per insegnare efficacemente la matematica agli studenti è quello costruttivista, basato sull’assunto che lo studente è una persona che apprende attivamente e che si costruisce una sua conoscenza personalizzata collegando i nuovi contenuti a quelli che già possiede.

Compito primario del docente è quello di indirizzare il suo lavoro sulla “zona di sviluppo prossimale” dello studente, o fornendo esplicitamente le nuove informazioni, attraverso descrizioni, spiegazioni, dimostrazioni e pratica guidata con il feedback (costruttivismo esogeno), oppure presentando allo studente degli stimoli meno diretti (situazione a – didattica) che lo incoraggiano alla scoperta autonoma e creativa delle nuove informazioni (costruttivismo endogeno).

Il docente deve guidare lo studente verso la riuscita scolastica aiutandolo a fare buon uso delle strategie e delle abilità di autoregolazione; insegnerà, quindi, come imparare e dimostrare la padronanza delle conoscenze acquisite nell’esecuzione di compiti scolastici creando situazioni a – didattiche che rendono l’alunno costruttore e responsabile delle conoscenze da acquisire.

La geometria nasce infatti nel bambino come conquista del proprio corpo, delle proprie possibilità di movimento e di azione sull’ambiente nonché come consapevolezza dello spazio vissuto e percepito. Muoversi nella propria stanza, avvicinare e spostare oggetti, salire e scendere, protendere verso l’alto per farsi prendere in braccio dalla mamma è già geometria.

È chiaro che queste forme intuitive della geometria, come già del resto per le forme intuitive del numero, vanno un po’ alla volta esplicitate e rese consapevoli.

Il primo approccio alla comprensione di molti concetti matematici e geometrici, quindi non può che essere indubbiamente la manipolazione concreta di materiali e l'immersione diretta in fatti, situazioni e problemi. È importante però avere sempre ben presente che, soprattutto nel secondo ciclo, il bambino deve tendere sempre più ad astrarre dal concetto e a potenziare ragionamenti formali e di operare su enti matematici già precedentemente astratti. Per favorire questo processo occorre pertanto stimolare il bambino al passaggio dalla manipolazione dei materiali alla rappresentazione formale delle regole, leggi e principi scoperti o ipotizzati.

Al fine di favorire quel primo approccio a determinati concetti di cui si parla, l'ambiente scolastico dovrà essere caratterizzato dalla presenza di occasioni manipolatorie e di sperimentazioni dirette. È opportuno che la classe sia fornita di materiali di vario genere sia del tipo strutturato (blocchi logici, geopiano, abaci ecc…) sia di tipo non strutturato e proveniente da materiali di recupero quali possono essere scatole di varia dimensione e forma, bottoni colorati, tappi ecc…

## 3.1 La teoria delle situazioni.

La teoria delle situazioni si propone di recuperare la valenza formativa dell'educazione matematica, che diviene strumento per lo sviluppo psichico e in particolare della capacità di problem solving.

Con essa viene messa in discussione la pratica educativa tradizionale di trasmissione di un sapere precostituito, attraverso un percorso univoco che va dall'insegnante all'allievo. La teoria delle situazioni propone nei fatti di attivare un processo di ricostruzione condivisa dal sapere matematico. Nello specifico, ci si propone di promuovere l'apprendimento dei concetti matematici partendo da situazioni problematiche significative per gli allievi.

Secondo questa prospettiva, gli allievi si riappropriano della responsabilità del processo di apprendimento, partecipando attivamente alla costruzione del proprio sapere.

Il lavoro intellettuale compiuto in questo caso dall'allievo è confrontabile con quello del ricercatore: egli deve porsi problemi, definirsi attraverso buone domande, provare a costruire modelli, teorie, per trovare buone risposte ad una situazione problematica specifica.

Il compito dell'insegnante è di fornire gli strumenti per simulare una "micro-società scientifica", in cui i piccoli ricercatori possano confrontare i loro saperi per costruirne di nuovi, formulare e argomentare proprie ipotesi, formalizzare le loro scoperte.

La nozione di situazione a – didattica è centrale nella teoria delle situazioni. Una situazione designa l'insieme delle circostanze nelle quali si trova una persona (un gruppo, una collettività, ecc...), le relazioni che l'uniscono al suo ambiente, e l'insieme dei dati che caratterizzano una azione o una evoluzione (un'azione in un certo momento).

Una **situazione è didattica** quando un individuo (in genere l'insegnante) ha intenzione di insegnare ad un altro individuo (in genere l'allievo) un determinato sapere.

Si chiama **situazione di apprendimento** una situazione che permette ad un soggetto di passare da uno stato di conoscenza ad un altro stato di conoscenza.

Si chiama **situazione a – didattica** la parte della situazione didattica nella quale l'intenzione dell'insegnante non è esplicita nei confronti dell'allievo.

L'allievo sa che il problema propostogli è stato scelto per fargli acquisire nuova conoscenza e, nello stesso tempo, deve sapere che questa conoscenza è giustificata dalla logica interna della situazione.

E per costruire questo sapere non deve fare appello a delle ragioni didattiche.

In una situazione a – didattica l'insegnante, attraverso un insieme di condizioni che permettono all'allievo di appropriarsi della situazione, permette una **devoluzione** della situazione.

La devoluzione consiste non soltanto nel presentare all'allievo il gioco al quale l'insegnante vuole che partecipi, ma anche nel fare in modo che l'allievo si senta responsabile, nel senso della conoscenza e non della colpevolezza, del risultato che egli deve cercare. La devoluzione fa appello alle motivazioni dell'allievo, il quale non deve soltanto accettare il gioco proposto, ma deve ricercare le strategie migliori che gli permetteranno di vincere.

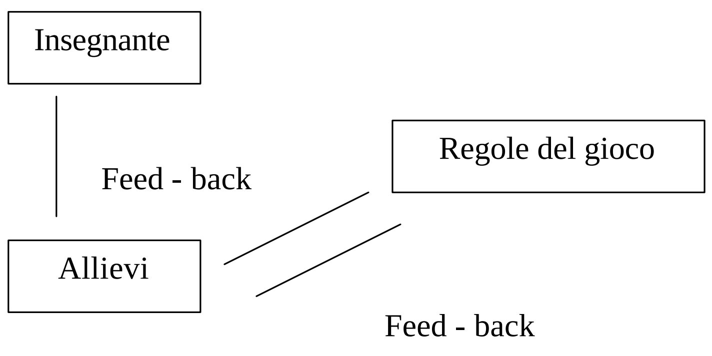
Quindi la devoluzione è l'atto attraverso il quale l'insegnante fa accettare all'allievo la responsabilità di una situazione di apprendimento (a – didattica) o di un problema e accetta lui stesso le conseguenze di questo transfert. Nella situazione a – didattica, da me proposta, ho cercato di mettere in evidenza oltre al ruolo dell'insegnante, i seguenti punti:

- Descrizione delle consegne per gli allievi;
- Analisi delle fasi d'azione;
- Analisi di formulazione;
- Analisi di validazione.

**Schema di una situazione a-didattica**

Nella situazione a – didattica l'allievo costruisce la sua conoscenza non per ragioni didattiche, ma perché motivato dalla logica interna alla situazione. L'obiettivo didattico perseguito dall'insegnante non è dichiarato.

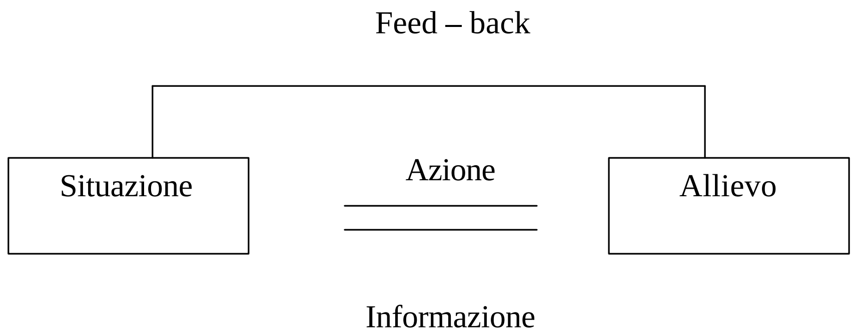
**Prima fase: La consegna.**



L’insegnante espone all’allievo le regole del gioco, il problema, l’argomento della situazione a – didattica, servendosi anche di una dimostrazione pratica con un allievo.

L’azione, infatti, riduce l’ambiguità del linguaggio verbale. Attraverso l’azione, inoltre, l’insegnante può cogliere il processo di retroazione attivato dall’allievo il quale può ripercorrere la situazione per effettuare un controllo e modificare l’azione.

**Seconda fase: La situazione di azione.**




Gli allievi agiscono sulla situazione problema, iniziando a formulare ipotesi e strategie che sono messe alla prova da ulteriori esperienze.

L’interazione fra l’allievo e il suo ambiente (gli altri allievi, la situazione problematica, l’insegnante), grazie alla quale sono ipotizzate le prime strategie, è definita *dialettica dell’azione*.

Siamo in una fase in cui l'allievo costruisce un modello implicito: un insieme di relazioni o regole in base alle l'allievo prende le sue decisioni senza essere capace di averne coscienza e quindi di formularle.

**Terza fase: La situazione di formulazione.**

Verbalizzazione e formulazione delle strategie

| Allievo-emittente | Feed-back | Allievo-destinatario |
| --- | --- | --- |

In questa fase l'allievo è portato dalla situazione a formulare il proprio modello implicito, verbalizzare le proprie strategie, argomentarle e difenderle, per far in modo che siano fatte proprie dagli altri allievi.

Per far ciò, ognuno dovrà elaborare progressivamente un linguaggio tale da essere compreso da tutti.

Lo scambio comunicativo tra gli allievi porta alla formulazione della strategia: siamo nella fase di *dialettica della formulazione*.

**Quarta fase: La situazione di validazione.**

I modelli formulati possono essere accettati o rifiutati dalla classe. All'interno del gruppo gli allievi sono in una situazione paritaria che permette loro di discutere per accettare o rifiutare le possibili strategie.

Le ipotesi accettate da tutti diventano teoremi.

Spesso gli allievi accettano teorie sbagliate, la situazione a –didattica deve condurli a rivedere i loro ragionamenti e riformulare le strategie in modo corretto. In questo modo l'errore diviene una tappa indispensabile nel processo di costruzione della conoscenza.

Con la fase di validazione si arriva a formalizzare il concetto matematico che nel metodo tradizionale di insegnamento non rappresenta un punto d'arrivo ma un punto di partenza.

## 3.2 Le situazioni a – didattiche sperimentate

La mia sperimentazione prevede l'attivazione di quattro situazioni a – didattiche, presentate in una sola classe formata da 14 alunni, e hanno lo scopo di verificare e osservare come si evolvono le concezioni degli alunni sull'idea di angolo.

Ogni attività viene proposta sotto forma di gioco, al fine di attivare la motivazione degli alunni e stimolare la loro creatività e curiosità. Essa comprende quattro fasi:

1. presentazione del gioco e spiegazione delle regole;
2. gli alunni si attivano per svolgere il l'esercizio cercando una percorso ed una soluzione finale attraverso momenti di ipotesi, strategie e tentativi ed errori al fine di trovare una soluzione sensata;
3. gli alunni verbalizzano i processi e i prodotti ottenuti a seguito dello svolgimento delle attività;
4. confronto dei risultati ottenuti per formulare il concetto matematico valido per tutti.

Le situazioni a – didattiche sono state formulate in modo tale da far acquisire in modo graduale il concetto di angolo secondo le varie sfaccettature: angolo come porzione di spazio, come cambio di direzione e come rotazione.

La classe, visto il numero ristretto di alunni, è stata suddivisa in due gruppi anche se era previsto un lavoro con tre o più gruppi.

