

COMENIUS UNIVERSITY BRATISLAVA
FACULTY OF MATHEMATICS AND PHYSICS
DEPARTMENT OF DIDACTIC MATHEMATICS

IL CONCETTO DI VARIABILE NEL PASSAGGIO
DAL LINGUAGGIO ARITMETICO AL
LINGUAGGIO ALGEBRICO IN
CONTESTI SEMIOTICI DIVERSI

Tesi dottorale di

ELSA DEL PILAR MALISANI

SUPERVISORE: DR. FILIPPO SPAGNOLO

RINGRAZIAMENTI

Desidero esprimere il più sincero ringraziamento al mio Supervisore, Prof. Filippo Spagnolo, per la sua gran disponibilità, per il suo incondizionato supporto e per avermi incoraggiato e sollecitato a scrivere questa tesi.

Voglio anche ringraziare il Professor Ivan Trenčanský per la sua attenzione e per il supporto prezioso che mi ha dato durante la realizzazione del presente lavoro.

Desidero esprimere la mia gratitudine ai Professori Luis Radford, Vladislav Rosa, Jozef Fulier e Michaela Regecová per avere accettato l'incarico di "reporters".

Ringrazio a Nanette Sortino e Giulia Sarullo che mi hanno aiutato con la traduzione all'inglese, sforzandosi per capire il complesso problema della mia ricerca.

Tutta la mia gratitudine va a mio marito Andrés, a mio figlio Andrea e a mia figlia Carolina per la loro incomparabile pazienza e per avermi dato la forza per arrivare alla fine di questo importante viaggio. Un grazie particolare alla mia famiglia di origine, a loro devo quello che sono.

A tutti voi e a tante altre persone che non menziono per motivi di spazio, vi voglio dire: un affettuoso Grazie e che il Signore vi benedica!

INDICE

Introduzione	6
Storia dei lavori precedenti	6
Obiettivo della ricerca	8
Applicazioni	9
Struttura della tesi	9
Bibliografia	10
Capitolo 1. Evoluzione storica del linguaggio algebrico	12
1.1 Introduzione	12
1.2 Il simbolismo	13
1.3 Metodi di risoluzione di equazioni	18
1.3.1. Metodi di risoluzione delle equazioni di primo grado	18
1.3.1.1. Il procedimento geometrico di Euclide	18
1.3.1.2. I metodi della falsa posizione	18
1.3.1.2.1. Il metodo della semplice falsa posizione	19
1.3.1.2.2. Il metodo della doppia falsa pozione	20
1.3.1.3. La regula infusa	22
1.3.2. Metodi di risoluzione delle equazioni di secondo grado	24
1.3.2.1. Il procedimento geometrico di Euclide	24
1.3.2.2. Il procedimento di al-Khowârizmî	25
1.3.2.3. La geometria “taglia-incolla”	26
1.3.3. Metodi di risoluzione delle equazioni di terzo grado	27
1.3.3.1. Il procedimento di al-Khayyam	27
1.3.3.2. Il procedimento di al-Tusi	29
1.3.4 Metodi di risoluzione delle equazioni indeterminate	30
1.3.4.1 Il procedimento di Diofanto	30
1.3.4.2 Il metodo di polverizzazione	30
1.3.4.3 Il procedimento di Abu Kamil	32
1.3.5. I metodi europei fino al 500	32
1.3.6 Conclusioni sui metodi di risoluzione	34
1.4 I numeri negativi come ostacolo. Il campo numerico incompleto	36
1.5 Generalizzazione dei problemi	38
1.6 La variabile come “cosa che varia”	39

1.7 Conclusioni	41
Note	43
Bibliografia	45
Capitolo 2. Il quadrato magico. Un'esperienza sulla transizione tra il linguaggio aritmetico e il linguaggio algebrico	48
2.1. Introduzione	48
2.2. Ipotesi	50
2.3. Rapporti sperimentali per livello scolastico	50
2.3.1 Scuola Media	50
2.3.1.1 Situazione a-didattica e le sue fasi	50
2.3.1.2 L'analisi a-priori	51
2.3.1.3 Analisi quantitativa dei dati	52
2.3.1.4 Analisi qualitativa	54
2.3.1.5 Discussione dei risultati	56
2.3.2 Scuola Superiore	57
2.3.2.1 Situazione a-didattica e le sue fasi	57
2.3.2.2 Descrizione della fase di validazione	59
2.3.2.3 L'analisi a-priori	59
2.3.2.4 Analisi quantitativa dei dati	61
2.3.2.5 Analisi qualitativa	63
2.3.2.6 Discussione dei risultati	64
2.4 Conclusioni	65
Bibliografia	66
Appendice N° 1	68
Appendice N° 2	69
Appendice N° 3	70
Appendice N° 4	72
Appendice N° 5	74
Appendice N° 6	75

4.3.1.1	Tipi di linguaggio	118
4.3.1.2	Procedimento risolutivo	119
4.3.1.3	Commenti	119
4.3.2	Seconda coppia: Vita e Alessandra	120
4.3.2.1	Tipi di linguaggio	120
4.3.2.2	Procedimento risolutivo	120
4.3.2.3	Commenti	122
4.4	Analisi dei protocolli del secondo problema	124
4.4.1	Prima coppia: Serena e Graziela	124
4.4.1.1	Procedimento risolutivo	124
4.4.1.2	Commenti	125
4.4.2	Seconda coppia: Vita e Alessandra	125
4.4.2.1	Procedimento risolutivo	125
4.4.2.2	Commenti	127
4.5	Conclusioni finali	129
	Note	132
	Bibliografia	132
	Appendice N° 1	134
	Appendice N° 2	135
	Appendice N° 3	139
	Capitolo 5. Conclusioni finali	160
	Bibliografia	167

INTRODUZIONE

STORIA DEI LAVORI PRECEDENTI

L'obiettivo della ricerca sperimentale effettuata in Malisani (1990, 1992) era studiare la performance degli alunni di 14-15 anni nel compito di risoluzione di problemi algebrici e geometrici. Più specificatamente, volevamo conoscere come incidono i diversi tipi di struttura logica di un problema sulla performance risolutiva (tipi di soluzioni, passaggi dell'algoritmo risolutivo ed errori); e se si verifica che l'isomorfismo di strutture logiche nei contesti algebrico e geometrico non implica isomorfismo nella performance degli studenti.

I problemi appartenenti al contesto algebrico si riferiscono alla risoluzione di equazioni di primo grado ad un'incognita, del tipo: $y = k_1 \cdot (x - k_2)$ [1] per un determinato valore di x o di y , con k_1 e k_2 costanti positive e tale che $k_2 < x$. In questo tipo di equazione le variabili x e y e le costanti k_1 e k_2 rappresentano elementi qualsiasi, pertanto, hanno soltanto una *significatività formale*.

I problemi geometrici considerano, invece, l'applicazione del "teorema della somma degli angoli interni di un poligono convesso" che ha equazione: $s = 180^\circ \cdot (n - 2)$ [2], nella quale ogni variabile e ogni costante rappresentano oggetti geometrici determinati o relazioni tra questi oggetti. Così per esempio: s è la somma degli angoli interni di un poligono convesso, 180° è la somma degli angoli interni di un triangolo, n è il numero di lati di un poligono, $n - 2$ è il numero di triangoli che restano determinati nel poligono tracciando le diagonali da un vertice agli altri. In questo caso le variabili e le costanti hanno una *significatività geometrica*.

Osserviamo che le equazioni [1] e [2] sono isomorfe circa la loro struttura logica, perché fissata una variabile (per esempio: y e s) richiedono gli stessi passaggi per la loro risoluzione. Queste equazioni sono di tipo *aritmetico*, usando la terminologia di Gallardo e Rojano (1988), perché per risolverle si devono manipolare soltanto i valori numerici dell'equazione (azioni nell'ambito aritmetico) e non le quantità da trovare o incognite.

Dai risultati ottenuti si evince che la *significatività geometrica* di un problema:

- ∅ inciderebbe parzialmente sul conseguimento di risposte corrette, soltanto in quei problemi che presentano maggiore difficoltà logica (7 o più passaggi diversi).
- ∅ influisce positivamente sull'economia di passaggi nella risoluzione.
- ∅ incide sul numero e tipo di errori realizzati dagli alunni.

Quindi, il supporto intuitivo che i problemi geometrici offrono e una buona comprensione da parte degli alunni delle relazioni concettuali tra gli elementi che compongono l'equazione del teorema, favoriscono l'economia di passaggi nella risoluzione e diminuiscono il numero di errori, soprattutto gli errori di calcolo. In altre parole, non sempre l'economia di passaggi nella risoluzione implica maggiore quantità di errori, all'opposto di quello che abitualmente si suppone.

Le conclusioni formulate in quel momento affermavano che la risoluzione di problemi che comportano equazioni richiedono qualcosa in più del dominio di certe operazioni (aritmetiche ed algebriche); i soggetti devono avere le conoscenze concettuali necessarie per comprendere e rappresentare l'informazione del problema in un modo conveniente.

L'individuazione e la diagnosi degli errori effettuata in Malisani (1990, 1992) ci hanno portato ad approfondire i principali lavori di ricerca realizzati in questi ultimi decenni sui processi cognitivi connessi all'apprendimento dell'algebra (Matz, 1982; Kieran & Filloy, 1989; Kieran, 1991; Gallardo & Rojano, 1988; Lee & Wheeler, 1989; Chiappini e Lemut, 1991; Herscovics & Linchevski, 1991). Tali studi trattano argomenti riguardanti le difficoltà ed ostacoli che incontrano gli alunni che iniziano lo studio dell'algebra, relativi ai cambiamenti concettuali necessari nella transizione dal pensiero aritmetico al pensiero algebrico. Questi cambiamenti si riferiscono specialmente al concetto di uguaglianza, alle convenzioni di notazione e all'interpretazione del concetto di variabile. Abbiamo anche esaminato i risultati di alcune ricerche sull'interpretazione e semplificazione di espressioni algebriche e sulla risoluzione di equazioni e di problemi algebrici (Malisani, 1993).

Successivamente abbiamo realizzato una ricerca sull'individuazione, diagnosi e classificazione di errori nella risoluzione di problemi algebrici e geometrici che coinvolgono equazioni aritmetiche di primo grado (Malisani, 1993). Anche se i problemi algebrici e geometrici sono a due a due isomorfi in quanto il loro procedimento risolutivo, i risultati ottenuti indicano che gli alunni non eseguono gli stessi tipi di errori. Così per esempio, le percentuali di errori relativi all'uso del segno uguale e al trasporto di termini da un membro all'altro dell'equazione sono minori nel contesto geometrico. La percentuale di errori riguardanti alla formulazione di una risposta conforme al significato delle variabili che rappresentano i risultati è minore, invece, nel contesto algebrico.

Diversi studi sperimentali (Harper, 1987; Sfard 1992) sembrano confermare che certe difficoltà degli alunni possono raggrupparsi attorno a certi ostacoli incontrati nella storia

(Cfr. Arzarello, pp. 7-8). Gli elementi che permettono di identificare questi ostacoli, si devono cercare nell'analisi delle resistenze emerse nello sviluppo storico e nei dibattiti che le hanno superate. Ma con la storia soltanto non è sufficiente, l'analisi storico epistemologico si deve completare da uno studio dei fondamenti della matematica (Spagnolo, 1995, pp. 18-19). Se si considera questo punto di vista, un tipo di storia che può essere utilizzato è la storia del pensiero algebrico che ci porta a ripercorrere la costruzione del linguaggio algebrico.

L'analisi storica effettuata in Malisani (1996, 1999) mostra che per molti secoli l'algebra è rimasta indietro rispetto alla geometria e che la costruzione del linguaggio simbolico è stata troppo lenta e difficoltosa. La mancanza di un linguaggio algebrico adeguato ha condizionato l'evoluzione dei procedimenti risolutivi. Spesso i matematici antichi spiegavano questi procedimenti attraverso la loro applicazione ad alcuni esempi. Utilizzavano altri linguaggi: naturale, aritmetico e geometrico.

OBIETTIVO DELLA RICERCA

Per approfondire le conclusioni espresse in precedenza si propone una nuova ricerca. Essa si fonda nella necessità di studiare ed analizzare gli ostacoli che gli alunni incontrano per costruire ed appropriarsi di certi concetti, nel passaggio tra il pensiero aritmetico ed il pensiero algebrico.

Da alcuni studi realizzati (Matz, 1982; Wagner, 1981, 1983) emerge che il punto di transizione critico tra i due tipi di pensiero è l'introduzione del concetto di variabile. Questa nozione può assumere una pluralità di concezioni: **generalizzatore** ($2+4 = 4+2$ viene generalizzato con $a+b = b+a$); **incognita** (risoluzione di equazioni); **“qualcosa che varia”** (relazione tra quantità, aspetto funzionale); **segno del tutto arbitrario** (studio delle strutture); **registro di memoria** (in informatica) (Usiskin, 1988).

Lo studio della diversità di aspetti che può assumere questo concetto costituisce un campo di ricerca molto vasto e richiede di diverse conferme, fornite da indagini storico-epistemologiche e sperimentali e dalla messa a punto di situazioni didattiche costruite *ad-hoc*. Quindi è necessario circoscrivere il dominio di studio.

L'obiettivo di questa ricerca è indagare alcune caratteristiche del periodo di transizione tra il linguaggio aritmetico e il linguaggio algebrico. Si pretende analizzare se le diverse concezioni di variabile vengono evocate dagli studenti nella risoluzione di problemi e se la nozione di variabile nel duplice aspetto: di incognita e relazionale-funzionale rappresenta un ostacolo per l'alunno.

APPLICAZIONI

Questa ricerca si pone come contributo alla Didattica della Matematica, in particolare, agli studi che si stanno realizzando all'interno del GRIM, sugli ostacoli epistemologici e didattici riguardanti il passaggio dal linguaggio aritmetico al linguaggio algebrico.

Questo studio sperimentale ci fornirà degli strumenti necessari per analizzare più dettagliatamente se il concetto di variabile, nei suoi diversi aspetti, rappresenta un ostacolo epistemologico o di origine didattica.

Potremmo anche determinare in quale modo il contesto semiotico influisce sulle concezioni della variabile dal punto di vista dell'alunno. Più specificatamente potremmo studiare l'interazione di altri contesti: linguaggio naturale, linguaggio geometrico, schemi percettivi, ecc. con l'operatoria degli alunni nell'ambito strettamente algebrico.

