Università degli Studi di Palermo
Facoltà di Scienze della Formazione
Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria

Il pensiero pre-proporzionale nei bambini di quinta elementare

Relatori:
Prof.ssa Anna Maria Passaseo

Prof. *Spagnolo Filippo*

Autrice:

Maria Elisabetta Ferdico

Anno Accademico 2002/2003

INTRODUZIONE

Il presente lavoro si pone il fine di indagare sulle concezioni degli alunni di quinta elementare rispetto al pensiero pre-proporzionale mediante la regola del tre semplice. Esso s'inscrive nell'ambito di un filone di studi sperimentali già avviati, anche se in un contesto di applicazione diverso, ossia nella scuola secondaria. Il ragionamento proporzionale, centrale nell'ambito delle strutture matematiche moltiplicative, ha un ruolo fondamentale nella modellizzazione di numerose situazioni reali; tuttavia esso non è padroneggiato in modo soddisfacente da un buon numero di studenti. Tale constatazione ha indotto numerosi ricercatori ad indagare, a livello nazionale ed internazionale, sullo sviluppo di tale pensiero durante il processo educativo, sulle modalità del suo utilizzo da parte degli studenti in contesti problematici differenti, sugli errori più frequenti commessi in situazione di proporzionalità e sulle modalità didattiche più opportune per promuovere tale tipo di ragionamento. E' emersa la convinzione che la discussione di classe sia una modalità didattica particolarmente efficace per lo sviluppo del pensiero proporzionale: essa può creare in classe un clima di "comunità di ricerca" in cui l'alunno è incoraggiato ad esprimersi, a confrontarsi positivamente con i compagni e a considerare le eventuali strategie sbagliate come importanti occasioni di riflessione e di dibattito.

Già nel corso della scuola elementare gli alunni sono posti di fronte a problemi inquadrabili nel contesto proporzionale: si tratta dei problemi del tre semplice diretto ed inverso, risolvibili anche senza aver necessariamente sviluppato nello specifico il suddetto pensiero ma propedeutici ad un corretto utilizzo di esso a partire dai successivi gradi d'istruzione.

Coniugando la modalità didattica della discussione con quella ludica ho condotto un'attività di sperimentazione che si è articolata in due fasi:

1. somministrazione di un problema sulla compravendita per rilevare mediante analisi prevalentemante quantitativa l'esistenza del pensiero pre-proporzionale e le strategie risolutive adottate su un campione di 93 alunni, di età compresa tra i nove ed i dodici anni, delle classi quinte della scuola elementare statale "Montegrappa" di Palermo;
2. messa a punto di una situazione di gioco sulla compravendita sperimentata nella classe 5ª B della scuola medesima ed analizzata prevalentemente qualitativamente attraverso l'analisi dei protocolli.

La prima fase mi ha consentito di constatare che soltanto il 23,66% del campione ha adottato una strategia corretta nella risoluzione del problema ma ciò non mi ha indotto a ritenere che il pensiero pre-proporzionale esistesse limitatamente a tale percentuale. Le abitudini di lavoro degli alunni discostantisi dal testo somministrato e l'assunzione di un atteggiamento superficiale nei confronti dello stesso si sono rivelati un ostacolo alla rilevazione dell'esistenza del pensiero pre-proporzionale.

La seconda fase, scaturita dalle considerazioni effettuate sui dati emersi dalla somministrazione del problema e dal riferimento ad autori che avvalorano la metodologia ludica in classe, è stata progettata al fine di mettere gli alunni della classe 5ª B in una situazione di apprendimento/insegnamento significativo che mi consentisse, inoltre, di verificare con maggiore obiettività l'esistenza del pensiero pre-proporzionale negli alunni di quinta elementare. E' emerso che nella fase di gioco di uno contro uno la percentuale dei bambini che ha utilizzato una strategia corretta ha subito un incremento considerevole passando dal 38% al 54% per la risoluzione dei problemi proposti attraverso le carte gialle e dal 38% al 50% per la risoluzione dei problemi proposti attraverso le carte verdi; nella fase di un gruppo contro un altro gruppo i bambini che nella precedente fase di gioco avevano adottato una strategia errata hanno "tratto insegnamento" dagli alunni che avevano già maturato una strategia corretta; nella situazione di validazione, infine, la classe ha partecipato vivamente e con attenzione all'esposizione dei procedimenti adottati da ambo le squadre.

CAPITOLO I

1.1 PROBLEMI DEL TRE SEMPLICE

I problemi relativi a grandezze proporzionali sono svariati, uno dei più notevoli è quello di risolvere delle questioni nelle quali figurano due grandezze variabili, direttamente o inversamente proporzionali, e nei quali occorre determinare il valore incognito di una di esse conoscendo il valore corrispondente dell'altra, ed altri due valori corrispondenti delle due grandezze.
Tali tipi di problemi si dicono del tre semplice diretto o inverso, secondo che le due grandezze che vi figurano siano direttamente o inversamente proporzionali.
Due grandezze variabili dipendenti l'una dall'altra sono direttamente proporzionali quando:

❖ fra l'insieme A delle misure della prima e l'insieme B delle corrispondenti misure della seconda esiste una proporzionalità diretta[1].

Consideriamo due grandezze variabili dipendenti ad es. la quantità x di ciliegie ed il rispettivo costo y.
Supponendo che 1 chilogrammo di ciliegie costi 2 euro, 2 chilogrammi costeranno 4 euro, 3 chilogrammi costeranno 6 euro; trascrivendo su una tabella i pesi in chilogrammi di diverse quantità di ciliegie ed i corrispondenti costi in euro, si ha:

A	Chilogrammi (x)	1	2	3	4	5	…
B	Costo in euro (y)	2	4	6	8	10	…

Se, come accade in questo esempio, fra l'insieme A i cui elementi sono i numeri della prima riga e l'insieme B i cui elementi sono i numeri della seconda riga vi è una proporzionalità diretta, si dice che le due grandezze considerate sono direttamente proporzionali. Il coefficiente di proporzionalità da A a B si dice anche coefficiente di proporzionalità diretta fra le due grandezze.

❖ raddoppiando, triplicando ecc... i valori di una, i corrispondenti valori dell'altra si raddoppiano, si triplicano ecc... .

[1] Ricordiamo che se fra due insiemi di numeri A e B vi è una corrispondenza biunivoca, e se il rapporto fra un qualsiasi elemento di B ed il suo corrispondente in A è costante ed uguale ad un numero k, si dice che i due gruppi di numeri che costituiscono rispettivamente i due insiemi, sono direttamente proporzionali, o che si ha una proporzionalità diretta da A a B.

Osservando la precedente tabella risulta evidente che quando il peso delle ciliegie diventa doppio, triplo, ecc…, anche il corrispondente costo diventa doppio, triplo, ecc. .. .

❖ il rapporto fra coppie di valori corrispondenti è sempre costante ed è uguale al coefficiente di proporzionalità diretta da A a B.
Nel caso dell'esempio citato, tale coefficiente è 2 euro.

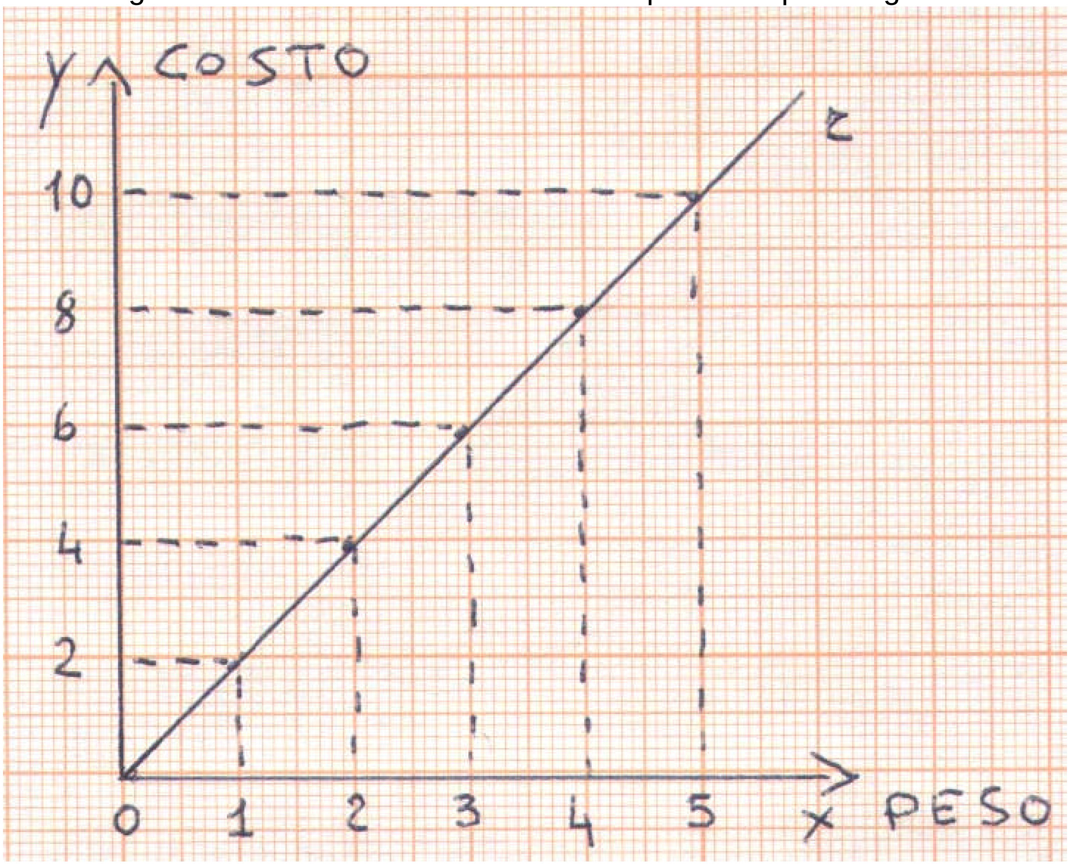
❖ sono legate da una relazione del tipo y/x=k dove k è un qualunque numero;

❖ il loro grafico è una semiretta.

Sempre riferendoci all'esempio sopra citato, indicando con x la misura in chilogrammi di una qualsiasi quantità di ciliegie e con y il corrispondente costo in euro, si ha:

$$\frac{y}{x} = 2, \qquad \text{ossia:} \qquad y = 2 * x.$$

Tale relazione esprime la legge secondo cui varia il costo delle ciliegie al variare del loro peso.
Il suo diagramma cartesiano è una semiretta r passante per l'origine O.



Oltre al peso di una merce ed al suo costo, possiamo citare altri esempi di grandezze direttamente proporzionali come il peso di un corpo ed il suo volume, la lunghezza di una circonferenza ed il suo raggio, il numero di ore di lavoro eseguito e la corrispondente retribuzione. Ma occorre fare attenzione a non dire che due grandezze sono direttamente proporzionali se crescendo l'una cresce anche l'altra. Affinchè ciò si verifichi è anche necessario che diventando la prima il doppio, il triplo, ecc…, anche la seconda diventi doppia, tripla, ecc... . Così ad esempio la superficie di un quadrato cresce col crescere del lato, ma non si può con ciò affermare che la superficie di un quadrato ed il suo lato siano grandezze direttamente proporzionali; infatti se si raddoppia il lato di un quadrato, la sua superficie non si raddoppia ma diventa il quadruplo.

Due grandezze variabili dipendenti l'una dall'altra sono inversamente proporzionali quando:

- fra l'insiema A delle misure della prima e l'insieme B delle misure delle corrispondenti misure della seconda esiste una proporzionalità inversa[2].

Consideriamo due grandezze variabili dipendenti ad esempio il numero x degli operai impiegati per eseguire un dato lavoro ed il tempo y impiegato per compierlo.

Supponendo che 1 operaio possa eseguire tutto il lavoro in 120 giorni risulta evidente che 2 operai lo eseguiranno in 60 giorni, 3 operai in 40 giorni, e così via.

Quindi, indicando su una riga il numero degli operai impiegati e su una seconda riga il numero dei giorni occorrenti per eseguire quel lavoro, si ha la seguente tabella:

A	Operai (x)	1	2	3	4	5	6	…
B	Giorni (y)	120	60	40	30	24	20	…

Se come accade in questo esempio, fra l'insieme A i cui elementi sono i numeri della prima riga e l'insieme B i cui elementi sono i numeri della seconda riga vi è una proporzionalità inversa, si dice che le grandezze considerate sono inversamente proporzionali. Il coefficiente di proporzionalità inversa da A a B, che è 120, si dice anche coefficiente della proporzionalità inversa fra le due grandezze considerate.

- raddoppiando, triplicando ecc… i valori di una, i corrispondenti valori dell'altra si dimezzano, si dividono per tre ecc… .

Osservando la precedente tabella risulta evidente che quando il numero degli operai impiegati diventa il doppio, il triplo, ecc…, il numero dei corrispondenti giorni occorrenti per eseguire il dato lavoro diventa la metà, la terza parte, ecc… .

[2] Ricordiamo che se fra due insiemi di numeri A e B vi è una corrispondenza biunivoca, e se il prodotto di un qualsiasi elemento di B per il suo corrispondente in A è costante ed uguale ad un numero k, si dice che i due gruppi di numeri che costituiscono rispettivamente i due insiemi sono inversamente proporzionali, o che si ha una proporzionalità inversa da A a B.

- il prodotto fra coppie di valori corrispondenti è sempre costante;
- sono legate da una relazione del tipo yx=k dove k è un qualunque numero;
- il loro grafico è un'iperbole.

Prendendo in considerazione il precedente esempio, poiché le due grandezze che vi figurano sono inversamante proporzionali, il prodotto di due loro qualsiasi valori corrispondenti deve essere costante ed uguale al coefficiente di proporzionalità inversa da A a B, che nel caso considerato è 120.

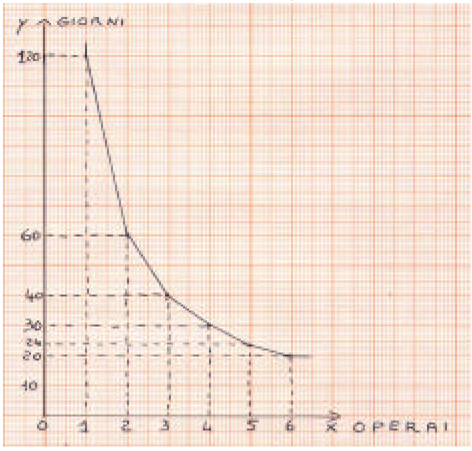
Quindi, indicando con x un numero qualsiasi di operai e con y il corrispondente numero di giorni occorrenti per eseguire il dato lavoro, si ha:

$$y * x = 120,$$

ossia:

$$y = \frac{120}{x}.$$

Quest'ultima relazione esprime la legge secondo cui varia il numero dei giorni occorrenti per compiere un dato lavoro, al variare del numero degli operai impiegati. Inoltre, il diagramma cartesiano di tale relazione è un arco di una particolare curva che ha il nome di iperbole.



Esempi di grandezze inversamente proporzionali sono la velocità di un'automobile ed il tempo impiegato per percorrere un dato spazio, il numero delle bottiglie occorrenti per contenere una data quantità di vino e la loro capacità, l'altezza di uno scalino ed il numero di scalini occorrenti per raggiungere una data altezza. Ma è necessario fare attenzione a non affermare che due grandezze sono inversamente proporzionali se al crescere del valore dell'una, decresce il valore dell'altra. Per esempio il valore di una potenza avente per base 0,4 decresce col crescere dell'esponente, infatti si ha :

$$(0,4)^2 = 0,16, \quad (0,4)^3 = 0,064, \quad (0,4)^4 = 0,0256, \quad \ldots$$

ma non si può con ciò affermare che il valore di una potenza con base minore di uno, sia inversamente proporzionale all'esponente. Infatti se consideriamo le due potenze

$$(0,4)^4 \quad e \quad (0,4)^2$$

la prima delle quali è stata ottenuta raddoppiando l'esponente della seconda, il valore della prima che è 0,0256 non è la metà di 0,16 che è il valore della seconda.

1.2 PROBLEMA DEL TRE SEMPLICE DIRETTO

Prendiamo in considerazione il seguente problema:
Luca ha speso 9,00 € per acquistare 5 metri di stoffa; quanto dovrà spendere per comprarne 12 metri?
Per giungere alla soluzione si possono applicare tre metodi: il metodo delle proporzioni, il metodo di riduzione all'unità e il metodo di risoluzione grafico.
Procedendo mediante il primo metodo si osserva innanzitutto che le due grandezze variabili dipendenti che figurano nel problema sono direttamente proporzionali, infatti raddoppiando, triplicando, ecc., i metri di stoffa acquistati anche la spesa corrispondenti diventa il doppio, il triplo, ecc... .
Indicando poi con x la spesa incognita, si forma il seguente prospetto dei valori delle due grandezze:

metri di stoffa	spesa in euro
5	9,00
12	X

Ricordando che se due grandezze sono direttamente proporzionali il rapporto di due qualsiasi valori della prima è uguale al rapporto dei corrispondenti valori della seconda, si ha:

$$5 : 12 = 9,00 : x$$

e risolvendo:

$$x = \frac{9,00 * 12}{5} = 1,80 * 12 = 21,60$$

La spesa richiesta è dunque di € 21,60.
L'approccio al problema mediante il secondo metodo si basa sul seguente modo di ragionare:

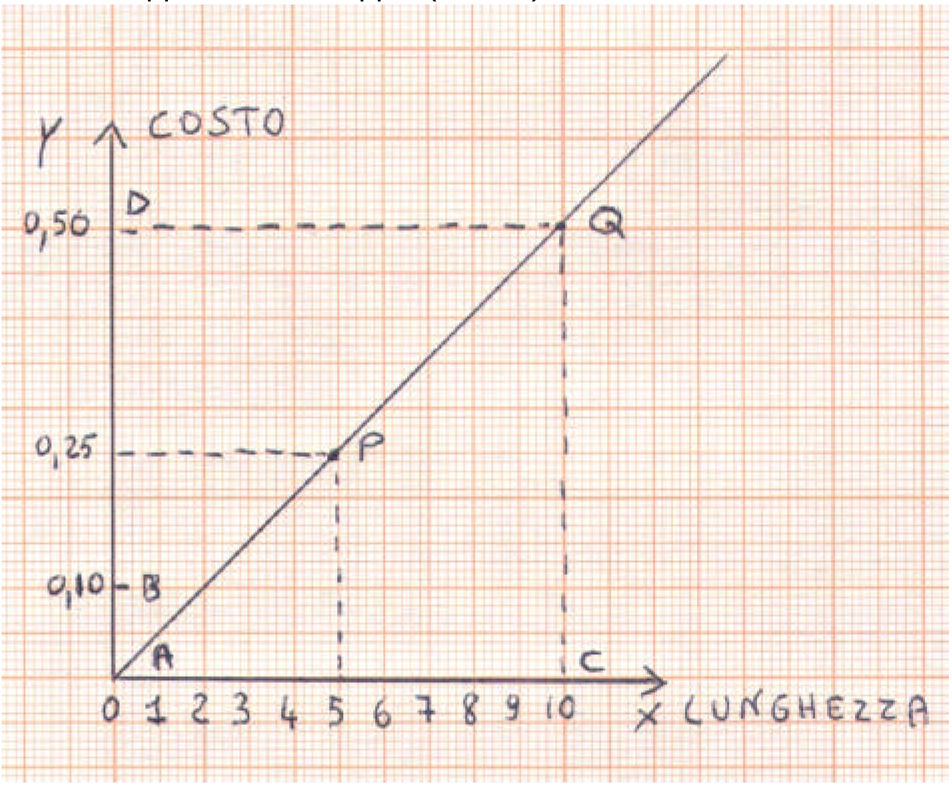
se 5 metri di stoffa costano € 9,00:
1 metro di stoffa costerà € (9,00 : 5),
quindi 12 metri di stoffa costeranno € (9,00 : 5) * 12.