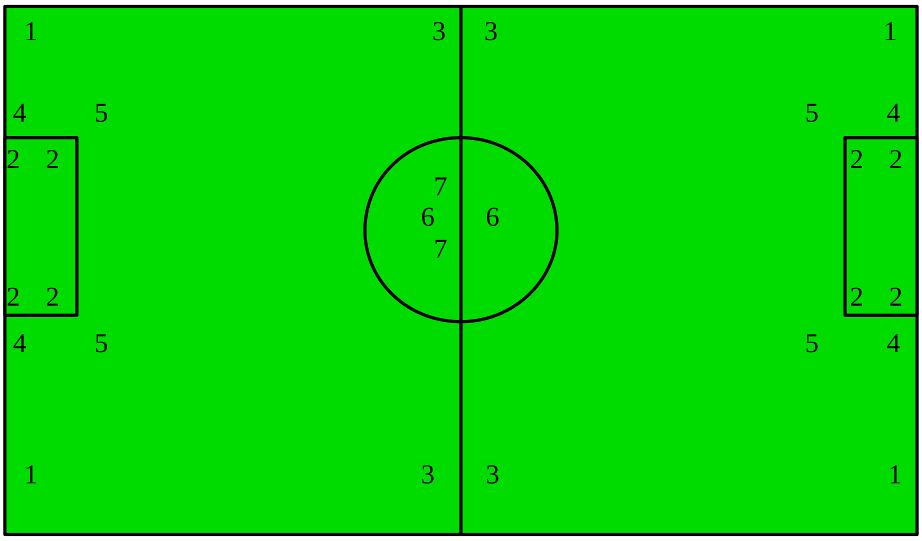
### 3.2.1. Prima Situazione a – didattica

Obiettivi:

- Saper riconoscere nel piano tutti gli angoli presenti;
- Saper classificare gli angoli;

#### Il gioco

Il primo gioco consiste nell'individuare nella figura sotto riportata, in un tempo stabilito, il maggior numero di angoli presenti in esso e rispondere a delle domande.




Osserva il campo e rispondi:

- Quanti angoli ci sono?
- Ci sono angoli anche al centro del campo?
- Gli angoli sono tutti della medesima ampiezza?
- Ci sono più angoli in una metà campo o nell'altra?
- Classifica gli angoli colorandoli in modo differente in base alla loro ampiezza.

## Fasi principali del gioco

**1 fase**: Spiegazione della procedura. L'insegnante spiega le regole dei giochi facendo un esempio esplicativo.

**2 fase**: Gli allievi iniziano a giocare con la prima situazione a loro proposta, rispondendo a tutte le domande poste osservando il modellino del campo. Questa fase ha una durata di 15-20 minuti.

**3 fase**: nelle squadre viene nominato un portavoce che fa da referente del lavoro di gruppo per verbalizzare l'esperienza e verbalizzazione.

**4 fase**: confronto dei risultati raggiunti da entrambe le squadre per decretare i vincitori e trovare la soluzione più ragionevole.

## Comportamenti attesi:

**A) Quanti angoli ci sono? Si possono verificare le seguenti risposte:**

1. Quattro perché i bambini seguono il gioco del calcio e li fanno coincidere con quelli stabiliti in tale gioco (1).
2. Dodici se nel campo si notano solo gli angoli interni ai quadrilateri presenti: il rettangolo del campo e quelli delle porte (1 – 2).
3. Sedici se individuano nel campo i seguenti quadrilateri: rettangoli delle porte e delle due metà campo (1 – 2 –3).

4. Diciotto se individuano gli interni ai rettangoli delle porte, ai rettangoli che formano la metà campo e agli angoli piatti del centro campo (1 – 2 – 3 – 6 )
5. Venti se individuano i seguenti angoli: interni ai rettangoli delle porte, ai rettangoli che formano la metà campo e quelli formati dai rettangoli delle porte con il perimetro del rettangolo – campo (1 – 2 – 3 – 4 )
6. Ventiquattro se individuano gli angoli dei rettangoli delle due metà campo e gli angoli interni ed esterni alle porte (1 – 2 – 3 – 4 – 5)
7. Ventisei se individuano gli angoli dei rettangoli delle due metà campo e gli angoli interni ed esterni alle porte e i due angoli piatti al centro del campo (1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6)
8. Ventotto se individuano gli angoli dei rettangoli delle due metà campo e gli angoli interni ed esterni alle porte e i due angoli piatti e i due angoli giro al centro del campo (1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7)
9. Trenta se individuano gli angoli dei rettangoli delle due metà campo e gli angoli interni ed esterni alle porte e i due angoli piatti e i quattro angoli giro (in un verso e nell’altro) al centro del campo (1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7)

**B) Ci sono angoli anche al centro del campo?**

1) Si due angoli piatti
2) Si un angolo giro
3) Si due angoli giro
4) Si due angoli piatti e un angolo giro
5) Si due angoli piatti e due angoli giro
6) No

**C) Gli angoli sono tutti della medesima ampiezza?**

1) Si
2) No

**D) Ci sono più angoli in una metà campo o nell'altra?**

1) Si nella parte di destra
2) Si nella parte di sinistra
3) No sono uguali

**E) Classifica gli angoli colorandoli in modo differente in base alla loro ampiezza**

1) angoli retti
2) angoli retti e piatti
3) angoli retti, piatti e giro
4) angoli retti, piatti, giro e angolo di 270 °
5) angoli retti e giro
6) angoli retti, piatti, e angolo di 270 °
7) angoli retti, giro e angolo di 270 °

La squadra che avrà risposto esattamente a tutte le domande del gioco sarà la vincitrice.

### 3.2.2. Prima situazione a – didattica a scuola

Ho applicato la situazione a – didattica suddividendo la classe in due gruppi: squadra A e squadra B; ogni squadra avrebbe dovuto eseguire la consegna lavorando in "*cooperative learning*".

Ho preparato quindi, con due cartoncini verdi e un pennarello colorato, due campi di calcio.

Ho consegnato un foglio bianco e ho dettato, come programmato in precedenza, la seguente consegna:

Osserva il campo e rispondi:

1. Quanti angoli ci sono?
2. Ci sono angoli anche al centro del campo?
3. Gli angoli sono tutti della medesima ampiezza?
4. Ci sono più angoli in una metà campo o nell'altra?
5. Classifica gli angoli colorandoli in modo differente in base alla loro ampiezza.

Dopo la consegna ho distribuito ad ogni squadra il cartoncino raffigurante il campo di calcio e ho dato il segnale di inizio gioco. All’interno del gruppo collaboravano tutti anche se, come di norma, un membro assumeva la funzione del leader.

La squadra A ha portato a termine il lavoro in pochi minuti segnando soltanto i quattro angoli del campo di calcio.

Alle domande hanno dato le seguenti risposte:

A

1) Quanti angoli ci sono? 4.

2) Ci sono angoli al centro dell campo?

3) Gli angoli sono Tutti della medesima larghezza?

4) Ci sono più angoli in una metà del campo o nell altra?

5) nel campo classifica gli angoli colorandoli in modo differente in base alla loro larghezza

1) Ci sono quatro angoli

2) no, al centro del campo non ci sono angoli

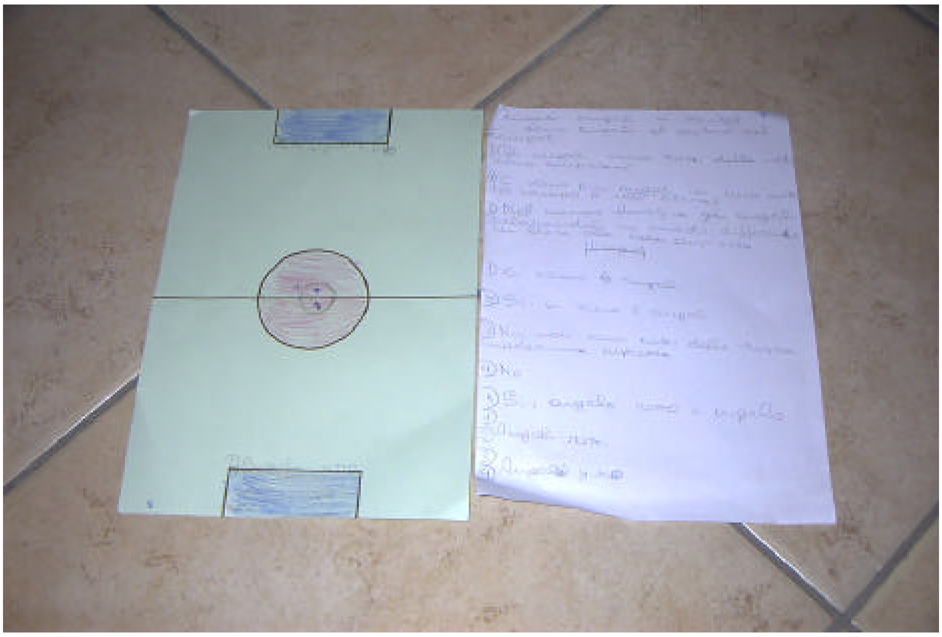
3) Si sono uguali

4) No

Nel campo hanno segnato gli angoli come da foto:

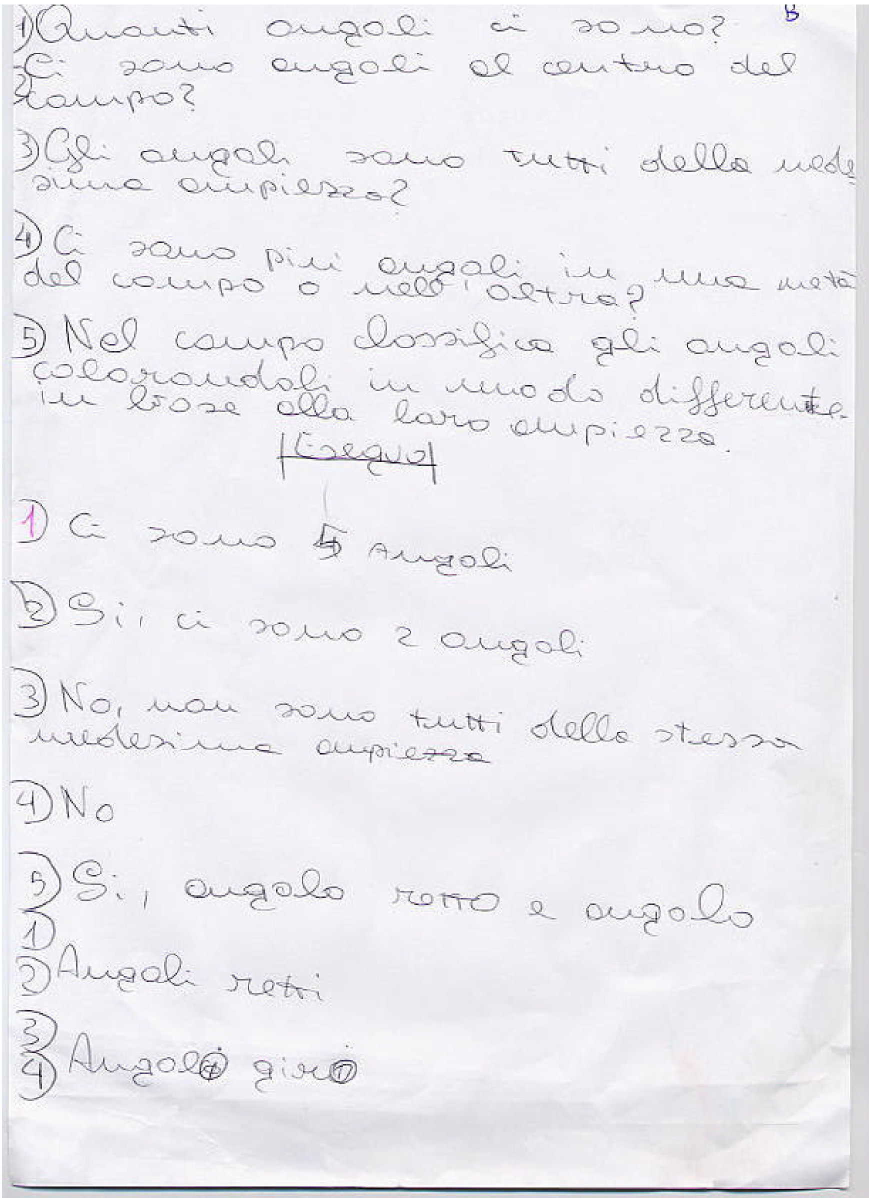
squadra A

La squadra B ha impiegato più tempo e i risultati trovati non erano uguali: hanno segnato due angoli per ogni rettangolo – porta, per un totale di 4 angoli, e 2 angoli giro al centro.