Inoltre sarà possibile trarre degli strumenti per la messa a punto di situazioni didattiche appropriate e per una più profonda comprensione dei processi comunicativi.

Da un punto di vista generale, questa ricerca può aiutare a chiarire questioni riguardanti le rappresentazioni della conoscenza aritmetica e algebrica e l'operatoria nella risoluzione di problemi dal punto di vista dell'alunno.

STRUTTURA DELLA TESI

La tesi è composta di cinque capitoli. Il primo sulla storia affronta la costruzione del linguaggio algebrico e l'evoluzione dei metodi e delle strategie di risoluzione di equazioni, nei periodi che precedono la formalizzazione.

Il secondo capitolo ha come finalità indagare certi aspetti del periodo di transizione tra il linguaggio aritmetico e il linguaggio algebrico. Si pretende analizzare se le diverse concezioni di variabile vengono evocate dagli alunni nella risoluzione di problemi e se la lingua naturale e/o il linguaggio aritmetico prevalgono come sistemi simbolici, in assenza di adeguata padronanza del linguaggio algebrico.

Il terzo capitolo si propone di studiare l'aspetto relazionale-funzionale della variabile nel problem-solving, considerando i contesti semiotici dell'algebra e della geometria analitica. L'obiettivo è indagare se la nozione di incognita interferisce con l'interpretazione dell'aspetto funzionale, e se i procedimenti in lingua naturale e/o il linguaggio aritmetico prevalgono come strategie risolutive in mancanza di un'adeguata conoscenza del linguaggio algebrico.

La finalità del quarto capitolo è analizzare come vengono attivate ed utilizzate le concezioni di incognita e di relazione-funzionale nel processo di risoluzione di una

situazione problematica. Si pretende studiare anche il processo di traduzione dal linguaggio algebrico a quello naturale e la rappresentazione del rapporto sintassi-semantica all'interno del codice algebrico.

Nel quinto capitolo si presentano le conclusioni finali della tesi.

BIBLIOGRAFIA

- ARZARELLO, F., BAZZINI, L. e CHIAPPINI, G., 1994. L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche. Progetto Strategico CNR - TID, Quaderno n. 6.
- CHIAPPINI, G. & LEMUT, E., 1991. Construction and interpretation of algebraic models. In F. Furinghetti (ed.), Vol. I, pp. 199-206.
- FURINGHETTI, F., 1991. *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. I, II & III. Università di Genova: Genova, Italia.
- GALLARDO, A. & ROJANO, T., 1988. Areas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches in Didactique des Mathématiques*, 9 (2), pp. 155-188.
- HARPER E., 1987. Ghosts of Diophantus, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18.
- HERSCOVICS, N. & LINCHEVSKY, L., 1991. Pre-algebraic thinking: range of equations and informal solution processes used by seventh graders prior to any instruction. *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. In F. Furinghetti (ed.), Vol. II, pp. 173-180.
- KIERAN, C. & FILLOY, E. 1989. El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), pp. 229-240.
- KIERAN, C., 1991. A procedural-structural perspective on algebra research. In F. Furinghetti (ed.), Vol. II, pp. 245-253.
- LEE, L. & WHEELER, D., 1989. The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematics*, 20, pp. 41-54.
- MALISANI, E., 1990. Incidencia de distintos tipos de estructura lógica de un problema sobre la conducta de resolución. *Revista IRICE del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación*, n. 1, Rosario - Argentina, pp. 41-59. ISSN on-line 1592-4424. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno3.htm>.
- MALISANI, E., 1992. Incidenza di diversi tipi di struttura logica di un problema sulla condotta di risoluzione. *Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.)*, n. 3, Palermo, Italia, pp. 65 - 86. ISSN on-line 1592-4424. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno3.htm>.
- MALISANI, E., 1993. *Individuazione e classificazione di errori nella risoluzione de problemi algebrici e geometrici*. Tesi di Laurea. Università degli Studi di Palermo, Italia.

- MALISANI, E., 1996. Storia del pensiero algebrico fino al cinquecento. Costruzione del simbolismo e risoluzione di equazioni. *Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.), n. 6*, Palermo, pp. 26 - 77. – ISSN on-line 1592-4424. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno6.htm>.
- MALISANI, E., 1999. Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico – Visión histórica. *Revista IRICE del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación, n. 13*, Rosario - Argentina, pp. 105-132. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno6.htm> - ISSN on-line 1592-4424.
- MATZ, M., 1982. Towards a Process Model for High School Algebra Errors. In D. Sleeman & J.S. Brown (Eds.), *Intelligent Tutoring Systems*. London: Academic Press.
- SFARD A., 1992. The development of algebra. Confronting historical and psychological perspectives. *Algebra Working Group, ICME 7*, Quebec.
- SPAGNOLO, F., 1995. Obstacles Epistémologiques: Le Postulat d'Eudoxe - Archimede. Tesi di Dottorato, Università di Bordeaux I. *Quaderni di Ricerca Didattica G.R.I.M., supplemento n. 5*. Pubblicata dall'Atelier National de Reproduction des Thésés Microfiches (BP - 38040 Grenoble. Cedex 9 - Francia).
- USISKIN, Z., 1988. Conceptions of school algebra and uses o variables. In Coxford A.F. e Shulte A.P. (eds.), *The ideas of Algebra, K-12.*, Reston Va: NCTM, pp. 8-19.
- WAGNER, S., 1981. An Analytical Framework for Mathematical Variables. *Proceedings of the Fifth PME Conference*, pp. 165-170. Grenoble, Francia,.
- WAGNER, S., 1983. What are These Things Called Variables? *Mathematics Teacher*, October, pp. 474-479.

CAPITOLO UNO:

EVOLUZIONE STORICA DEL LINGUAGGIO ALGEBRICO

1.1 INTRODUZIONE

Lo studio preliminare delle rappresentazioni epistemologiche e storico-epistemologiche risulta fondamentale per poter poi confrontarsi con la contingenza sperimentale. Perché più approfondita sarà questa analisi maggiore sarà la possibilità di poter argomentare il fenomeno di insegnamento/apprendimento e di poterlo riprodurre in altre condizioni analoghe (Spagnolo, 1998). Se si considera questo punto di vista, un tipo di storia che può essere utilizzato è la storia del pensiero algebrico che ci porta a ripercorrere la costruzione del linguaggio algebrico.

L'analisi storica mostra che per molti secoli l'algebra è rimasta indietro rispetto alla geometria e che la costruzione del linguaggio simbolico è stata troppo lenta e difficoltosa. E allora, in assenza di un linguaggio adeguato e di certe conoscenze sugli insiemi numerici, come si rappresentavano i diversi tipi di equazioni? Quali algoritmi di risoluzione si utilizzavano? Come influivano le conoscenze aritmetiche e geometriche sullo sviluppo del linguaggio algebrico e sulle tecniche risolutive? Come si sviluppa la concezione storica di equazione? In assenza di simbolismo o con un simbolismo molto rudimentale, era possibile classificare i problemi secondo gli algoritmi di risoluzione? Qual è l'origine delle nozioni di incognita e di variabile? Come si sviluppano questi concetti? In questa sede cercheremo di dare risposta ad alcune di queste domande.

Il pensiero algebrico è favorito dall'uso di un simbolismo adeguato e allora nella storia dell'algebra ha importanza non solo la storia dei concetti, ma anche quella dei sistemi di simboli usati per esprimere i medesimi (Arzarello *et al.*, pp. 10-11). Secondo Nesselman si possono individuare tre periodi distinti:

- 1- FASE RETORICA: anteriore a Diofanto di Alessandria (250 d.C.), nella quale si usa esclusivamente il linguaggio naturale, senza ricorrere ad alcun segno.
- 2- FASE SINOPATA: da Diofanto fino alla fine del XVI secolo, in cui si introducono alcune abbreviazioni per le incognite e le relazioni di uso più frequente, ma i calcoli sono eseguiti in linguaggio naturale.

3- FASE SIMBOLICA: introdotta da Viète (1540-1603), nella quale si usano le lettere per tutte le quantità e i segni per rappresentare le operazioni, si utilizza il linguaggio simbolico non solo per risolvere equazioni ma anche per provare regole generali.

Alcuni studi più recenti indicano che non è possibile individuare, nel percorso storico, in maniera precisa delle fasi distinte e separate che segnano lo sviluppo del pensiero algebrico. Ogni fase non ha certamente soppiantato di colpo la precedente; il passaggio è stato lento e graduale (Cfr. Malisani, 1996).

Secondo Ferreri e Spagnolo (pp. 90): “Lo studio delle concezioni storiche non è altro che lo studio dei significati legati ad un certo linguaggio in un determinato periodo storico. Un linguaggio nasce con ambiguità semantiche o anche ricchezza di significati all'interno della grammatica. Quando il linguaggio si formalizza si assegna un significato ad ogni formula e si perdono i significati precedenti”.

L'obiettivo di questo lavoro è studiare la costruzione del linguaggio algebrico con le sue ambiguità semantiche e la sua ricchezza di significati, in relazione all'evoluzione dei metodi e di strategie di risoluzione di equazioni nei due periodi storici che precedono la formalizzazione: retorico e sincopato. Perché è precisamente nella fase di transizione tra il pensiero aritmetico e il pensiero algebrico nella quale si trova il passaggio tra un campo semiotico significativo “*l'aritmetica*” e il tentativo di mettere a punto un nuovo linguaggio “*l'algebra*” relativo ad una certa classe di problemi “*risoluzione di equazioni*”. Gli ostacoli epistemologici sono legati proprio a questo passaggio (Spagnolo, 1995, pp. 81; Marino e Spagnolo, pp. 131).

Questo capitolo è diviso in cinque parti. Nella prima, si presenta la costruzione storica del linguaggio simbolico dell'algebra; nella seconda, si descrivono i principali metodi di risoluzione di equazioni utilizzati fino al 500; nella terza, si analizza l'incidenza di certi aspetti del linguaggio aritmetico nello sviluppo del linguaggio algebrico; nella quarta, si illustrano i diversi livelli di generalità dei metodi di risoluzione; e nella quinta, si mostra l'evoluzione storica del concetto di variabile.

1.2. IL SIMBOLISMO

L'analisi dello sviluppo storico dell'algebra mostra che la costruzione del linguaggio simbolico è troppo lenta e difficoltosa, si trovano periodi di miglioramento progressivo ed altri, invece, di regressione e di paralisi. Così per esempio, i babilonesi (≈2000 a.C.), gli egiziani (≈1700 a.C.), i greci (600-200 a.C.) e i cinesi (300 a.C.-300 d.C.)

utilizzavano esclusivamente il *linguaggio naturale*, senza ricorrere ad alcun segno. Si sono registrati tentativi isolati di introdurre qualche nome o abbreviazione per rappresentare l'incognita, ma queste prove non sono state effettuate in maniera sistematica ⁽¹⁾.

Diofanto (250 d.C.) introdusse per la prima volta nella Storia della Matematica delle *abbreviazioni* (lettere greche) per rappresentare l'incognita di un'equazione e le sue potenze (Cfr. Kline, pp. 162-163):

x	$\rightarrow \zeta$	chiamata	"il numero del problema o arithme"
x^2	$\rightarrow \Delta^r$		"quadrato" o "potenza"
x^3	$\rightarrow K^r$		"cubo"
x^4	$\rightarrow \Delta^r \Delta$		"quadrato-quadrato"
x^5	$\rightarrow \Delta K^r$		"quadrato-cubo"
x^6	$\rightarrow K^r K$		"cubo-cubo"
$1/x$	$\rightarrow \zeta^x$		

Diofanto indicava l'addizione scrivendo i termini l'uno di seguito all'altro, per la sottrazione usava il simbolo $/\backslash$ e per l'uguaglianza ι^σ , non vi erano simboli per rappresentare la moltiplicazione, la divisione e i coefficienti generici. Effettuava i calcoli in *linguaggio naturale* e scriveva le soluzioni in un testo continuo. E' interessante osservare che, Diofanto introduce un concetto importantissimo in Algebra: l'"arithme" o il numero del problema che rappresenta "una quantità indeterminata di unità", cioè l'incognita del problema (Ver Eecke, pp. 2; Radford, pp. 43).

A partire del VII secolo gli indiani crearono un simbolismo algebrico abbastanza efficiente che permise loro di sviluppare nuovi procedimenti di risoluzioni di equazioni. Brahmagupta (n. 598) nella sua opera *Brahmasputasiddhanta*, utilizza alcune *abbreviazioni* per rappresentare l'incognita e le sue potenze (Cfr. Bortolotti, 1950, pp. 637):

x	$\rightarrow ya$ [prima sillaba della parola <i>yavattavat</i> (<i>tanto-quanto</i>)]
x^2	$\rightarrow va$
x^3	$\rightarrow gha$
x^4	$\rightarrow vava$
x^9	$\rightarrow ghagha$
$x^{1/2}$	$\rightarrow ka$ [prima sillaba della parola <i>karana</i> (<i>radice quadrata</i>)]

Gli indiani non usavano nessun simbolo per indicare l'addizione e il prodotto (che era rappresentato scrivendo di seguito i due fattori); per la sottrazione, invece, utilizzavano un punto sopra il sottraendo e per l'uguaglianza di due quantità si limitavano a scrivere i

due membri in due righe consecutive. Quando in un problema figuravano parecchie incognite, una di loro era rappresentata con la sillaba *ya*, le altre con oggetti di diversi colori: praticamente usavano le prime sillabe delle parole riguardanti il rispettivo colore. Questo simbolismo, per quanto rudimentale, è sufficiente per classificare l'algebra indiana come "*quasi-simbolica*" e sicuramente in misura maggiore di quanto lo fosse l'algebra sincopata di Diofanto. I problemi e le soluzioni erano scritti in questo stile sincopato, ma i diversi passaggi non erano accompagnati con motivazioni o dimostrazioni.

Gli arabi (≈800-1300 d.C.), eredi delle opere greche e indiane, non usavano simboli. Alcuni autori come al-Khowârisimî (≈780-≈850) utilizzavano certi nomi particolari per rappresentare le incognite e le sue potenze, ma in generale essi svilupparono un'algebra integralmente retorica e questo rappresenta un passo indietro rispetto all'algebra diofantina e indiana.