Dunque indicando con x la spesa richiesta, si ha:

$$x = € (9,00 : 5) * 12 = € 1,80 * 12 = 21,60$$

e si ottiene così lo stesso risultato che si è trovato col metodo delle proporzioni.
Risolviamo, infine, graficamente il seguente problema del tre semplice diretto:

Se 5 centimetri di nastro costano 0,25 € , quanto si spenderà per acquistarne 10 centimetri?
Il costo y del nastro è funzione della sua lunghezza x, e poiché queste due grandezze sono direttamente proporzionali, il grafico cartesiano della legge di proporzionalità è una semiretta passante per l'origine O.
Staccato sull'asse x il segmento OA che rappresenta 1 centimetro di nastro e sull'asse y il segmento OB che rappresenta 0,10 €, segniamo l'immagine del punto P che rappresenta la coppia (5; 0,25).



La semiretta OP è il diagramma della proporzionalità diretta considerata. Segniamo poi sull'asse x il punto C che rappresenta 10 centimetri di nastro e conduciamo da esso la parallela all'asse y fino ad incontrare la semiretta OP nel punto Q.
La parallela condotta da Q all'asse x interseca l'asse y nel punto D che corrisponde al costo di 0,50 €.
Dunque 10 centimetri di nastro costeranno 0,50 €.

1.3 PROBLEMA DEL TRE SEMPLICE INVERSO

Per spiegare il problema del tre semplice inverso si può porre attenzione sul seguente problema:

un automobilista correndo alla velocità media di 75 chilometri all’ora percorse la distanza fra due città in 4 ore. Se nel viaggio di ritorno rifece lo stesso percorso alla velocità media di 60 chilometri all’ora, quante ore impiegò?
Tale problema, rientrando fra i problemi del tre semplice inverso, si può risolvere, così come i precedenti, mediante tre metodi, ossia, il metodo delle proporzioni, il metodo di riduzione all’unità e il metodo di risoluzione grafico.
Se intendiamo applicare il metodo delle proporzioni osserviamo innanzitutto che le grandezze variabili dipendenti che figurano nel problema sono inversamente proporzionali. Infatti raddoppiando, triplicando, ecc., la velocità di un mezzo, il tempo che occorre per coprire una data distanza diventa la metà, la terza parte, ecc... .
Indicando poi con x il tempo incognito richiesto, si forma la seguente tabella dei valori delle due grandezze:

velocità in km/ora	Tempo impiegato
75	4
60	x

Ricordando che se due grandezze sono inversamente proporzionali, il rapporto fra due qualsiasi valori della prima grandezza è uguale al rapporto inverso dei corrispondenti valori della seconda, si ha:

$$75 : 60 = x : 4$$

e risolvendo:

$$x = \frac{75 * 4}{60} = 5$$

Il tempo impiegato nel viaggio di ritorno fu di 5 ore.
Se ci serviamo del metodo di riduzione all’unità, ragioniamo nel seguente modo:
se un automobilista corre

- alla velocità media di 75 km/ora impiega 4 ore;
- alla velocità media di 1 km/ora impiega 4 * 75 ore;
- alla velocità media di 60 km/ora impiega $\frac{4 * 75}{60}$ ore, cioè 5 ore

Consideriamo, in ultimo, la risoluzione grafica del seguente problema del tre semplice inverso:
Per eseguire un certo lavoro 3 operai impiegano 40 giorni. Quanti giorni impiegherebbero 6 operai per eseguire lo stesso lavoro?
Le due grandezze che compaiono nel problema sono inversamente proporzionali.
Se 3 operai eseguono il lavoro in 40 giorni, 1 operaio impiegherà 3 * 40 =120 giorni, quindi il numero dei giorni che impiegherebbero x operai è dato dalla formula:

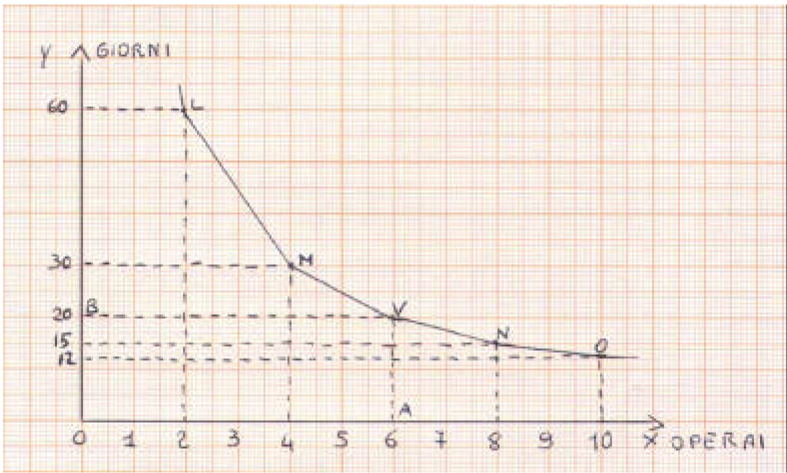
$$y = \frac{120}{x},$$

che è la legge della proporzionalità inversa fra due grandezze considerate.

Assegnando alla variabile x i valori arbitrari 1, 2, 3, 4, …, si hanno per y i corrispondenti valori riportati nella seguente tabella:

operai (x)	1	2	3	4	8	10	15	…
giorni (y)	120	60	40	30	15	12	8	…

Segnati i punti L, M, N, O, …, immagini delle coppie (2; 60), (4; 30), (8; 15), (10; 12), …, e congiungendoli successivamente con una linea continua si ha il grafico cartesiano della legge di proporzionalità inversa che è un arco di iperbole.



Segnato poi sull'asse x il punto A che rappresenta 6 operai, conduciamo da esso la parallela all'asse y che intersecherà la curva nel punto V.
La parallela condotta da questo punto all'asse x, interseca l'asse y nel punto B che corrisponde a 20 giorni.
Dunque 6 operai per eseguire quel lavoro impiegherebbero 20 giorni.

CAPITOLO II
PRIMA FASE DEL LAVORO SPERIMENTALE

OBIETTIVO GENERALE:

- Scoprire le concezioni degli alunni rispetto al pensiero pre-proporzionale attraverso la regola del tre semplice.

OBIETTIVI SPECIFICI:

- Rilevare i comportamenti strategici degli alunni posti di fronte alla risoluzione di un problema sulla compravendita;
- Prendere in considerazione gli atteggiamenti assunti dagli alunni posti di fronte alla risoluzione di un problema sulla compravendita;

IPOTESI:

- Gli alunni di classe quinta elementare posseggono un pensiero di tipo pre-proporzionale.

Intendo rilevare l'esistenza di tale pensiero attraverso la somministrazione del seguente problema:

Un negoziante spende 450,00 € per comprare 9 dizionari di lingua italiana. Se successivamente acquista altri 5 dizionari, quanto gli costano? E quanto spende in tutto?

Il problema da me formulato rientra tra i problemi del tre semplice diretto, in quanto le due grandezze in esso presenti sono direttamente proporzionali. Per giungere alla soluzione, come ho già detto, si possono applicare tre metodi : il metodo delle proporzioni, il metodo di riduzione all'unità, il metodo di risoluzione attraverso la rappresentazione grafica. Nello specifico del contesto di applicazione della somministrazione mi attendo un approccio risolutivo che si avvalga del secondo metodo tra quelli citati.

La specificazione delle strategie risolutive corrette attese è contenuta nell'analisi a priori.

L'analisi degli errori invece consiste nella previsione dei comportamenti errati che non consentono di pervenire ad una giusta soluzione.

I dati ottenuti dall'analisi dei protocolli sono stati tabulati utilizzando per l'analisi descrittiva il programma EXCEL col quale ho rilevato la presenza e non dei comportamenti e degli errori adottati dalle classi e per l'analisi implicativa il programma CHIC che mi ha permesso di studiare le implicazioni tra le variabili e consente differenti statistiche tra le quali l'analisi delle similarità di Lerman, l'analisi implicativa secondo R. Gras.

2.1. STRATEGIE RISOLUTIVE CORRETTE (comportamenti attesi)

Le strategie da me ipotizzate si caratterizzano come procedimenti di riduzione all'unità, inoltre la risoluzione del problema mediante queste rientra in un processo pre-proporzionale.

- S_1 € (450,00 : 9) = € 50,00
  € (50,00 * 5) = € 250,00
  € (450,00 + 250,00) = € 700,00

L'alunno indica sempre il sistema monetario che sta adoperando, avendo piena consapevolezza delle grandezze con le quali sta lavorando.

- S_2 (450,00 : 9) = 50,00
  (50,00 * 5) = 250,00
  (450,00 + 250,00) = 700,00

L’alunno lavora con gli scalari tralasciando ogni indicazione sul sistema monetario pur essendo consapevole che i risultati delle operazioni da lui compiute esprimono un prezzo in euro.

- S_3 (450,00 : 9) = 50,00
  (50,00 * 5) = 250,00
  (250,00 + 450,00) = 700,00

A differenza della S_1, l’alunno potrebbe considerare gli addendi nell’ordine inverso, ottenendo comunque dalla loro somma, data la proprietà commutativa dell’addizione, eguale risultato.

- S_4 (450,00 : 9) = 50,00
  (5 * 50,00) = 250,00
  (450,00 + 250,00) = 700,00

L’alunno mutando, inconsapevolmente, l’ordine dei fattori ottiene dalla loro moltiplicazione, per la proprietà commutativa della moltiplicazione, lo stesso risultato.

- S_5 (450,00 : 9) = 50,00
  (5 * 50,00) = 250,00
  (9 + 5) = 14
  (50,00 * 14) = 700,00

L’alunno dopo aver ottenuto il numero complessivo dei dizionari acquistati dal negoziante, si serve nuovamente di una moltiplicazione per pervenire al risultato richiesto dalla seconda domanda del problema somministratogli. Anche questa risoluzione rientra in un processo pre-proporzionale.

- S_6 (450,00 : 9) = 50,00
  (5 * 50,00) = 250,00
  (5 + 9) = 14
  (50,00 * 14) = 700,00

Tale strategia differisce dalla S_5 solo per l’inversione degli addendi, ma anche in essa, sempre per la proprietà commutativa dell’addizione, il risultato ottenuto sarà lo stesso.

- S_7 € (450 : 9) = € 50
  € (5 * 50,00) = € 250
  € (450+ 250) = € 700

L’alunno omette gli zeri pur consapevole che il sistema monetario dell’euro è centesimale.

2.2. ANALISI DEGLI ERRORI ATTESI

- E_1: l’alunno commette errori di calcolo dovuti a distrazione;
- E_2: l’alunno commette errori di calcolo dovuti a lacune di base (relative alle quattro operazioni e/o alle operazioni con i numeri decimali);
- E_3: L’alunno considera il risultato ottenuto dalla riduzione ad unità come il costo di 5 dizionari;

- E_4: L'alunno confonde il costo di nove dizionari con il costo unitario;
- E_5: L'alunno trascrivendo i dati con scarsa attenzione considera la seconda domanda identica alla prima e non vi risponde;
- E_6: L'alunno risolve il problema senza riflettere su di esso, servendosi dei dati forniti dal testo per compiere operazioni dettate dal caso;
- E_7: L'alunno, interpretando erroneamente il problema, considera 450,00 € come il costo di 5 dizionari;
- E_8: L'alunno non risponde correttamente alla seconda domanda perché distraendosi confonde il costo unitario con il costo di nove dizionari, quindi addizionando al costo di 5 dizionari il costo unitario non perviene alla spesa complessiva.

2.3. ANALISI DELLE STRATEGIE RISOLUTIVE CORRETTE (comportamenti rilevati)

- S_1 € (450,00 : 9) = € 50,00
  € (50,00 * 5) = € 250,00
  € (250,00 + 450,00) = € 700,00

  L'alunno indica sempre il sistema monetario che sta adoperando, avendo piena consapevolezza delle grandezze con le quali sta lavorando. Tale strategia corrisponde alla S_1 ipotizzata.
- S_2 € (450,00 : 9) = € 50,00
  € (50,00 * 5) = € 250,00
  € (450,00 + 250,00) = € 700,00

  Tale strategia rispecchia la S_3 ipotizzata, ma differisce da questa per l'indicazione del sistema monetario.
- S_3 (450,00 : 9) = 50,00
  (50,00 * 5) = 250,00
  (450,00 + 250,00) = 700,00

  La S_3 rilevata è identica alla S_3 ipotizzata.
- S_4 € (450 : 9) = € 50
  € (50 * 5) = € 250
  € (450 + 250) = € 700

  Omette gli zeri pur consapevole che il sistema monetario dell'euro è centesimale. La S_4 rilevata coincide con la S_7 ipotizzata.
- S_5 € (50 * 9) = 450
  € (50 * 5) = 250
  € (450,00 + 250,00) = 700,00

  Applica un procedimento alternativo. Basandosi sulla tabellina del 9 e ricordandosi che (9 * 5) = 45, l'alunno aggiunge a tale risultato uno zero ed ottiene 450. Il bambino dunque ha intuito il risultato del costo unitario ripassando a mente la tabellina del nove e svolgendo subito dopo l'operazione che gli consentisse di verificare l'esattezza della sua intuizione.

- S_6 (450 : 9) = 50
  (50 * 5) = 250

(250 + 450) = 700

Omette gli zeri e tralascia le indicazioni sul sistema monetario per accelerare la risoluzione delle operazioni; successivamente integrerà alcuni dei suoi passaggi aggiungendo gli zeri ed il simbolo “ € ” .

- S_7 (450 : 9) = 50
  (50 * 5) = 250
  € (450,00 + 250,00) = 700,00 €

Omette in parte l'indicazione degli zeri e del sistema monetario per accelerare la risoluzione delle operazioni. Le risposte, comunque, saranno complete da ogni punto di vista.

2.4 ANALISI DEI PROCEDIMENTI CONTENENTI ERRORI

Ho ritenuto opportuno porre una particolare attenzione ai procedimenti che presentavano errori in quanto solo da una loro accurata analisi è possibile comprendere quali errori ostacolino l'approccio al problema mediante un pensiero di tipo pre-proporzionale.

- P_1 (€ 450,00 * d 9) = € 4000,00
  (€ 40000,00 * d 5) = € 20000,00
  RISPOSTE: 1) 9 dizionari gli costano € 4000,00
  2) In tutto spende € 20000,00

L'alunna antepone la lettera “d” al numero dei dizionari, come se volesse indicare anch'essi con un'unità di misura; inoltre interpreta erroneamente il testo. Infatti utilizza l'operatore della moltiplicazione rispettivamente per individuare il costo di nove dizionari, dato già fornito, e al fine di moltiplicare il risultato ottenuto per 5, terzo dato fornito ed unico rimasto ancora da utilizzare e far interagire[3] con un altro dei dati a sua disposizione .

- P_2 (450,00 * 9) = 4050,00 costo dei 9 dizionari
  (4050,00 * 5) = 20250,00 costo dei 5 dizionari
  (20250,00 - 4050,00) = 16200,00 costo dei tutti dizionari
  RISPOSTE: 1) Al negozionte i dizionari gli costano 20250,00
  2) In tutto i dizionari costano 16200,00

Pur non incorrendo in errori di calcolo, l'alunna non presta molta attenzione alle richieste del testo sicchè la prima operazione sarà una moltiplicazione adoperata al fine di conoscere un dato già fornito dal problema e la terza operazione sarà una sottrazione.

- P_3 (9 + 5) = 14 costo dei dizionari
  (450,00 * 14) = 6300,00 quanto spende
- $P_{3.1}$ (9 + 5) = 14 dizionari
  (450.000 * 14) = 6.3000,00 quanto deve pagare

---

[3] La maestra mi ha spiegato che i suoi alunni hanno imparato che i tra i dati forniti da un problema deve avvenire qualcosa, una o più operazione. Gli alunni, cioè, sono consapevoli di dover utilizzare di volta in volta uno dei 4 operatori per ottenere un risultato.

- $P_{3.2}$ (9 + 5) = 14 tutti i dizionari
  (450,00 * 14) = € 5700,00 la spesa in tutto

Gli alunni che utilizzano il P_3 attribuiscono alternativamente al primo risultato il valore economico dei dizionari e il loro numero complessivo. Inoltre 450,00 € verrà da loro considerato come costo unitario. Oltre a ciò, il $P_{3.1}$ si caratterizza per la presenza di errori dovuti a difficoltà con i numeri decimali ed il $P_{3.2}$ per la presenza di errori di calcolo.

- P_4 (€ 450,00 : 9) = € 500,0
  € (500,0 * 5) = 250,00
  € (250,00 + 450,00) = 700,00
  RISPOSTA: I due dizionari costano 500,00 € e in tutto spende
  € 700,00

Sono presenti errori di calcolo e difficoltà con il sistema monetario centesimale.

- P_5 (450,00 * 9) = 4050,00
  (4050,00 * 5) = 2025,00
  (4050,00+2025,00) = 6300,00
  RISPOSTA: Il negoziante spende complessivamente 6300,00 $P_{5.1}$

(450,00 * 9) = 4050,00 soldi spesi per 9 dizionari
(4050,00 * 5) = 20.250;00 soldi spesi per gli altri 5 dizionari
(4050,00 + 20.250,00) = 24.300;00 soldi spesi in tutto
RISPOSTA: In tutto spende 24.300;00

- $P_{5.2}$ (450,00 * 9) = 4050,00 spende per 9 dizionari
  (4050,00 * 5) = 202,500 spende per gli altri 5 dizionari
  (202,500 + 45,000) = 247,500 quanto spende in tutto
  RISPOSTA: Spende in tutto € 247,500
  (247500 : 14) = € 17218
  RISPOSTA: Un dizionario costa € 17218

Gli alunni che si accostano al problema con il P_5 ,considerano 450,00 come costo unitario e lo moltiplicano per nove; la terza operazione rientra nel procedimento corretto. A differenza del P_5, nel $P_{5.1}$ si notano difficoltà con i numeri decimali e dubbi che portano l'alunno ad utilizzare sia il punto che la virgola. L'alunna che si avvale del $P_{5.2}$ risponde alla seconda domanda, poi torna a riflettere sulla prima e vi risponde.