squadra b

Le risposte della squadra B sono state:

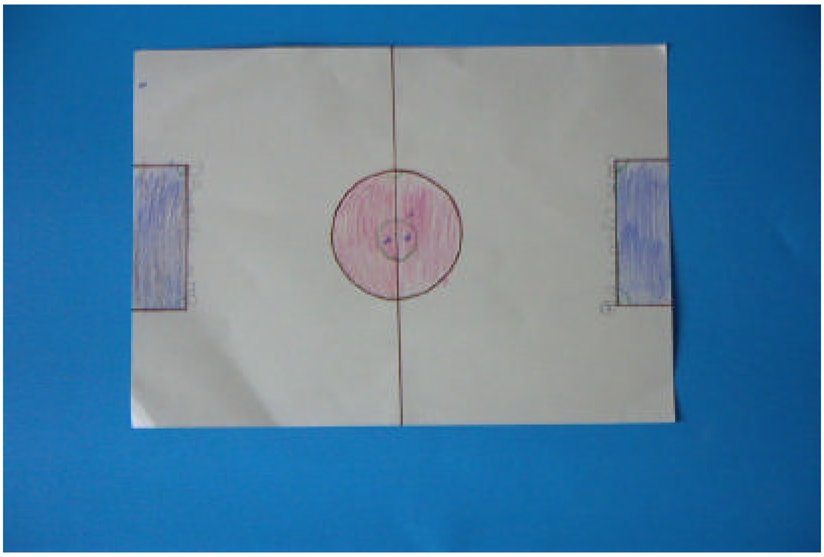

B

1) Quanti angoli ci sono?
2) Ci sono angoli al centro del campo?
3) Gli angoli sono tutti della medesima ampiezza?
4) Ci sono più angoli in una metà del campo o nell'altra?
5) Nel campo classifica gli angoli colorandoli in modo differente in base alla loro ampiezza.

~~(Segue)~~

1) Ci sono 5 angoli
2) Si, ci sono 2 angoli
3) No, non sono tutti della stessa medesima ampiezza
4) No
5) Si, angolo retto e angolo
1)
2) Angoli retti
3)
4) Angoli giro

Le risposte sono scaturite dall'osservazione delle linee tracciate con il pennarello mentre di fatto gli alunni non hanno tenuto conto dei limiti del campo. Hanno tuttavia individuato nel centro del campo due angoli giro, ma hanno preferito comunicarlo a voce perché non ricordavano il nome per definirli.

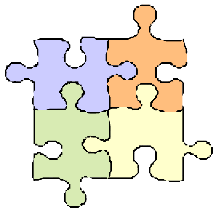


Squadra B

Dal confronto delle soluzioni le conclusioni sono state:

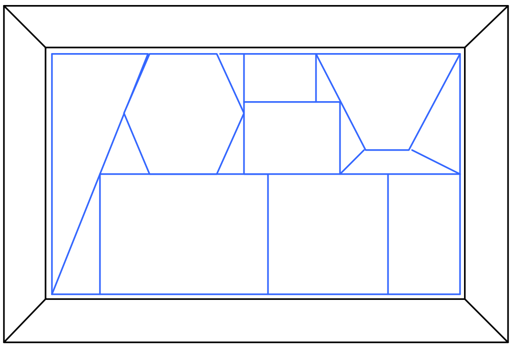
- Non bisogna dare delle rispose affrettate anche quando si crede di avere la soluzione adatta, come ha fatto la squadra A;
- Dall'incontro di due rette o due semirette (o segmenti) che si originano in un punto comune del piano in cui giacciono, non si individua un solo angolo ma rispettivamente quattro o due: piatti, concavi o convessi.
- L'angolo giro è lo spazio individuato da una semiretta che ruotando nel suo punto di origine raggiunge la posizione iniziale.

### 3.2.3. Seconda Situazione a – didattica



La seconda parte della situazione a – didattica prevede il seguente gioco: alle squadre viene distribuito un quadro bianco (nessun soggetto raffigurato) e dei puzzle di colore differente dove i vari pezzi sono delle figure geometriche.

In un tempo stabilito le squadre dovranno creare i mosaici cercando di individuare il puzzle che ha, con le varie figure, un numero maggiore di angoli.



Questo gioco può essere un mezzo introduttivo per intraprendere il concetto di poligoni e di figure geometriche.

Vince chi compone la figura più ricca di angoli.

## Strategie:

Raggruppare per ogni puzzle tutte le figure con pari numero di angoli e poi eseguire un'espressione del genere:

$3\ x_1 + 4\ x_2 + \ldots\ldots + nx_n = y$

dove 3, 4, …n stanno ad indicare il numero di angoli interi della figura ad es. 3 per tutti i triangoli, 4 per i quadrilateri ecc.. e $x_n$ indicano il numero delle figure che hanno lo stesso numero di angoli.

In questo modo gli alunni non comporranno tutti i puzzle per contare il numero di angoli presenti in ogni composizione ma lo sapranno a priori.

## Fasi principali del gioco

**1 fase**: spiegazione della procedura. L'insegnante spiega le regole dei giochi facendo un esempio esplicativo.

**2 fase**: gli allievi iniziano a giocare con la prima situazione a loro proposta, segnando su di un foglio tutte le strategie utilizzate e tutti i prodotti ottenuti, componendo al termine il quadro finale da presentare per il confronto.

**3 fase**: verbalizzazione dei processi e dei prodotti ottenuti.

**4 fase**: confronto dei risultati raggiunti da entrambe le squadre per decretare i vincitori e trovare la soluzione più ragionevole.

## Comportamenti attesi:

- Gli alunni mettono le composizioni una per volta per contare gli angoli della figura e solo dopo aver composto tutti i puzzle fanno la loro scelta;
- Gli alunni contano il numero di figure presenti in ogni mosaico e scelgono quello che è composto da un numero maggiore di figure;
- Gli alunni contano gli angoli figura per figura prima di comporre il puzzle;
- Gli alunni raggruppano le figure per numero di angoli e poi individuano con un passaggio del tipo indicato nell'espressione strategica il numero di angoli.

### 3.2.4. Seconda situazione a – didattica a scuola

Il materiale che ho preparato per questa situazione a – didattica è:

- Due quadri senza immagine realizzati con due cartoncini molto rigidi di colore grigio e delle strisce di cartoncino colorato;
- Dei puzzle colorati ricavati con fogli di carta A4 di colore celeste, rosa, blu e giallo.

I puzzle sono stati fatti in modo tale da indurre gli alunni a fare delle considerazioni. Infatti sono presentati:

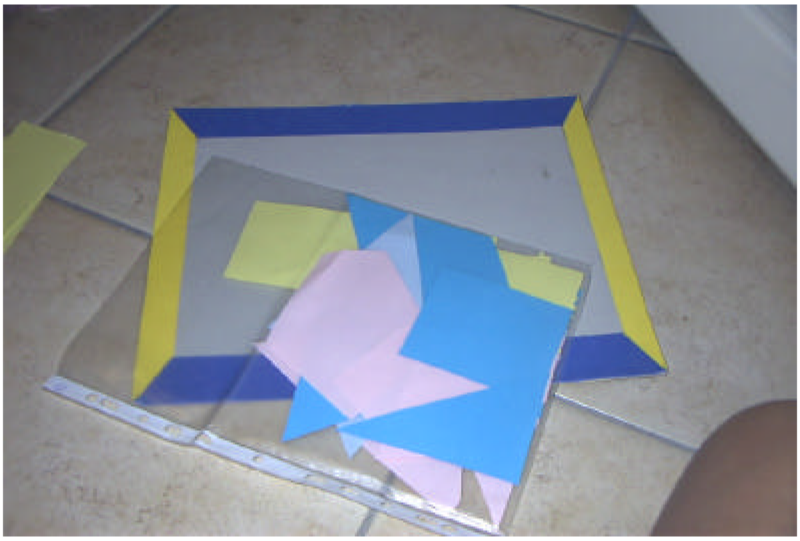
1) due puzzle da sette pezzi di forma diversa tali da ottenere, nel conteggio degli angoli, due diversi risultati

2) un puzzle di otto pezzi per un totale di angoli inferiore ai primi due

3) un puzzle che comprende sei figure che presentano angoli concavi e convesse allo scopo di formare più angoli rispetto a quelli precedenti.

#### Il gioco:

A ciascuna squadra ho dato un quadro da riempire e una busta contenente i puzzle. Per evitare che i due gruppi potessero copiarsi a vicenda, ho realizzato kit di puzzle differenti sia per forma che per numero di angoli, indicando a tutti gli alunni coinvolti la differenza tra i due kit.



La consegna data è stata: “create i mosaici cercando di individuare tra i vari puzzle quello con un numero maggiore di angoli. Per ogni composizione deve essere usati pezzi dello stesso colore”.

I bambini, dopo un primo momento di titubanza, hanno iniziato a comporre i quadri utilizzando però figure


Primi tentativi

di colore diverso e posizionando i pezzi in modo casuale sovrapponendoli uno sull’altro non rispettando i contorni del quadro.

Dopo 5 minuti hanno quindi rinunciato in quanto non riuscivano a capire che figura dovevano comporre e hanno chiesto ulteriori spiegazioni.

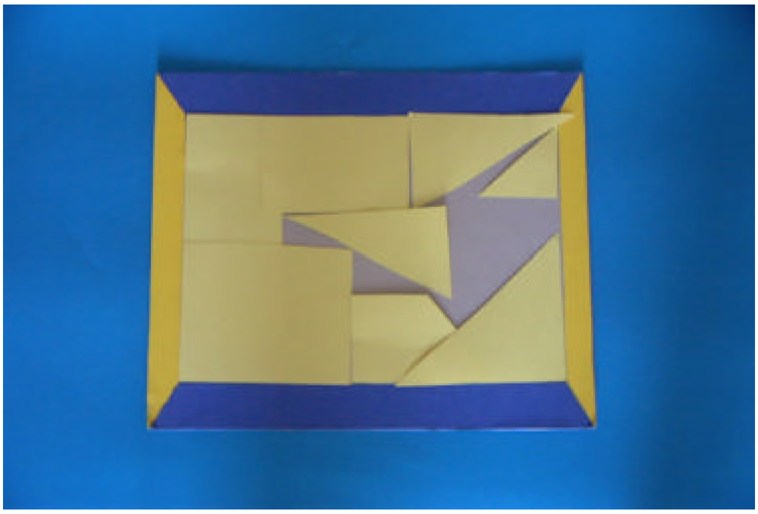
Ho spiegato allora che non dovevano ottenere alcuna immagine, ma soltanto ricomporre il foglio di carta A4 specificando che il quadro doveva essere composto da pezzi dello stesso colore.

Dopo questa ulteriore delucidazione si sono rimessi all’opera raggruppando i vari pezzi per colore.