Leonardo Pisano⁽²⁾ (≈.1170 - 1250), detto Fibonacci, introdusse in Europa il sistema di numerazione indo-arabico e i procedimenti aritmetici utilizzati dagli arabi e indiani. In questo modo le caratteristiche dell'algebra arabe si trasmisero in Europa e hanno esercitato una forte influenza per più di tre secoli. Nelle opere di Leonardo e nei trattati di abaco del Medioevo, per esempio nel *Trattato d'Algibra*⁽³⁾ (Anonimo del XIV secolo) si osserva che gli sviluppi algebrici utilizzano fondamentalmente il *linguaggio naturale*. E' importante sottolineare che nel *Trattato d'Algibra* si manifesta una certa tendenza verso il simbolismo perché l'incognita e le sue potenze vengono chiamate con dei nomi particolare:

x	<i>cosa (o chosa)</i>
x^2	<i>censo</i>
x^3	<i>chubo</i>
x^4	<i>censo di censo</i>
x^5	<i>chubo di censi</i>
x^6	<i>censo di chubo.</i>

Le *abbreviazioni* utilizzate nel XVI secolo derivarono precisamente da queste parole. Nell'opera di Pacioli (1445-1514?) si osservano progressi significativi in quanto all'utilizzazione del linguaggio sincopato. Questo autore esegue i calcoli in linguaggio naturale, ma rappresenta l'incognita e le sue potenze (fino alla ventisettesima), mediante nomi e abbreviazioni particolari, per esempio (Loria, pag. 476):

x	<i>cosa</i>	<i>co</i>	
x^2	<i>censo</i>	<i>ce</i> o <i>Z</i>	
x^3	<i>chubo</i>	<i>cu</i> o <i>C</i>	
x^4	<i>censo di censo</i>	<i>ce ce</i>	
x^5	<i>primo relato</i>	<i>p° r°</i>	ecc.

Pacioli usava anche altre *abbreviazioni* come *p* (per la somma), *m* (per la sottrazione o per indicare un numero negativo) e *ae* (per uguale: aequalis), R^2 e R^3 (attraversata da una sbarra obliqua) indicano le radici quadratiche e cubiche.

Bombelli (≈ 1526 - ≈ 1572) è responsabile di un'autentica trasformazione del linguaggio algebrico con l'introduzione di un simbolo speciale per rappresentare l'incognita e le sue potenze, una semicirconferenza sulla quale veniva scritto un numero che denota l'esponente della potenza (in questo articolo, per semplificare la notazione, la semicirconferenza verrà indicata con una circonferenza):

x	<i>tanto</i>	•	
x^2	<i>potenza</i>	,	
x^3	<i>cubo</i>	<i>f</i>	
x^4	<i>potenza di potenza</i>	"	
x^5	<i>primo relato</i>	...	e così via.

Questo rappresenta un'importante evoluzione del linguaggio simbolico, perché la maggiore parte dei cambiamenti di notazione effettuati fino a quel momento erano essenzialmente abbreviazioni del linguaggio naturale. Bombelli utilizza questo simbolismo "*Sincopato-Avanzato*", risultante da una combinazione tra *linguaggio naturale* e *simbolismo algebrico*, per formulare le regole delle operazioni numeriche e con i polinomi e i procedimenti di risoluzione di equazioni. Questo simbolismo coincide precisamente con l'algebra simbolica di Viète (1540-1603), la caratteristica di "*auto-spiegazione*"; nonostante Bombelli necessiti sempre accompagnare gli sviluppi realizzati dalla sua versione retorica e dimostri la validità delle uguaglianze espresse nei diversi tipi di equazioni mediante le costruzioni geometriche. Questo dimostra che il linguaggio sincopato avanzato utilizzato da Bombelli *non era autosufficiente*, perché bisogna ricorrere ad altri linguaggi, naturale e geometrico che sono semanticamente più ricchi, per completare la comunicazione (Colin e Rojano, pp. 141 - 142).

E' importante osservare che molti cambiamenti di notazione effettuati sino al 500 furono accidentali ed, è chiaro, che gli studiosi di questa epoca non erano in grado di apprezzare quello che il simbolismo poteva significare per l'algebra. Tra il 500 ed il 600

fu introdotta la maggior parte dei simboli conosciuti attualmente, ma il processo era molto lento, l'algebra simbolica non soppiantò di colpo quella sincopata.

Alcuni autori (Kline, pp. 303; Loria, pp. 468) ritengono che i tedeschi introdussero i segni $+$ e $-$ per denotare i pesi in eccesso o in difetto delle cassette, questi segni furono poi adottati dai matematici Widman (XV sec.) e Stifel (1486?-1567). Rapisardi (pp. 169), invece, attribuisce l'invenzione di questi segni a Leonardo da Vinci (1452-1519). Il segno $=$ fu introdotto nel 1557 da Recorde (1510-1558) che scrisse il primo trattato inglese di algebra. Viète (1540-1603), che all'inizio utilizzava la parola *aequalis*, poi adottò il simbolo \sim per indicare l'uguaglianza; Descartes (1596-1650), invece, usava α . Oughtred (1574-1660) inventò il segno \times del prodotto e Harriot (1560-1621) usò i segni $>$ e $<$ per denotare le disuguaglianze. Le parentesi tonde compaiono nel 1544, le parentesi quadre e graffe utilizzate da Viète risalgono al 1593 circa. La radice quadrata

$\sqrt{\quad}$ e la radice cubica $\sqrt[3]{c}$ appaiono nel XVII secolo con Descartes (Cfr. Kline, pag. 304).

Gli esponenti furono introdotti gradualmente. Chuquet (1445?-1500?) nella sua opera *Triparty* scriveva 8^3 , 10^5 , 12^0 e 7^1m per indicare $8x^3$, $10x^5$, 12 e $7x^{-1}$. Bombelli usava una semicirconferenza sulla quale scriveva l'esponente della potenza e Stevin (1548-1620) utilizzava anche gli esponenti frazionari: $1/2$ per la radice quadrata ed $1/3$ per la radice cubica.

Il cambiamento più significativo nella costruzione del linguaggio algebrico si produsse con il simbolismo di Viète. Questo autore fu il primo ad adottare deliberatamente e sistematicamente le lettere per rappresentare tutte le quantità (l'incognita, le sue potenze e i coefficienti generici). Di solito utilizzava le consonanti per i termini noti e le vocali per le incognite; impiegava il linguaggio simbolico per risolvere equazioni, ma anche per provare regole generali. Viète chiamava la sua algebra simbolica "*logistica speciosa*", in contrasto con la "*logistica numerosa*": considerava che l'algebra fosse un metodo per operare sulle specie o le forme delle cose; l'aritmetica, *la numerosa*, si occupasse invece dei numeri. In questo modo l'algebra diventò lo studio dei tipi generali di forme e di equazioni, perché quello che si applica al caso generale è valido in tutti gli infiniti casi particolari (Kline, pp. 305).

1.3. METODI DI RISOLUZIONE DI EQUAZIONI

L'obiettivo di questa sezione è presentare un'ampia varietà di metodi di risoluzione di equazioni e mostrare come influiscono le conoscenze aritmetiche e geometriche sull'evoluzione delle tecniche risolutive. I procedimenti sono stati raggruppati secondo il tipo di equazioni: primo, secondo e terzo grado ed equazioni indeterminate. Nella parte finale della sezione si descrivono in maniera sintetica i metodi utilizzati in Europa da Fibonacci, da un libro dell'abaco (rappresentativo dell'epoca medioevale e rinascimentale) chiamato *Il Trattato d'Algebra* e dagli algebristi del 500.

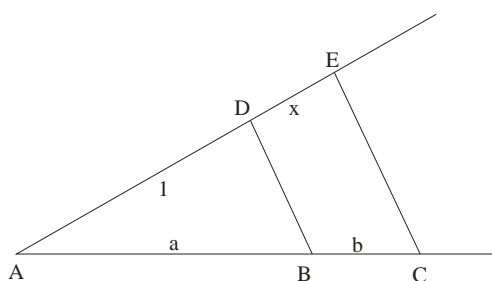
1.3.1 METODI DI RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

A continuazione presentiamo una descrizione del procedimento geometrico di Euclide, dei metodi della falsa posizione e della "regula infusa".

1.3.1.1 IL PROCEDIMENTO GEOMETRICO DI EUCLIDE

Gli "*Elementi*" di Euclide contengono alcuni risultati importanti dell'algebra moderna ma trattati geometricamente, per esempio: la risoluzione di equazioni di primo grado.

La proposizione 12 del Libro VI degli *Elementi* (1930, pp. 107) chiede di trovare il quarto proporzionale da tre segmenti dati.



$$AB : BC = AD : DE$$

Figura 1

L'applicazione di questa proposizione permette di risolvere "geometricamente" equazioni di primo grado del tipo $ax = b$ con coefficienti positivi, considerando come segmenti: $AB = a$, $BC = b$, $AD = 1$ e $DE = x$.

1.3.1.2 I METODI DELLA FALSA POSIZIONE

Durante il Medioevo questi procedimenti venivano chiamati con il nome di *regula alchataim* (parola di origine orientale) o *regula falsorum*. La loro origine è molto antica e si trova precisamente nei matematici egiziani e cinesi. Queste tecniche erano utilizzate spesso dagli indiani e dagli arabi nella risoluzione di problemi e apparvero nella

maggior parte dei testi di aritmetica dal Medioevo fino all'inizio della nostra era (Cfr. Guillemot, pp. 1).

I metodi della falsa posizione si applicavano per risolvere equazioni di primo grado ad un'incognita, ed in certi casi, sistemi di equazioni lineari ed equazioni di secondo grado. Ci sono due tipi di metodi: semplice falsa posizione e doppia falsa posizione.

1.3.1.2 .1 IL METODO DELLA SEMPLICE FALSA POSIZIONE

Questo procedimento consiste nell'assegnare *un valore particolare all'incognita* ed eseguire i calcoli necessari per ottenere il risultato esatto: da qui il nome di *semplice falsa posizione*. Questa regola si applicava per risolvere problemi lineari, pertanto nei calcoli si utilizzava fondamentalmente il concetto di proporzionalità diretta.

L'origine di questo metodo si trova nel papiro Rhind (1700 a.C. circa). Il suo autore, Ahmes, lo applica per risolvere una serie di problemi del tipo: $x + (1/n)x = b$, con n e b interi positivi ed $x \in E$, essendo E l'insieme numerico utilizzato dagli egiziani e composto dai numeri naturali non nulli, dalla frazione $2/3$ e dalle frazioni del tipo $1/n$ con n intero positivo ⁽⁴⁾.

Per esempio, il problema 24 del papiro chiede di "trovare una quantità che aumentata della sua settima parte sia uguale a 19". Il problema tradotto al linguaggio simbolico dell'algebra moderna corrisponde all'equazione: $x + (1/7)x = 19$. Ahmes lo risolve in questo modo:

- 1- Adotta la *falsa posizione* 7, cioè $x = 7$, e allora ottiene $7 + (1/7)7 = 8$ anziché 19.
- 2- Divide 19 per 8 e al risultato lo moltiplica per 7, cioè, applica la proporzionalità diretta: $19 : 8 = x : 7$ e ottiene come risultato $x = 16 + 1/2 + 1/8$ (Cfr. Guillemot, pp. 3).

La manipolazione delle frazioni dell'insieme E era abbastanza complessa per gli egiziani, quindi trattavano di evitarle eseguendo il minore numero possibile di calcoli. Precisamente il metodo della semplice falsa posizione applicato al problema precedente, permette di sostituire la divisione elementare di 19 per 8 a quella di 19 per $(1 + 1/7)$, assai difficoltosa utilizzando le regole egiziane. Inoltre in tutte le equazioni del tipo: $x + (1/n)x = b$, Ahmes sceglie la falsa posizione $x_0 = n$, così ottiene al primo membro un valore intero: $n + 1 = b_0$, poi effettua la divisione di b con b_0 e moltiplica il risultato per x_0 , cioè: $x = \frac{b}{b_0} \cdot x_0$. In questo modo l'autore sceglie di lavorare con i

numeri interi. Tutto ciò dimostra che le difficoltà trovate nell'effettuare i calcoli con le frazioni portarono gli antichi matematici a cercare dei metodi alternativi, mediante i quali potevano risolvere i problemi proposti più facilmente.

1.3.1.2.2 IL METODO DELLA DOPPIA FALSA POSIZIONE

Questo procedimento consiste nell'assegnare *due valori particolari all'incognita* (da qui il nome di *doppia falsa posizione*), eseguire i calcoli necessari per trovare gli errori commessi utilizzando questi valori e quindi applicare la formula di interpolazione lineare.

Gli autori medioevali non riescono a stabilire con precisione il campo di applicazione di ogni metodo della falsa posizione. Secondo Pellos (1492): “Con il metodo della doppia falsa posizione si possono risolvere problemi più sottili e più complessi, la loro soluzione senza questa regola rappresenta una gran fatica ...”. Spesso gli esempi proposti possono anche risolversi applicando il metodo della semplice falsa posizione. Da un'analisi accurata dei testi si determina che frequentemente *i problemi più sottili e più complessi* corrispondono alla risoluzione di: equazioni di primo grado in cui l'incognita si trova in entrambi i membri, sistemi di equazioni lineari ed equazioni di secondo grado (in modo approssimativo) (Guillemot, pp. 12 - 13).

Gli arabi Al-Qalasadi (1423–1494/5) e Beda Eddin (1547-1622) propongono problemi semplici che si potevano risolvere applicando questa regola. Così per esempio: “Trovare un numero che aumentato dei suoi $\frac{2}{3}$ e di 1 sia uguale a 10 ”. Algebricamente corrisponde all'equazione: $x + (\frac{2}{3})x + 1 = 10$ con $x \in \mathbb{Q}$, che l'autore risolve così:

- 1- Adotta la falsa posizione: $x_1 = 9$, allora il primo membro è uguale a 16 e la differenza con il secondo membro è $d_1 = 6$.
- 2- Considera la falsa posizione: $x_2 = 6$, allora il primo membro è uguale a 11 e la differenza è $d_2 = 1$.
- 3- Applica la formula di interpolazione lineare:

$$x = (x_2 d_1 - x_1 d_2) / (d_1 - d_2) = (6 \cdot 6 - 9 \cdot 1) / (6 - 1) = 5 + 2/5.$$

Questo procedimento che permette di risolvere equazioni del tipo $ax = b$ con $x \in \mathbb{Q}$, può essere tradotto al linguaggio algebrico moderno così:

1. Si adotta la falsa posizione x_1 e si ottiene $ax_1 = b + d_1$ [1]
2. Si suppone la falsa posizione x_2 e si trova $ax_2 = b + d_2$ [2]

d_1 e d_2 vengono chiamati *differenze o errori* ottenuti considerando come valori dell'incognita x_1 e x_2 .