- P_6 (450 : 9) = € 41 quanto gli costano
  (41 * 5) = € 205 e quanto spende in tutto
- $P_{6.1}$ (450 : 9) = 110
  (110 * 5) = € 550
  RISPOSTE: 1) Gli costa 110 €
  2) In tutto spende € 550
- $P_{6.2}$ (450 : 9) = 910
  (910 * 5) = 45,50
  RISPOSTE: Il primo costo è 910
  In tutto però ha speso 45,50

- $P_{6.3}$ (450,00 : 9) = 50,00 € quanto gli costa
  € (50,00 * 5) = 11000 € quanto spende in tutto
- $P_{6.4}$ (450,00 : 9) = 5.000 €
  € (50,00 * 5) = 25.000 € quanto spende in tutto
- $P_{6.5}$ (450,00 : 9) = 5,00 €
  € (5,00 * 5) = 250,00
  RISPOSTE: Gli costano € 5,00
  Spende in tutto 250,00

Nel P_6 la prima operazione, ossia la divisione, contiene errori di calcolo. L'alunno si ferma alla seconda operazione perché ritiene che con il risultato ottenuto mediante il suo svolgimento possa rispondere alla seconda domanda del problema. Nel $P_{6.1}$ gli errori sono gli stessi di quelli contenuti nel P_6 ma i risultati sono diversi. Nel $P_{6.2}$ la prima risposta è ambigua. Nel $P_{6.3}$ la seconda operazione contiene errori di calcolo. Il $P_{6.4}$ si caratterizza, rispetto alle precedenti, per l'uso del punto al posto della virgola. L'alunna che si serve del $P_{6.5}$ mostra difficoltà rispetto alla risoluzione di operazioni con numeri decimali.

- P_7 (450,00 * 5) = 2.250,00 dizionari comprati
  (2.250,00 * 9) = 4.050,00

Oltre al procedimento errato si notano errori di calcolo relativamente alla seconda operazione.

- P_8 (9 + 5) = 14
  (450,00 * 14) = 200,000
  (200,000 + 45.00000) = 75,00000
  RISPOSTA: In tutto il negoziante spende 75,00000

Considera 450,00 come costo unitario; successivamente si distrae e 450,00 si trasforma in 45.00000. Risponde solo alla seconda domanda.

- P_9 € (450,00 : 9) = 4999
  (4999 * 5) = 24995
  (4999 – 24995) = 20003
  RISPOSTE: Gli costano 4999
  Spende 20003

Sono presenti errori di calcolo. Giusta è l'intuizione, tranne che per la seconda domanda. L'errore della prima risposta così come della terza operazione infatti è dovuto molto probabilmente a distrazione.

- P_{10} (450,00 * 9) = 4050,00
  (4050,00 * 5) = 20.25000
  RISPOSTE: In tutto spende 2025000
  Ci costano 2050,00

Considera 450,00 come costo unitario; ritiene di poter rispondere alla seconda domanda sulla base del risultato ottenuto mediante la seconda operazione. Si confonde, inoltre, quando deve riscrivere i risultati nelle risposte.

- P_{11} € (9 + 5) = 14 quanto gli costano i dizionari

€ (450,00 + 14) = € 464,00 quanto spende in tutto

Le alunne attribuiscono al primo risultato il valore economico dei 5 dizionari; successivamente sommano ai soldi già spesi (€ 450,00) il risultato della prima operazione per ottenere la risposta alla seconda domanda.

- P_{12} € (450,00 : 9) = € 50,00 quanto costano in tutto i dizionari
  € (50,00 * 5) = € 250,00 quanto costano in tutto i dizionari
  € (50,00 + 250,00) = € 300,00 quanto spende in tutto

In tale procedimento si nota l'uso ripetuto e improprio dell'espressione "in tutto", dal quale deriva l'errore della terza operazione.

- P_{13} € (50 * 9) = 450,00
  € (50 * 5) = 250,00
  (450,00 + 250,00) = 699,00
  RISPOSTE: 1) Se il negoziante acusta altre 5 dizionari spente 699,00
  2) In tutto il negoziante spende 699,00

Rispetto alla S_5 vi è un errore di calcolo nell'ultima operazione. Inoltre dalle risposte si evince che il procedimento che l'alunna adopera non è farina del suo sacco.

- P_{14} (450 : 9) = € 50
  (50 * 5) = 250
  (250 + 450) = 600
  RISPOSTE: 1) In tutto i dizionari gli costano 250 €
  2) In tutto il negoziante spende in tutto 600 €

L'alunno utilizza in maniera impropria l'espressione "in tutto" nella prima risposta. Nella terza vi è un errore di distrazione.

- P_{15} (45 * 5) = € 225 quanto costano i cinque dizionari
  € (450 + 225) = € 675 quanto spende in tutto

L'alunno omette gli zeri quando "gli fa comodo". Considerando 45 come costo unitario lo moltiplica per 5 al fine di ottenere il costo di 5 dizionari.

- P_{16} (450,00 * 9) = 405,000
  (405,00 + 5) = 405,00

Presenta difficoltà nell'utilizzo dei numeri decimali. Considera 450,00 come costo unitario; somma al risultato ottenuto dalla prima operazione non il costo di 5 dizionari ma la quantità dei dizionari successivamente acquistati.

- P_{17} (450,00 * 9) = 4.050,00
  (405,00 + 5) = 20.250,00

Considera 450,00 come costo unitario; confonde l'operatore dell'addizione con quello della moltiplicazione.

- P_{18} € (9 + 5) = 14
  (140,00 + 14) = 154,00
  RISPOSTE: 1) In tutto spende 154,00 € per comprare 9 dizionari
  2) Successivamente acquista altri 5 addizioni
  3) In tutto spende al supermercato 154,00

Aggiunge zeri a proprio piacimento. Le risposte rivelano distrazione e mancanza d'interesse. L'alunna infatti scrive tre risposte che esulano dalle richieste del testo: la prima informazione fornita dall'alunna non riguarda il costo di 5 dizionari ma dei dizionari di cui già conosce il costo; la seconda risposta non è altro che la ripetizione di una parte del testo, anche se la parola dizionario è sostituita dal termine "addizioni"; la terza si caratterizza per l'indicazione di un luogo frutto della sua fantasia.

- P_{19} (450: 9) = 50
  (450 : 5) = 70
  (70 + 50) = 120
  RISPOSTE: I libri costano 50
  In tutto spende 120

Sono presenti errori di calcolo nella seconda divisione. Inoltre le divisioni non sono utilizzate con lo scopo di ridurre all'unità.

- P_{20} (450,00 * 9) = 4 5000
  (450,00 - 9) = 6999
  (450,00 : 9) =

Procede per tentativi; dopo aver eseguito le prime due operazioni le elide e si indirizza, forse inconsapevolmente, verso la strada giusta. Non porta a termine il problema. Sono evidente le difficoltà incontrate dall'alunno sia nell'uso delle operazioni che nella comprensione del testo.

- P_{21} (9 + 5) = 14 i dizionari in tutto
  (450 : 14) =

L'alunna ottiene il numero complessivo dei dizionari acquistati; la seconda operazione non è portata a termine a causa delle difficoltà incontrate nell'eseguirla.

- P_{22} (450 : 9) = 55
  (450 * 5) = 2205

Tra l'alunno e la risoluzione del problema si frappone un ostacolo: il corretto svolgimento delle operazioni. Sul suo foglio, infatti, è rappresentato un diagramma nel quale gli operatori sono presenti nella giusta successione ma i risultati ottenuti dalle operazioni eseguite sono cancellati perché l'alunno è consapevole di aver compiuto errori di calcolo.

- P_{23} (450,00 + 9) = 6200
  (5 + 6200) = 910
  RISPOSTE: 1) In tutto costa 6200
  2) In tutto spende 910

Mostra difficoltà con le quattro operazioni[4]. A conferma di ciò si può notare sul protocollo che ella scrive la divisione (450,00 : 9) ma successivamente la

[4] La maestra afferma che l'alunna "a malappena conosce i numeri fino a 100".

abbandona nel tentativo di risolvere il problema mediante l'uso di operazioni che ritiene più facili, ossia le due addizioni su riportate.

- P_{24} (450,00 + 9) = 450,09
  (450,0 + 5) = 450,5
  RISPOSTE: 1) Se acquista altri 5 dizionari spende € 450,09
  2) In tutto spende 450,5

L'alunno compie errori perché incolonna in maniera errata gli addendi; con due sole operazioni, inoltre, ritiene di giungere alle risposte relative alle richieste del problema, facendo corrispondere il primo risultato al costo di 5 dizionari ed il secondo risultato alla spesa complessiva.

- P_{25} (450,00 + 9 + 5) = 464.00
  RISPOSTA: In tutto spende 464.00

La somma dei dati forniti dal testo è considerata dall'alunno come spesa complessiva. La virgola viene sostituita con il punto e nella risposta manca il simbolo €.

- P_{26} (€ 450,00 + 9) = 450,91
  (450,91 * 5) = 211,45
  (450,91 - 5) = 11,50

Mancano le risposte perché allo scadere del tempo a disposizione per risolvere il problema l'alunna non era ancora riuscita a scriverle. Oltre agli errori di calcolo si nota l'uso strumentale dell'ultima operazione, senza che essa sia stata cioè preceduta da una fase di riflessione.

- P_{27} (450,00 + 9) = 450,01
  (450,01+ 5) = 450,06

Sono presenti errori di calcolo nella prima operazione, l'alunno infatti si confonde con gli zeri. Dal punto di vista del procedimento adottato la prima operazione è svolta al fine di rispondere alla prima domanda, così come la seconda operazione è adoperata per giungere alla seconda risposta.

- P_{28} (450,00 * 5) = 22,50
  (22,50 + 9) = 22,59

Presenta difficoltà nello svolgimento di operazioni con numeri decimali. Considera 450,00 come costo unitario; somma al risultato ottenuto dalla prima operazione non il costo di 9 dizionari ma la quantità dei dizionari precedentemente acquistati.

- P_{29} € (450,00 : 5) = 90,00
  € (90,00 + 450,00) = € 540,00

La divisione non è utilizzata per ridurre all'unità. Infatti, gli alunni che si accostano al problema seguendo tale procedimento considerano il primo risultato come il costo di 5 dizionari.

- P_{30} (450,00 : 9) = 54,50
  (54,50 * 5) = 45,500 €
  RISPONDO: Il negoziante spende in tutto 45,500 €

Ha difficoltà nello svolgimento delle operazioni e nell'uso dei numeri decimali. Risponde solo alla seconda domanda con quello che dovrebbe essere il risultato richiesto dalla prima domanda.

- P_{31} (450,00 : 9) = 2350 €
  (2350 € * 5) = 11750 €
  RISPOSTA: Gli costano 2350 € e in tutto spende 11750 €

La divisione non è utilizzata per ridurre all'unità. Infatti, secondo l'alunna il primo risultato corrisponde al costo di 5 dizionari ed il secondo alla spesa complessiva del negoziante. Sono inoltre presenti errori di calcolo e difficoltà nell'uso dei numeri decimali relativi alla prima operazione.

- P_{32} (450,00 : 9) = 50,00 quanto gli costano
  € (50,00 * 5) = 150,00 quanto spende in tutto

L'alunno esegue soltanto due operazioni perché ritiene che con i risultati ottenuti possa rispondere a quanto richiesto dal problema. Nella seconda operazione si nota un errore di disattenzione.

- P_{33} (450,00 : 9) = 50,00 quanto gli costano in tutto
  € (50,00 * 5) = 250,00 quanto spende in tutto

Tale procedimento è simile al precedente anche se si discosta da questo per l'assenza di errori di calcolo. Gli alunni, infatti, svolgono soltanto due operazioni utilizzando i risultati ottenuti per rispondere alle domande del testo loro somministrato.

- P_{34} (450,00 : 9) = 5,000 € quanto gli costa
  (5,000 + 14) = 514000 €

L'alunno presenta difficoltà nelle operazioni con numeri decimali. Nella seconda operazione l'alunno tiene conto del numero complessivo di dizionari acquistati ma invece di moltiplicarli per il costo unitario li addiziona a quest'ultimo.

- P_{35} € (450,00 : 5) = 90,00 € quanto gli costano gli altri 5 dizionari
  € (90,00 * 9) = € 10,00
  € (10,00 + 90,00) = 100,00 € quanto spende in tutto

Vi sono errori di calcolo nella seconda operazione. La divisione non è utilizzata per ridurre all'unità.

- P_{36} € (450,00 : 9) = 50,00
  (50,00 * 5) =
  € (450,00 + 50,00) = 500,00

E' simile al P_{12}. La seconda operazione rimane in sospeso. La terza operazione è errata perché il primo risultato non è considerato come costo unitario ma come il costo di 5 dizionari.

- P_{37} € (450 : 9) = € 50
  € (50 * 5) = € 250
  € (250 + 50,00) = € 300,00
  RISPOSTA: Gli costano € 50 l'uno
  Spende in tutto € 300

Nonostante l'alunno sia consapevole di aver ottenuto il costo unitario mediante la prima operazione, nella terza si distrae e considera come secondo addendo il costo unitario.

- P_{38} € (50 * 5) = € 250
  € (250 + 50) = € 300
  RISPOSTE: Gli costano € 300,00 , spende in tutto € 250,00

Tale procedimento è una riproduzione di quello immediatamente precedente. L'omissione dell'operazione che consente di ottenere il costo unitario ne è una conferma.

- P_{39} (450,00 : 9) = 50,2500
  € (250,00 + 450,00) = € 400,00
  RISPOSTA: In tutto spende 400,00

Da tale procedimento si evince che l'alunno non ragiona con la propria testa ma si avvale, per quanto gli riesce possibile, dei ragionamenti e dei calcoli di un compagno (ossia di Graziano Vincenzo).

- P_{40} € (450,00 : 5) = € 90,00
  € (450,00 - 90,00) = € 360,00

La divisione non è utilizzata in funzione della riduzione all'unità. Infatti l'alunna considera il primo risultato ottenuto come il costo di 5 dizionari. Inoltre la sottrazione compiuta è espressa manifestazione di una cattiva interpretazione del testo somministrato.

- P_{41} € (450 * 9 * 5) = 8389 €
  RISPOSTA: In tutto spende € 9609

L'alunna ha difficoltà nell'esecuzione della moltiplicazione. Non si riesce a comprendere come l'alunna abbia ottenuto il dato che utilizza per rispondere. Sul protocollo sono presenti cancellature ed il diagramma è poco chiaro.

- P_{42} €(450,00 : 9) = 50,00 €
  € (50,00 + 5) = 105,55 €
  €(50,00 * 105,55) = 75,500 €

L'alunno invece di moltiplicare il costo unitario per 5, lo addiziona a 5 e lo moltiplica per il risultato della seconda operazione.

- P_{43} €(450,00 * 5 * 9) = 749260
  RISPOSTA: In tutto guadagna € 74926

E' simile al P_{41}. L'alunna ha difficoltà nell'esecuzione della moltiplicazione e nel compiere calcoli con numeri decimali.

- P_{44} €(450,00 – 9) = 441,00 €
  € (441,00 – 5) = 436,00 €
  RISPOSTE: Spende in tutto 441,00 €
  Gli costano 436,00 €

Il preconcetto dell'alunna circa la spesa[5] la induce ad adoperare due sottrazioni. Le risposte fornite rivelano la sua disattenzione nei confronti del testo.

- P_{45} €(450,00 – 9) = 441,00 €
  € (441,00 – 5) = 441,600 €
  RISPONDI: In tutto il dizionario di lingua italiana
  441,00 €
  441,600 €

Tale procedimento è adottato dall'alunna sulla base della considerazioni dell'alunna che adotta il procedimento immediatamente precedente ad esso. L'alunna inoltre mostra difficoltà nello svolgimento della sottrazione con numeri decimali e in modo particolare relativamente all'incolonnamento (l'intero compare infatti sotto lo zero che segue la virgola) e al seguente calcolo: (0 – 5). Le risposte confermano l'influenza della compagna su tale alunna.

- P_{46} (450 : 5) = 50
  (50 * 9) = 250
  RISPONDI: Acquista solo 50 e in tutto spende 250

Le operazioni scritte dall'alunno sono frutto di ciò che riesce a ricordare dopo aver osservato il compagno di banco. Come si può notare i risultati sono quelli utili per rispondere alla prima domanda del problema ma le operazioni, la cui esecuzione condurrebbe a risultati diversi, non vengono svolte. La memoria non accompagna perfettamente l'alunno durante la trascrizione delle operazioni né tantomeno lo sostiene dopo la seconda operazione; pertanto l'alunno si servirà soltanto di queste due operazioni per rispondere alle richieste del testo.

- P_{47} € (450,00 : 9) = 50 €
  (50 + 5) = 55 €
  RISPONDO: I dizionari costano 50 €
  E in tutto spende 55 €

[5] La bambina dopo una lettura molto veloce del testo afferma che il problema è facile e che "non ci vuole assai perché va spendendo: è il meno!" Ella utilizza il verbo andare conferendogli un significato progressivo, come se si trattasse di un'azione che compie nel tempo. La conseguenza dello spendere è quella di avere meno soldi in tasca quindi la bambina dice che per risolvere il problema deve servirsi della sottrazione. Ma si tratta di una conclusione affrettata, tratta senza aver letto con attenzione il problema e senza aver posto realmente attenzione alle domande poste.

Le alunne si servono della divisione per conoscere non il costo unitario ma il costo di 5 dizionari. L'addizione (50 + 5) è da loro utilizzata con lo scopo di pervenire alla spesa complessiva.

Alcuni alunni affrontano il problema con un particolare stato d'animo: chi con agitazione, chi con rassegnatezza. Tali alunni non compiono errori ma non risolvono neanche il problema, cercano di approcciarsi ad esso ma mancano loro gli strumenti necessari per un suo corretto svolgimento.

Un'alunna legge tante volte il testo ma afferma di non capire le domande, scrive soltanto i dati, poi simula un mal di pancia e piange; un'altra bambina dopo aver scritto i dati riporta il primo sotto lo spazio che solitamente è adoperato per compiere le operazioni; un altro bambino ancora si cimenta nello svolgimento di ciò che vagamente assomiglia ad una "operazione"

(450)
00
450;

infine un bambino sbircia finchè gli è possibile dal compagno di banco, mi chiede ripetutamente aiuto ed avvicinandosi ai compiti già consegnati dagli altri compagni cerca disperatamente, ma senza successo, di guardare i loro procedimenti di risoluzione; infine si arrenderà e frustrato perché consapevole di non essere stato in grado di risolvere correttamente il problema esploderà sfogando la sua rabbia con i compagni.

2.5. ANALISI DESCRITTIVA

Riporto di seguito le tabelle da me elaborate in relazione ai comportamenti e agli errori riscontrati negli alunni in fase di risoluzione del problema loro posto.