Dopo un primo momento di lavoro la squadra B mi ha chiesto dei fogli bianchi poiché, mi hanno spiegato, se ogni alunno del gruppo avesse composto un puzzle sul foglio avrebbero finito in minor tempo tutti i quadri. Gli angoli sarebbero stati contati a quadro ultimato.

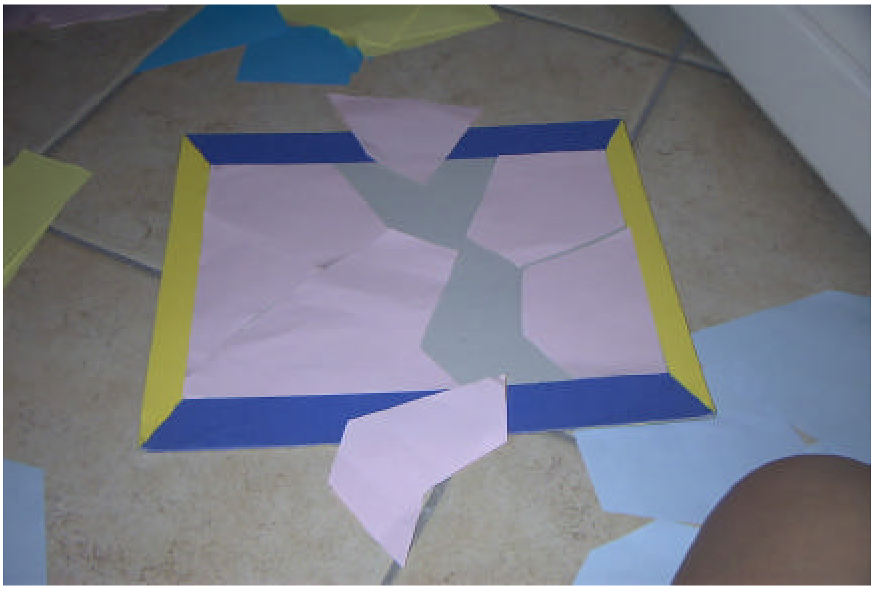
La squadra A, vedendo come stava procedendo la squadra avversaria ha anch’essa chiesto dei fogli per procedere alla stessa maniera.

Anche in questo esperimento entrambi i gruppi hanno incontrato difficoltà nella composizione, sovrapponendo le figure e non riuscendo a ricoprire tutta la parte grigia. Gli alunni sostenevano che i puzzle non erano completi e che dovevano quindi mancare dei pezzi.



Continuando nel gioco uno di loro tuttavia ha notato che due figure di cui una concava e una convessa si incastravano perfettamente tra di loro così è stata modificata la strategia di lavoro basandola su questa osservazione.

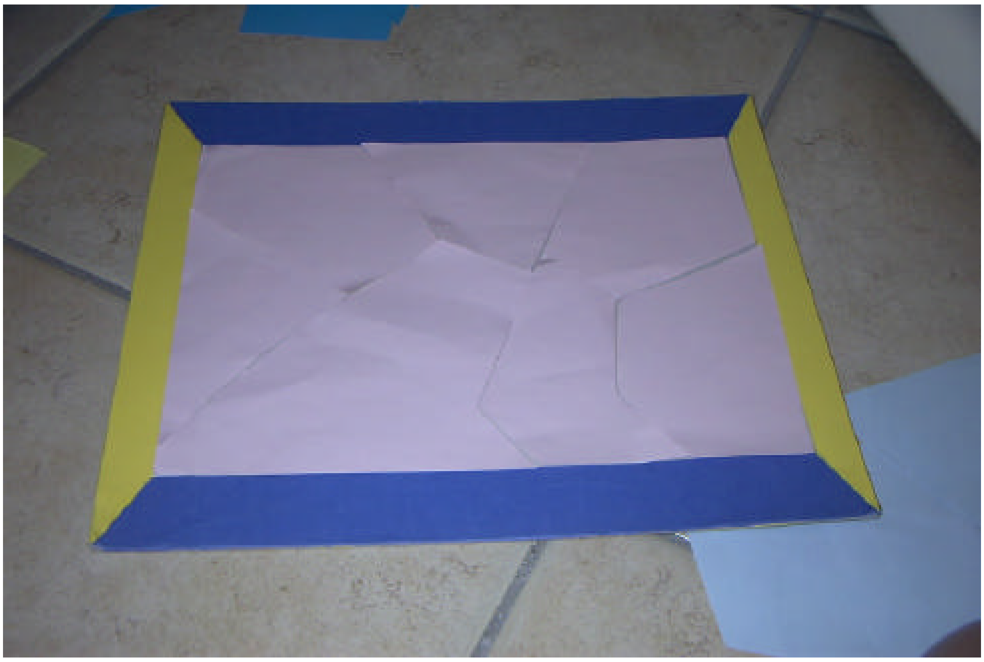
Un bambino della squadra B nel frattempo rileggeva la consegna scritta alla lavagna e suggeriva ai suoi compagni, che avevano composto due puzzle, di contare gli angoli dei puzzle mentre erano scomposti e di ricomporre solo quello con un numero maggiore di angoli. Così  anche la squadra A, ha copiato la stessa strategia.



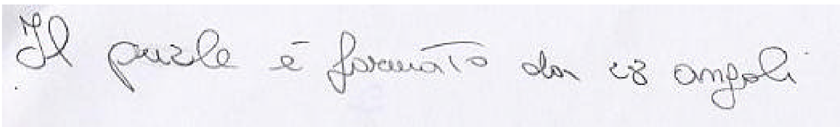
Dopo pochi minuti la squadra B mi ha portato il quadro realizzato e il foglio con la risposta e la spiegazione delle strategie utilizzate:

Abbiamo provato con quello ~~blu~~ celeste
e stiamo cercando di comporre
il rosa, alcuni provano con quello
giallo. Cerchiamo di risolvere
quello blu, e po' difficile. Dopo
aver visto come andava
il giallo stiamo cercando
di comporre il celeste ma
possiamo capire come il
celeste. All'ultimo ~~ce la~~
l'abbiamo fatta!
Gli angoli del nostro puzzle
erano 32 pezzi OK

La conclusione del lavoro è stata che il puzzle con maggiori angoli è quello che ne conteneva 32.



La squadra A dopo aver indugiato un poco ha dedotto che:


Il puzle è formato da 28 angoli

senza dare alcuna indicazione sulla strategia utilizzata, visto che ha riprodotto una strategia ideata dalla squadra avversaria.

In conclusione entrambe le squadre hanno individuato i puzzle che presentavano un numero maggiore di angoli, ma non hanno riconosciuto tutti gli angoli nel conteggio e soprattutto non hanno considerato gli angoli concavi (maggiore di 90°).

Dal confronto delle soluzioni e dal ragionamento conclusivo abbiamo visto che in una figura geometrica gli angoli non sono tutti minori di 90° ma anche maggiori, denominati concavi.

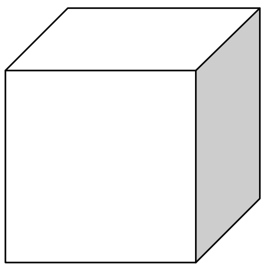
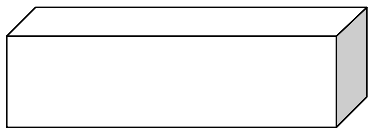
## 3.2.5. Terza situazione a – didattica

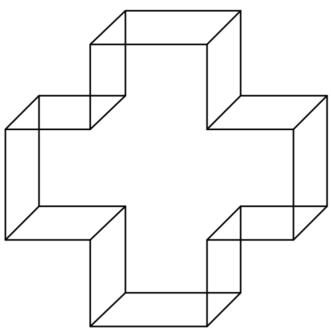
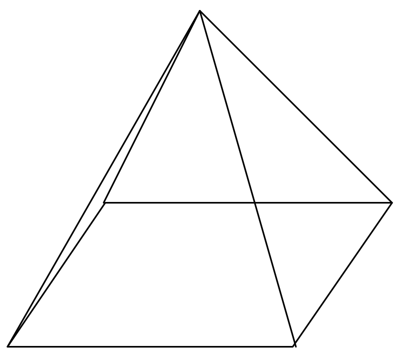
**Obiettivi:**

Saper riconoscere nello spazio tutti gli angoli presenti

### Il gioco:

La classe viene divisa in gruppi e vengono affidati loro delle figure solide. Il gioco consiste nell'individuare tutti gli angoli presenti nei solidi. Vince la squadra che individua nel minor tempo possibile tutti gli angoli presenti nei solidi.

### Fasi principali del gioco

**1 fase**: spiegazione della procedura. L'insegnante spiega le regole dei giochi facendo un esempio esplicativo.

**2 fase**:gli allievi iniziano a giocare e a studiare i solidi consegnati. Trovano la soluzione a seguito di un ragionamento.

**3 fase**: verbalizzazione dei risultai ottenuti da entrambe le squadre.

**4 fase**: confronto dei risultati raggiunti da entrambe le squadre per decretare i vincitori e trovare la soluzione più ragionevole.

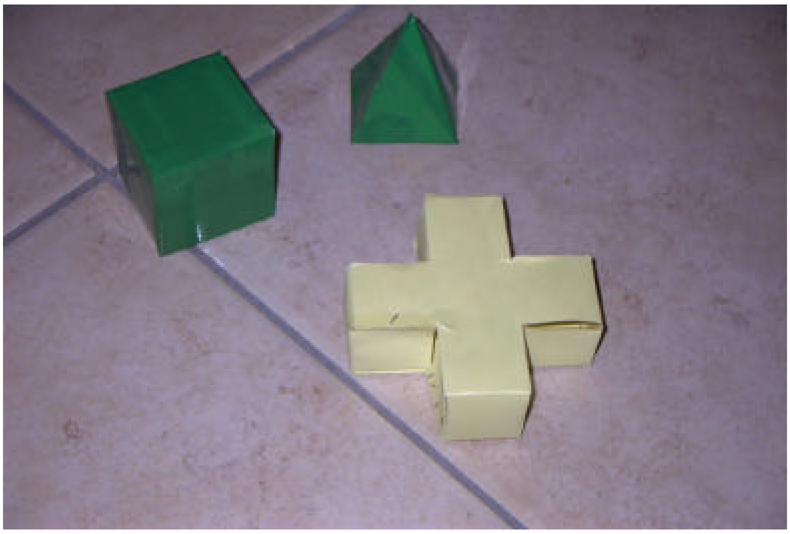
### Attese:

- Gli alunni confonderanno gli angoli con i vertici e conteranno solo il numero dei vertici.
- Gli alunni conteranno gli angoli di ogni faccia del solido ma non riusciranno a tenere il segno per alcuni solidi come il cubo ecc.. e individueranno meno angoli.
- Gli alunni per alcuni solidi (come il + in 3 tridimensionali) non individueranno tutti gli angoli presenti perché non saranno considerati tali e individueranno un numero errato di angoli;
- Gli alunni conteranno faccia per faccia gli angoli del solido;
- Gli alunni conteranno tutte le facce che presentano lo stesso numero di angoli e tale numero lo moltiplicheranno per il numero i angoli

della “figura” come nel caso della seconda situazione considerandolo come un puzzle in 3D.

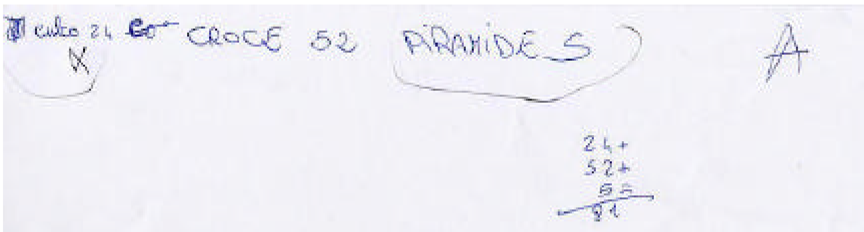
### 3.2.6. Terza situazione a – didattica a scuola

Per applicare la situazione a-didattica ho costruito dei solidi con il cartoncino: un cubo, una piramide a base quadra e una croce tridimensionale.