3. Si risolve il sistema composto dalle equazioni [1] e [2] in funzione di a e b e si ottengono:

$$a = (d_1 - d_2) / (x_1 - x_2) \quad \text{e} \quad b = (x_2 d_1 - x_1 d_2) / (x_1 - x_2). \quad [3]$$

4- Dato che $x = b/a$ si trova: $x = (x_2 d_1 - x_1 d_2) / (d_1 - d_2).$ [4]

Siccome gli arabi non avevano a disposizione la formula, Al-Qalasadi utilizzò l'immagine dei piatti di una bilancia per presentare in modo più chiaro e preciso l'algoritmo eseguito. Altri autori utilizzavano uno schema grafico, nel quale rappresentavano in modo diverso le differenze positive e negative (Loria, pp. 345-346):

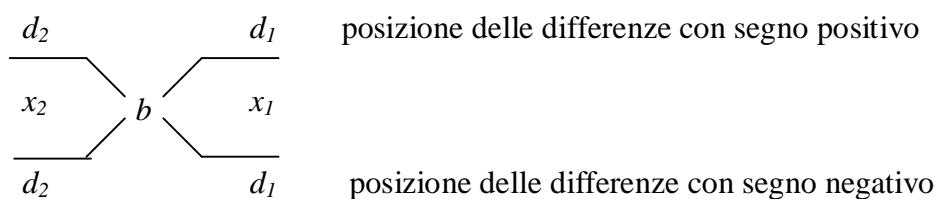


Figura 2

L'esempio precedente risponde allo schema seguente:

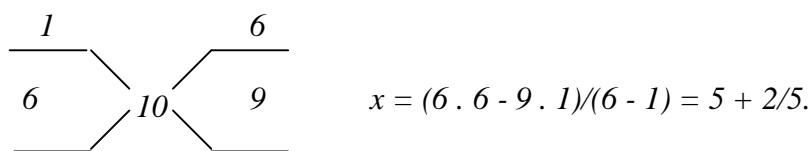


Figura 3

Al-Qalasadi propone il problema: “Qual è il numero di cui la terza e la quarta parte addizionate sono uguali a 21?”. L'equazione da risolvere è: $x/3 + x/4 = 21$; considerando $x_1 = 48$ e $x_2 = 12$ si ottengono rispettivamente le differenze $d_1 = 7$ e $d_2 = -14$, quindi lo schema corrispondente è il seguente:

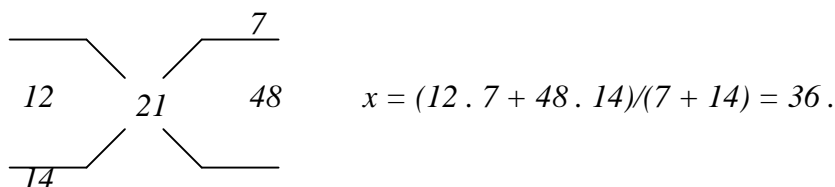


Figura 4

L'autore del *Trattato d'Algibra* (opera del XIV secolo) risolve alcuni sistemi di equazioni lineari mediante l'applicazione di questo algoritmo. Per esempio, il problema 38 può essere tradotto, utilizzando il linguaggio simbolico moderno, in un sistema di

quattro equazioni in quattro incognite, che l'autore trasforma mediante sostituzioni successive in un sistema di due equazioni in due incognite del tipo (Cfr. Franci e Pancanti, pp. 145-150):

$$\left[\begin{array}{l} 7y = 13x + 4 \end{array} \right. \quad [5]$$

$$\left. \begin{array}{l} 4y = 2x + 176 \end{array} \right] \quad [6]$$

che risolve in questo modo:

1. Adotta la falsa posizione $y_1 = 40$ e nell'equazione [5] calcola $x_1 = 21 + 3/13$.
2. Sostituisce questi due valori nell'equazione [6] trovando 160 al primo membro e $218 + 6/13$ al secondo membro. Poiché i due membri dovrebbero essere uguali, la differenza è $d_1 = 58 + 6/13$.
3. Analogamente adottando la falsa posizione $y_2 = 80$, calcola $x_2 = 42 + 10/13$ e $d_2 = -(58 + 6/13)$.
4. Applica la formula [4] e ottiene:

$$y = [80 \cdot (58 + 6/13) + 40 \cdot (58 + 6/13)] / (58 + 6/13 + 58 + 6/13) = 60.$$

5. Sostituendo $y = 60$ nell'equazione [5] trova $x = 32$.

1.3.1.3 LA “REGULA INFUSA”

La “regula infusa” è una tecnica utilizzata dagli indiani e dagli arabi per risolvere equazioni di primo grado. Compare in un testo di aritmetica, il cui autore sembra essere Ajjub al Basri, il primo arabo a padroneggiare diverse metodi indiani di risoluzione di equazioni (Cfr. Charbonneau & Radford, pp. 2). In Europa circolò la versione latina di questo testo intitolata *Liber augmentis et diminutionis* tradotta da Abraham ben Ezra (nell’XI secolo). Questa opera contiene anche numerosi problemi risolti con la regola della falsa posizione.

L'autore non dà una definizione precisa della regula infusa, ma la spiega attraverso la sua applicazione ad alcune situazioni pratiche che si traducono in equazioni della forma generale: $x + x/n = k$. Di conseguenza, questa tecnica permette di risolvere equazioni lineari che presentano la difficoltà di manipolare termini frazionari.

Per esempio, uno dei problemi è il seguente (Libri 1838-1841, pp. 321): “Un tesoro è incrementato della sua terza parte. Poi la quarta parte di questo è addizionato alla prima somma. La nuova somma è 30. Quanto era il tesoro originalmente?”

Il problema espresso nel linguaggio simbolico attuale diventa:

$$x + \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot \left(x + \frac{1}{3} \cdot x \right) = 30$$

Ricordiamo che nell'algebra medioevale l'incognita viene indicata con la parola *cosa* o *res* che in questo caso rappresenta il tesoro; noi la abbiamo simbolizzata con x .

L'autore divide il problema in due sottoproblemi più semplici. Nel primo considero $x + \frac{1}{3} \cdot x$ come una *res*, cioè, in notazione moderna $y = x + \frac{1}{3} \cdot x$. Quindi il primo

sottoproblema era risolvere l'equazione: $y + \frac{1}{4} \cdot y = 30$. Una volta calcolato il valore di y ,

il secondo sottoproblema era trovare la soluzione di $y = x + \frac{1}{3} \cdot x$.

A continuazione proponiamo una tabella con la soluzione in linguaggio naturale, così come compare nel testo, e la relativa traduzione al linguaggio algebrico (Cfr. Charbonneau & Radford, pp. 3):

Soluzione proposta nel <i>Liber augmentis et diminutionis</i>	Traduzione al linguaggio simbolico dell'algebra
Prendi una <i>res</i> e sommale un quarto di essa e tu avrai così una <i>res</i> e un quarto di <i>res</i> .	$y + \frac{1}{4} \cdot y$
Quanto si deve prendere di una <i>res</i> e un quarto di <i>res</i> per portarla ad una <i>res</i> ? Troverai che è un quinto di essa.	$y + \frac{1}{4} \cdot y = 30$ quindi $\frac{5}{4} \cdot y = 30$. Per ridurre questo a "y", si deve sottrarre $\frac{1}{5}$ di $\frac{5}{4} \cdot y$ ad entrambi i membri dell'equazione: $\frac{5}{4} \cdot y - \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot y = 30 - \frac{1}{5} \cdot 30$
Sottrai perciò da 30 il suo quinto e rimarrà 24.	Questo è $y = 30 - 6 = 24$
Poi prendi la seconda <i>res</i> e aggiungila al suo terzo e avrai una <i>res</i> e un suo terzo.	$x + \frac{1}{3} \cdot x$
Quanto si deve prendere di una <i>res</i> e un terzo di <i>res</i> per portarla ad una <i>res</i> ? Troverai, infatti, che è un quarto di essa.	$x + \frac{1}{3} \cdot x = 24$ quindi $\frac{4}{3} \cdot x = 24$. Per ridurre questo a "x", si deve sottrarre $\frac{1}{4}$ di $\frac{4}{3} \cdot x$ ad entrambi i membri dell'equazione: $\frac{4}{3} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot x = 24 - \frac{1}{4} \cdot 24$
Quindi sottrai da 24 il suo quarto e rimarrà 18	$x = 24 - 6 = 18$

1.3.2 METODI DI RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

A continuazione presentiamo il procedimento geometrico di Euclide, il metodo di al-Khowârizmî e la *geometria taglia-incolla*.

1.3.2.1 IL PROCEDIMENTO GEOMETRICO DI EUCLIDE

Negli “*Elementi*” di Euclide troviamo anche la risoluzione di equazioni di secondo grado da un punto di vista geometrico.

A partire dalle proposizioni 28 e 29 del Libro VI (1930, pp. 146-150), si possono risolvere geometricamente le equazioni di secondo grado che ammettono almeno una radice positiva ⁽⁵⁾. Così, per esempio, l'equazione $ax - x^2 = b^2$ corrisponde al problema geometrico: *Su un segmento dato (a) preso come base, costruire un rettangolo (di altezza x) che superi il quadrato dell'altezza (x^2) di un'area equivalente ad un quadrato dato (b^2)* (Cfr. Zapelloni, pp. 150). Per risolverlo si procede in questo modo:

Siano a il segmento dato e C il quadrato di area b^2 :

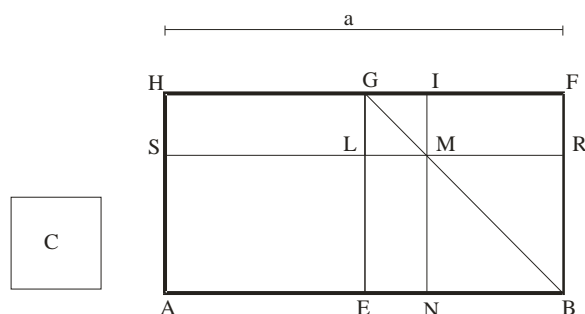


Figura 5

- 1- Si divida il segmento $a = AB$ in due parti uguali, nel punto E ; su EB si costruisca il quadrato $EBFG$ e si completi il quadrato $AEGH$. L'area del quadrato $AEGH$ deve essere maggiore o uguale a b^2 ; altrimenti il problema non ha soluzione.
- 2- Se l'area del quadrato $AEGH$ è b^2 , allora $x = AH$ e il problema è risolto.
- 3- Se l'area del quadrato $AEGH$ è maggiore di b^2 , si costruisca il quadrato $LMIG$ di area uguale alle differenze delle aree. Allora i quadrati $LMIG$ e $NBRM$ sono disposti intorno alla stessa diagonale (prop. 26, Libro VI). Si tracci la diagonale GB e si completi la figura.
- 4- Per costruzione l'area della figura $LEBFIM$ è uguale a b^2 , facilmente si dimostra che l'area del rettangolo $ANMS$ è uguale a quella di $LEBFIM$ e pertanto uguale a b^2 . Allora $x = SA$.

1.3.2.2 IL PROCEDIMENTO DI AL-KHOWÂRIZMÎ

Gli arabi risolvevano le equazioni di secondo grado considerando separatamente cinque casi diversi:

$$a x^2 = b x, \quad a x^2 = c, \quad a x^2 + b x = c, \quad a x^2 + c = b x, \quad a x^2 = b x + c$$

in modo che i coefficienti a , b e c siano sempre positivi. Questa maniera di procedere per evitare i numeri negativi è simile a quello proposto da Diofanto; ma significa un passo indietro rispetto all'algebra indiana, che considerava la "forma generale" dell'equazione di secondo grado perché erano ammessi i coefficienti negativi.

Una delle equazioni risolta da al-Khowârizmî ⁽⁶⁾ è la seguente: "Un quadrato e dieci delle sue radici sono uguale a nove e trenta (per trentanove), cioè tu sommi dieci radici ad un quadrato e la somma è uguale a nove e trenta" (Kline, pag. 226). Questo enunciato, tradotto al linguaggio simbolico dell'algebra, corrisponde all'equazione: $x^2 + 10x = 39$. L'autore utilizza il metodo del completamento del quadrato per calcolare la soluzione positiva:

Soluzione proposta da al-Khowârizmî:	Notazione algebrica moderna:
1. "Considera la metà del numero delle radici, in questo caso cinque, poi moltipicalo per se stesso, il risultato è cinque e venti" (per venticinque)".	$x^2 + 10x = 39$
2. "Somma questo numero a nove e trenta (per trenta e nove), il che dà sessantaquattro".	$(x + 5)^2 = 39 + 25 = 64$
3. "Prendi la radice quadrata, cioè otto".	$x + 5 = 8$
4. "Sottrai da essa la metà del numero delle radici, cioè cinque, e rimane tre".	$x = 3$
5. "Questa è la radice".	

Alcune varianti di questa regola si trovano nella matematica babilonese e indiana che, molto probabilmente, erano già conosciute dagli arabi. Ma al-Khowârizmî, dopo aver trovato le soluzioni numeriche dei cinque tipi di equazioni, dimostra "geometricamente" la verità degli stessi problemi. Per esempio, il suo approccio geometrico per l'equazione $x^2 + 10x = 39$ è il seguente (Cfr. Gheverghese Joseph, pp. 320-321):

1. Considera un quadrato $ABCD$ di lato x .
2. Prolunga AD e AB fino ad E e F , in modo che $DE = BF = 5$.
3. Completa il quadrato $AFKE$, prolunga DC fino a G e BC fino a H .

4. Dal diagramma risulta che l'area di $AFKE = x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.
5. Addiziona 25 ad entrambi i membri dell'equazione $x^2 + 10x = 39$, quindi si ha $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$
6. Dall'uguaglianza ricava che un lato del quadrato $AFKE$, diciamo EK è $x + 5 = 8$ e allora $EH = x = 3$.