TABULAZIONE DATI DEI COMPORTAMENTI DEGLI ALUNNI NELLA RISOLUZIONE DEL PROBLEMA

	COMPORTAMENTI												
CLASSI	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13
5ª A													
O.C.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
B.V.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
D.E.	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
P.D.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
B.M.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
B.G.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
C.F.	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
D.B.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
F.M.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
L.P.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0

B.L.	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
P.S.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
S.F.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
L.G.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
A.L.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
M.G.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
Co.F.	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
F.B.	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
C.Fr.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
P.R.	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
F.A.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
5[a] B													
G.M.R	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0
I.N.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
G.F.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
O.E.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
V.R.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
P.G.	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
N.S.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
B.G.	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0
P.S.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
M.S.	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
M.G.	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
F.E.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
M.M.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
I.S.	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
L.A.	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
A.G.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
S.N.	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
U.F.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
F.S.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0

B.E.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
S.F. 5ª C	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
M.M.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
M.V.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
G.S.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
O.D.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
M.E.	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
O.A.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
U.C.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
F.F.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
D.U.	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
V.G.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
C.G.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
F.G.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
Z.M.	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
V.G.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
S.G.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
M.P.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
G.P.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
D.L.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
C.G.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
G.R.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
A.M.	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
C.L.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
D.D.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5ª D													
G.D.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
G.P.	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
G.V.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
D.B.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
A.G.	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0

G.M.	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
I.I.	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
O.G.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
C.G.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
D.E.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
A.M.A.	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
C.A.	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
S.L.	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
S.E.	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
L.I.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
M.A.	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
S.L.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
F.E.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
F.I.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5ª E													
Z.V.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
G.G.	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
AM.G.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A.G.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
M.M.C.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
C.I.A.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
B.C.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
C.M.	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

LEGENDA:

- 1: presenza del comportamento;
- 0: assenza del comportamento;
- a1: Interpreta correttamente il testo;
- a2: Trascrive correttamente i dati forniti dal problema;
- a3: Si serve di tutte le informazioni di cui dispone;
- a4: Applica un procedimento;
- a5: Esegue due operazioni;

- a6: Esegue tre operazioni;
- a7: Applica una strategia corretta;
- a8: Risponde adeguatamente alla prima domanda;
- a9: Risponde adeguatamente alla seconda domanda;
- a10: Erra nei calcoli;
- a11: Il suo protocollo presenta abrasioni;
- a12: Commenta le operazioni eseguite;
- a13: Rappresenta correttamente il diagramma:

lettere maiuscole: nomi alunni.

TABELLA RIASSUNTIVA DEI COMPORTAMENTI DELLE CLASSI QUINTE

	COMPORTAMENTI																									
CLASSI	a1		a2		a3		a4		a5		a6		a7		a8		a9		a10		a11		a12		a13	
	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n
5ª A	5	16	21	0	21	0	21	0	12	9	9	12	4	17	3	18	4	17	14	7	7	14	10	11	4	17
5ª B	9	12	21	0	17	4	20	1	8	13	11	10	8	13	8	13	6	15	11	10	13	8	11	10	7	14
5ª C	6	17	23	0	19	4	21	2	15	8	7	16	6	17	6	17	6	17	10	13	5	18	0	23	6	17
5ª D	3	16	18	1	13	6	18	1	11	8	6	13	3	16	3	16	3	16	10	9	5	14	0	19	3	16
5ª E	1	8	8	1	7	2	7	2	6	3	1	8	1	8	1	8	1	8	2	7	0	9	1	8	1	8
TOT	24	69	91	2	77	16	87	6	52	41	34	59	22	71	21	72	20	73	47	46	30	63	22	71	21	72

PERCENTUALI DEI COMPORTAMENTI A CONFRONTO

COMPORTAMENTI																										
	a1		a2		a3		a4		a5		a6		a7		a8		a9		a10		a11		a12		a13	
	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n
5A	24	76	100	0	100	0	100	0	57	43	43	57	19	81	14	85,7	19,1	81	66,7	33,3	33	66,67	48	52,4	19,1	81
5B	43	57	100	0	80,95	19	95,2	4,8	38	62	52	48	38	62	38	61,9	28,6	71	52,4	47,6	62	38,1	52	47,6	66,7	33,3
5C	26	74	100	0	82,61	17	91,3	8,7	65	35	30	70	26	74	26	73,9	26,1	74	43,5	56,5	22	78,26	0	100	26,1	73,9
5D	16	84	94,7	5,3	68,42	32	94,7	5,3	59	41	32	68	16	84	16	84,2	15,8	84	52,6	47,4	26	73,68	0	100	15,8	84,2
5E	11	89	88,9	11	77,78	22	77,8	22	67	33	11	89	11	89	11	88,9	11,1	89	22,2	77,8	0	100	11	88,9	11,1	88,9

PERCENTUALI DEI COMPORTAMENTI RELATIVI ALL'INTERO CAMPIONE

	COMPORTAMENTI																									
	a1		a2		a3		a4		a5		a6		a7		a8		a9		a10		a11		a12		a13	
	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n	s	n
TOT	24	69	91	2	77	16	87	6	52	41	34	59	22	71	21	72	20	73	47	46	30	63	22	71	21	72
%	26	74	98	2	83	17	94	6	56	44	37	63	24	76	23	77	22	79	51	49	32	68	24	76	23	77

LEGENDA:

- a1: Interpreta correttamente il testo;
- a2: Trascrive correttamente i dati forniti dal problema;
- a3: Si serve di tutte le informazioni di cui dispone;
- a4: Applica un procedimento;
- a5: Esegue due operazioni;
- a6: Esegue tre operazioni;
- a7: Applica una strategia corretta;
- a8: Risponde adeguatamente alla prima domanda;
- a9: Risponde adeguatamente alla seconda domanda;
- a10: Erra nei calcoli;
- a11: Il suo protocollo presenta abrasioni;
- a12: Commenta le operazioni eseguite;
- a13: Rappresenta correttamente il diagramma;
- s: si (presenza comportamento);
- n: no (assenza comportamento).

Dall’osservazione della griglia dei comportamenti relativa alla 5ª A si possono rilevare i seguenti dati:

- Il 76% circa della classe non interpreta correttamente il testo;
- Tutti gli alunni della 5ª A trascrivono correttamente i dati forniti dal problema, si servono di tutte le informazioni di cui dispongono e provano a risolvere il problema attraverso un procedimento ma soltanto il 19% (4 alunni) riescono ad applicare una strategia corretta ed a rappresentare correttamente il diagramma;
- Tuttavia uno dei quattro alunni che applicano una strategia corretta non risponde adeguatamente alla prima domanda sia perché erra nei calcoli sia perché elabora la seguente risposta: “I due dizionari costano 500,00 €”;
- Il 66% della classe, una percentuale relativamente elevata, erra nei calcoli;
- Quasi la metà della classe commenta le operazioni eseguite.

La griglia della 5ª B consente di cogliere maggiormente i seguenti dati:

- Poco meno della metà della classe interpreta correttamente il testo;
- Il 38% circa della classe applica una strategia corretta;
- Tutti gli alunni trascrivono correttamante i dati;
- Solo un alunno non applica alcun procedimento di risoluzione;
- Una percentuale di poco superiore al 50%, e precisamente il 52,38% della classe, esegue tre operazioni;
- La stessa percentuale (52,38%) erra nei calcoli;
- La stessa percentuale (52,38%) commenta le operazioni eseguite;
- Il 61,90% dei protocolli presenta abrasioni
- Uno degli otto alunni che applicano una strategia corretta erra nei calcoli, non risponde correttamente alla prima domanda e non rappresenta correttamente il diagramma;

- Uno dei nove alunni che interpretano correttamente il testo non applica una strategia corretta perché confonde il costo unitario con il costo di nove dizionari.

Dalla griglia della 5ª C sono emersi i seguenti dati:

- Solo il 26,09% della classe interpreta correttamente il testo, applica una strategia corretta, risponde adeguatamente ad entrambe le domande e rappresenta correttamente il diagramma;
- Tutta la classe trascrive correttamente i dati ma non tutti gli alunni utilizzano tutte le informazioni di cui dispongono: il 17,39% della classe, infatti, non si serve di tutti i dati;
- Due alunni non applicano alcun procedimento;
- Più della metà della classe esegue solo due operazioni;
- Una percentuale abbastanza elevata della classe, e precisamente il 43,48%, erra nei calcoli;
- Nessun alunno commenta le operazioni eseguite.

Prendendo in esame la griglia della 5ª D relativa agli errori sono questi i dati più evidenti:

- Una percentuale molto bassa della classe, ossia il 15,79%, interpreta correttamente il testo e applicando una strategia corretta risponde adeguatamente ad entrambe le richieste del testo e rappresenta correttamente il diagramma;
- Un alunno non applica alcun procedimento;
- Un alunno non trascrive correttamente i dati;
- Non tutti gli alunni si servono di tutte le informazioni di cui dispongono: il 31,58% della classe non utilizza tutti i dati forniti dal testo;
- Soltanto il 31,58% della classe esegue tre operazioni;
- Più della metà della classe erra nei calcoli;
- Nessun alunno commenta le operazioni eseguite.

Dalla griglia della 5ª D sono emersi tali dati:

- Soltanto un alunno interpreta correttamente il testo e, adoperando una strategia corretta esegue tre operazioni e le commenta, risponde adeguatamente ad entrambe le domande e rappresenta correttamente il diagramma;
- Un alunno non trascrive correttamente i dati;
- Il 22% circa della classe, cioè due alunni, non applicano alcun procedimento;
- Il 22% circa della classe erra nei calcoli;
- Nessun protocollo presenta abrasioni.

Dal confronto delle percentuali concernenti i comportamenti degli alunni nelle diverse quinte emerge che:

- La 5ª B è la classe che presenta la percentuale più elevata relativamente alla corretta interpretazione del testo (42,86%), all'impiego di una strategia corretta, alla corretta rappresentazione del diagramma e, non ultimo in ordine d'importanza, al commento delle operazioni;

- Soltanto in 5ª A tutti gli alunni adoperano un procedimento di risoluzione e siservono di tutte le informazioni di cui dispongono, ma sitratta anche della classe con la percentuale più elevata di alunni che compiono errori di calcolo;
- Nelle quinte A, B, C, tutti gli alunni trascrivono correttamente i dati;
- Nel modulo 5ªB/C nessun alunno commenta le operazioni eseguite;
- La 5ª D e la 5ª E sono le classi in cui la percentuale degli alunni che non si servono di tutti i dati forniti dal testo è relativamente alta.

Dalle percentuali relative ai comportamenti dell'intero campione si evincono i seguenti dati:

- Soltanto un quarto del campione interpreta correttamente il testo;
- Quasi tutti gli alunni del campione trascrivono correttamente i dati forniti dal testo;
- Il 17,2% del campione non utilizza tutte le informazioni di cui dispone;
- Il 6,45% degli alunni non applica alcun procedimento;
- Il 63,44% del campione esegue tre operazioni;
- Solamente il 23,66% degli alunni adopera una strategia corretta;
- Il 22,58% del campione risponde adeguatamente alla prima domanda ed una percentuale di poco inferiore, ossia il 21,50% degli alunni risponde adeguatamente alla seconda domanda;
- Poco più della metà del campione, e precisamente il 50,54%, erra nei calcoli;
- Una percentuale non del tutto trascurabile dei protocolli, ossia il 32,26%, presenta abrasioni;
- Soltanto il 23,66% degli alunni commenta le operazioni eseguite;
- Pochi alunni, ossia il 22,58% del campione, rappresentano correttamente il diagramma.

TABULAZIONE DEGLI ERRORI, ATTESI E RILEVATI, DELLE CLASSI QUINTE

In seguito all'analisi dei procedimenti sono pervenuta alla rilevazione di parecchi errori, alcuni previsti altri del tutto disattesi, che mi propongo di sintetizzare attraverso le seguenti tabelle:

	ERRORI ATTESI E RILEVATI									
ALUNNI	E_1	E_2	E_3	E_4	E_6	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}
5ªA										
B.V.	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0

D.E.	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
B.M.	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
B.G.	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
C.F.	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
D.B.	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
L.P.	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
B.L.	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
P.S.	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
S.F.	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
L.G.	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
A.L.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
M.G.	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Co.F.	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
F.B.	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
C.Fr.	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
P.R.	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
F.A.	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
5ª B										
G.M.R.	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
I.N.	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
P.G.	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
B.G.	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
M.S.	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
M.G.	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
M.M.	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
I.S.	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
L.A.	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
A.G.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
S.N.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
U.F.	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
F.S.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0

B.E.	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
S.F. 5ª C	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
M.V.	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
G.S.	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
O.D.	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
M.E.	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
O.A.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
D.U. V.G.	0 1	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1
C.G.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
F.G.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Z.M.	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
V.G.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
S.G.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
C.G.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
G.R.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
A.M.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
C.L.	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5ª D										
G.P.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A.G. G.M.	0 0	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0	0 1
I.I.	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
O.G.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
C.G.	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
D.E.	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
A.M.A.	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
C.A.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1

S.L.	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
S.E.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
L.I.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
M.A.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
S.L.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
F.E.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5ª E										
Z.V.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
A.G.	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
M.M.C.	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
C.I.A.	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
B.C.	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
C.M.	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0

LEGENDA:

- 1: presenza del comportamento;
- 0: assenza del comportamento;
- lettere maiuscole: nomi alunni;
- E_1: L’alunno commette errori di calcolo dovuti a distrazione;
- E_2: L’alunno commette errori di calcolo dovuti a lacune di base (relative alle quattro operazioni e/o alle operazioni con i numeri decimali);
- E_3: L’alunno considera il risultato ottenuto dalla riduzione ad unità come il costo di 5 dizionari;
- E_4: L’alunno confonde il costo di nove dizionari con il costo unitario;
- E_5: L’alunno trascrivendo i dati con scarsa attenzione considera la seconda domanda identica alla prima e non vi risponde;
- E_6: L’alunno risolve il problema senza riflettere su di esso, servendosi dei dati forniti dal testo per compiere operazioni dettate dal caso;
- E_7: L’alunno, interpretando erroneamente il problema, considera 450,00 € come il costo di 5 dizionari;
- E_8: L’alunno non risponde correttamente alla seconda domanda perché distraendosi confonde il costo unitario con il costo di nove dizionari, quindi addizionando al costo di 5 dizionari il costo unitario non perviene alla spesa complessiva;
- E_9: L’alunno confonde il numero dei dizionari con il loro valore economico;

- E_{10}: L'alunno attribuisce ad un risultato significati diversi a seconda delle operazioni che svolge;
- E_{11}: L'alunno si avvale del procedimento adottato da un compagno, ma nel trascriverlo commette errori;
- E_{12}: L'alunno fa uso di termini e/o di espressioni impropri;
- E_{13}: L'alunno ritiene che ad ogni domanda debba corrispondere l'esecuzione di una sola operazione.

TABELLA RIASSUNTIVA DEGLI ERRORI COMMESSI DALLE CLASSI QUINTE

	ERRORI ATTESI E RILEVATI													
CLASSI	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	TOT
5^a A	2	8	1	15	0	1	0	0	5	8	1	0	2	43
5^a B	3	8	2	3	0	1	0	0	4	2	2	2	5	32
5^a C	2	7	6	1	0	0	0	0	2	0	0	4	14	36
5^a D	1	9	3	2	0	0	0	1	0	0	2	0	8	26
5^a E	0	2	2	0	0	0	0	0	3	0	2	0	3	12
TOT	8	34	14	21	0	2	0	1	14	10	7	6	32	149

PERCENTUALI DEGLI ERRORI A CONFRONTO

	CLASSI				
ERRORI ATTESI E RILEVATI	5^a A	5^a B	5^a C	5^a D	5^a E
E_1	9,52%	14,28%	8,69%	5,26%	-
E_2	38%	38%	30,43	47,36%	22, 2%
E_3	4,76%	9,52%	26%	15,78%	22,2%
E_4	71,42%	14,28%	4,34%	10,52%	-
E_5	-	-	-	-	-
E_6	4,76%	4,76%	-	-	-
E_7	-	-	-	-	-
E_8	-	-	-	5,26%	-
E_9	23,80%	19%	8,69%	-	33,3%
E_{10}	38%	9,52%	-	-	-
E_{11}	4,76%	9,52%	-	10,52%	22, 2%
E_{12}	-	9,52%	17,39%	17,39%	-
E_{13}	9,52%	23,80%	60,86%	42,10%	33,3%

LEGENDA DEGLI ERRORI:

- E_1: L'alunno commette errori di calcolo dovuti a distrazione;
- E_2: L'alunno commette errori di calcolo dovuti a lacune di base (relative alle quattro operazioni e/o alle operazioni con i numeri decimali);

- E_3: L’alunno considera il risultato ottenuto dalla riduzione ad unità come il costo di 5 dizionari;
- E_4: L’alunno confonde il costo di nove dizionari con il costo unitario;
- E_5: L’alunno trascrivendo i dati con scarsa attenzione considera la seconda domanda identica alla prima e non vi risponde;
- E_6: L’alunno risolve il problema senza riflettere su di esso, servendosi dei dati forniti dal testo per compiere operazioni dettate dal caso;
- E_7: L’alunno, interpretando erroneamente il problema, considera 450,00 € come il costo di 5 dizionari;
- E_8: L’alunno non risponde correttamente alla seconda domanda perché distraendosi confonde il costo unitario con il costo di nove dizionari, quindi addizionando al costo di 5 dizionari il costo unitario non perviene alla spesa complessiva;
- E_9: L’alunno confonde il numero dei dizionari con il loro valore economico;
- E_{10}: L’alunno attribuisce ad un risultato significati diversi a seconda delle operazioni che svolge;
- E_{11}: L’alunno si avvale del procedimento adottato da un compagno, ma nel trascriverlo commette errori;
- E_{12}: L’alunno fa uso di termini e/o di espressioni impropri;
- E_{13}: L’alunno ritiene che ad ogni domanda debba corrispondere l’esecuzione di una sola operazione.

I 13 errori contemplati sono l’insieme degli errori attesi e di quelli rilevati. Più precisamente: i primi otto errori sono quelli ipotizzati, i successivi 5 sono quelli non previsti.

Dalla tabella riassuntiva degli errori commessi dalle quinte classi si evince che l’E_5 e l’E_7 non si sono verificati.

Prendendo in esame la griglia della 5ª A relativa agli errori sono stati questi i dati più evidenti:

- Il 71% circa della classe incorre nell’E_4;
- Il 38% circa della classe commette l’E_2;
- La stessa percentuale compie l’E_{10};
- L’E_9 è comune al 24% circa della classe;
- Solo il 13% circa della classe compie l’E_{13};
- Nessun alunno compie l’E_8 e l’E_{12}.