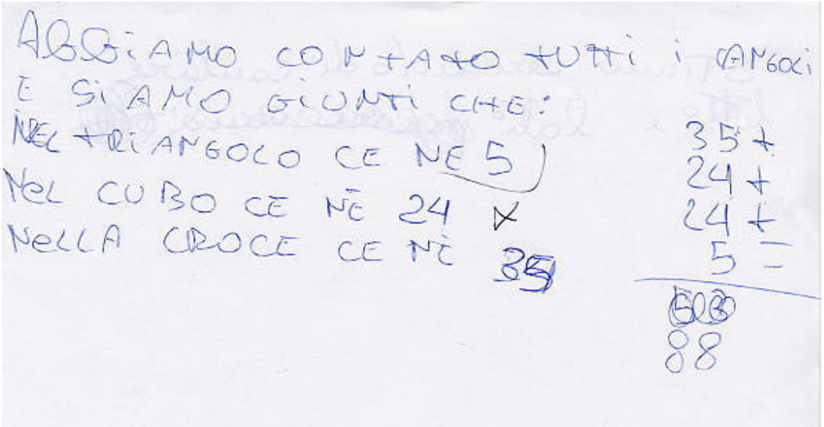


Ho distribuito ad entrambe le squadre i tre solidi.

La squadra A ha tratto la seguente soluzione:



La squadra B ha risposto nel seguente modo:


ABBIAMO CONTATO TUTTI I ANGOLI
E SIAMO GIONTI CHE:
NEL TRIANGOLO CE NE 5
NEL CUBO CE NÈ 24
NELLA CROCE CE NÈ 35

35 +
24 +
24 +
5 =
88

Nella Piramidi i vertici sono stati confusi con gli angoli.

Nel cubo sono stati contati il numero di angoli presenti in ogni faccia del solido.

Nel solido a forma di croce sono stati contati solo gli angoli delle due facce a forma di croce e alcuni vertici, non riuscendo di fatto a trovare la soluzione corretta.

Dal confronto dei risultati e dal confronto delle strategie utilizzate per il conteggio degli angoli per i vari solidi, siamo giunti alla soluzione che un solido presenta due tipi di angoli: nel piano, quelli delle varie facce del solido, e nello spazio, gli angoli diedri individuati dall'intersezione dei semipiani (la facce del solido). L’ultimo concetto, più difficile da comprendere per gli alunni, è stato introdotto per stuzzicare la curiosità.

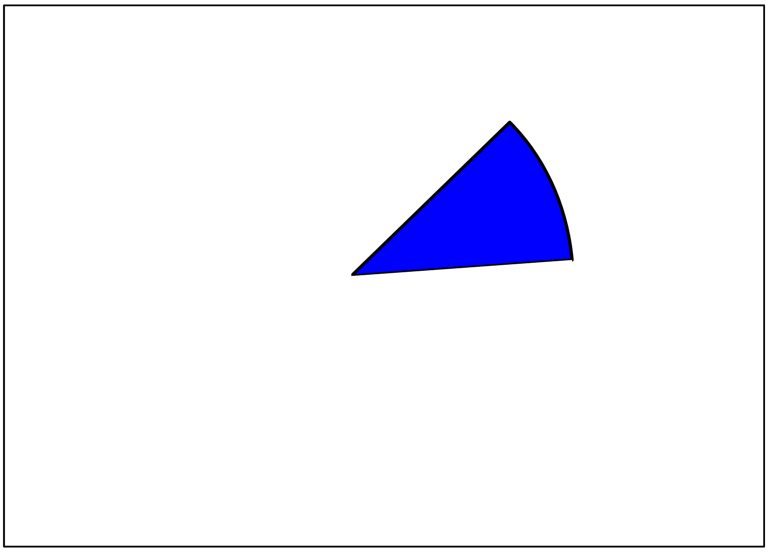
### 3.2.7. Quarta situazione a – didattica

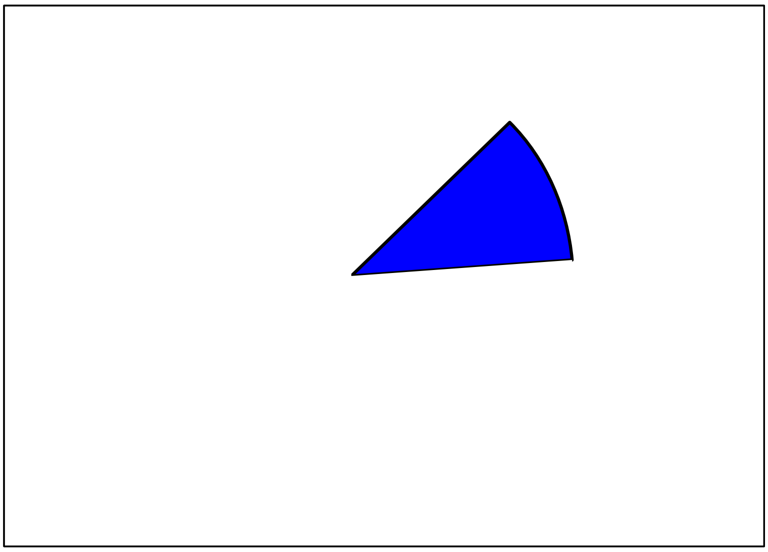
Obiettivi:

- Angolo come rotazione;
- Confronto di angoli senza strumenti di misurazione;
- Conoscere l’angolo giro.

**Gioco:**

Si distribuiscono dei cartoncini con un piccolo angolo (individuato da un settore circolare) attaccato ad esso nel suo vertice



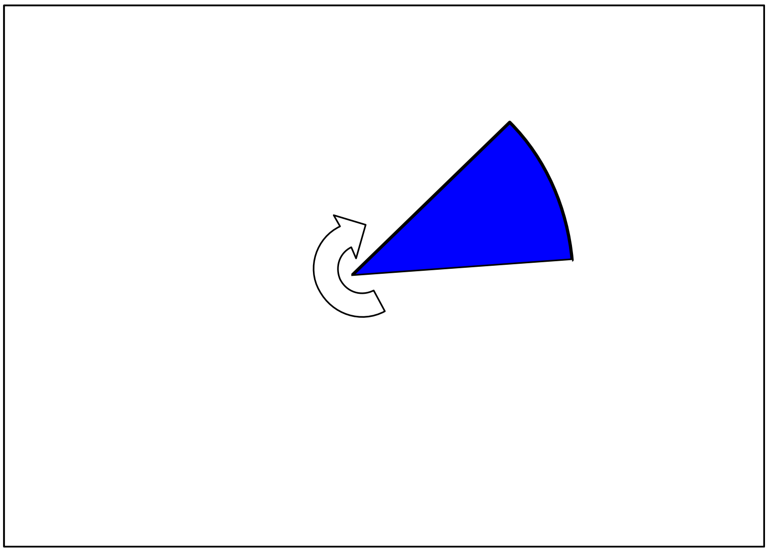


Gli alunni divisi in squadre devono mettere in successione dal più piccolo al più grande gli angoli e per farlo devono trovare un modo per confrontarli.

Vince che per prima mette in ordine gli angoli trovando una strategia di confronto (da riportare per iscritto).

## Strategia:

Fare ruotare gli angoli per il vertice fino a completare l'angolo giro e segnare sul cartoncino quante volte si deve spostare l'angolo per completare il giro; essi individuano, in poche parole, la misura dell'angolo giro in base all'"angolo – unità" a loro disposizione.



## Fasi principali del gioco

**1 fase**: spiegazione della procedura.

**2 fase**: sono consegnati i cartoncini e gli allievi iniziano l'attività cercando le strategie possibili per confrontare gli angoli. Viene stilato quindi un protocollo dove si trascrive la strategia utilizzata.

**3 fase**: le squadre verbalizzano l'esperienza.

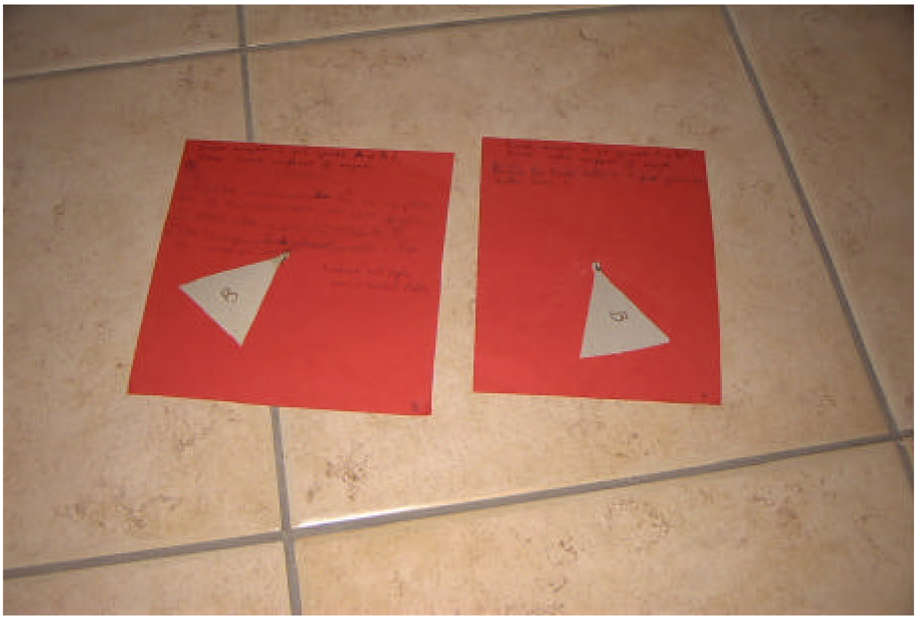
**4 fase**: si confrontano i risultati raggiunti e si trova la soluzione più adeguata traendo una teoria.

## Comportamenti attesi:

- Gli alunni cercheranno di smontare gli angoli dai cartoncini per confrontarli;
- Gli alunni accosteranno i cartoncini per confrontarli;
- Gli alunni metteranno accanto i cartoncini e ad occhio cercheranno di individuare la successione;
- Gli alunni metteranno accanto i cartoncini e con libri, con le mani o con altri mezzi di fortuna cercano di misurare e confrontare gli angoli;
- Gli alunni faranno ruotare per il vertice il loro “angolo – unità” e misureranno l’angolo giro rispetto alla loro unità.

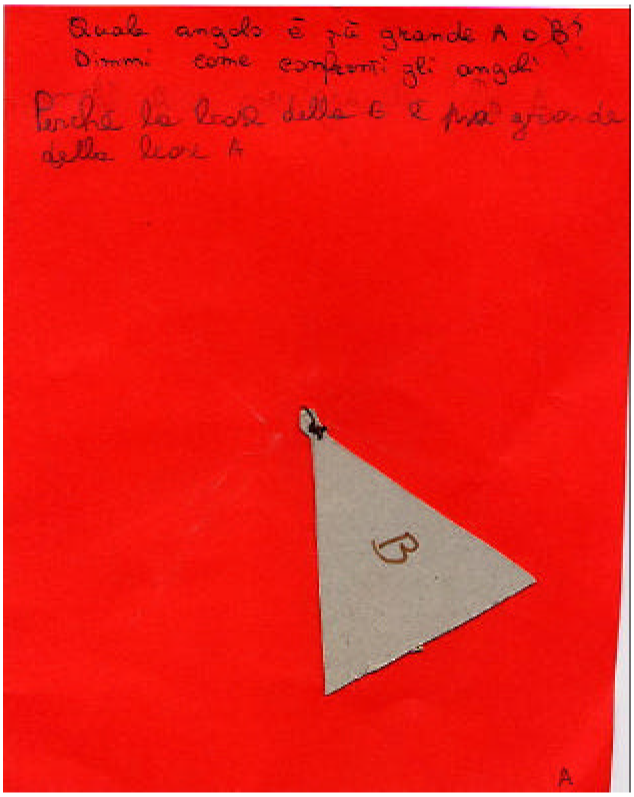
### 3.2.8. Quarta situazione a – didattica a scuola

Per applicare la situazione a – didattica ho costruito due triangoli di differente ampiezza e lati di differente lunghezza; li ho posizionati su di un cartoncino doppio attaccandoli ognuno in una faccia del cartoncino passando per il vertice un filo di cotone.