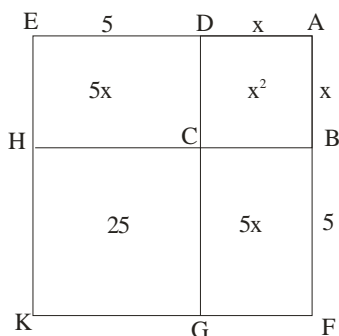


Figura 6

1.3.2.3 LA GEOMETRIA “TAGLIA-INCOLLA”

Il *Liber Mensurationum* di Abû Bekr (IX secolo circa) è un testo che contiene numerosi problemi risolti con due metodo diversi. Uno di questi metodi utilizza l'algebra sincopata, l'altro, invece, non ha un nome specifico e Høyrup (1990) lo ha chiamato “*geometria taglia-incolla*”.

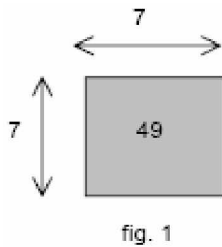
Per esempio, l'enunciato del problema 25 afferma che: “L'area è 48 e la somma dei due lati è 14, quanto misura ciascun lato?”.

Questo problema espresso in linguaggio algebrico risulta: $x \cdot y = 48$ e $x + y = 14$ che corrisponde all'equazione: $x^2 - 14x + 48 = 0$. L'autore applica il metodo della “*geometria taglia-incolla*” e spiega la risoluzione in questo modo (Cfr. Charbonneau & Radford, pp. 5):

1. Dividi a metà il 14, il risultato sarà 7.
2. Moltiplica il 7 per se stesso e sarà 49.
3. Sottrai da esso il 48 e rimarrà 1, del quale si ottiene la radice che è 1.
4. Se aggiungerai a 1 la metà di 14, quello che risulterà sarà il lato maggiore.
5. Se sottrarrai questo numero dalla metà di 14, quello che risulterà sarà il lato minore.

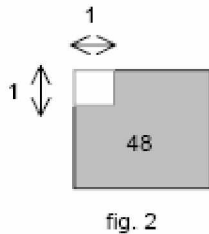
Anche se l'autore non lo dichiara in modo esplicito, il problema in questione è trovare la lunghezza dei lati di un rettangolo che soddisfano determinate condizioni. Charbonneau & Radford (pp. 5) ritengono che probabilmente la soluzione era accompagnata da alcuni disegni che non si trovano nel testo e che il testo avrebbe avuto soltanto un ruolo di aiuta - memoria. Questi autori propongono la seguente sequenza di disegni (pp. 6):

1.



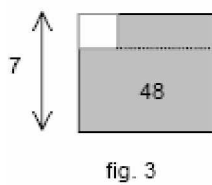
Costruire un quadrato di lato uguale alla metà di 14: passaggi 1 e 2 del procedimento spiegato in precedenza.

2.



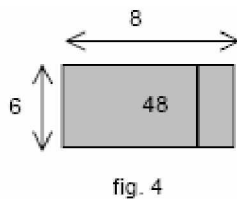
Passaggio 3

3.



Applicare il metodo della “geometria taglia e incolla”

4.



Passaggi 4 e 5

1.3.3 METODI DI RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI TERZO GRADO

1.3.3.1. IL PROCEDIMENTO DI AL-KHAYYAM

Uno dei più interessanti progressi della matematica araba è la risoluzione di equazioni cubiche mediante l'intersezione di sezioni coniche. Dopo la diffusione del *Trattato di Algebra (Al-jabr w'al muqâbala)* di al-Khowârizmî si svilupparono due correnti di idee:

- ∅ certi problemi geometrici si possono ricondurre alla risoluzione di un'equazione algebrica ad un'incognita;
- ∅ la risoluzione di un'equazione di terzo grado, per esempio, si può ricondurre ad una costruzione geometrica.

Secondo Rashed, il contributo più importante della matematica araba è precisamente l'aver iniziato lo sviluppo di questa corrispondenza tra la geometria e l'algebra cinque secoli prima di Descartes e di Fermat.

Con al-Khayyam (1038/48-1123) *l'Algebra* diventa la *teoria generale delle equazioni algebriche* di grado minore o uguale a tre e con coefficienti interi positivi. Questo autore risolve le *equazioni di secondo grado* con radici positive utilizzando il procedimento geometrico di Euclide. Trova anche la soluzione generale per tutte le *equazioni di terzo grado* (con radici positive e non riconducibili ad equazioni di secondo grado) mediante intersezioni di curve coniche (Cfr. Ballieu, pp. 12). Così, per esempio, per risolvere l'equazione: $x^3 + ax = b$ con a e b positivi, al-Khayyam scrive la forma omogenea $x^3 + p^2x = p^2q$ con $p^2 = a$ e $p^2q = b$.

Successivamente costruisce la parabola di equazione $y = x^2/p$ e la circonferenza di diametro QR di lunghezza uguale a q , che corrisponde all'equazione $x^2 + y^2 - qx = 0$. Per il punto P di intersezione delle due curve (diverso dall'origine delle coordinate) traccia la perpendicolare PS e dimostra che QS è la soluzione dell'equazione. A partire dalla costruzione geometrica deduce che questo tipo di equazione ammette sempre una radice positiva.

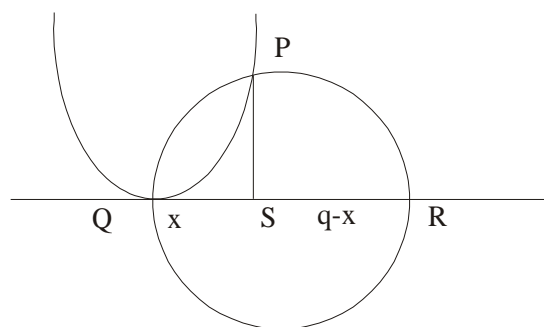


Figura 7

Al-Khayyam realizza una dimostrazione di tipo sintetico utilizzando la teoria delle proporzioni. Applica la proprietà della parabola scoperta da Apollonio: $x/PS = p/x$. [1]
 Considera il triangolo rettangolo QPR , nel quale l'altezza PS è medio proporzionale fra QS ed RS : $x/PS = PS/(q - x)$. [2]

Da [1] e [2] ricava che: $p/x = PS/(q - x)$. [3]

A partire dall'equazione [1] ottiene che $PS = x^2/p$. Sostituendo questo valore nella [3] dimostra che x soddisfa l'equazione: $x^3 + p^2x = p^2q$ (Cfr. Kline, pp. 227-228)

Al-Khayyam risolve anche equazioni del tipo: $x^3 + a = bx$ per a e b positivi, con l'aiuto della parabola $y = x^2/\sqrt{b}$ e di una branca dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 - (a/b)x = 0$. Dimostra che questo tipo di equazioni può ammettere: due soluzioni positive, una o nessuna (non prende in considerazione le soluzioni negative).

Determina anche le radici dell'equazione: $x^3 + a x^2 = c^3$ mediante l'intersezione di un'iperbole e di una parabola e quelle dell'equazione: $x^3 \pm a x^2 + b^2 x = b^2 c$ dall'intersezione di un'ellisse con un'iperbole.

1.3.3.2. IL PROCEDIMENTO DI AL-TUSI

Al-Tusi (1130-?) classifica le equazioni di grado minore o uguale a tre secondo l'esistenza o meno di radici positive. In particolare, studia cinque tipi di equazioni che ammettono —utilizzando la sua espressione— “casi impossibili”, cioè, i casi che non ammettono soluzioni positive:

$$x^3 + c = ax^2$$

$$x^3 + bx + c = ax^2$$

$$x^3 + c = bx$$

$$x^3 + c = ax^2 + bx$$

$$x^3 + ax^2 + c = bx$$

Ogni equazione di questo tipo si può scrivere nella forma $f(x) = c$ dove f è un polinomio. Al-Tusi caratterizza i “casi impossibili” studiando l'intersezione della curva $y = f(x)$ con la retta di equazione $y = c$ per $x > 0$ e $f(x) > 0$. L'esistenza di soluzioni dipende dalla posizione della retta $y = c$ in relazione a $f(x_0)$, dove x_0 è il massimo della funzione polinomiale. Se la retta interseca la funzione, determina le radici di $f(x) = 0$ e questo gli permette di inquadrare le radici di $f(x) = c$, cioè le radici di $f(x) = 0$ determinano l'intervallo che contiene le radici de $f(x) = c$ (Cfr. Ballieu, pp. 16). Al-Tusi calcola le radici con l'aiuto di un metodo analogo a quello di *Ruffini-Horner*. Ballieu (pp. 16) ritiene che nell'XI secolo questo metodo era utilizzato nel calcolo delle radici quadrate e cubiche e che al-Tusi lo generalizzò applicandolo alla risoluzione di equazioni polinomiche.

Al-Tusi applica così l'analisi locale: per trovare il massimo di $f(x)$ risolve un'equazione che tradotta al linguaggio simbolico moderno corrisponde a $f'(x) = 0$, cioè introduce la nozione di derivata che utilizza soltanto in alcuni esempi, senza arrivare a formalizzare il concetto. Questo autore adopera un'approssimazione locale e analitica che si oppone al procedimento globale e algebrico adottato da al-Khayyam. Il linguaggio utilizzato, sprovvisto di formalismo, è poco favorevole alla manipolazione di tali strutture matematiche. In ogni caso, secondo Ballieu (pp. 16) sembra che, per la prima volta nella Storia della Matematica, si trova l'idea di calcolare il massimo di una funzione polinomiale. Per eseguirlo al-Tusi studia la variazione della funzione nelle vicinanze degli estremi. Questo autore manipola concetti nuovi, ovviamente senza il rigore di un Newton, però ricordiamo che questo accade nel XII secolo!

1.3.4 METODI DI RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI INDETERMINATE

1.3.4.1. IL PROCEDIMENTO DI DIOFANTO

Alcuni autori (Bourbaki, pp. 122) ritengono che Diofanto sia stato il primo matematico ad affrontare i problemi di analisi indeterminata in maniera sistematica e pertanto, è considerato il promotore della branca dell'algebra chiamata oggi "*analisi diofantea*".

La caratteristica più straordinaria dell'opera di Diofanto è precisamente la risoluzione di *equazioni indeterminate*. Egli risolve *equazioni lineari in due incognite* del tipo: $ax + by = c$ con a, b e c positivi, dando un valore ad una delle incognite, per esempio $x = x_0$ con x_0 minore del rapporto c/a , e allora l'equazione è soddisfatta dal numero razionale positivo $y = (c - ax_0)/b$. Nel caso delle *equazioni quadratiche*, Diofanto esprime alcune incognite a partire da una "indeterminata", scelta in modo che le soluzioni risultino razionali positive. Ad esempio, per risolvere l'equazione: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ considera $x = \lambda\xi - a$, $y = \mu\xi - b$ con λ, μ costanti arbitrarie e ξ una quantità da determinare, trovando così: $\xi = 2(\lambda a + \mu b)/(\lambda^2 + \mu^2)$ ed allora x e y risultano razionali (Cfr. Loria, pp. 202-203). Nel caso di *sistemi di due equazioni quadratiche*: $y^2 = Ax^2 + Bx + C$ e $z^2 = Dx^2 + Ex + F$ considera soltanto casi particolari in cui A, B, \dots, F sono numeri speciali e il suo metodo è sempre quello di assumere che y e z si possano esprimere a partire da x e di risolvere rispetto ad x . Ma Diofanto si rende conto che scegliendo certe espressioni o certi valore per alcune incognite, egli dà soltanto delle soluzioni particolari e che i valori assegnati sono in una certa misura arbitrari. Diofanto generalmente si accontenta di ottenere una soluzione razionale positiva ed in casi eccezionali cerca soluzioni intere (nell'analisi diofantea moderna si cercano soltanto soluzioni intere).

1.3.4.2 IL METODO DI POLVERIZZAZIONE

La risoluzione di *equazioni e di problemi indeterminati* dei primi due gradi è un campo in cui gli indiani hanno raggiunto risultati di notevole interesse. Cercano tutte le soluzioni intere, mentre Diofanto generalmente si accontenta di ottenere una soluzione razionale positiva. Risolvono equazioni di primo grado del tipo: $ax \pm by = c$, con a, b e c interi positivi ed equazioni di secondo grado della forma: $x^2 - ay^2 = 1$, con a non necessariamente un quadrato perfetto, e riconoscono che queste equazioni sono fondamentali per risolvere quelle della forma: $cy^2 = ax^2 + b$.

Il metodo per risolvere equazioni indeterminate lineari: $ax \pm by = c$, con a , b e c interi positivi, è introdotto da Āryabhata (n. 476) e migliorato dai suoi successori. Questo procedimento viene chiamato *metodo di polverizzazione (Kuttaka)* e corrisponde a quello seguito da Eulero. Ad esempio per ottenere le soluzioni intere di $ax + by = c$ si procede in questo modo (Cfr. Kline, pp. 218 - 220):

1- Se a e b hanno un fattore comune m che non divide c , allora il problema *non ammette soluzioni intere*, perché il primo membro è divisibile per m , mentre il secondo non lo è. Se a , b e c hanno un fattore comune lo si elimina e allora, per l'osservazione precedente, è sufficiente considerare il caso in cui a e b sono primi fra loro.

2- Si divide a per b utilizzando l'algoritmo di Euclide per trovare il massimo comune divisore dei due interi. Consideriamo $a > b$. Questo algoritmo richiede anzitutto di dividere a per b in modo da ottenere $a = a_1 b + r$, dove a_1 è il quoziente e r il resto.

Ne segue che $a/b = a_1 + r/b$, che si può anche esprimere nella forma $\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{\left(\frac{b}{r}\right)}$ [1]

3- Il secondo passo dell'algoritmo di Euclide consiste nel dividere b per r in modo da ottenere $b = a_2 r + r_1$, ovvero $b/r = a_2 + r_1/r$. Sostituendo questo valore di b/r

nella [1] si ricava: $\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\left(\frac{r}{r_1}\right)}}$.

4- Proseguendo l'applicazione dell'algoritmo euclideo si ottiene la cosiddetta *frazione*

continua: $\frac{a}{b} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$

Questo procedimento si applica anche quando $a < b$. In questo caso a_1 è zero e poi si continua nello stesso modo descritto in precedenza. Dato che a e b sono numeri interi la frazione continua è finita.

5- Le frazioni ottenute arrestandosi al primo, secondo, terzo e in generale n -esimo quoziente sono dette rispettivamente la prima, la seconda, la terza e la n -esima convergente. Poiché, quando a e b sono interi, la frazione continua ha termine, c'è una convergente che precede di un posto l'espressione esatta di a/b . Se p/q è il valore di questa convergente, si può dimostrare che: $aq - bp = \pm 1$.