Dalla griglia della 5ª B sono emersi i seguenti dati:

- Il 38% circa della classe compie l’E_2;
- Quasi un quarto della classe incorre nell’E_{13};
- Solo il 14% circa della classe compie l’E_4;
- L’E_9 è commesso dal 19% circa della classe;
- Il 10% della classe compie l’E_{10} e l’E_{12};
- Nessun alunno commette l’E_8.

La griglia della 5ª C consente di cogliere maggiormente i seguenti dati:

- Più della metà della classe, all'incirca il 61%, incorre nell'E_{13};
- Il 17% circa della classe compie l'E_{12};
- Nessun alunno commette l'E_6, l'E_8, l'E_{10} e l'E_{11};
- La percentuale degli alunni che compiono l'E_9 è bassa: solo il 9% circa;
- Ancora più bassa è la percentuale degli alunni che incorrono nell'E_4, ossia il 4% circa.
- Più alta è la percentuale degli alunni relativa all'E_2 (30% circa) e all'E_3 (26% circa).

Dalla griglia della 5ª D sono emersi in maggior misura tali dati:

- Una percentuale abbastanza elevata di alunni, che si aggira intorno alla metà della classe (47% circa), compie l'E_2
- Percentuale non trascurabile appare quella relativa all'E_{13}, compiuto dal 42% circa della classe;
- Il 16% circa della classe commette l'E_3;
- Solo il 5% circa della classe compie l'E_8;
- Nessun alunno incorre negli E_6, E_9, E_{10}, E_{12}.

Osservando la griglia della 5ª E si notano i seguenti dati:

- Nessun alunno compie gli E_1, E_4, E_6, E_8, E_{10}, E_{12};
- Circa il 22% della classe compie l'E_2, l'E_3 e l'E_{11};
- Il 33% circa della classe incorre nell'E_9 e nell'E_{13}.

Dalla sinossi delle percentuali si rilevano i dati maggiormente evidenti:

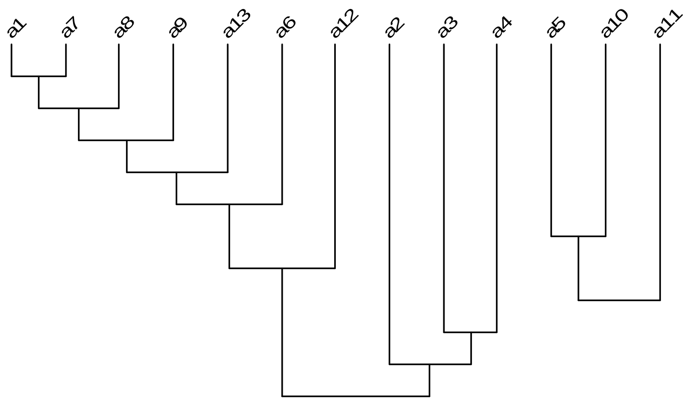
- Mentre in 5ª A il 71% circa degli alunni commette l'E_4, in 5C tale errore è comune solo al 4% circa degli alunni;
- Gli alunni della 5ª B sono quelli più distratti;
- La percentuale più alta dell'E_2 si riscontra presso la 5ª D;
- Solo in 5ª A e in 5ª B è commesso l'E_6, anche se con una percentuale relativamente bassa (4,76%);
- La 5ª A e la 5ª B sono le classi dove viene commesso l'E_{10}, con una percentuale più elevata, circa il 38%, in 5ª A;
- L'E_9 è maggiormente commesso in 5ª E, ma anche in 5ª A;
- La 5ª C e la 5ª D presentano percentuali elevate relativamente all'E_{13}, anche se le percentuali relative a tale errore non sono trascurabili nelle classi 5ª E e 5ª B.

PERCENTUALI DEGLI ERRORI RELATIVE A TUTTO IL CAMPIONE

	ERRORI ATTESI E RILEVATI													
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	TOT
TOT	8	34	14	21	-	2	-	1	14	10	7	6	32	149
%	5,37	22,82	9,39	14,10	-	1,34	-	0,67	9,39	6,71	4,70	4,03	21,48	100

In sintesi, facendo riferimento alle percentuali degli errori relative a tutto il campione, si può affermare che gli errori che maggiormente incidono sulla corretta risoluzione del problema sono quelli di calcolo dovuti a lacune di base (E_2) ed il ritenere che ad ogni domanda debba corrispondere l'esecuzione di una sola operazione (E_{13}). Un peso influente è esercitato inoltre dall'E_4, ossia dal confondere il costo di nove dizionari con il costo unitario; infine è necessario tenere nel dovuto conto anche l'E_3 (l'alunno considera il risultato ottenuto dalla riduzione ad unità come il costo di 5 dizionari) e l'E_9 (l'alunno confonde il numero dei dizionari con il loro valore economico).

2.6. ANALISI DELLE SIMILARITA' – ANALISI IMPLICATIVA
2.6.1. GRAFICO DELLE SIMILARITA' RELATIVO AI COMPORTAMENTI DEGLI ALUNNI IN MERITO ALLA RISOLUZIONE DEL PROBLEMA

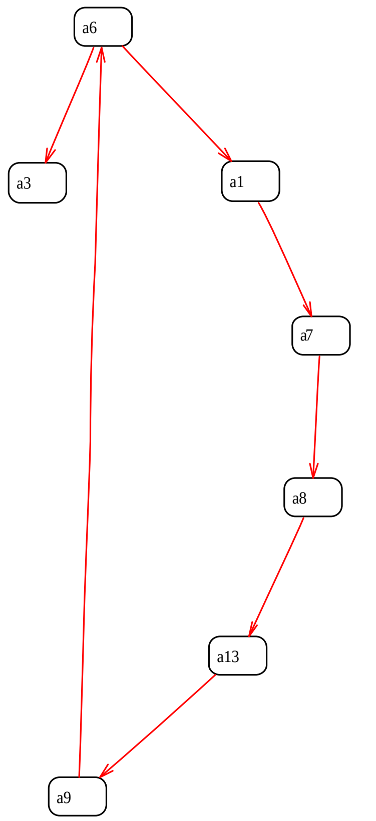


Albero delle similarità : A:\ferdico_dati1.csv

I raggruppamenti di variabili che sono stati evidenti sono tre:
R_1 = (a1, a7, a8, a9, a13, a6, a12), R_2 = (a2, a3, a4), R_3 = (a5, a10, a11)
I comportamenti relativi ad R_1 riguardano la corretta interpretazione del testo, l'applicazione di una strategia corretta, il rispondere adeguatamente alla prima e alla seconda domanda, il rappresentare correttamente il diagramma, l'eseguire tre operazioni e il commentare quest'ultime.

I comportamenti relativi ad R_2 ineriscono alla corretta trascrizione dei dati forniti dal problema, al servirsi delle informazioni che si hanno a disposizione e all'applicare un procedimento
Infine, i comportamenti relativi ad R3 riguardano l'esecuzione di due operazioni, l'errare nei calcoli e la presenza di abrasioni nel protocollo.

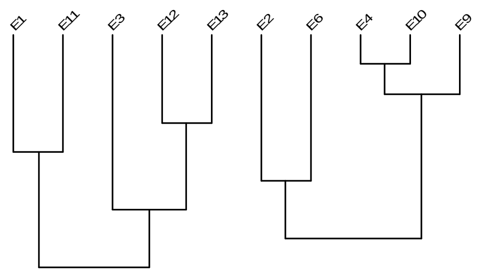
2.6.2. GRAFICO DELLE IMPLICAZIONI RELATIVO AI COMPORTAMENTI DEGLI ALUNNI IN MERITO ALLA RISOLUZIONE DEL PROBLEMA



Grafo implicativo : A:\ferdic99_c95.190.sv85

Dalla lettura del grafo si può facilmente notare che il comportamento a6 implica il comportamento a1 e a3 ed è implicato dal comportamento a9. Il comportamento a1 implica a7 che a sua volta implica a8, il quale ancora a9, che implica come detto a6. La voce a1, corretta interpretazione del testo dipende da diverse variabili, tra le quali lo svantaggio socio-culturale, la motivazione, l'autostima, le interferenze emotive e in generale, l’atteggiamento nei confronti della matematica. Diretta conseguenza della voce a1 sono le voci a7, a8, a13, a9. Dalla corretta trascrizione dei dati forniti dal testo dipende la possibilità di applicare una strategia corretta. Errare nei calcoli non vuol dire necessariamente non aver interpretato correttamente il problema. Allo stesso modo servirsi di tutti i dati forniti dal testo non implica unicamente l’applicazione di una strategia corretta. Le abrasioni possono essere indice di insicurezza, di autocorrezione, e/o di un procedimento per tentativi ed errori.

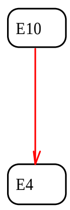
2.6.3. GRAFICO DELLE SIMILARITA' RELATIVO AGLI ERRORI



Albero delle similarità : A:\ferdico_errori1.csv

Il grafico evidenzia quattro raggruppamenti di variabili:
R_1 = (E1, E11), R_2 = (E3, E12, E13), R_3 = (E2, E6), R_4 = (E4, E10, E9).
Gli errori relativi ad R_1 riguardano la distrazione e l'adozione di un procedimento altrui trascritto però con errori.
Gli errori relativi ad R_2 ineriscono alla considerazione del risultato ottenuto dalla riduzione ad unità come costo di cinque dizionari, all'uso di termini e/o di espressioni impropri e alla convinzione che ad ogni domanda debba corrispondere l'esecuzione di una sola operazione.
Gli errori relativi ad R_3 si riferiscono alle lacune di base ed alla mancanza di riflessione nell'utilizzare i dati forniti dal testo.
Infine, gli errori relativi ad R_4 riguardano il confondere il costo di nove dizionari con il costo unitario, l'attribuire ad un risultato significati diversi a seconda dell'operazione che si svolge ed il confondere il numero dei dizionari con il loro valore economico.

2.6.4. GRAFICO DELLE IMPLICAZIONI RELATIVO AGLI ERRORI



Grafo implicativo 99 A 95 fe 90 ic 85 errori1.csv

Dal grafo delle implicazioni emerge che la variabile E10 implica fortemente l'errore E4. L'alunno che confonde il costo di nove dizionari con il costo unitario attribuisce ad un risultato significati diversi a seconda delle operazioni che svolge.

2.7. CONCLUSIONI RELATIVE AI DATI SPERIMENTALI DELLA PRIMA FASE

La constatazione che soltanto il 23,66% dell'intero campione adopera una strategia corretta non deve indurre a ritenere che solamente coloro che si sono serviti di una strategia corretta posseggono un pensiero di tipo pre-proporzionale. Infatti, se essa è vera, è anche vero che il 74,19% del campione non ha interpretato correttamente il testo e ciò invita a riflettere. Il testo somministrato si discosta dalle abitudini di lavoro degli alunni. Infatti i problemi che le maestre richiedono loro di risolvere non contengono più di due domande e per rispondere a ciascuna di esse è necessaria solamente una operazione. Dal colloquio con le insegnanti delle quinte è emerso inoltre che la maggior parte degli alunni si avvale di schemi di risoluzione agendo d'impulso piuttosto che sulla base di un'accurata riflessione. Durante la somministrazione ho potuto infatti notare che diversi alunni non si sono rifiutati di risolvere il problema proposto; tuttavia gli stessi, non riconoscendo in esso la richiesta di un automatismo familiare, hanno messo in atto una condotta che è comunque usuale nei confronti della matematica: partire dai dati, collegarli con qualche operazione e ottenere in ogni caso altri dati, come di solito deve avvenire per risolvere un problema di matematica. Ritengo che tale atteggiamento possa superarsi ponendo gli alunni in una situazione di apprendimento/insegnamento significativo, ossia una situazione di gioco sulla compravendita tale da consentirmi di verificare con maggiore obiettività l'esistenza del pensiero pre-proporzionale negli alunni di quinta elementare.

CAPITOLO III

LA VALENZA FORMATIVA DEL GIOCO

La letteratura sul gioco ci mostra che questo fenomeno è stato osservato e indagato a partire da diverse prospettive: storico-letteraria, socio-antropologica, psicoanalitica, pedagogica, linguistica, etologica, sperimentale e, più recentemente, clinica. Il gioco sembra attraversare longitudinalmente tutti questi campi, accomunandoli in una sovradimensione.

F. Froebel fu il primo pedagogista che tentò di utilizzare il gioco come metodologia educativa privilegiata in quanto elemento che mira a realizzare il rapporto Dio-Natura-Cultura. Il gioco, quindi, è da lui concepito come strumento spontaneo per entrare in rapporto con il mondo naturale e fisico, come impegno di relazionalità, finalizzata ad un più ampio significato, tra il bambino, i coetanei, gli adulti, le cose. Nell'"Educazione dell'uomo" così si esprime: "Il gioco è la manifestazione più pura e spirituale e insieme l'immagine e il modello della complessiva vita umana, dell'intima, segreta vita naturale nell'uomo e in tutte le cose. Esso procura quindi gioia, libertà, contentezza, tranquillità in sé e fuori di sé, pace con il mondo.[6]"

Per le sorelle Rosa e Carolina Agazzi l'aspetto ludico assunse sostanzialmente il carattere di dimensione naturale della quotidianità delle esperienze del bambino, di concretezza dell'esperienza diretta quale mezzo di comunicazione ed espressione. Il "museo delle cianfrusaglie" sintetizza questo concetto consegnandoci gli elementi per comprendere l'importanza della cultura non formale e informale, dell'attenzione agli aspetti semplici, poveri, banali. Rosa Agazzi, inoltre, sottolinea l'importanza del gioco in quanto l'ora del gioco essendo "rivelatrice fedele di ogni atteggiamento dell'anima[7]" ci fornisce utili informazioni sulla personalità del bambino.

Nella Montessori il rapporto gioco-educazione è molto esplicito: i materiali da costruzione hanno una finalità pragmatica e sperimentale, sono una precisa occasione di apprendimento. In particolare, è dall'esperienza sensoriale-motoria che si struttura la conoscenza in quanto una ricca esperienza sensoriale, ordinata e classificata, prepara le condizioni per l'astrazione e la decodificazione intellettuale del mondo.

Infine, anche Visalberghi sottolinea la dimensione conoscitiva del gioco considerato presa di contatto col mondo esterno e celebrazione di ogni conoscenza.

Anche la psicologia tende a sottolineare la dimensione conoscitiva del gioco. J. Piaget parla di sviluppo progressivo della vicenda ludica del bambino: il gioco d'esercizio caratterizza il periodo senso-motorio e consiste nella ripetizione gratificante, funzionale all'adattamento, delle abilità via via acquisite; nel gioco simbolico, che accompagna la fascia 3-6 anni, il bambino tende a sospendere la realtà per ricrearla con altri significati; il gioco con regole, che permette di superare l'egocentrismo infantile sottomettendosi a regole condivise, interviene nella fase, intesa sul piano delle relazioni, delle operazioni concrete. Ne consegue un'idea di gioco come dominio sul mondo, come "assimilazione del reale all'io" e non "adattamento al reale".

Il rapporto, il piacere di sottostare alle regole e la rinuncia all'impulso immediato sono stati studiati anche da L. S. Vygotskij che ritiene siano questi elementi che sollecitano lo sviluppo cognitivo e sostengono l'area di sviluppo potenziale.

Una diversa prospettiva di studio è quella psicoanalitica. Essa considera il gioco come una funzione dell'Io che permette al bambino di controllare la propria fatica, di crescere sul piano affettivo. Infatti, secondo S. Freud il bambino può, giocando, sospendere temporaneamente la tirannia del reale per controllarla; ad esempio assumendo un ruolo attivo nella relazione, divenendo protagonista, mettendosi nei panni di qualcun altro… M. Klein ha interpretato il gioco alla luce del fatto che in esso emergono elementi della

---

[6] FROEBEL F (1967), *L'educazione dell'uomo ed altri scritti*, La Nuova Italia, Firenze, pp. 43-44

[7] AGAZZI R. (1932), *Guida per le educatrici dell'infanzia*, La Scuola, Brescia, 1961, p. 167.

vita interiore dell'individuo: in questo modo diventa il canale privilegiato di interpretazione dell'inconscio. Dall'approccio psicanalitico, nel suo complesso, emerge che "il gioco è uno spazio esclusivo del bambino, uno spazio di reinvenzione e di controllo della realtà: da questo punto di vista l'incapacità di giocare risulta sintomatica di una cattiva elaborazione della relazione con gli oggetti interni e le realtà.[8]"

Il riconoscimento dell'importanza delle attività ludiche nella formazione del bambino ed il relativo inserimento di queste nelle scuole italiane è avvenuto con estrema lentezza e non senza difficoltà. Le istituzioni scolastiche e governative sul finire dell'Ottocento estesero la scolarizzazione alle classi sociali meno abbienti e occupandosi dell'alfabetizzazione primaria degli alunni non presero in considerazione le attività ludiche.

Con i Programmi per la scuola elementare del 1955, D.P.R. 14-6-1955 n. 503, e gli Orientamenti per la scuola materna del 1958, D. P. R. 11-6-1958 n. 584, si fa strada una nuova concezione del gioco inteso come pratica che avvia al lavoro. Negli Orientamenti si sottolinea anche l'idea dell'utilità del gioco ai fini dei vari apprendimenti scolastici. "Sia nei Programmi del 1955 che negli Orientamenti del 1958 troviamo il gioco collegato a tre aspetti fondamentali (ma non esaustivi) dell'educazione: lo sviluppo fisico, lo sviluppo didattico, la formazione morale.[9]" Negli Orientamenti del 1969, D.P.R. 10-9-1969 n. 647, emerge un altro aspetto del gioco: la maturazione affettiva del bambino.

Nei Programmi Ministeriali del 1985 per la scuola elementare, D.P.R. 12-2-1985 n. 104, il gioco non compare in tutte le sue aree disciplinari, ma soltanto in quelle della lingua straniera, della matematica, dell'educazione al suono e alla musica e dell'educazione motoria. Le indicazioni dei Programmi suggeriscono molteplici possibilità di utilizzazione del gioco ai fini didattico-apprenditivi e formativi. La scelta di adeguate attività ludiche favorisce "operazioni mentali di vario tipo, quali ad esempio: simbolizzazione, classificazione, partizione, seriazione, quantificazione, generalizzazione, astrazione, istituzione di relazioni(temporali, spaziali, causali, ecc.)" E' possibile ad esempio acquisire i concetti di appartenenza, ordine, relazione, corrispondenza attraverso operazioni di raccolta, catalogazione, sistemazione di materiale ludico secondo un criterio non casuale; e ancora: "attraverso giochi di movimento, su schemi liberi o prestabiliti, con o senza attrezzi, in forma individuale o collettiva, si favorisce nel fanciullo l'acquisizione di concetti relativi allo spazio e all'orientamento… e di concetti relativi al tempo e alle strutture ritmiche". Infine, in situazioni ludiche intelligentemente pilotate dall'insegnante, possono nascere problemi da risolvere, occasioni di numerazione e di conteggio, di ricerca e individuazione di più efficaci strategie, ad esempio per sveltire il calcolo, per accelerare la

[8] MASSA R. (1991), *Istituzioni di pedagogia e scienze dell'educazione*, Bari, La Terza, p. 535.