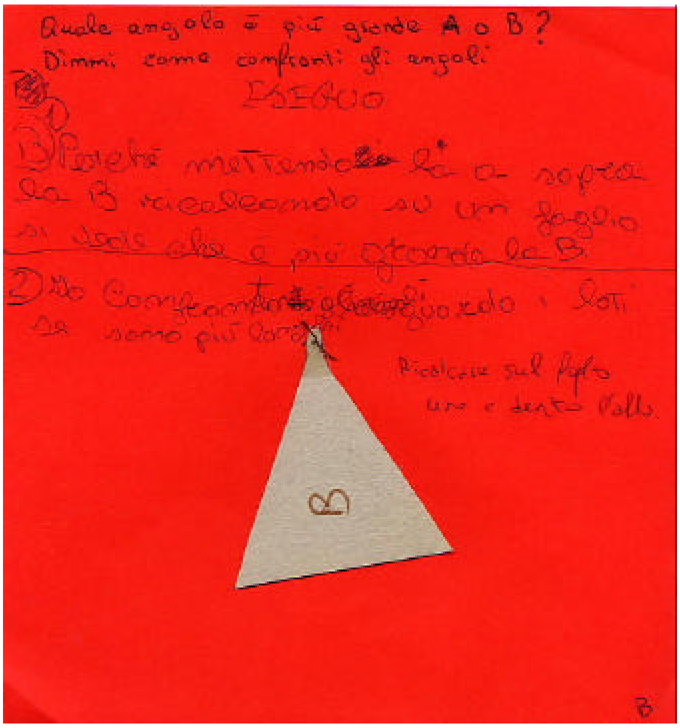
Il primo tentativo è adottato da entrambe le squadre è stato quello di guardare in controluce i due triangoli ma non è stato raggiunto alcun risultato, successivamente si è cercato di toccare attraverso il cartoncino il triangolo opposto ma anche questa volta non si è giunti ad una soluzione.

Al termine della situazione a – didattica le soluzioni ottenute sono state le seguenti: per la squadra A:




La base di B è più lunga di quella di A. I componenti della squadra hanno preso un foglietto di carta, lo hanno adagiato lungo la base e hanno individuato la lunghezza di essa. Successivamente hanno confrontata tale lunghezza con quella del triangolo opposto al cartoncino.

Contemporaneamente la squadra B ha cercato di raggiungere il risultato in modo analogo: essa ha riportato il triangolo su di un foglio e ha confrontato la lunghezza dei lati giungendo alla seguente soluzione:




## Conclusioni:

Entrambe le squadre hanno trovato una soluzione ma non hanno utilizzato la strategia esatta e per tale motivo non è stato decretato il vincitore del gioco.

Insieme poi abbiamo confrontato i percorsi e la strategie utilizzate e ragionando abbiamo capito che il confronto tra angoli non si può fare né confrontando le "basi" del triangolo né la lunghezza dei lati infatti se si prendono dei triangoli simili tali teorie non hanno valore.

Gli alunni hanno quindi capito che i triangoli si potevano fare ruotare lungo il vertice, ma non sono riusciti a trovare la soluzione da soli. Solo dopo aver mostrato loro un orologio e averli indotti al ragionamento sono giunti alla soluzione corretta ossia contare quante volte il “triangolo” si deve spostare per formare un angolo giro e confrontare i risultati.

# Capitolo 4

# Analisi dei dati sperimentali.

L'analisi dei dati sperimentali è stata svolta attraverso l'analisi a priori dei comportamenti ipotizzabili a priori (Capitolo 2), l'applicazione della statistica descrittiva con la costruzione di tabelle realizzate in EXCEL e attraverso l'uso di CHIC, un programma su PC che permette di studiare le implicazioni fra le risposte ottenute nel questionario eseguendo varie statistiche, tra le quali ho tratto l'analisi delle similarità di Lerman e l'analisi implicativa secondo R. Gras.

## 4.1 Analisi descrittiva.

I dati per la statistica sono stati raccolti sul gruppo di alunni esaminato secondo le seguenti modalità:

- Dati rilevati attraverso la somministrazione del questionario per conoscere le concezioni degli alunni sugli angoli,
- Dati rilevati in una sola classe dopo lo svolgimento delle situazioni a – didattiche per rilevare le eventuali evoluzioni

Tutti i dati sono poi stati studiati attraverso la statistica descrittiva, ossia quella parte di statistica che si occupa di analizzare in termini quantitativi i fenomeni collettivi attraverso l'osservazione di un insieme di manifestazioni individuali.

Lo strumento utilizzato per raccogliere i dati è stato il questionario e la situazione di rilevazione effettuata è stata di tipo sperimentale, ossia quella situazione è caratterizzata essenzialmente dalla presenza di due elementi:

1. le ipotesi di lavoro, costituite da enunciati formalizzabili spesso in termini matematici;
2. la possibilità di controllare sia le condizioni in cui l'esperimento si svolge, sia le caratteristiche delle unità statistica da impiegare.

La statistica, come strumento e metodo di elaborazione quantitativa, consente di stabilire dei confronti indispensabili perché si possa giungere a calcolare la frequenza delle modalità di risposta, in modo da ottenere un quadro chiaro delle tendenze rispetto al problema.

Per la descrizione dei dati rilevati ho eseguito la distribuzione di frequenze, le frequenze percentuali e i relativi areogrammi per evidenziare la composizione di un aggregato, in questo caso per rappresentare la distribuzione rilevata in base al tipo di risposta (Capitolo 2). Di seguito riporto informazioni ottenute per ogni variabile (Tipo di angolo), in base ad ogni modalità di risposta, in particolare le frequenze e le frequenze relative:

| Variabile | Modalità di risposta | Frequenza | Frequenza relativa |
|---|---|---|---|
| A | A1 | 7 | 0,06 |
| | A2 | 34 | 0,31 |
| | A4 | 16 | 0,14 |
| | A5 | 12 | 0,11 |
| | A6 | 12 | 0,11 |
| | A7 | 12 | 0,11 |
| | A8 | 18 | 0,16 |
| B | B1 | 16 | 0,14 |
| | B2 | 28 | 0,25 |
| | B3 | 16 | 0,14 |
| | B4 | 1 | 0,01 |
| | B5 | 13 | 0,12 |
| | B7 | 16 | 0,14 |
| | B8 | 23 | 0,21 |
| C | C1 | 44 | 0,40 |
| | C3 | 4 | 0,04 |
| | C5 | 31 | 0,28 |
| | C7 | 22 | 0,20 |
| | C8 | 10 | 0,09 |
| D | D1 | 94 | 0,85 |
| | D2 | 6 | 0,05 |
| | D5 | 4 | 0,04 |
| | D6 | 1 | 0,01 |
| | D7 | 3 | 0,03 |
| | D8 | 3 | 0,03 |
| E | E1 | 79 | 0,71 |
| | E6 | 6 | 0,05 |
| | E7 | 5 | 0,05 |
| | E8 | 21 | 0,19 |
| F | F1 | 92 | 0,83 |
| | F6 | 2 | 0,02 |
| | F7 | 3 | 0,03 |
| | F8 | 14 | 0,13 |

## 4.2 Analisi Implicativa delle variabili.

L’analisi implicativa è uno strumento che viene utilizzato per la ricerca in didattica della matematica con lo scopo di gerarchizzare problemi in funzione delle difficoltà avvertite dagli allievi. Si sviluppa sulla scia dei problemi che incontra e delle questioni che vengono poste per ottenere un’analisi di tipo implicativo nei lavori di statistica inferenziale (relativi a questionari somministrati a studenti e ad insegnanti in sistemi di monitoraggio differenti ed in contesti differenti).

L'analisi implicativa dei dati è stata eseguita utilizzando il programma di statistica CHIC (Classification hierarchique implicative et cohesive), messo a punto nel 1997 dal Prof. R. Gras e dai suoi collaboratori dell'università di Rennes, che si occupano di ricerca in didattica.

Tale software risulta uno strumento indispensabile nella fase dell'analisi a posteriori e permette di ricavare differenti statistiche:

- statistiche elementari tipo media, varianza, correlazione tra variabili;
- l’analisi delle similarità di Leman;
- l’analisi implicativa secondo R. Gras.

Per il mio lavoro ho utilizzato questi ultimi due tipi di analisi basati sulle definizioni di *implicazione* secondo Gras e di *similarità* secondo Leman.

L'**analisi implicativa** viene utilizzata da Gras per rispondere alla questione*: "date delle variabili **a** e **b**, in quale misura posso assicurare che in una popolazione, da ogni successione di **a** segue successivamente quella di **b**?*" o più semplicemente "*è vero che se a allora b?*".[6]

L'analisi implicativa di Gras, quindi, "*cerca di misurare il grado di validità di una proposizione implicativa tra variabili binarie e non*"[7] con un algoritmo particolare che si basa sulla legge di Poisson. Attraverso dei processi di calcolo, infatti, si trova l'intensità d'implicazione ossia il livello di coesione tra la variabili stabilendo una gerarchia tra le classi. In generale se il livello di coesione è inferiore al 95% non si ritiene accettabile il dato né lo si considera durante lo studio del grafo delle implicazioni.

Tale grafo implicativo evidenzia l'ordine parziale indotto dall'intensità di implicazione e dà la possibilità di visualizzare una situazione didattica dove intervengono più variabili.

L'**analisi delle similarità** classifica le variabili secondo livelli gerarchici al fine di studiare prima e di interpretare poi, in termini di tipologia e somiglianza decrescente, dei nuclei di variabili (costituiti significativamente a certi livelli dell'albero). Il criterio che viene utilizzato è il seguente:

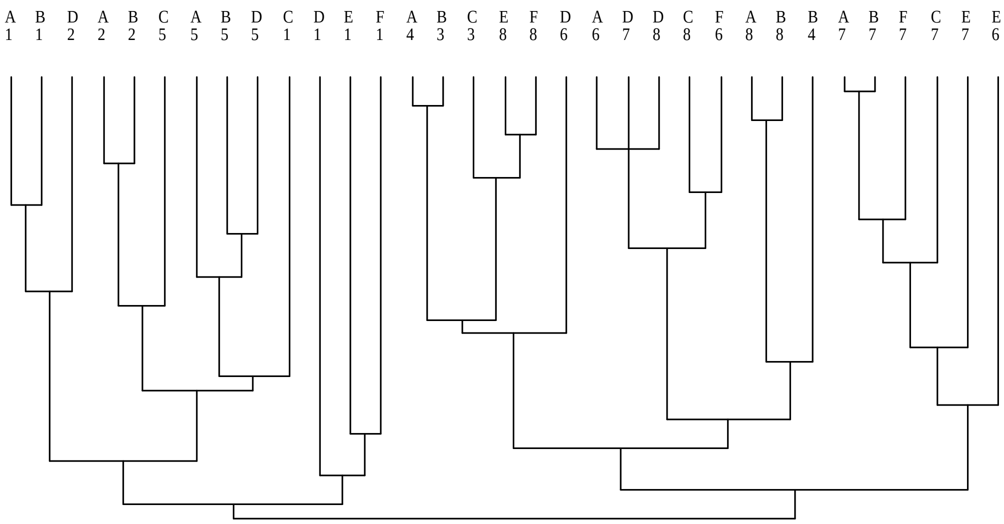
"*Due variabili a e b, caratterizzanti rispettivamente le parti A e B di un insieme E di soggetti, si rassomigliano tanto più quanto l'effettivo dei soggetti che le verificano (A* **n** *B) è importante rispetto, da una parte, a ciò*

[6] Quaderni di Ricerca in Didattica, GRIM, n. 9, Palermo
[7] Quaderni di Ricerca in Didattica, GRIM, n. 9, Palermo

*che sarebbe stato senza il legame a priori tra a e b, e dall'altra, alle cardinalità di A e B. Questa somiglianza si misura con la probabilità della sua inverosimiglianza*".[8]

Di seguito riporto e illustro il grafo della similarità e il grafo delle implicazioni, rispetto ai dati ottenuti nella sperimentazione.