6- Consideriamo $aq - bp = 1$ e torniamo alla equazione di partenza $ax + by = c$, allora

$ax + by = c (aq - bp)$ di cui si ottiene $(cq - x)/b = (y + cp)/a$.

Se t è il valore comune di queste due frazioni, si avrà

$$x = cq - bt \quad \text{e} \quad y = at - cp. \quad [2]$$

Assegnando a t dei valori interi si ottengono dei valori interi per x e y perché tutte le altre quantità sono intere.

7- Nei casi in cui l'equazione di partenza è della forma $ax - by = c$ o si verifica la relazione $aq - bp = -1$, è necessario effettuare piccole modifiche al caso presentato in precedenza.

E' interessante mettere in evidenza che Brahamagupta (n. 598) arriva alle soluzioni [2] anche se non utilizza delle lettere generiche a, b, p e q .

1.3.4.3 IL PROCEDIMENTO DI ABU KAMIL

I problemi di *analisi indeterminata* si trovano anche nella letteratura araba. Abu Kamil affrontò una categoria di questioni che i cinesi indicavano con il nome di: "Problemi dei cento uccelli", perché in loro compare spesso il numero 100.

Questi problemi, tradotti nel linguaggio simbolico moderno, si presentano sotto la forma di un sistema di equazioni del tipo: $x + y + z + \dots = m$ e $ax + by + cz + \dots = n$ con m ed n interi positivi (spesso prendevano il valore 100). Abu Kamil li risolve sostituendo nella seconda equazione il valore di una delle incognite ricavato dalla prima e poi cercando tutte le soluzioni intere positive dell'equazione indeterminata risultante. L'abilità di Abu Kamil per risolvere questa categoria di problemi viene dimostrata dal fatto che per il sistema: $x + y + z + u + v = 100$ e $2x + (1/2)by + (1/3)z + (1/4)u + v = 100$ determina 2676 possibili soluzioni (Loria, pp. 344-345).

1.3.5 I METODI EUROPEI FINO AL 500

Nella sua opera il *Liber Abaci* (1202) Fibonacci risolve numerosi problemi di ordine pratico (relativi alle transazioni commerciali), utilizzando la successione numerica che oggi porta il suo nome (ogni numero è ricavato dalla somma dei due precedenti immediati) o l'analisi indeterminata di primo e di secondo grado. E' interessante osservare che, per risolvere equazioni di secondo grado, Leonardo segue lo stile diofantino e arabo considerando separatamente cinque casi diversi in modo che i coefficienti siano sempre positivi. Per ciascuno di loro, poi, trova le soluzioni utilizzando i ragionamenti geometrici di Euclide. Risolve le innumerevoli questioni di

analisi indeterminata applicando diversi artifici diofantini o il metodo della falsa posizione (Cfr. Loria, pp. 386-391).

L'autore del *Trattato d'Algebra* (XIV secolo) stabilisce 25 regole per risolvere equazioni dei primi quattro gradi considerando separatamente diversi casi particolari per le equazioni dello stesso grado, superiore al primo, in modo che i coefficienti siano sempre positivi⁽⁷⁾. Egli prosegue con la tradizione araba di accettare soltanto le soluzioni reali positive non nulle. Risolve le prime 22 equazioni applicando il trasporto di termini da un membro all'altro e la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado per calcolare soltanto la radice positiva. Trasforma le equazioni biquadratiche in quadratiche e certe equazioni cubiche e quartiche in equazioni di secondo grado dividendole per l'incognita o il suo quadrato. E' importante sottolineare che queste osservazioni possono sembrare ovvie a chi è abituato ad utilizzare il simbolismo algebrico, ma sono molto meno triviali per l'autore che le formulò disponendo soltanto dal linguaggio naturale. Le ultime tre regole⁽⁷⁾ corrispondono ad equazioni di terzo grado del tipo: $ax^3 + bx^2 = c$, $ax^3 = bx^2 + c$ e $ax^3 + c = bx^2$. Per calcolare questo tipo di radici, l'autore esegue delle sostituzioni adeguate (per esempio, nella prima utilizza $x = y - b/3a$) trasformando queste equazioni in altre del tipo $x^3 = px + q$, che poi calcola mediante tentativi perché non conosce la sua formula risolutiva. Secondo Franci e Pancanti (pp. XX), l'importanza delle regole in questione è ancora maggiore se si considera che: la risoluzione dell'equazione generale di terzo grado $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, passa proprio attraverso la risoluzione delle equazioni del tipo $y^3 + py + q = 0$, alle quali si arriva mediante la trasformazione $x = y - a/3$. Questa è precisamente la regola proposta nel *Trattato d'Algebra* ed è la prima di questo genere nella letteratura matematica.

Intorno al 1500 Scipione Dal Ferro (1465-1526) enunciò la formula risolutiva delle equazioni cubiche del tipo $x^3 + px = q$ con p e q positivi, utilizzando il linguaggio naturale. Questa formula tradotta la linguaggio simbolico dell'algebra corrisponde all'espressione:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

Nel 1535, in maniera indipendente Tartaglia scoprì la formula risolutiva per le equazioni cubiche a coefficienti positivi del tipo: $x^3 + px = q$ e $x^3 + q = px$, pubblicate nel 1545 da Cardano nella sua opera *Ars magna*. In essa l'autore riporta il

metodo di risoluzione delle equazioni cubiche e, seguendo la tradizione araba, realizza una dimostrazione geometrica per ogni regola ottenuta. Presenta anche il procedimento risolutivo per alcune equazioni quartiche scoperto da Ferrari. Cardano stabilisce le condizioni perché il numero delle radici di un'equazione (di secondo e terzo grado) sia uguale al suo grado, insieme con le regole per abbassare il grado di un'equazione di cui è nota una radice (Cfr. Bortolotti, 1950, pp. 656-657).

Nella sua opera *L'Algebra* (1966), Bombelli sviluppa la teoria delle equazioni dei primi quattro gradi⁽⁸⁾. Considera separatamente tanti casi particolare di equazioni dello stesso grado, superiore al primo, in modo che i coefficienti siano sempre positivi. Per ogni tipo di equazione enuncia (in linguaggio retorico) la "regola" pratica di risoluzione, realizza la costruzione geometrica (per quanto sia possibile) per giustificare la validità dell'uguaglianza formulata nell'equazione e analizza la natura e la molteplicità delle radici. Segue la tradizione araba e medioevale di accettare soltanto le soluzioni reali positive non nulle, perché le radici negative o complesse erano difficili di interpretare in modo adeguato, in relazione ai problemi da risolvere.

Bombelli utilizza la costruzione geometrica per risolvere problemi algebrici, ma il suo procedimento è l'inverso di quello seguito nell'algebra geometrica degli antichi. Questo autore non risolve direttamente il problema geometrico per ottenere la soluzione analitica dall'interpretazione aritmetica della costruzione realizzata, ma utilizza precisamente la risoluzione algebrica per ricavare la costruzione geometrica (Bortolotti, 1966, pp. XLIII).

1.3.6 CONCLUSIONI SUI METODI DI RISOLUZIONI

L'analisi storica realizzata mostra un'ampia gamma di procedimenti ideati appositamente per risolvere equazioni. Questi metodi evidenziano la necessità di ricorrere ad altri linguaggi: naturale, aritmetico o geometrico, in mancanza di un linguaggio simbolico adeguato. Il linguaggio aritmetico fu utilizzato ampiamente dai popoli antichi, Diofanto ed i matematici cinesi e indiani. Questo linguaggio costituisce anche il fondamento del metodo della falsa posizione, applicato dai matematici egiziani, cinesi, indiani, arabi fino a quelli medioevali. Il linguaggio geometrico è usato nei metodi risolutivi dai greci classici, al-Khowârizmî e al-Khayyam e nel procedimento che Høyrup chiama "geometria taglia-incolla". Alcune nozioni protomatematiche di analisi furono adoperate da al-Tusi⁽⁹⁾. E' interessante osservare che, fino al 500 la lingua naturale era utilizzata come mediatore e nell'ultimo periodo come supporto di

riflessione; mentre l'aritmetica e la geometria rappresentavano due linguaggi di supporto di espressione e/o procedurale. La geometria, in particolare, ha contribuito notevolmente al processo di argomentazione-dimostrazione. In tutti questi casi il livello di sviluppo del linguaggio algebrico era molto scarso e allora era necessario ricorrere ad altri linguaggi (naturale, aritmetico, geometrico o analitico) per ottenere la soluzione del problema dall'interpretazione dei procedimenti eseguiti. Anche Bombelli utilizzava la costruzione geometrica per giustificare la validità delle uguaglianze formulate nelle equazioni o per risolvere problemi algebrici, ma la sua procedura era diversa a quella seguita nei casi citati in precedenza. In questa situazione l'impiego di altri linguaggi -naturale o geometrico- serviva soltanto a completare la comunicazione, non a risolvere il problema, perché Bombelli utilizzava uno schema di ragionamento diverso, combinando strumenti algebrici ed euclidei.

La semantica del linguaggio algebrico è meno ricca di quelle corrispondenti al linguaggio naturale, aritmetico o geometrico. Quindi nella fase sincopata è necessario appoggiarsi in altre semantiche per formulare le regole, per dare un'interpretazione adeguata al problema da risolvere, per ottenere la sua soluzione o anche per giustificare i passaggi effettuati algebricamente. L'ambiguità semantica e la ricchezza di significati sono precisamente quelle che permettono a poco a poco di mettere a punto il linguaggio simbolico

La “regula infusa” e il “metodo della falsa posizione” utilizzano la lingua naturale e il linguaggio aritmetico. Da un confronto si evince che la prima è più restrittiva perché si usa soltanto per risolvere equazioni del tipo $x + x/n = k$. Mentre la seconda ha un campo di applicazione più ampio: equazioni e sistemi di equazioni lineari ed equazioni quadratiche in modo approssimativo. D'altra parte, l'uguaglianza ha un significato diverso in questi due procedimenti. Nel metodo della falsa posizione essa indica il risultato di un'operazione aritmetica, ottenuto da sostituire un valore qualsiasi all'incognita. Nella “regula infusa”, invece, l'uguaglianza rappresenta, in qualche modo, l'equivalenza tra i due stili di esprimere la stessa quantità: k è interpretata come le $(n + 1)/n$ parti dell'incognita. Questa nozione è più vicina a quella utilizzata in algebra (Cfr. Charbonneau & Radford, pp. 4).

Nel procedimento di al-Khowârizmî e nella *geometria taglia-incolla* il concetto di uguaglianza rappresenta, invece, l'equivalenza (uguaglianza tra le aree) di figure piane. Questi metodi si basano fondamentalmente sull'applicazione di una serie di trasformazioni ad una figura iniziale fino ad arrivare ad una figura finale di area

conosciuta. Anche la dimostrazione di Euclide per la risoluzione di equazioni di secondo grado passa attraverso il concetto di uguaglianza di aree.

E' interessante rilevare che, l'obiettivo dei procedimenti descritti in precedenza è risolvere i problemi, mediante il calcolo di una o più incognite. Anche se in certi casi —come nelle equazioni indeterminate di Diofanto, degli indiani e dei greci— alcune incognite vengono espresse a partire da un'altra (l'arithme o un'indeterminata), la concezione predominante di variabile è quella di incognita.

Nonostante il procedimento geometrico di al-Khayyam permette di risolvere equazioni di terzo grado mediante l'intersezioni di due coniche, l'autore le considera come curve, non come funzione. Al-Tusi risolve alcune equazioni cubiche studiando l'intersezione di una curva polinomica con una retta, ma il suo procedimento è diverso da quello applicato da al-Khayyam. Al-Tusi utilizza la nozione protomatematica di derivata e adopera un'approssimazione locale e analitica che si oppone al procedimento globale e algebrico adottato da al-Khayyam. Per calcolare il massimo di un polinomio al-Tusi studia la variazione della curva nelle vicinanze degli estremi. Questo sembra indicare che l'autore considera in maniera implicita la dipendenza tra variabili.

1.4 I NUMERI NEGATIVI COME OSTACOLO. IL CAMPO NUMERICO INCOMPLETO

Anche se da un certo punto di vista l'uso del linguaggio aritmetico favorisce lo sviluppo del linguaggio algebrico, da un altro può rappresentare una forte limitazione. Si suppone, per esempio, che i laboriosi e complicati calcoli con le frazioni rappresentano uno dei motivi per cui il linguaggio algebrico degli egiziani non ha superato il primo livello di sviluppo⁽⁴⁾. La mancanza di accettazione dei numeri negativi da parte di Diofanto, degli arabi e dei matematici europei fino al cinquecento è la causa per cui essi evitavano i coefficienti negativi nella formulazione delle regole di risoluzione e ammettevano soltanto le radici positive (le radici negative risultavano difficili di interpretare adeguatamente, in relazione ai problemi che permettevano risolvere). Questo rappresenta un passo indietro rispetto all'algebra indiana che considerava la forma generale dell'equazione di secondo grado ed in alcuni casi ammetteva anche le soluzioni negative (quando era possibile trovarle un'interpretazione). Nello stesso modo, la sua mancanza di accettazione dei numeri complessi è il motivo per cui Bombelli non li ammetteva come radici delle equazioni. Alcuni autori (Bortolotti, 1966, pp. 182) ritengono che sia possibile che le stesse dimostrazioni e le costruzioni

geometriche delle soluzioni algebriche delle equazioni, abbiano distolto lo sguardo dei matematici (anche di Bombelli) da questo tipo di radici. Ma nel Libro IV dell'*Algebra*, Bombelli introduce i segmenti negativi e le aree negative o nulle per poter operare con loro. Riteniamo che la vera difficoltà per accettare le radici negative si trovi precisamente negli stessi numeri negativi come ostacolo epistemologico a livello aritmetico (Cfr. Glaeser).

Leonardo Pisano aveva già fatto qualche osservazione e poi i matematici del cinquecento si convinsero che l'impossibilità di risolvere certe equazioni del terzo grado dipendeva dall'incompletezza del campo numerico che non conteneva gli elementi idonei per esprimere la soluzione. Così Bombelli effettuò le successive estensioni del campo euclideo di razionalità con l'introduzione prima dei radicali cubici e dopo dei numeri complessi.