[9] ROSA GRAZIA ROMANO, (2000), *L'arte di giocare*, Pensa Multimedia, Lecce, p.33.

costruzione di un percorso, ecc. Nell'aritmetica la formazione delle abilità di calcolo è fondata su modelli concreti e molte sono le attività suggerite in questo senso collegate a situazioni problematiche reali o che comunque possano destare l'interesse del bambino.
Tuttavia non è ancora chiaro se il gioco sia inteso come una maniera attraverso cui evitare la noia degli apprendimenti di tipo cognitivo, oppure una tecnica psico-pedagogica per far sperimentare ad allievo ed insegnante un modo diverso di fare scuola e di conoscere se stesso, l'altro, il mondo e il sapere.
Gli Orientamenti del 1991 per la scuola materna, D.M. 3-6-1991, attribuiscono all'attività ludica la sua funzione cognitiva, socializzante e creativa e la valorizzano in tutte le sue forme ed espressioni (giochi a contenuto motorio, liberi, di regole, di finzione, popolari e tradizionali, con materiali, simbolici, di gruppo e di squadra, collettivi, imitativi, programmati, musicali, ecc.) in quanto "risorsa di apprendimento e di relazioni" ed "ambito privilegiato in cui si sviluppa la capacità di trasformazione simbolica". Oggi nella scuola dell'infanzia il gioco è visto come mezzo che permette al bambino di conoscere la realtà, trasformandola, manipolandola e intervenendo su di essa secondo le sue esigenze, di realizzare le sue potenzialità e di rivelarsi a se stesso e agli altri. Nella scuola elementare, invece, al gioco è spesso attribuito un ruolo marginale; esso, infatti, il più delle volte è considerato in termini riduttivi, solo come momento di ricreazione, pausa, recupero di energie fisiche e psichiche dopo prolungati impegni di studio e di lavoro e pertanto relegato ai margini della giornata scolastica e confinato nella sfera del tempo libero. "A tutt'oggi, il gioco riveste spesso la funzione di premio, di ricompensa e di rinforzo di condotte positive venendo così implicitamente disconosciuto nel suo significato più autentico. Manca una cultura del gioco e una concezione del gioco come cultura; la scuola tende a perpetuare la separazione tra lavoro intellettuale e gioco.[10]"
La tendenza a giocare, presente sia nei bambini che negli adulti, è spesso stata sottovalutata e frustrata dalle persone "serie". Nella Scuola dell'Infanzia ed elementare, soprattutto, è importante che i bambini giochino.

Il gioco promuove lo sviluppo delle fondamentali capacità infantili: da quelle senso-motorie a quelle socio-affettive e cognitive. Esso, inoltre, da libero sfogo alla attività creativa e di imitazione del bambino. Egli, esplorando la realtà, inizia a "sperimentare" e a "progettare". Il gioco è occasione di socializzazione ed apprendimento che risponde ai bisogni dell'infanzia di: comunicare attraverso linguaggi verbali e non verbali; socializzare grazie ai repertori interazionali e culturali che caratterizzano le diverse forme di gruppo; esplorare per rispondere all'inesauribile rete dei perché; costruire e "fare da sé" con scelte autonome e libere decisioni. Il gioco costituisce la condizione sociale indispensabile allo sviluppo di sé e alla interiorizzazione

[10] ANGELO NOBILE (1994), *Gioco e infanzia*, La Scuola, Brescia, p.181.

delle abilità sociali, intese non solo come acquisizione delle regole e del limite, ma anche come capacità di dare e prendere, di sperimentare la tolleranza, di gestire processi di negoziazione e di mediazione reciproca. La vita relazionale, nella coppia, nel piccolo gruppo, nel gruppo più allargato, con o senza l'intervento dell'insegnante favorisce gli scambi e facilita il gioco simbolico e lo svolgimento di attività complesse. Il gioco è quindi anche la via più semplice per avviare il bambino alla concezione ed alla pratica della collaborazione. Importante è che il gioco risulti sempre piacevole e stimoli l'impegno. Sono quanto mai necessarie la presenza e l'attività organizzativa dell'educatore, affinchè il gioco raggiunga le sue finalità. Un primo atteggiamento indispensabile di colui che si accosta all'animazione è quello di esser disposto a mettersi in gioco e giocare con se stesso, a lasciarsi coinvolgere soprattutto nelle modifiche di atteggiamenti personali senza indossare maschere di alcun tipo. Sarà compito principale delle insegnanti inviare al bambino, che desidera giocare, pensare e mettersi alla prova, valide e concrete esperienze di apprendimento e di formazione personale e sociale. Occorre stimolare il desiderio di fare, di agire, presentando attività che mettano alla prova le capacità, provochino la creatività, risveglino la fantasia, che conducano il bambino a produrre qualcosa che le sue potenzialità stimolate siano in grado di esprimere. Le varie proposte dovranno tener conto dei diversi livelli di sviluppo, degli spazi, del tempo, dei materiali e del numero dei bambini. È importante che si instauri un buon rapporto , oltre che tra i bambini, anche tra gli insegnanti e gli alunni; tale rapporto richiede un'attenzione continua ai segnali inviati dai bambini stessi e la capacità di attuare forme flessibili, interattive e circolari di comunicazione. In questo contesto va tenuto presente che la dimensione affettiva rappresenta una componente essenziale dei processi di crescita anche sul piano cognitivo. Da quanto detto si evince l'importanza delle metodologie ludico-partecipanti, che intendono la dimensione ludica come mezzo che facilita la comprensione empatico-intuitiva di molte problematiche e che fa sì che gli apprendimenti abbiano il carattere della durata e della solidità. L'uso di tali metodologie a scuola presuppone un cambiamento del modo di pensare teorico e prassico degli educatori che si può attuare rivalutando il gioco anche nell'esperienza formativa dell'educatore. Oltre alle attività allegre e divertenti, anche gli esercizi più impegnativi sapranno destare interesse purchè presentati in veste piacevole, curiosa, originale. Utilizzare il gioco come strumento formativo non è facile. Ciò comporta la consapevolezza sia delle funzioni e delle opportunità che esso offre, sia delle modalità più adatte per renderlo efficace; ciò richiede, inoltre, agli educatori notevole fantasia e il continuo mettersi in gioco; questi dovranno scegliere gli strumenti adatti, adattarli o anche crearli di volta in volta su misura delle concrete situazioni del gruppo in cui operano. E' dunque indispensabile che gli educatori riscoprano il piacere di giocare e il potenziale educativo del gioco e del gruppo. E' possibile fare educazione e fare scuola in un modo nuovo e diverso, divertente ed efficace.

CAPITOLO IV
SECONDA FASE DEL LAVORO SPERIMENTALE

Dalle considerazioni effettuate sui dati rilevati dalla prima fase e dal riferimento agli autori che avvalorano la metodologia ludica in classe scaturisce la progettazione della seconda fase del lavoro sperimentale.

H: La situazione di gioco facilita la comprensione dei problemi sulla compravendita.

Da cui:

- L'impiego del pensiero pre-proporzionale è stimolato dalla concretezza della situazione di gioco;
- L'atteggiamento nei confronti della matematica muta sensibilmente in positivo.

4.1. IL GIOCO DELLA COMPRAVENDITA

PREMESSA

Uno degli errori più frequentemente commessi dagli insegnanti di matematica è quello di inculcare procedimenti di calcolo che obbediscono a regole in apparenza arbitrarie, conducendo gli alunni ad applicare una successione di operazioni senza averle sufficientemente interiorizzate, fatte proprie. L'apprendimento significativo del ragionamento proporzionale, così come di ogni altro concetto matematico, richiede una partecipazione attiva da parte del soggetto che apprende. Tale constatazione è in accordo con uno dei principi fondamentali del costruttivismo, che a partire da Piaget è stato preso in considerazione da diversi studiosi ed ha trovato il consenso da parte di numerosi teorici dell'educazione. La metodologia ludica e la discussione di classe, adeguatamente coordinata dall'insegnante, possono rivelarsi modalità efficaci per la promozione del pensiero pre-proporzionale. Gli alunni, trovandosi all'interno di una situazione di gioco, possono esprimersi liberamente senza sentirsi esaminati, possono proporre strategie, confrontarsi e quindi costruire attivamente le loro conoscenze.

OBIETTIVI GENERALI

- Favorire la riflessione sulla compravendita ;
- Sollecitare gli alunni ad esplicitare i perché dei procedimenti adottati.

OBIETTIVI SPECIFICI

- Promuovere le potenzialità insite in ciascun bambino;
- Stimolare gli alunni nella produzione di risposte elaborate in maniera responsabile;
- Favorire l'integrazione di ogni bambino;
- Introdurre la regola del tre semplice;

- Spronare ciascun alunno a sostenere con fermezza la propria posizione;
- Avviare l’alunno a saper riconoscere e ad ammettere i propri errori;
- Stimolare ciascun alunno a fornire chiare delucidazioni ai compagni;
- Favorire la cooperazione;
- Avviare l’alunno a saper accettare una posizione in attrito con la sua qualora la prima si rivelasse più convincente/esaustiva.

IL GIOCO

Due giocatori debbono poter riuscire a completare il percorso risolvendo i quesiti delle carte gialle e delle carte verdi e cercando di vincere i giochi proposti nelle carte gialle.

Mentre nella seconda e nella terza fase del gioco, che verranno qui di seguito descritte, vince chi giunge per primo all’arrivo, alla fine della quarta fase, cioè al termine della situazione di gioco, vince il gruppo che si è aggiudicato più punti. Il punteggio finale di ciascuna squadra sarà ottenuto sommando rispettivamente i punti ottenuti da ciascun giocatore del gruppo A durante la seconda fase ai punti ottenuti dal gruppo A durante la terza e la quarta fase, e i punti ottenuti da ciascun giocatore del gruppo B durante la seconda fase ai punti ottenuti dal gruppo B durante la terza e la quarta fase.

Principali fasi del gioco

Fase 1: Spiegazione della procedura – consegna

Nella prima fase spiegherò le regole del gioco, successivamente mediante il lancio del dado che ogni giocatore avrà effettuato stabilirò chi avrà il diritto di dare inizio alla partita.

Le regole

La lettura delle regole potrà essere troppo dispersiva per alcuni, se non per tutti, gli alunni. Pertanto, affiggerò su una parete dell’aula, in posizione ben visibile ed accessibile, un cartellone con su scritte le regole. In tal modo a chiunque sarà possibile consultarlo ogniqualvolta lo ritenga indispensabile. Frattanto mi curerò di avviare opportunamente la situazione di gioco. Ecco le regole (game):

1. Occorre attendere silenziosamente il proprio turno pena l’interruzione o la sospensione definitiva del gioco, non si deve suggerire per alcun motivo al giocatore o al gruppo avversario;
2. Non si devono assumere atteggiamenti offensivi nei confronti dei compagni;
3. Si deve garantire a chiunque ne manifesti il desiderio la possibilità di comunicare al proprio gruppo i procedimenti ritenuti vincenti;
4. Ogni giocatore può prendere soltanto una carta dal mazzo giallo e soltanto una carta dal mazzo verde;
5. Nelle fasi n°2 e n°3 del gioco ad ogni risposta corretta ci si aggiudica un punto; nella fase n°4 ogni soluzione esposta e accettata dalla classe vale un punto, mentre per ogni soluzione di cui sia stato provato che è errata si attribuiscono tre punti.

Fase 2 : Gioco di uno contro uno – Situazione d'azione

Gli alunni giocano per gruppi di due, un compagno di banco contro l'altro, in modo da non creare eccessivo scompiglio. Distribuisco un percorso per ogni due giocatori. Ogni giocatore, seguendo le indicazioni del percorso, deve riuscire a portare all'arrivo la propria pedina prima del compagno di banco. Ogniqualvolta uno dei due giocatori si fermi su una casella che richiede di prendere una carta da uno dei due mazzi, dovrà eseguire quanto richiesto. Questi scriverà segretamente sul proprio foglio i passaggi compiuti per risolvere i quesiti e per accedere ai giochi.

Per conoscere l'esito delle risposte date ai quesiti/problemi, mi consulterà. Se l'esito sarà negativo il giocatore che ha pescato la carta rimarrà fermo per un turno, dando all'avversario la possibilità di tirare due volte consecutive il dado, salvo imprevisti (per esempio, il fermarsi su una casella che lo blocca per un turno oppure l'esito negativo ad un quesito). Ogni carta pescata viene eliminata dal mazzo. Si procede fino a quando uno dei due giocatori giunge all'arrivo.

Nel gioco di uno contro uno la situazione/milieu per ciascuno dei due giocatori è costituita dall'insieme delle procedure adottate e in particolare dall'ultima casella delle carte sulla quale è arrivata una delle due pedine. Le informazioni utili alla risoluzione dei problemi incontrati non gli proverranno dalle strategie utilizzate dall'avversario. E' possibile che chi vinca non abbia saputo rispondere correttamente ai quesiti : il risultato di alcuni di essi può essere stato ottenuto per caso, dettato dal tirare ad indovinare, oppure si può verificare che entrambi i giocatori non abbiano saputo risolvere i quesiti ma nonostante ciò siano andati avanti fino alla conclusione da parte di uno dei due del percorso a causa dell'esaurirsi delle carte o per scarso rispetto delle regole. In caso di risposta errata e/o subitanea i giocatori subiranno le regole del gioco. Alcuni, senza averne coscienza, si renderanno conto che rispondere a caso non è la migliore strategia e tenteranno ad ogni nuova occasione di applicare un procedimento che dia un risultato che consenta di proseguire il percorso. Altri, rendendosi conto della similarità di un problema rispetto ad un altro risolto precedentemente con esito positivo cercheranno di rispondere per analogia. Comunque in loro sarà stata risvegliata la motivazione ad apprendere per poter vincere, ciascun giocatore sarà motivato nel cercare di applicare procedimenti di calcolo corretti.

Fase 3 : Gioco di un gruppo contro un altro gruppo – Situazione di formulazione

La classe è divisa in due gruppi. I banchi, le sedie e tutto ciò che sta al centro dell'aula vengono situati vicino alle pareti in modo da occupare meno spazio possibile e da crearne abbastanza al centro della stanza per poter posizionare per terra il cartellone del percorso. Si scelgono due giocatori, uno per gruppo, che fungeranno da portavoce. Ad ogni casella in cui si richiede di prendere una carta, il portavoce che si trova su tale casella, consulterà la propria squadra e, insieme ad essa, scriverà su un foglio le operazioni da eseguire per la risoluzione del problema. Dopo che il portavoce mi avrà consegnato il foglio, confrontando le risposte date con la griglia delle risposte, ne comunicherò l'esito. Se l'esito del gruppo che ha preso la carta sarà negativo, tale gruppo rimarrà ferma per un turno, dando alla squadra avversaria la possibilità di tirare due volte consecutive il dado, salvo imprevisti (per esempio, il fermarsi su una casella che la blocca per un turno oppure l'esito negativo ad un quesito). Ogni carta pescata viene eliminata dal mazzo. Si procede fino a che una delle due pedine giunge all'arrivo.

Durante il gioco si verificano comportamenti diversi:

- Il portavoce gioca
- Il portavoce agisce;
- Il portavoce non gioca e controlla l'azione
- i giocatori di ciascuna squadra partecipano al gioco.

Per poter partecipare al gioco è necessario non solo che l'alunno abbia un modello implicito, ma che sappia esplicitare ai partner del gruppo il procedimento che intende proporre. Pertanto ogni giocatore è posto nella condizione di prendere coscienza delle strategie (operazioni) che egli utilizzerà. Il solo modo che egli ha per applicare ciò che desidera è quello di formulare una strategia (costituita da una successione di operazioni aritmetiche) e comunicarla ai componenti del proprio gruppo. A tale proposito il gioco prevede la dialettica della formulazione che consiste nella messa a punto di un linguaggio, da parte di ciascun alunno, comprensibile e consono agli oggetti e alle relazioni pertinenti la situazione. Tale linguaggio, repertorio di informazioni, sarà vagliato dal punto di vista della facilità della costruzione e della sua intellegibilità e, comunque, consentirà l'esplicitazione delle azioni e dei modelli d'azione. Inoltre, si hanno due tipi di retroazioni, la prima immediata quando si formula accertando se si è capiti dai propri compagni, la seconda relativamente all'ambiente se si vince o si perde.

Fase 4: Situazione di validazione – Il gioco della scoperta, prova e dimostrazione

Inviterò i portavoce a ritirare il problema che dovranno risolvereinsieme alla propria squadra e a consultarsi con essa per scrivere sulla lavagna e verbalizzare il procedimento ritenuto corretto al fine di risolvere il quesito della carta corrispondente, dandone contemporaneamente una spiegazione (delle prove che consentano di accettarne la validità). Quanto scritto da ciascun portavoce potrà essere accettato o rifiutato dalla squadra avversaria, sempre tramite il proprio portavoce, e, nel secondo caso sempre attraverso giustificazione del procedimento ritenuto corretto (coè attraverso la comunicazione intellegibile di operazioni che falsifichino quelle adottate dall'altro gruppo). Sarà accettata ogni soluzione (procedimento) di cui non sia stato possibile dimostrare che è errata. Per dare più interesse al gioco si introdurrà la seguente regola: ogni soluzione esposta e accettata dalla classe

vale 1 punto, per ogni soluzione di cui sia stato provato che è errata si attribuiscono 3 punti.
Insegnare matematica vuol dire anche inviare dei messaggi di matematica corretti e pertinenti. Ciò vuol dire utilizzare le matematiche per concordare o dissentire circa una proposizione, una strategia, un modello. Apprendere non significa accettare passivamente una verità perché trasmessa/propinata dall'adulto di riferimento. "La verità non è la conformità alle regole. Esige una adesione, una convinzione personale, una interiorizzazione". Inoltre, "una necessità della costruzione della conoscenza è lasciare liberi di sbagliare".

Situazione didattica della validazione

Il rapporto insegnante-alunno è asimmetrico, al contrario all'interno del gruppo gli alunni si trovano in una situazione di assoluta parità che consente la discussione, il rigetto di alcune strategie e la verifica, attraverso più prove, del loro discutere, in accordo con i principi del costruttivismo sociale, al fine di scegliere un procedimento sul quale tutti convengono.