## Grafico della similarità.




Arbre de similarité : C:\Documents and Settings\Francesca\Desktop\tesi di laurea\Cartel1.csv

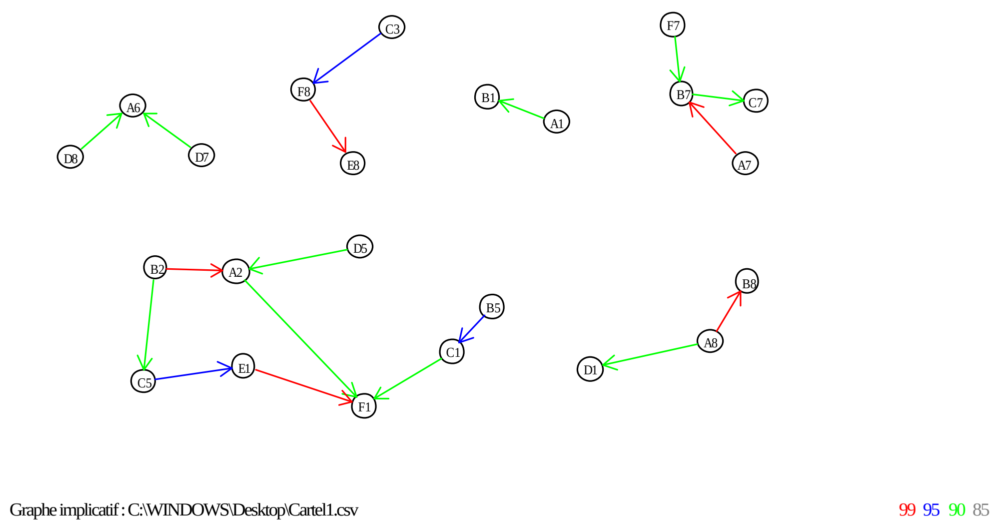
Dal grafico della similarità si evince che c'è una forte similarità tra le risposte: (A7 B7); (A4 B3); (A8 B8); (E8 F8); (A6 D7 D8) e (A2 B2) ecc...

[8] L'analisi implicativa, Quaderni di Ricerca in Didattica, GRIM, n.7, Palermo

Le risposte relative ai quesiti sono:

- A7 e B7, gli alunni riconoscono l’angolo dando una motivazione esatta o quasi esatta del perché è un angolo;
- A4 e B3 l’alunno riconosce l’angolo, lo classifica e da una motivazione corretta;
- A8 e B8 l’alunno riconosce che è un angolo ma fornisce una spiegazione errata……

## Grafico delle implicazioni




Il grafico delle implicazioni è stato stampato con parametro 90 (intensità d’implicazione 90%). La lettura è abbastanza facile: la risposta A7 implica direttamente la risposta B7, ma non è implicato, con questa intensità, da nessuna altra modalità di risposta. Ciò significa che "tutti quelli che hanno necessariamente dato per il quesito B la risposta B7 hanno dato al quesito A la risposta A7". Lo stesso dicasi per le altre risposte, utilizzando la stessa modalità di ragionamento.

## 4.3 Analisi Qualitativa dei dati sperimentali

L'analisi delle risposte ottenute tramite la somministrazione del questionario ha fornito un quadro significativo di come la maggior parte degli alunni, posti di fronte a domande che testano le loro effettive conoscenze, rispondano soltanto a ciò che credono di sapere. Di fatto i bambini intervistati hanno risposto prevalentemente alle domande A, B, C e D e ha evitato di azzardare una risposta per le figure E ed F.

Ne consegue che gli alunni riconoscono, quindi, tra le figure l'angolo acuto, l'angolo ottuso, la figura rappresentante due rette perpendicolari che formano quattro angoli retti e un angolo giro raffigurato da una circonferenza e il suo raggio. Tuttavia le risposte date sono legate a delle conoscenze errate, infatti i primi due angoli, acuto e ottuso, sono stati riconosciuti solo da circa il 50 % degli alunni, mentre gli altri hanno di fatto risposto in modo errato in quanto, non avendo una conoscenza adeguata, hanno cercato la risposta nelle reminiscenze legate alle esperienze precedenti.

Le risposte relative alla figura C sono risultate per il 76% errate e la risposta è scaturita in seguito di misconcetti, infatti per molti tale rappresentazione era individuata con un angolo giro. Tale concezione è tuttavia legata ad una distorta modalità di informazione nella quale spesso cadono anche alcuni docenti. A queste conclusioni sono pervenuta, dalla alta frequenza dell'errore nelle risposte. Questo è stato un ulteriore motivo di indagine con i docenti e i risultati a cui sono arrivata mi hanno permesso le seguenti considerazioni: le insegnanti, degli alunni oggetto dell'indagine, spiegano di fatto agli stessi l'angolo giro come un angolo dato dalla somma di tanti angoli retti e lo rappresentano erroneamente con due rette perpendicolari ed una circonferenza con centro il punto di incrocio delle due rette. Ho fatto notare tale incongruenza, ma le insegnanti chiamate in causa sostenevano che la "mia" presupposta errata metodologia di presentazione dell'argomento aveva indotto gli alunni in errore poiché non mi ero servita della loro modalità di presentare le figure e l'angolo da me raffigurato non mostrava in maniera visibile la raffigurazione grafica dell'angolo giro.

Ho rilevato inoltre che i bambini individuano l'angolo in quanto o è punto di intersezione di rette, semirette ecc… o perché vedono "una punta aguzza" (come affermano) nella parte "terminale" della rappresentazione della retta.

Concludendo appare evidente come la maggior parte degli alunni ha una concezione errata di angolo, anche se dovuta sostanzialmente a una didattica non congruente a tale problematica.

## 4.4 Analisi Qualitativa dalle situazioni a – didattiche

Dai risultati ottenuti dalla realizzazione delle situazioni a – didattiche in classe posso affermare che gli alunni hanno appreso, giocando, alcuni concetti fondamentali.

La prima situazione a – didattica, riguardante il campo di calcio con domande stimolo, mi è servita per dimostrare agli alunni che non bisogna soffermarsi soltanto all'esperienza di tutti i giorni ma davanti ad un problema apparentemente semplice bisogna ragionare e saper guardare anche oltre.

Tale situazione ha inizialmente innescato nei bambini una sorta di "panico" e di consapevolezza di essere stati troppo affrettati nel rispondere con la conseguenza che nelle situazioni successive si sono soffermati a riflettere per più tempo.

Successivamente gli alunni hanno quindi provato gioia di apprendere attraverso il gioco cercando di applicare ogni conoscenza appena acquisita alle altre situazioni a – didattiche somministrate.

Ogni situazione presentava dunque un problema aperto volto a stimolare la curiosità negli alunni, che puntualmente si mettevano alla ricerca della soluzione.

Alla fine della sperimentazione ho avuto il piacere di sentirmi dire da un bambino che finalmente per la prima volta aveva capito il concetto di angolo.

Ho riproposto infine una seconda volta il questionario al fine di verificare quale evoluzione si fosse realizzata ed ho ottenuto risultati estremamente soddisfacenti.

Tutti gli alunni, infatti, hanno risposto in modo corretto al questionario, motivando ogni risposta con affermazioni più precise.

# Cap.5 Conclusioni

A conclusione del lavoro sperimentale svolto nella mia tesi di laurea ritengo doveroso esporre alcune considerazioni. Innanzitutto mi ha permesso di riflettere, durante tutto il percorso, sull'acquisizione dei concetti matematici ed in particolar modo sul concetto di angolo nei bambini della scuola elementare, inoltre mi ha fatto soprattutto riflettere sulla metodologia d'insegnamento e sulle strategie attuate dai docenti nella scuola di base .

L'indagine svolta, ha quindi evidenziato che le concezioni degli alunni vengono frequentemente condizionate da diversi fattori: emotivi, livello socio – culturale di appartenenza ma soprattutto dal modo in cui vengono presentati i vari contenuti. Soprattutto quest'ultimo aspetto mi è apparso fortemente condizionante per la corretta acquisizione di alcuni concetti matematici di base, spesso infatti la presentazione dei contenuti si è rivelata approssimata e non del tutto chiara inducendo gli alunni a notevoli errori d'interpretazione.

Appare inoltre essenziale in questo contesto che un'azione didattica per essere veramente efficace deve fungere da stimolo per ulteriori acquisizioni ma una presentazione chiara, lineare ed essenziale dei contenuti è un presupposto imprescindibile per una successiva interiorizzazione degli stessi. Purtroppo l'indagine da me svolta ha dimostrato invece come molte delle difficoltà degli alunni erano la diretta conseguenza di un'incerta spiegazione delle tematiche da affrontare.

Infatti in precedenza una prima lettura del questionario evidenziava conoscenze estremamente carenti, successivamente alcuni miei interventi rivolti ad un ristretto gruppo, durante la situazione a-didattica, dava risultati ben diversi. Tali interventi realizzatesi tramite attività ludiche consentivano una migliore acquisizione del concetto di angolo tanto che la ripresentazione del medesimo questionario al gruppo di controllo rivelava come le risposte fossero diventate soddisfacenti.

A questo punto i termini del problema appaiono più circostanziati, come integrare definizione astratte in alunni dove la capacità di simbolizzazione e di astrazione non sono ben strutturate, con attività che possano tramite il gioco, la manipolazione … rendere tali concetti comprensibili? E come far interiorizzare e rielaborare tali concetti nel successivi apprendimenti sempre tramite gioco e manipolazione?

Per ultimo mi chiedo se esiste uno strumento in grado di rilevare ed indagare in maniera più approfondita ed esaustiva gli schemi di ragionamento che si attivano negli alunni quando riflettono sul concetto di angolo, poiché lo strumento da me costruito ha rilevato soltanto le concezioni che essi hanno.

# Appendice

## Unità didattica

## Giochiamo con l’angolo.

**Obiettivo generale**

- L’obiettivo di questa lezione è quello di acquisire il concetto di angolo.

**Obiettivi specifici:**

- Rendere l’alunni consapevole della propria struttura e delle proprie conoscenze inerenti al concetto di angolo;
- Acquisire un metodo di apprendimento, in cui il sapere (e in particolare il concetto di angolo) viene costruito insieme;
- Conoscere i vari tipi di angolo e la loro denominazione.