E' importante rilevare che la necessità di ampliare il campo numerico con i numeri complessi apparve con la risoluzione delle equazioni cubiche non di quelle quadratiche. In altre parole l'ostacolo del numero complesso non dipendeva dal tipo di equazione o di problema, ma dal procedimento seguito nella risoluzione. Perché, fino a quel momento, la presenza della radice quadrata di un numero negativo implicava l'assenza di soluzioni; mentre nelle equazioni di terzo grado non succedeva lo stesso: a volte era possibile trovare un'espressione immaginaria nel procedimento di risoluzione, anche se tutti e tre le radici fossero reali⁽¹⁰⁾. Questo significava dovere lasciare il procedimento di risoluzione incompleto per mancanza di trasformazioni algebriche adeguate che permettessero di concluderlo. Di conseguenza la formula risolutiva di Dal Ferro-Tartaglia non offriva la possibilità di calcolare la radice positiva, la cui esistenza spesso si poteva verificare mediante una semplice sostituzione. Cioè, l'impossibilità di eseguire un processo computazionale, suscitò la necessità di introdurre nuovi oggetti algebrici di natura più astratta: i numeri complessi. Bombelli aveva definito le regole di calcolo con le irrazionalità cubiche e con i numeri complessi, ma i matematici dell'epoca non li accettavano come dei "veri" numeri, cioè come oggetti astratti. E' importante sottolineare che nell'*Algebra* si trova ancora una concezione operativa dei numeri irrazionali e complessi, la concezione strutturale di questi numeri (come veri oggetti) arriverà nei secoli successivi (Arzarello *et al.*, pp. 9).

Nello sviluppo storico del linguaggio algebrico troviamo con frequenza che i matematici manifestano delle ambiguità per operare in determinate situazioni con nuovi oggetti astratti, per esempio: da una parte si osserva la mancanza di accettazione dei

numeri negativi come coefficienti o radici delle equazioni; d'altra, se essi sono necessari per portare a termine il processo di risoluzione di un problema particolare, allora vengono utilizzati in queste funzioni. Numerosi esempi di questo tipo si trovano nel *Trattato d'Algibra* e nell'*Algebra* di Bombelli. Ma rimane aperto il problema se queste ambiguità siano o meno dovute all'ostacolo epistemologico che rappresentano i numeri negativi (Malisani, 1996, pp. 68).

1.5 GENERALIZZAZIONE DEI PROBLEMI

Un aspetto molto importante della costruzione del linguaggio algebrico è la possibilità di ipotizzare la generalizzazione di problemi. I matematici antichi e orientali non disponevano da metodi generali, risolvevano ogni problema in un modo diverso, cioè non cercavano analogie per classificarli in gruppi di problemi simili. Nel *Liber Quadratorum* (1225) di Leonardo Pisano, invece, si manifesta già una certa tendenza di risolvere problemi cercando di inserirli in famiglie o classi di problemi (Cfr. Leonard de Pisa, pp. 43). Nel *Trattato d'Algibra* l'autore classifica i problemi secondo le regole di risoluzione e trasforma le equazioni biquadratiche in quadratiche e certe equazioni cubiche e quartiche in equazioni di secondo grado, dividendole per l'incognita o il suo quadrato. Nell'*Algebra* di Bombelli si nota il salto di qualità con l'uso di un linguaggio simbolico adeguato. L'obiettivo dell'autore è arrivare ad una generalizzazione dei problemi che affronta: egli risolve il problema aritmetico proposto in forma analitica, poi formula una regola generale di soluzione prescindendo dai valori numerici e finalmente applica questa regola alla risoluzione di un'equazione analoga (con i coefficienti espressi in relazione ad una quantità indeterminata). Questo dimostra precisamente l'importanza che assume il linguaggio simbolico nei processi di generalizzazione.

Dall'analisi storica effettuata risulta che anche Fibonacci e l'autore del *Trattato d'Algibra*, utilizzando soltanto il linguaggio retorico, arrivano a formulare certe generalizzazioni, naturalmente di livello inferiore a quelle di Bombelli. Di conseguenza, nel processo di costruzione del linguaggio algebrico è possibile distinguere due livelli di concepire la generalità di un metodo: uno relativo alla possibilità di applicarlo in una diversità di casi specifici, e l'altro riguardante la possibilità di esprimerlo attraverso il linguaggio dell'algebra simbolica (Cfr. Colin e Rojano, pp. 158).

A questo punto sarebbe interessante considerare una fase sincopata più ampia, che comprenda non soltanto l'introduzione di abbreviazioni per le incognite, le sue potenze

e certe relazioni di uso frequente, ma anche il primo livello di generalizzazione di un metodo. Il secondo livello di generalizzazione potrebbe appartenere sia alla fase sincopata, sia a quella simbolica dipendendo dal grado di sviluppo del linguaggio simbolico. Quindi anche se Leonardo e l'autore anonimo utilizzano il linguaggio naturale, l'inserire i problemi in classi di problemi (cioè l'essere algoritmisti) ci dà la possibilità di affermare che essi usino l'algebra sincopata. Secondo questa visione il pensiero algebrico comincia prima del simbolismo (Cfr. Arzarello *et al.*, pp. 10).

1.6 LA VARIABILE COME “COSA CHE VARIA”

La nozione di variabile come “cosa che varia” è molto antica; ma risulta difficile stabilire in maniera precisa l'origine di questo concetto nella storia dell'algebra. Troviamo alcune tracce di questa nozione nelle antiche tavolette babilonesi, precisamente nelle tabelle astronomiche e in quelle dei numeri reciproci. Nell'*Almagesto* di Tolomeo (150 d. C. circa) compare la prima tavola trigonometrica della storia della matematica (Kline, pp. 146). Questo autore compilò anche delle tabelle per registrare le relazioni fra il tempo e le posizioni angolari dei pianeti. Gli indiani e gli arabi utilizzarono anche tavole trigonometriche e astronomiche per trascrivere le loro osservazioni. In ogni caso è importante segnalare che queste tabelle mettono in rilievo la relazione tra numeri, piuttosto che la proprietà variazionale degli oggetti matematici.

Secondo Radford (1996, pp. 47), possiamo trovare un concetto di variabile più elaborato nell'opera di Diofanto intitolata *Sui numeri poligonali*. Diofanto dimostra quattro proposizioni collegate deduttivamente sulle progressioni aritmetiche. Radford (1996, pp. 49-50) ritiene che i numeri implicati nella dimostrazione di ogni proposizione sono *valori posizionali astratti* e non possono essere considerati variabili⁽¹¹⁾. Ma la situazione cambia, quando Diofanto chiede di trovare il numero poligonale S_n conoscendo, per esempio, il lato n . Adesso questi numeri S_n ed n non sono più *valori posizionali astratti*, ma diventano *quantità dinamiche* perché i valori di uno dipendono dai valori assunti dall'altro, cioè, S_n ed n diventano *oggetti matematici variabili*. E' interessante precisare che Diofanto non considera le variabili attraverso il concetto di funzione, ma attraverso il concetto di formula.

Radford (1996, pp. 51) spiega dettagliatamente le differenze tra i concetti di incognita e di variabile (come “cosa che varia”) nelle due opere di Diofanto: *L'Aritmetica* e *Sui numeri poligonali*. La prima differenza si trova nel contesto in cui questi due concetti compaiono. Infatti, l'obiettivo di *L'Aritmetica* è risolvere problemi, per esempio,

determinare il valore di una o più incognite; mentre lo scopo di *Sui numeri poligonal* è stabilire delle relazioni tra numeri in termini di proposizioni organizzate in una struttura deduttiva. In questo modo, le variabili derivano dal passaggio dal problema relazionale a quello che si occupa dei calcoli con valori posizionali astratti. La seconda differenza si trova nella rappresentazione dei due concetti. Nel libro *Sui numeri poligonal* il concetto rilevante è quello di *valori posizionali astratti* che conduce a quello di variabile e che viene rappresentato geometricamente o mediante lettere. In *L'Aritmetica* invece, il concetto importante è quello di incognita (l'aritmè) che non è rappresentato geometricamente. Radford (pp. 51) conclude dicendo: “Mentre entrambi i concetti trattano con numeri, le loro concettualizzazioni sembrano essere completamente diverse”.

La costruzione del concetto di variabile ha percorso un lungo cammino. Nel XIV secolo Oresme studiò il cambiamento e il tasso di cambiamento in termini quantitativi e rappresentò graficamente alcune leggi fisiche del moto. In questo contesto la variabile è collegata a quantità continue, mentre con Diofanto era connessa a quantità discrete.

Durante il Medioevo e il Rinascimento lo studio del moto dei corpi acquista gran rilevanza. In questo contesto il problema principale è descrivere la relazione fra variabili. Questa descrizione conduce precisamente al concetto di funzione. Galileo lo utilizza frequentemente nelle *Due nuove scienze* (1638), opera in cui fondò la meccanica classica. Questo autore esprime le relazioni funzionali verbalmente e con il linguaggio delle proporzioni, in seguito con l'espansione del simbolismo algebrico verranno scritte in forma simbolica (Kline, pp. 395).

La maggior parte delle funzioni introdotte durante il XVII secolo furono studiate come curve, prima che il concetto di funzione fosse espresso in modo preciso; per esempio, le funzioni trascendenti: $\log x$, $\sin x$ e a^x . È interessante sottolineare che le curve (conosciute e nuove) vengono definite in termini di moti, cioè, come la traiettoria descritta da un punto mobile.

Gregory (1667) formulò una definizione più esplicita del concetto di funzione come “una quantità ottenuta da altre quantità mediante una successione di operazioni algebriche o con qualsiasi altra operazione immaginabile”⁽¹²⁾. Newton usò il termine “fluente” per indicare una qualsiasi relazione tra variabili. Leibniz (1673) utilizzò il termine “funzione” inizialmente per indicare una qualsiasi quantità che varia da punto a punto di una curva. Considerò che la curva potesse essere espressa mediante un'equazione e introdusse i termini “variabile”, “costante” e “parametro”, questo ultimo

in connessione con una famiglia di curve. In seguito, Leibniz usò il termine “funzione” per denotare le quantità che dipendono da una variabile. Bernoulli (1697) definì la funzione come “una quantità formata, in modo qualsiasi, da variabili e da costanti”, adottò la frase leibniziana “funzione di x ” per indicare questa quantità e, posteriormente, adoperò la notazione $f(x)$ (Cfr. Kline, pp. 397).

Eulero introdusse la notazione $f(x)$ nel 1764 e definì la “funzione di una quantità variabile” come “un’espressione analitica costruita in modo qualsiasi da una quantità variabile e da costanti”; considerò anche le funzioni di più variabili e classificò le funzioni in algebriche e trascendenti (Kline, pp. 471).

Cauchy (1821) considerò che le funzioni fossero strettamente legate a quantità variabili (definizione già data dai suoi predecessori); per Fourier (XIX secolo), invece, ogni funzione poteva essere rappresentata da una serie trigonometrica, la serie di Fourier. In un periodo posteriore, le funzioni sono state definite anche con l’ausilio della teoria della serie. In particolare, la funzione viene considerata come una corrispondenza arbitraria tra due serie, non necessariamente basata su una relazione algoritmica tra le variabili x ed y (ad esempio, la funzione di Dirichlet, 1837) (Gagatsis, 1997).

Secondo Gagatsis (2000), dopo Fourier, Cauchy, Dirichlet e Riemann si pensa che la definizione di una funzione y di una variabile indipendente x come una corrispondenza arbitraria, contribuirà ad importanti cambiamenti nell’Analisi.

1.7 CONCLUSIONI

L’approfondita analisi storica sulla costruzione del linguaggio algebrico ha permesso di mostrare le principali concezioni, i procedimenti precursori, i passaggi da un concetto all’altro ed, in particolare, i passaggi attraverso i livelli linguistici delle diverse fasi: retorica, sincopata e simbolica. Quindi da questo studio è possibile ricavare alcune considerazioni che risultano funzionali, sia alla comunicazione delle matematiche, sia alla ricerca in didattica. Le seguenti riflessioni si pongono come contributo effettivo che la storia può dare allo studio degli ostacoli epistemologici che incontrano gli alunni nelle situazioni di apprendimento del linguaggio algebrico:

Ø Lo sviluppo del linguaggio simbolico è molto lento: si passa da certi *nomi* per denotare l’incognita e certe relazioni, alle *abbreviazioni di queste parole*, ai *codici intermedi* fra linguaggio retorico e sincopato e infine ai *simboli*. In altre parole, queste abbreviazioni e questi codici si depurano gradualmente fino all’elaborazione

di un simbolismo algebrico corretto sintatticamente e più efficiente operativamente, in questo processo si osserva l'abbandono progressivo della lingua naturale come mediatore di espressione delle nozioni algebriche.

- Ø Nella fase sincopata è necessario ricorrere ad altri linguaggi: naturale, aritmetico o geometrico, in mancanza di un linguaggio simbolico adeguato. Questi linguaggi —semanticamente più ricchi di quello algebrico— consentono di formulare le regole, di interpretare adeguatamente il problema da risolvere, di ottenere la sua soluzione e di giustificare i passaggi effettuati algebricamente. Con l'elaborazione di un linguaggio algebrico più adeguato, i linguaggi di supporto si abbandonano gradualmente.
- Ø I registri rappresentativi visuale sono presenti nei diversi procedimenti risolutivi che utilizzano il linguaggio geometrico, per esempio: in Euclide, al-Khowârizmî, al-Khayyam e nella geometria taglia-incolla; ma anche nel metodo aritmetico della doppia falsa posizione e in quello analitico di al-Tusi.
- Ø Il concetto di uguaglianza varia in base ai procedimenti risolutivi adottati. Per esempio, essa indica il risultato di un'operazione aritmetica, ottenuto da sostituire un valore qualsiasi all'incognita; designa la equivalenza di figure piane (uguaglianza tra aree); rappresenta l'equivalenza tra due modi di esprimere la stessa quantità o indica "l'uguaglianza condizionata" tra due membri di un'equazione.
- Ø Nella fase di transizione tra il pensiero aritmetico e il pensiero algebrico, certi ostacoli a livello aritmetico possono ritardare lo sviluppo del linguaggio algebrico e l'introduzione di nuove strategie e dei nuovi contenuti algebrici possono eclissare le conoscenze aritmetiche precedenti (Cfr. Malisani, 1990 e 1993).
- Ø La necessità di introdurre nuovi oggetti di natura più astratta appare sempre con l'impossibilità di portare a termine il procedimento risolutivo di un problema particolare, cioè un processo computazionale.
- Ø Nel processo di costruzione del linguaggio algebrico è possibile distinguere due livelli di concepire la generalità di un metodo: uno relativo alla possibilità di applicarlo ad una diversità di casi specifici, e l'altro riguardante la possibilità di esprimerlo attraverso il linguaggio dell'algebra simbolica.
- Ø L'analisi storica mette in risalto che le nozioni di incognita e di variabile come "cosa che varia" hanno un'origine e un'evoluzione totalmente differenti. Anche se

entrambi i concetti si occupano di numeri, i loro processi di concettualizzazioni sembrano essere completamente diverse (Radford, pp. 51).