Dialettica della validazione

La situazione didattica della validazione funge da stimolo alla discussione da parte degli alunni di una situazione e, motivandoli, innesca la formulazione delle loro validazioni implicite. Tuttavia spesso i ragionamenti degli alunni sono parzialmente corretti, in quanto accettano procedimenti insufficienti, false prove o risultati sbagliati. La situazione didattica deve portarli ad evolvere, a rivedere le loro operazioni, i loro passaggi, a sostituirle con altre che consentono di ottenere il risultato corretto. Questa evoluzione si basa sulla capacità dell'insegnante di saper accettare sufficientemente anche procedimenti inesatti dai quali partire per mostrare gli errori commessi dagli alunni. Tutto ciò sarà d'incentivo all'attenzione e alla motivazione: gli alunni parteciperanno attivamente al processo di insegnamento-apprendimento. Sul piano della motivazione, la possibilità di costruire risposte e giungere a soluzioni è ben più produttiva del trovarle già fatte, precostituite. Si tratta di un approccio alla matematica notevolmente diverso e più efficace.

Target/Campione

Venti bambini di classe quinta elementare.

Spazi

Aule delle classa quinta elementare coinvolta nella situazione di gioco.

Tempi

- Fase 1 : da 10 a 15 minuti;
- Fase 2 : da 20 a 30 minuti;
- Fase 3 . da 20 a 30 minuti;
- Fase 4 : si deve discutere per almeno 30 minuti.

Il tempo massimo sarà di 1 ora e 45 minuti.

Mezzi e strumenti

- 11 percorsi piccoli e 1 grande;
- 12dadi;
- 24 pedine;

- 12 mazzi di carte di colore giallo di piccole dimensioni;
- 12 mazzi di carte di colore verde di piccole dimensioni;
- cartellone delle regole;
- 4 cappelli;
- 1 sedia;
- 1 cestino;
- 1 vassoio;
- 6 palline da ping pong;
- un set di birilli;
- 3 bocce colorate;
- 5 bicchieri;
- nastro adesivo.

LE CARTE DA GIOCO

La scelta dei problemi da inserire all'interno del gioco è dipesa dalla necessità di avvicinare le situazioni problematiche proposte al bagaglio culturale dei bambini. In essi è presente una sola domanda e per risolvere correttamente i quesiti bisogna compiere due operazioni.

Carte del mazzo giallo

1. Puoi provare a giocare al "tiro dei cappelli" ma prima devi rispondere correttamente alla seguente domanda: se 6 cappelli costano 12,00 €, quanto costano 4 cappelli? Se giocando centrerai la sedia con tutti e 4 i cappelli ti aggiudicherai un punto.
2. Puoi provare a giocare al "gioco del cestino" ma prima devi rispondere correttamente alla seguente domanda: se 5 palline da ping pong costano 5,00 €, quanto costano 6 palline? Se riuscirai a far entrare dentro il secchiello tutte le palline da ping pong ti aggiudicherai un punto.
3. Per divertirti con i birilli devi rispondere correttamente alla seguente domanda: se 7 bocce costano 14,00 €, quanto costano 3 bocce? Se riuscirai a far cadere tutti i birilli tante volte quante sono le bocce che hai a disposizione ti aggiudicherai un punto.
4. Su di un vassoio sono riposti 5 bicchieri. Puoi provare a tirare 3 palline da ping pong dentro i bicchieri, ma per giocare prima devi rispondere correttamente alla seguente domanda: se 7 bicchieri costano 21,00 € quanto costano 5 bicchieri? Se darai la risposta corretta potrai giocare con le palline e per vincere dovrai farne entrare almeno 2 dentro i bicchieri. Se vinci, ti aggiudichi un punto.

Carte del mazzo verde

1. Giovanni spende 12,50 € per comprare 5 Chupa chup di Halloween.Quanto spenderà per comprarne 3?
2. La mamma di Paolo ha speso 16,00 € per acquistare 8 mazzetti di fiori. Quanto spenderà per comprarne 5?
3. Se la nonna di Alessandra spende 8,00 € per comprare 4 confezioni di palloncini, quanto spenderà per comprarne nove confezioni?

4. Lo zio di Gabriele spende 42,00 € per comprare 7 automobiline ai suoi nipoti. Quanto spenderà per comprarne altre 8?

IL PERCORSO

Si parte posizionando la propria pedina dentro la casella n. 1.

Le caselle n. 2, n. 6 e n. 11 richiedono al giocatore di fare un passo avanti.
Le caselle n. 3 e n. 7 recando la dicitura “prendi una carta gialla” invitano il bambino che dopo aver lanciato il dato vi è giunto con la propria pedina a pescare una carta dal mazzo giallo.

Le caselle n. 4 e n. 13 consentono al giocatore di far avanzare la propria pedina di tre caselle.
Le caselle n. 5, n. 10 e n. 15 indicano che il giocatore che vi si posiziona con la propria pedina non deve sostarvi ma spostarsi in avanti di altre due caselle.
Le caselle n. 8, n. 9, n. 12 e n. 16, invece, richiedono al giocatore di prendere una carta verde.
La casella n. 14 fa sostare il giocatore per un turno.
Al fine di poter controllare le mosse dei giocatori ho esaminato le loro possibilità di avanzamento mediante il lancio del dado ed ho elaborato tale schema:
<u>DALLA PARTENZA:</u>
1 — 3

2 —— 3
3 —— 7
4 —— 7
5 —— 7
6 —— 7

DALLA CASELLE N. 3:

1 —— 7 REGOLA: NON PRENDERE LA CARTA (vedi regola n. 5)
2 —— 7 REGOLA: NON PRENDERE LA CARTA (vedi regola n. 5)
3 —— 7 REGOLA: NON PRENDERE LA CARTA (vedi regola n. 5)
4 —— 7 REGOLA: NON PRENDERE LA CARTA (vedi regola n. 5)
5 —— 8
6 —— 9

DALLA CASELLA N. 7:

1 —— 8
2 —— 9
3 —— 12
4 —— 12
5 —— 12
6 —— 16

DALLA CASELLA N. 8:

1 —— 9 REGOLA: NON PRENDERE LA CARTA (vedi regola n. 5)
2 —— 12 REGOLA: NON PRENDERE LA CARTA (vedi regola n. 5)
3 —— 12 REGOLA: NON PRENDERE LA CARTA (vedi regola n. 5)
4 —— 12 REGOLA: NON PRENDERE LA CARTA (vedi regola n. 5)
5 —— 16 REGOLA: NON PRENDERE LA CARTA (vedi regola n. 5)
6 —— 14

DALLA CASELLA N. 9:

1 —— 12 REGOLA: NON PRENDERE LA CARTA (vedi regola n. 5)
2 —— 12 REGOLA: NON PRENDERE LA CARTA (vedi regola n. 5)
3 —— 12 REGOLA: NON PRENDERE LA CARTA (vedi regola n. 5)
4 —— 16 REGOLA: NON PRENDERE LA CARTA (vedi regola n. 5)
5 —— 14
6 —— ARRIVO

DALLA CASELLA N. 12:

1 —— 16 REGOLA: NON PRENDERE LA CARTA (vedi regola n. 5)
2 —— 14
3 —— ARRIVO
4 —— 16 REGOLA: NON PRENDERE LA CARTA (vedi regola n. 5)
5 —— ARRIVO
6 —— ARRIVO

DALLA CASELLA N. 14:

1 —— ARRIVO
2 —— 16 REGOLA: NON PRENDERE LA CARTA (vedi regola n. 5)
3 —— ARRIVO

4 —— ARRIVO
5 —— ARRIVO
6 —— ARRIVO
DALLA CASELLA N. 16:
1 —— ARRIVO
2 —— ARRIVO
3 —— ARRIVO
4 —— ARRIVO
5 —— ARRIVO
6 —— ARRIVO

Come si può notare, ho creato un percorso che conduce inevitabilmente ogni giocatore prima su di una delle caselle che richiedono di prendere una carta dal mazzo giallo e successivamente su di una delle caselle che invitano a prendere una carta dal mazzo verde. In tal modo potrò seguire meglio la situazione di gioco ed intervenire qualora sia necessario farlo.

4.2. ANALISI DEI DATI SPERIMENTALI
4.2.1. Gioco di uno contro uno
Analisi quantitativa e qualitativa

Analizzando i protocolli di ciascun bambino, ho cercato di ricostruire il percorso compiuto dalle undici coppie che hanno preso parte al gioco. Con "V" indico l'appartenenza alla squadra verde e con "G" l'appartenenza alla squadra gialla:

1ª COPPIA: Elena (V) contro Francesca (G):
Elena ha pescato la carta gialla n. 2. Ha compiuto tre tentativi per risolvere il quesito correttamente ma non vi è riuscita.
Francesca ha preso la carta gialla n. 4 ed ha risolto correttamente il problema, poi ha pescato la carta verde n. 2 ed ha risolto correttamente anche il secondo quesito. Infine non rispettando la regola n. 5 ha preso la carta gialla n. 3 ed ha risolto correttamente anche il problema di tale carta. Ho deciso di farla partecipare solo ad un gioco ed esattamente quello previsto dalla carta n. 3.

2ª COPPIA: Rosalia (V) contro Noemi (G)
Rosalia ha provato a risolvere il quesito della carta gialla n. 1 ma ha sbagliato in quanto ha effettuato una sottrazione. Anche per risolvere il problema della carta verde n. 3 si è servita di una sottrazione. Infrangendo la regola n. 5, inoltre, ha pescato un'altra carta verde ed ha adottato un ulteriore procedimento risolutivo errato.
Noemi per trovare la soluzione richiesta dalla carta gialla n. 3, dopo aver eseguito e cancellato diverse operazioni compie un'addizione e sbaglia. La carta verde da lei pescata è stata la n. 4 e per risolvere il relativo problema moltiplica sbagliando nuovamente. Giunge comunque per prima all'arrivo.

3ª COPPIA: Eleonora (V) contro Giuseppe (G)

Eleonora ha risolto correttamente i quesiti della carta gialla n. 2 e della carta verde n. 1. Ha raggiunto per prima il traguardo.
Giuseppe ha preso la carta gialla n. 1 ed ha risposto correttamente. Non è pervenuto, invece, al risultato giusto richiesto dalla carta verde n. 2 nonostante il procedimento adottato fosse corretto.
4ª COPPIA: Giorgio (V) contro Salvatore (G)
Giorgio ha risposto adeguatamente al quesito posto dalla carta gialla n. 3 e dalla carta verde n. 2. Inoltre ha vinto.
Salvatore per risolvere il problema della carta gialla n. 2 ha eseguito una sottrazione e poi un'addizione ed ha quindi sbagliato; il procedimento adottato per rispondere a quanto richiesto dalla carta verde n. 1 si avvicina a quello corretto, infatti l'alunno prima divide e poi moltiplica.
5ª COPPIA: Roberto (V) contro Salvatore (G)
Roberto ha risolto correttamente il quesito della carta gialla n. 3 e quello della carta verde n. 2.
Salvatore ha eseguito una sottrazione per risolvere il quesito della carta gialla n. 1; per la carta verde n. 3 ha sottinteso un passaggio ed è pervenuto al risultato corretto. E' giunto per primo all'arrivo.
6ª COPPIA: Maria Rita (V) contro Sonia (G)
Maria Rita ha adottato il procedimento corretto per rispondere a quanto richiesto dalla carta gialla n. 3 e dalla carta verde n. 2, ma durante la risoluzione del secondo quesito si è distratta e non è pervenuta al risultato giusto.
Sonia ha pescato la carta gialla n. 2 ma ha sbagliato procedimento. Poi ha preso la carta verde n. 4 e dopo aver cancellato una moltiplicazione ha iniziato la divisione ma non ha completato in tempo perché la compagna ha vinto.
7ª COPPIA: Gaspare (V) contro Maria (G)
Gaspare intuisce il primo passaggio e quindi procede direttamente con la seconda operazione rispondendo correttamente alla carta gialla n. 2; per la carta verde n. 4 compie entrambe le operazioni necessarie per approdare, come avviene in questo caso, alla risposta corretta. Vince.
Maria fornisce una risposta corretta relativamente alla carta gialla n. 1 mentre compie una moltiplicazione per rispondere al quesito della carta verde n. 3.
8ª COPPIA: Aurelia (V) contro Fabrizio (G)
Aurelia ha svolto correttamente le operazioni richieste dai quesiti della carta gialla n. 2 e dalla carta verde n. 2.
Fabrizio non ha risposto adeguatamente al problema contenuto nella carta gialla n. 1. Ha saputo, invece, rispondere a quello della carta verde n. 3. Ha anche pescato una seconda carta verde e percisamente la n. 4, infrangendo la regola n. 5, ed ha risolto correttamente anche il problemarelativo a tale carta ma poi lo ha cancellato. Ha vinto.
9ª COPPIA: Emanuele (V) contro Simone (G)

Emanuele ha preso la carta gialla n. 1 ed ha risposto correttamente. Poi ha svolto correttamente il quesito della carta verde n. 2 e, infrngendo la regola n. 5, della carta verde n. 3. Ha vinto.
Simone dopo diverse cancellature è approdato al procedimento corretto per risolvere il quesito della carta gialla n. 3.
10ª COPPIA: Samuele (V) contro Giusy (G)
I procedimenti adottati ed risultati ottenuti da Samuele rispetto ai problemi indicati dalle carte gialla n. 1 e verde n. 2 sono esatti. Proseguendo nel percorso, anche in seguito all'astensione dal percorso dell'avversaria, ha raggiunto l'arrivo.
Giusy dopo aver pescato la carta gialla ha strappato il foglio fornitole e non è più andata avanti nel gioco.
11ª COPPIA: Francesco (V) contro Nadia (G)
Francesco non ha risolto correttamente il problema della carta gialla n.1 ma ha adottato un procedimento per rispondere alla domanda della carta verde n. 2. Ha vinto.
Nadia non ha risolto corretamente il problema posto dalla carta gialla n. 3 e neanche quello della carta verde n. 1.
Sulla base di tale analisi e facendo riferimento alla variabile a_7 da me presa in considerazione per la tabulazione dei comportamenti degli alunni in merito alla risoluzione del problema somministrato durante la prima fase sperimentale ho potuto elaborare la seguente tabella relativa all'utilizzo di una strategia corretta:

CLASSE 5ª B	CARTE GIALLE a_7	CARTE VERDI a_7
1	0	0
2	1	1
3	0	0
4	0	0
5	1	1
6	1	0
7	1	1
8	0	0
9	1	1
10	0	1
11	1	0
12	0	0
13	1	1
14	1	0
15	1	1
16	0	1
17	1	1
18	1	0
19	1	1
20	0	0

21	0	1
22	0	0

Paragonando i risultati emersi dalla fase n. 2 del gioco della compravendita con quelli ottenuti dalla somministrazione del problema della prima fase sperimentale si evince che il 54% della classe ha adoperato una strategia risolutiva corretta per risolvere uno dei problemi proposti attraverso le carte gialle ed esattamente la metà della classe ha adottato una strategia corretta per far fronte alle domande delle carte verdi contro un 38% dello stesso campione riferentesi al problema della prima fase sperimentale. Tali dati confermano l'ipotesi secondo la quale l'impiego del pensiero pre-proporzionale è stimolato dalla concretezza della situazione di gioco. E' da sottolineare, inoltre, che i bambini che non sono pervenuti al risultato richiesto per accedere al gioco previsto dalla carta pescata sono tornati al loro posto per riflettere sugli errori commessi e per cercare di elaborare una strategia diversa ed efficace.

4.2.2 Gioco di un gruppo contro un altro gruppo

Analisi qualitativa

Per la ricostruzione di tale fase mi sono avvalsa sia dei protocolli sia delle registrazioni delle due squadre. Durante le consultazioni intragruppo, infatti, invitai i bambini ad accendere il registratore e fornii loro un foglio sul quale dover scrivere il procedimento risolutivo adottato dalla squadra al fine di rispondere ai problemi che il percorso avrebbe richiesto di affrontare.

La squadra verde diede inizio al gioco ed avendo pescato la carta gialla n.1 si riunì per risolvere il problema in essa contenuto e poter accedere al gioco.

La portavoce (Eleonora) lesse il testo: "*Puoi provare a giocare al "tiro dei cappelli" ma prima devi rispondere correttamente alla seguente domanda: se sei cappelli costano dodici euro, quanto costano quattro cappelli?*"

Aurelia intervenne istantanemente : "*E si fa dodici diviso sei*".

Gli altri bambini dissero "*si fa, si fa*".

Aurelia disse: "*No, no io lo so*".

La portavoce: " *Zitti, zitti, scccc, dai dai silenzio. E allora, due per sei dodici, due per quattro otto*".

Aurelia: "*Scrivi il problema che io lo so*"

La portavoce: "*E ora vediamo aspetta*"

Samuele: "*Ma se è dodici, dodici diviso sei devi fare*"

Diversi bambini dissero alla portavoce: "*dodici diviso sei* ".

La portavoce scrisse e tutti in coro le dissero: " *due, due*" e poi: "*dodici zero zero*".

Aurelia: "*Ok. Poi fai questi zeri*"

Samuele: "*si abbassano gli zeri*".