**Classe di riferimento:** Terza elementare.

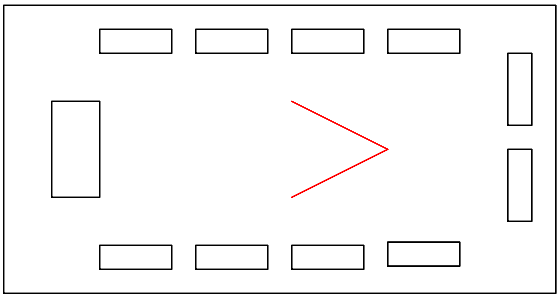
# Attività:

Chiediamo agli alunni se sanno cos'è un angolo e, in caso di risposta affermativa di esternare il proprio concetto, di trascrivere tutte le risposte date sul proprio quaderno e sulla lavagna.

A questo punto, spostati i banchi, costruiremo per terra con nastro adesivo colorato, un angolo e chiederemo agli allievi di percorrerlo, camminando, in modo da superare le differenze verbali delle loro definizioni. Potremo notare modi diversi di percorrere l'angolo e i nostri alunni potranno rendersi conto che ciò che supponevano uguale per tutti è invece differenziato.

Si potranno verificare le seguenti situazioni:

- L'angolo non viene percorso in nessun modo (manca il concetto di base di angolo).
- L'alunno resta fermo sul vertice (confusione tra il vertice e l'angolo).
- Cammina sui lati dell'angolo (attenzione maggiore data ai lati dell'angolo).
- Cammina all'interno dell'angolo lungo archi (relazione tra angolo e arco non chiara)
- Cammina a zig zag all'interno dell'angolo (concetto chiaro nella costruzione degli angoli).



Facciamo trascrivere tutte le situazioni che si sono verificate durante l'esperimento e successivamente procediamo con l'introduzione e analisi di situazioni concrete di alcuni fenomeni reali legati al concetto di angolo al fine di analizzare e criticare le situazioni incontrate nella fase preliminare.

Per acquisire il concetto di angolo, utile per verificare le situazioni le conoscenze precedenti, facciamo compiere ai bambini delle attività utili a far maturare il loro il concetto di angolo.

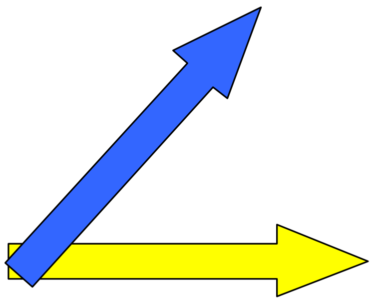
La prima esperienza si può far compiere attraverso il movimento delle braccia di un alunno, gli altri verbalizzeranno e trascriveranno i concetti espressi:

Facciamo alzare ad un alunno un braccio, ad esempio quello destro fino a portarlo all'altezza della spalla e chiediamo loro: cosa ha compiuto il braccio destro? Estrapolando dalle loro osservazioni il concetto di angolo visto come spazio percorso dal braccio. Facciamo, successivamente, eseguire una rotazione con altre parti del corpo da loro proposte come le dita, le gambe ecc.. e chiediamo loro di riportare alcuni di questi movimenti sul quaderno.

In seguito formalizziamo il concetto di angolo quale parte di piano formato da una semiretta che ruota intorno al punto di origine e lo proporremo attraverso la seguente esperienza:

“ Le steccoline”

Facciamo ritagliare con cartoncini di colore diverso due steccoline a forma di freccia fissandole insieme ad un’estremità con un fermacampione. Tenendo ferma una delle due stecche e ruotando l’altra otterremo un angolo che faremo riportare sul foglio e colorare.



Per conoscere i vari tipi di angolo e la loro denominazione utilizziamo le nostre steccoline al fine di costruire angoli (ad es. 3) di ampiezza diversa. Osserviamo insieme agli alunni che le tre ampiezze ottenute ad occhio hanno una stima differente e che questi possono essere ordinati dal più piccolo al più grande e viceversa.

Per ampliare e potenziare il concetto di angolo come rotazione possiamo proporre dei giochi che rendano dinamica la definizione di angolo ad esempio:

- effettuare spostamenti lungo percorsi che siano assegnati mediante istruzioni orali o scritte e descrivere i percorsi eseguiti da altri, anche ricorrendo a rappresentazioni grafiche appropriate;
- individuare situazioni concrete, posizioni e spostamenti nel piano (punti, direzioni, distanze, angoli come rotazioni).

La manipolazione concreta di oggetti e l'osservazione e la descrizione delle loro trasformazioni e posizioni reciproche, avvia alla costruzione del concetto di rotazione come trasformazione individuata da un centro e un angolo.

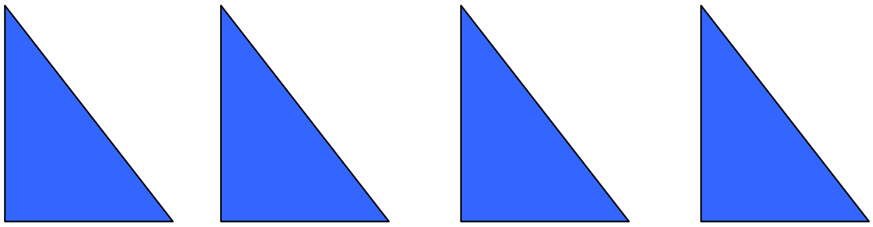
Rispetto a questo concetto e per differenziare le attività, si può ad esempio fare riferimento a movimenti che riguardano:

- ✓ il corpo o le sue parti;
- ✓ catene di bambini che ruotano attorno a un punto fisso;
- ✓ porte e sportelli;
- ✓ lancette dell'orologio;
- ✓ posizioni dell'ombra di un oggetto durante un determinato intervallo di tempo.

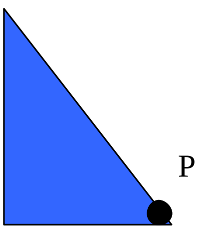
In questo modo, tra l'altro, si dovrebbe arrivare progressivamente, per astrazioni successive, alla concettualizzazione del fatto che tutti i punti di una stessa semiretta, benché lontani dal centro, ruotano dello stesso angolo, quando questa ruota attorno a un punto fisso.

La rilevazione ad intervalli regolari dell'ombra proiettata dal sole di uno stesso oggetto, porta a focalizzare l'attenzione sull'analisi di ciò che varia e di ciò che invece è un *invariante*: l'angolo, cioè l'ampiezza della rotazione.

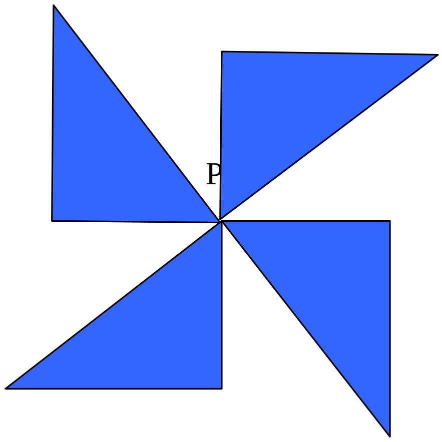
Possiamo proporre la costruzione di una girandola prendendo quattro triangoli uguali di cartoncino.



Sovrapponiamo le quattro figure, ottenendo un solo triangolo, e fissiamo tutti i triangoli nello stesso vertice che indichiamo con la lettera P che useremo come centro di rotazione.




Mostriamo agli alunni la costruire della girandola ed in particolare le operazioni che si eseguono per la costruzione, in particolare come facciamo ruotare uno ad uno i triangoli attorno ad un punto fisso P, spiegheremo quindi che l'angolo come rotazione è dato dal movimento rigido di una figura attorno ad un punto P.

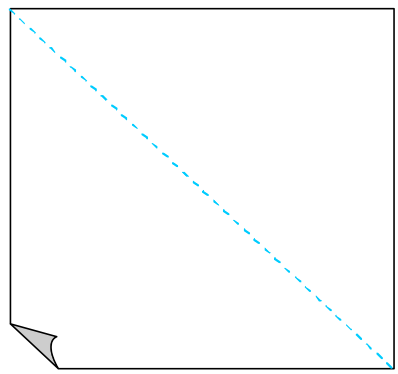



La girandola è inoltre un esempio tangibile di angolo come rotazione.

Successivamente possiamo far fare la seguente esperienza: prendiamo una fune e tre bambini, piegata in due la fune disponiamo due bambini alle estremità e uno al centro. Due di loro e in particolare uno dei bambini che sta ad un estremo e quello che tiene il centro della corda devono stare fermi, il terzo alunno si muoverà cercando di tenere tesa la corda. In questo modo si fa notare che la corda subisce un cambio di direzione e che durante lo spostamento forma angoli di varia ampiezza.

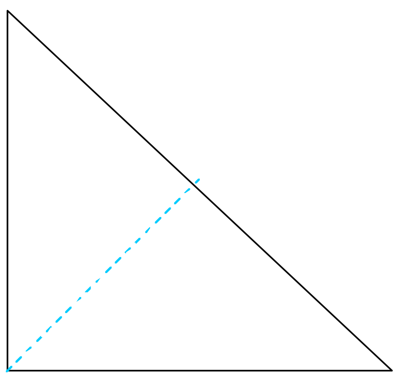
A questo punto ci procuriamo un foglio di carta qualsiasi e, attraverso delle operazioni di piegatura evidenzieremo il concetto di ampiezza dell'angolo con un'immagine mentale.

Prendendo il foglio facciamo eseguire una piegatura a piacere:

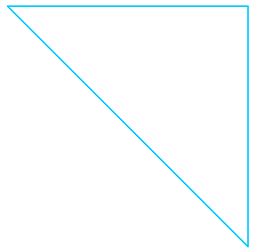


**-------------- linea di piegatura**

Poi eseguiamo una seconda piegatura, consecutiva alla prima, che portile due parti del foglio della precedente piegatura a sovrapporsi:



Si otterrà così una forma angolare ed in particolare un angolo retto.



Al termine di queste attività facciamo conoscere i vari tipi di angolo e la loro denominazione utilizzando come angolo di riferimento quello retto, riportando sul cartellone le varie rappresentazioni (angolo acuto, ottuso, piatto, …..)

Dopo aver conosciuto i vari angoli possiamo proporre altre attività di approfondimento quali: l'uso delle forbici (o strumenti simili) per osservare la suddivisione dello spazio in quattro angoli a due a due opposti al vertice ed uguali; la costruzione di uno strumento di misura dell'angolo partendo dall'angolo campione, quale l'angolo retto, che suddivideranno in tante piccole parti, fino a d ottenere delle piccole ampiezze che fungeranno da unità di misura; successivamente presenteremo ai bambini lo strumento di misura appropriato: il goniometro.

**Verifica e valutazione:**

La verifica e la valutazione delle conoscenza acquisite dagli alunni avverrà attraverso la somministrazione, la correzione di esercizi e la creazione di situazioni a-didattiche (di seguito riportate) che potenzieranno il loro sapere.

**Tempi**: sei ore.

**Luoghi**: classe

**Mezzi e strumenti**:

Fogli di carta, forbici, cartoncino bianco e colorato, matite colorate, goniometro, orologio, righello, nastro adesivo colorato……

Bibliografia


- Cornoldi C., *Metacognizione e apprendimento*, 1995, Bologna.
- Cornoldi C., *Matematica e metacognizione*, 1995, Trento.
- Cateni L, Fortini R., Bernardi C., *Le figure geometriche*, 1988, Firenze.
- D'Amore B., *Didattica della matematica*, 2001, Bologna.
- Lucangeli D. et al., *Atteggiamento metacognitivo e problem solving*, 1996, Torino.
- Lucangeli D., Passolunghi M. C., *Psicologia dell'apprendimento matematico*, 1995, Torino.
- Quaderni di Ricerca in Didattica, GRIM, n. 7  n. 9, Palermo
- Reinhardt F., Soeder H., *Atlante di matematica*, 1997, Milano.
- Spagnolo F., *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, 1998, Firenze.