Un altro bambino: "*virgola!*"

Aurelia: "*ecco, brava!*"

La portavoce: "*Abbiamo finito.*"

Il gruppo “No, no”
La squadra si diresse verso la seconda operazione necessaria per giungere alla soluzione del quesito.
La portavoce: “*Non c’è bisogno di fare zero zero, fai due per quattro*”.
Il gruppo: “*no,no mettilo zero zero.*”
La portavoce:”*per quattro, uguale*”
Il gruppo: “*Giusto.*”
La portavoce: “*Allora, virgola due per quattro otto. Otto asino!*”
Infine il gruppo scrisse la risposta e mi consegnò il foglio; ebbe accesso al gioco previsto dalla carta gialla ma non vinse.
Fu il turno della squadra gialla che pescò la carta gialla n. 2 e si riunì per risolvere il relativo quesito.
Il portavoce(Fabrizio) lesse quanto era scritto sulla carta: “*Puoi provare a giocare al “gioco del cestino” ma prima devi rispondere correttamente alla seguente domanda: se cinque palline da ping pong costano cinque euro, quanto costano sei palline? Se riuscirai a far entrare dentro il cestino tutte le palline da ping pong ti aggiudicherai un punto.*”
Giuseppe: “*cinque palline.*”
Un altro bambino gli fece eco.
Il portavoce: “*Quanto costano? Aspè.*”
Giuseppe: “*Cinque euro.*”
Il potavoce chiese un po’ di silenzio per poter leggere la domanda: “*quanto costano sei palline?*” Egli cominciò in silenzio la divisione mentre gli altri compagni controllavano il procedimento, poi disse: “*per sei uguale sei.*”
Giuseppe: “*La risposta.*”
Il portavoce scrisse la risposta e la squadra gialla consegnò. Perse anch’essa al gioco previsto dalla carta gialla.
Il gioco proseguì con il lancio del dado da parte della squadra verde che giunse su di una casella che richiedeva di prendere una carta verde. La carta pescata fu la n. 2 e il gruppo si riunì, sempre munito di registratore carta e penna, per dare una risposta al problema.
La portavoce lesse: “*la mamma di Paolo ha speso sedici euro per acquistare otto mazzetti di fiori. Quanto spenderà per comprarne cinque?*”
Samuele: “*Silenzio.*”
Aurelia: “*l’ho fatto, allora fai sedici euro diviso otto.*”
Gli altri bambini:” *Diviso otto*.”
Aurelia: “*Due, zero, due euro, fa due euro come prima*”
La portavoce: “*Due euro per, per?*”
Aurelia: “*Per cinque, per cinque; dieci euro.*”
La portavoce: “*Si giusto dieci euro*”
Aurelia: “*La risposta, subito*”
La portavoce rilegge la domanda: “*Quanto spenderà per acquistarne cinque?*”
Un bambino:“*Per acquistarne cinque spende dieci euro*”

La portavoce: “*Per acquistarne cinque spende dieci euro”*
Samuele: “Cinque che cosa?”
Aurelia: “*Cinque mazzetti*”
La portavoce scrisse la risposta e mi consegnò il foglio.
Tirò il dado la squadra gialla e giunse anch’essa su una casella che richiedeva di prendere una carta verde. La squadra pescò la carta n. 3 ed iniziò a risolvere il quesito.
Giuseppe si rivolse al portavoce: “*Due euro per nove, dai*”
Un altro bambino: “*Uguale*”
Un altro bambino ancora: “*Diciotto*”
Ed altri bambini:”*Diciotto, la risposta!*”
Il portavoce si innervosì e gridò: “La risposta, vabbene?”
La squadra gialla si avvicinò a me con il foglio.
Il gioco continuò. La squadra verde lanciò il dado ma giunse sulla casella n. 14 che obbligava a rimanere fermi per un turno. La squadra gialla potè lanciare il dado e vinse.
Dalle sbobbinature delle registrazioni della squadra verde e dal confronto di queste con il foglio di cui la stessa si è servita per scrivere il procedimento risolutivo emerge una viva partecipazione da parte di tutti gli alunni e di alcuni in particolare tra cui il portavoce ed i bambini che avevano adottato la strategia corretta durante la precedente fase di gioco. Gli alunni che avevano compiuto errori nella seconda fase del gioco, essendone consapevoli, non propongono la loro strategia ma ascoltano con attenzione quella degli altri componenti del gruppo. All’interno della squadra, un alunno corregge la terminologia adottata dagli altri per esprimere il loro pensiero e ciascun bambino controlla le operazioni compiute e riportate sul foglio dal portavoce al fine di assicurarsi che la strategia messa in atto risulti corretta e completa.
Dall’analisi delle sbobbinature e del foglio utilizzato dalla squadra gialla si nota che un minor numero di bambini ha proposto strategie risolutive; due bambini, in maggior misura, si sono dedicati alla risoluzione del problema: il portavoce ed un bambino che, a differenza della prima fase sperimentale, si è mostrato particolarmente interessato alla risoluzione dei problemi.
Nel complesso, si può affermare che tale fase di gioco, consentendo agli alunni di discutere all’interno del gruppo, favorisce l’evoluzione cognitiva di coloro che hanno adottato una strategia errata.

4.2.3. Situazione di validazione
Analisi qualitativa

Il primo problema proposto fu quello relativo alla carta gialla n. 1: “Se sei cappelli costano 12,00 €, quanto costano quattro cappelli?”
Ciascuna squadra si riunì ed elaborò il procedimento risolutivo. Il registratore, mi consentì di annotare le loro conversazioni.

La portavoce della squadra verde cominciando disse: "*Allora, dodici diviso sei*"
Un bambino: "*due volte*"
La portavoce: "*Zero zero.*"
Giorgio: "*Quattro*."
Un altro bambino: "*La prova.*"
Aurelia: "*Non c'è bisogno della prova.*"
Un bambino: "*Spicciati*."
La portavoce: "*Due per quattro otto*"
Un altro bambino: "*Risposta*"
La portavoce scrisse velocemente e disse di aver finito.
Contemporaneamente alla squadra verde, la squadra gialla si cimentò nella risoluzione dello stesso problema:
Il portavoce: "*Due virgola zero zero, giusto?*"
Giuseppe: "*Boo!*"
Il portavoce: *Non lo so nemmeno io. Aspè. Il sei nel dodici due euro e due zero zero per quattro. Quattro per zero zero zero otto. Risposta. Dettami la domanda.*"
Giuseppe: "*Quanto costano quattro cappelli?*"
Il portavoce: "*Quattro cappelli costano due euro.*"
Un altro bambino: "*Se, due euro*"
Il portavoce: " *Otto euro*"
La squadra: "*Vai, vai, eeeee!*"
Giuseppe: "Abbiamo vinto."
Dopo aver preso visione dei protocolli delle due squadre, invitai i bambini a disporsi in modo tale da poter vedere la lavagna. Chiamai la portavoce della squadra verde e le chiesi di commentare ad alta voce i passaggi che aveva compiuto per risolvere il problema.
La portavoce: "*Allora. Se sei cappelli costano dodici euro quanto costano quattro cappelli? Prima devo vedere quanto costa un cappello. Sei nel dodici ci sta due volte. Zero zero zero zero. Due euro. Poi due euro che è il costo di un cappello per quattro euro che sono i cappelli che deve comprare. Quattro per zero zero, quattro per zero zero, quattro per due otto. Ho finito.*"
L'intera classe riconobbe che la bambina aveva esposto il procedimento adottato in maniera corretta.
Proposi di risolvere il quesito della carta verde n.1, e cioè: "Giovanni spende 12,50 € per comprare 5 chupa chups di Halloween. Quanto spenderà per comprerne tre?"
Le squadre si riunirono.
La squadra verde risolse correttamante il problema, infatti, ascoltando la registrazione ho potuto annotare i seguenti scambi conversazionali:
La portavoce: "*dodici e cinquanta diviso, non è diviso?*"
Aurelia: "*Si.*"
La portavoce: "*Dodici due volte, cinque volte.*"

Un bambino: "*La virgola.*"
La portavoce: "*cinque per cinque venticinque, zero zero zero. Poi, due e cinquanta per tre*"
Aurelia: "*Non qua.*"
La portavoce stava scrivendo il risultato sulla riga del tre.
La portavoce: "*No, no si si. Tre per zero zero, tre per cinque quindici, tre per due sei e uno sette.*"
Aurelia: "*Sette, sette.*"
La portavoce: "*Sette e cinquanta.*"
Aurelia: "*Giusto.*"
La portavoce "*Allora tre chupa chups costano euro sette e cinquanta.*"
La squadra: "*Abbiamo finito! Eeeeeeh!*"
La squadra gialla, che stava per portare a termine la risoluzione del problema, si rivolse in tal modo alla squadra verde: "*Voi avete iniziato prima.*"
Ma vediamo cosa avvenne all'interno della squadra durante lo svolgimento del problema proposto:
Giuseppe iniziò a leggere: "*Giovanni spende dodici euro e cinquanta per comprare cinque.*" Subito dopo disse al portavoce: "*Dodici euro e cinquanta, dai.*"
Il portavoce(Fabrizio): "*Dodici e cinquanta diviso cinque. Mmm!? Aspetta, la gomma. Aiutatemi.*"
Dopo alcuni istanti il portavoce continua: "*Due, sicuro.*"
Noemi: "*Se due, ma che sicuro!*"
Il portavoce: "*Il cinque nel tre. Tre per cinque quindici, no non ci entra, due, due per cinque dieci e porto due.*"
Giuseppe: "*Dai Fabrizio.*"
Il portavoce: "*Zero virgola quaranta?*"
Alcuni bambini: "*Si, dai risposta.*"
Altri bambini: "*No, il per, dai.*"
Giuseppe: "*Due virgola due.*"
Il portavoce: "*No.*"
Giuseppe, insistendo: "*Due virgola due perché hai detto che non ci entrava, dai.*"
Il portavoce: "*Due virgola due per*"
Giuseppe: "*Quaranta.*"
Il portavoce: "*No, per cinque uguale. Cinque per due dieci e porto uno, cinque per due dieci e uno.*"
Giuseppe: "*Abbiamo finito.*"
Il portavoce: "*No, aspetta.*"
Noemi: "*Mi, Maria!*"
Il portavoce non era convinto e moltiplicò due virgola venti per tre, quindi ad alta voce disse: "*Tre per zero zero, tre per due sei, tre per due sei.*"
Giuseppe: "*Seicentosessanta.*"
Il portavoce: "*Sei virgola sessanta; risposta.*"

Giuseppe: "*Dai, risposta, allora: -e legge la domanda- quanto spende per comprarne tre?*"
Un componente della squadra chiese di nascosto ad un componente della squadra avversaria se fosse giusto il risultato che aveva ottenuto la propria squadra ma l'avversario non rispose.
Giuseppe: "*Abbiamo finito.*"
Dalla lettura dei protocolli mi resi conto che la squadra gialla aveva commesso degli errori di calcolo. Decisi, pertanto, di chiamare il relativo portavoce alla lavagna.
Il portavoce lesse il testo: "*Giovanni spende 12,50 € per comprare 5 chupa chups di Halloween. Quanto spenderà per comprarne tre?*" Subito dopo disse: "*Prima dobbiamo vedere quanto costa uno.*"
Poiché il bambino stava procedendo sottovoce, lo invitai a parlare ad alta voce per spiegare a tutti i passaggi che stava compiendo.
Il portavoce: "*Una cifra al divisore e una cifra al dividendo. Siccome non ci entra prendiamo un'altra cifra. Due per cinque dieci e porto uno.*"
La classe: "*Errore, errore.*"
Eleonora: "*Ma perché gli hai messo sotto il cinque lo zero?*"
La classe protestò. Invitai il portavoce della squadra gialla a continuare.
Il portavoce: "*Cinque per cinque venticinque. No, uffa, mi è venuto diverso nel quaderno!*"
Chiesi il portavoce a spiegare ai compagni come stava lavorando sulla divisione.
La squadra avversaria: "*E spiega.*"
Aurelia: "*Tutte cose all'incontrario fa.*"
Il portavoce procedeva sottovoce e la classe sapeva che stava sbagliando, anche il suo compagno di squadra Giuseppe gli disse che aveva sbagliato, ma gli disse anche:"*Fabrì ricomincia, vedi se lo puoi fare giusto come questo foglio.*"
Il portavoce cancellò quanto scritto alla lavagna e ricominciò.
Invitai l'alunno a rileggere il testo del problema. Poi, mentre stava iniziando a scrivere gli chiesi: "*Cosa stai facendo?*"
Il portavoce rispose: "*Devo vedere quanto spende per comprare tre chupa chups. Il cinque nel dodici ci sta due volte, due per cinque dieci, cinque nel venticinque ci sta cinque volte e il resto è zero, no una volta in meno, quattro; quattro per cinque venti no non mi viene più!*"
Sospendendo momentaneamente la divisione in corso di svolgimento, gli chiesi di eseguire una divisione diversa e più complessa della precedente ed il bambino fu capace di portarla correttamente a termine. Compresi che il portavoce, preso dall'emozione si era confuso nella risoluzione della divisione richiesta dal problema: "il bambino si era perso in un bicchiere d'acqua." Lo rassicurai e lo invitai a prendersi tutto il tempo di cui aveva bisogno. Fabrizio si fermò a riflettere e per la terza volta iniziò la divisione. Fu la volta giusta perché gli tornò in mente che doveva sottrarre sotto il

dividendo: “*diviso cinque, cinque meno cinque zero, due meno due zero e abbasso lo zero, cinque nello zero zero volte, zero per cinque zero.*”
Successivamente si diresse verso la seconda operazione, così gli chiesi: “*Cosa stai facendo adesso?*”
Il portavoce rispose: “*Ora, questo qua è quanto costano tre. Tre per zero zero, tre per cinque quindici e porto uno, tre per due sei e uno sette.*”
Chiesi alla classe: “*Siete tutti convinti che è giusto?*”
La classe: “*No, l’uguale.*”
Il portavoce aggiunse il segno che aveva dimenticato.
Infine domandai: “*La squadra verde è convinta che la squadra gialla ha risolto correttamente il problema?*”
Eleonora: “*Si, però poco fa l’ha sbagliato tutto!*”
L’analisi delle registrazioni e dei protocolli di tale fase mi ha consentito di rilevare che gli alunni hanno proceduto celermente nella risoluzione dei problemi proposti come se dal tempo impiegato dipendesse la vittoria al gioco. Inoltre, mentre in relazione alla discussione del primo problema la squadra gialla non ha avuto nulla da confutare non si può dire lo stesso per il secondo problema. Quest’ultimo, infatti, ha suscitato le reazioni di entrambe le squadre; diversi alunni hanno fatto notare al portavoce della squadra gialla che stava eseguendo in maniera errata la divisione.

4.3. CONCLUSIONI RELATIVE AI DATI SPERIMENTALI DELLA SECONDA FASE

L’evoluzione che ho potuto riscontrare grazie all’osservazione della classe 5ª B durante le fasi del gioco della compravendita e, in separata sede, grazie all’analisi dei protocolli ed alla sbobbinatura delle registrazioni, mi induce ad affermare che l’ipotesi della seconda fase sperimentale è verificata: la situazione di gioco facilita la comprensione dei problemi sulla compravendita, stimola l’impiego del pensiero pre-proporzionale e muta sensibilmente in positivo l’atteggiamento degli alunni nei confronti della matematica.
Offrire agli alunni l’opportunità di mettere in gioco il proprio sapere, discutendo sulle strategie risolutive, anche quelle meno adeguate, in un clima di reciproca attenzione, provoca in molti di essi un cambiamento di atteggiamento generale verso la matematica. Si tratta, dunque, di una sfida cognitiva che l’insegnante può utilizzare nella sua classe, soprattutto per destabilizzare la convinzione che solo pochi riescono ad essere bravi in matematica.

CAPITOLO V
CONCLUSIONI GENERALI

A conclusione del lavoro sperimentale da me condotto sono pervenuta alle seguenti considerazioni:

- La prima fase, coinvolgendo 93 alunni di quinta elementare, mi ha portato alla rilevazione della presenza del pensiero pre-proporzionale in una percentuale ridotta rispetto alla numerosità del campione ma anche ad una accurata riflessione sui motivi di tale riscontro. Il testo somministrato prevedeva, nella sua formulazione, due domande ma le classi erano abituate a risolvere problemi con una sola richiesta. Diversi alunni hanno mostrato un atteggiamento superficiale rispetto alla risoluzione del problema.
- La seconda fase, che ha visto la partecipazione dei 22 alunni della classe 5ª B della scuola elementare statale "Montegrappa" di Palermo, si è sviluppata attraverso il coinvolgimento della classe medesima in una situazione di gioco e di apprendimento/insegnamento significativo sulla compravendita. L'applicazione di una strategia corretta da parte di almeno il 50% della classe rispetto al 38% relativo alla fase di somministrazione rafforza l'ipotesi dell'esistenza del pensiero pre-proporzionale nei bambini di quinta elementare e induce a considerare degne di attenzione le variazioni in positivo degli atteggiamenti assunti nei confronti della matematica. La situazione di gioco ha favorito la riflessione ed ha sollecitato la partecipazione di tutta la classe.

Da quanto detto si evince che i dati emersi dalla seconda fase sperimentale invitano ad adoperare in classe metodologie contemplanti la discussione e le attività ludico-partecipanti.

A tal punto mi chiedo se gli alunni di quinta elementare posti in una situazione di gioco che richieda di risolvere problemi del tre semplice inverso siano in grado di applicare una strategia corretta anche in relazione a tali problemi e se siano capaci di distinguere le situazioni di proporzionalità diretta da quelle di proporzionalità inversa e viceversa adottando di volta in volta il procedimento opportuno.

Tali quesiti rimangono come problemi aperti che propongo all'attenzione di coloro che volessero intraprendere una ricerca sul pensiero pre-proporzionale.

BIBLIOGRAFIA

- AGAZZI ROSA (1961), *Guida per le educatrici dell'infanzia*, La Scuola, Brescia;
- AJELLO MARILINA, GRILLO BRIGIDA (1999), *Il pensiero proporzionale: analisi di un lavoro sperimentale*, in Quaderni di Ricerca in Didattica, GRIM, n. 8, Palermo, pp. 61-89;
- AMMANNITI MASSIMO (2001), *Manuale di psicopatologia dell'infanzia*, Raffaello Cortina, Milano;
- BERTOLINI PIERO, CAVALLINI GRAZIANO (1977), *Metodologia e didattica*, Bruno Mondadori, Milano;
- EMMA CASTELNUOVO (1963), *Didattica della matematica*, La Nuova Italia, Firenze;
- FRABBONI FRANCO, PINTO MINERVA FRANCA.(1994), *Manuale di pedagogia generale*, Laterza & Figli Spa, Roma-Bari;
- FROEBEL FRIEDRICH (1967), *L'educazione dell'uomo ed altri scritti*, La Nuova Italia, Firenze;
- GENOVESI GIOVANNI (1998), *Storia della scuola in Italia dal Settecento a oggi*, Laterza & Figli Spa, Roma-Bari;
- GRAZZINI, HOFFMAN, STACCIOLI (1982), *Dentro il gioco*, La Nuova Italia, Firenze.
- LAENG MAURO (1994), *I nuovi programmi della scuola elementare*, Giunti& Lisciani, Firenze;
- MASSA R. (1991), *Istituzioni di pedagogia e scienze dell'educazione*, Bari, La Terza;
- MILLER PATRICHIA H. (1994), *Teorie dello sviluppo psicologico*, Il Mulino, Bologna;
- NOBILE ANGELO (1994), *Gioco e infanzia*, La Scuola, Brescia;
- PESCI ANGELA, (2002), *Lo sviluppo del pensiero proporzionale nella discussione di classe*, Il Battente, Bologna;
- PIAGET JEAN (2000), *Lo sviluppo mentale del bambino*, Einaudi spa, Torino;
- Quaderni di ricerca in didattica (2002), GRIM, supplemento al n. 10, Palermo;
- ROMANO ROSA GRAZIA (2000), *L'arte di giocare, Storia epistemologia e pedagogia del gioco*, Pensa Multimedia, Lecce;
- ROMANO ROSA GRAZIA (2000), *Il gioco come tecnica pedagogica di animazione*, Pensa Multimedia, Lecce;
- RUBAGOTTI GIUSEPPINA (1999), *Gli Orientamenti 1991 per la scuola materna*, Fabbri, Milano;
- SAVOJA GRABRIELLA (1999), *Dall'analisi a-priori di una situazione problema alla falsificabilità delle ipotesi: sul pensiero proporzionale*, in Quaderni di Ricerca in Didattica, GRIM, n. 8, Palermo, pp.111-132;
- SPAGNOLO FILIPPO (1998), *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria,* La Nuova Italia, Firenze;

- SPERANZA FRANCESCO Et Al. (1990), *Insegnare la matematica nella scuola elementare*, Zanichelli, Bologna;
- TASSI RENATO (1994), *Itinerari pedagogici, Dalla Riforma all'età del Positivismo*, Zanichelli, Bologna;
- VISALBERGHI ALDO (1988), *Insegnare ed apprendere*, La Nuova Italia, Firenze.

INDICE