- Ø La nozione di variabile come “cosa che varia” è molto antica; ma risulta difficile stabilire in maniera precisa l’origine di questo concetto nella storia dell’algebra. La sua evoluzione è molto lenta: si passa dalla relazione tra i numeri contenuti nelle tabelle; alle quantità dinamiche ma discrete, relazionate attraverso il concetto di formula; alla variabile collegata a quantità continue nello studio delle leggi fisiche; alle curve descritte in termini cinematici; alla descrizione della relazione tra variabili che conduce precisamente al concetto di funzione.
- Ø La nozione di incognita ha la sua origine nella risoluzione di problemi che richiedono il calcolo di una o più quantità. Fu introdotta da Diofanto con il nome di “*arithme*”, in altre parole *il numero del problema*. La preponderanza di questa nozione nei procedimenti risolutivi è notevole fino al 600, nonostante si registrino alcuni tentativi per considerare la dipendenza tra variabili in Diofanto e al-Tusi.

NOTE

1. I babilonesi usavano le parole *us* (lunghezza), *sag* (larghezza) e *asa* (area) come incognite. Le incognite non rappresentavano necessariamente queste quantità geometriche, ma probabilmente molti problemi algebrici erano nati da situazioni geometriche e la terminologia geometrica era diventata standard. I babilonesi a volte usavano dei simboli speciali per rappresentare le incognite, i quali corrispondevano agli antichi simboli pittorici sumerici, non più in uso nel linguaggio corrente (Cfr. Kline, pp. 14).
2. Leonardo Pisano scrisse due opere di fondamentale importanza: il *Liber Abaci* (1202, revisionata nel 1228) e il *Liber Quadratorum* (1225). L’obiettivo del *Liber Abaci*, cioè il “libro dell’abaco”, era introdurre in Europa il sistema di numerazione indo-arabico e i metodi di calcolo indiani. Questa opera fu utilizzata per lungo tempo ed esercitò un’enorme influenza sul popolo, perché presentava procedimenti aritmetici molto più semplici di quelli fondati sul sistema romano. Il *Liber Quadratorum*, cioè il “libro dei numeri quadrati”, contiene importantissimi risultati sulla Teoria dei Numeri. Per tale motivo, alcuni autori (Bortolotti, 1950, pp. 650) ritengono che è “...l’opera che per l’originalità del metodo e l’importanza dei risultati *faceva di Leonardo* il più grande genio della teoria dei numeri, apparso nei quindici secoli trascorsi dal tempo di Diofanto a quello di Fermat”. Ma, questo libro purtroppo è rimasto sconosciuto durante più di sei secoli e così certi risultati di rilevanza hanno dovuto aspettare l’arrivo di Fermat.
3. Il *Trattato d’Algibra* fu scritto alla fine del XIV secolo da un anonimo maestro fiorentino d’abaco. Rappresenta molto di più di un classico “trattato d’abaco”, è un testo di algebra ampio e organico: perché non solo affronta tutti gli argomenti mercantili che caratterizzano questo tipo di opere, ma contiene anche un’intera sezione dedicata all’algebra. Essa rappresenta un importante contributo alla teoria di risoluzione di equazioni. Franci e Pancanti (pag. VI) ritengono che questa opera sia uno dei migliore trattati d’abaco medioevali e del Rinascimento che esse abbiano esaminato. In particolare segnalano che: “... i capitoli finali dedicati all’algebra ... sono fondamentali nella ricostruzione della storia di questa disciplina nei secoli dal XIII e XVI”.

4. Gli egiziani scrivevano le frazioni di denominatore diverso da 1 e diverse da $2/3$ come somme di frazioni unitarie (con denominatore uguale a 1). L'aritmetica egiziana era essenzialmente additiva, perché effettuavano le quattro operazioni utilizzando precisamente la scomposizione in frazioni unitarie. In questo modo, i calcoli diventavano complicati e laboriosi nella sua esecuzione. Un'analisi più approfondita sull'argomento si trova in Loria (pp. 41-47) e in Malisani (1996, pp. 27-28).
5. Proposizione 28: *Su una retta costruire un parallelogrammo uguale ad un poligono dato, mancante di un parallelogrammo simile ad un parallelogrammo dato. Occorre che il poligono dato non sia maggiore del poligono costruito sulla metà della retta data, e simile al poligono mancante* (Euclide, pp. 146-147). Questo teorema è l'equivalente geometrico della soluzione dell'equazione di secondo grado: $ax - (b/c)x^2 = S$, dove a è la retta, S è l'area del poligono dato, b e c sono i lati del parallelogramma dato. La seconda parte: $S \leq a^2c/4b$ corrisponde alla limitazione necessaria perché le radici dell'equazione siano reali.
- Proposizione 29: *Su una data retta costruire un parallelogrammo uguale ad un poligono dato, eccedente di un parallelogrammo simile ad un altro dato.* (Euclide, pp. 148)
- In termini algebrici, essa corrisponde all'equazione: $ax + (b/c)x^2 = S$ con a , b , c , e S numeri positivi dati. S non è soggetto ad alcuna limitazione (soltanto di essere positivo) perché l'equazione ammette sempre una soluzione reale.
6. Mohammed ibn Musa al-Khowârizmî (c.780-c.850) compose un trattato di aritmetica intitolato: *Algorithmi de numero indorum*. Il vocabolo "Algoritmo" è venuto dall'alterazione dell'appellativo: *al-Khowârizmî* attribuito a Mohammed. Questo termine dopo aver subito numerose variazioni, sia di significato sia di denominazione, fu utilizzato per esprimere una costante procedura di calcolo (Loria, pp. 336-337). Al-Khowârizmî scrisse anche un libro di algebra: *Al-jabr w'al muqâbala* ed, in questo titolo, indicò precisamente le due operazioni fondamentali della risoluzione di equazioni di primo grado, la parola *al-jabr* significa "ristabilire", cioè ristabilire l'equilibrio tra i membri di un'equazione mediante il trasporto di termini e il vocabolo *al muqâbala* significa "semplificazione", cioè la riduzione dei termini simili. La parola *al-jabr* si trasformò in *algebrista* in Spagna, si convertì *algebrae* tradotta in latino ed, infine, fu abbreviata in *algebra* per indicare il nome della disciplina.
7. L'elenco dei 25 tipi di equazioni risolte nel *Trattato d'Algibra* è il seguente:
- | | | |
|--------------------|------------------------|--------------------------|
| 1- $ax = b$ | 9- $ax^3 = bx^2$ | 17- $ax^4 + bx^3 = cx^2$ |
| 2- $ax^2 = b$ | 10- $ax^3 + bx^2 = cx$ | 18- $ax^4 + cx^2 = bx^3$ |
| 3- $ax^2 = bx$ | 11- $ax^3 + cx = bx^2$ | 19- $ax^4 = bx^3 + cx^2$ |
| 4- $ax^2 + bx = c$ | 12- $ax^3 = bx^2 + cx$ | 20- $ax^4 + bx^2 = c$ |
| 5- $ax^2 + c = bx$ | 13- $ax^4 = b$ | 21- $ax^4 + c = bx^2$ |
| 6- $ax^2 = bx + c$ | 14- $ax^4 = bx$ | 22- $ax^4 = bx^2 + c$ |
| 7- $ax^3 = b$ | 15- $ax^4 = bx^2$ | 23- $ax^3 + bx^2 = c$ |
| 8- $ax^3 = bx$ | 16- $ax^4 = bx^3$ | 24- $ax^3 = bx^2 + c$ |
| | | 25- $ax^3 + c = bx^2$ |
8. *L'Algebra* di Bombelli (scritta intorno al 1550, pubblicata in parte nel 1572 e posteriormente nel 1579) rappresenta un'opera di gran importanza e si distingue da qualsiasi altro testo dell'epoca. E' composta da cinque libri. Nei primi tre l'autore presenta in modo sistematico la teoria della risoluzione delle equazioni dei primi quattro gradi. Negli ultimi due (non pubblicati fino al 1929) realizza le dimostrazioni geometriche dei risultati ottenuti nei primi tre libri e la risoluzione di problemi geometrici mediante l'applicazione dell'algebra. E' interessante osservare che la disposizione e l'ordine degli argomenti trattati, i procedimenti costruttivi e dimostrativi eseguiti e il livello di linguaggio utilizzato rappresentano un notevole passo verso la costruzione dell'algebra simbolica.
9. Le *nozioni protomatematiche* sono quelle conoscenze che i matematici utilizzano senza chiamarle o definirle in termini matematici (implicite) (Cfr. Spagnolo, 1995, pp. 17).

10. Le equazioni del tipo $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$ si risolvono applicando la seguente formula:

$$x = \pm \left[\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^2}} \right].$$

Precisamente quando $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^2 < 0$ compare la radice quadrata di un numero negativo, cioè un numero immaginario. Ciononostante quando le due radici cubiche che compongono la soluzione risultano numeri complessi coniugati, la soluzione diventa un numero reale.

11. Diofanto come Aristotele considera che il numero è composto da unità discrete. I numeri utilizzati nella sua opera *Sui i numeri poligonali* per dimostrare le quattro proposizioni, in notazione moderna, sono: S_n il numero poligonale, n il lato del numero poligonale e d la differenza.
12. Gregory spiega la necessità di aggiungere alle cinque operazioni dell'algebra una sesta operazione (immaginabile): il passaggio al limite (Bourbaki, pp. 267-268).

BIBLIOGRAFIA

- ABDELJAOUAD, M., 2002. Proof in Arabian Algebra. *International Newsletter of the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Hiver 2002.
- ABDELJAOUAD, M., 2003. Some elements in the history of Arab mathematics. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/> - ISSN on-line 1592-4424.
- BALLIEU, M., 1993. Les rapports entre l'algèbre et la géométrie dans l'oeuvre de 'Umar al-Khayyam et Sharaf ad-Din at-Tusi (cinq siècles avant Descartes et Newton). *Mathématique & Pédagogie*, 91, pp . 7 - 21.
- BERZOLARI, E., 1950. *Enciclopedia della Matematica Elementare*, Vol. III, Parte 2. (Hoepli: Milano).
- BOMBELLI, R., 1966. *L'Algebra*. Con l'introduzione di U. Forti e la prefazione e l'analisi di E. Bortolotti. (Feltrinelli: Milano).
- BORTOLOTTI, E., 1950. Storia della Matematica Elementare. In L. Berzolari (ed.). Vol. III, Parte 2.
- BORTOLOTTI, E., 1966. Prefazione e Analisi di "L'Algebra". In Bombelli, pp. XXV - LIX.
- BOURBAKI, N., 1976. *Elementos de historia de las matemáticas*. (Madrid : Alianza). (Ed. orig.: *Eléments d'histoire des mathématiques*. Paris: Hermann, 1969).
- CHARBONNEAU L. & RADFORD L., 2002. Crafting an algebraic mind: intersection form history and the contemporary mathematics classroom. *Proceedings of 24th annual meeting the Canadian Mathematics Education Study Group (CMESG)*, Université du Québec à Montréal, pp. 47-60.
- CIPOLLA, M., 2001. *Storia della Matematica. Dai primordi a Leibniz*. A cura di V. Pipitone. (Mazzara del Vallo: Istituto Euro Arabo di Studi Superiori). (Edizione originale pubblicata nel 1949, Mazzara: Società Editrice Siciliana).

- COLIN, J. e ROJANO, T., 1991. Bombelli, la sincopación del álgebra y la resolución de ecuaciones. *L'educazione matematica*, XII (2), pp. 125 - 161.
- EUCLIDE, 1930. *Gli Elementi*, Libri V - IX. Ed. da F. Enriques e collaboratori. (Zanichelli: Bologna).
- FRANCI, R. e PANCANTI, M., 1988. Introduzione di "Il Trattato d'Algebra" Anonimo, pp. I - XXIX.
- GAGATSIS, A., 1997. Problemi di interpretazione connessi con il concetto di funzione. *La Matematica e la sua Didattica*, 2, pp. 132 - 149.
- GAGATSIS, A., 2000. Processi di traduzione ed il concetto di funzione. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 9, pp. 1 - 29.
- GHEVERGHESE JOSEPH, G., 2000. *C'era una volta un numero*. (Milano: Saggiatore).
- GLAESER, G., 1981. Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 2-3.
- GUILLEMOT, M., 1990-91. Entre arithmétique et algèbre: les méthodes de fausse position. Fascicule 5: *Didactique des Mathématiques*. (Rennes: Institut de Recherche Mathématique).
- KLINE, M., 1991. *Storia del pensiero matematico*. (Torino: Einaudi). Vol. I.
- LEONARD DE PISA, 1952. *Le livre des nombres carrés*. A cura e con l'introduzione di P. Ver Eecke. (Bruges: Desclée de Brouwer).
- LIBRI, G. 1838-1841. *Histoire des sciences mathématiques en Italie*. Paris: Jules Renouard, Vol I. Op. cit. da Charbonneau & Radford, 2002.
- LORIA, G., 1929. *Storia delle Matematiche*. Vol. I. (Torino: Sten).
- MALISANI, E., 1992. Incidencia de distintos tipos de estructura lógica de un problema sobre la conducta de resolución. *Revista Irice*, n. 1, pp. 41-59. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno3.htm> - ISSN on-line 1592-4424.
- MALISANI, E., 1993. Individuazione e classificazione di errori nella risoluzione di problemi algebrici e geometrici. Tesi di Laurea, Università degli Studi di Palermo.
- MALISANI, E., 1996. Storia del pensiero algebrico fino al cinquecento. Costruzione del simbolismo e risoluzione di equazioni. *Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.)*, n. 6, Palermo, pp. 26-77. - Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno6.htm> - ISSN on-line 1592-4424.
- MALISANI, E., 1999. Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico - Visión histórica. *Revista IRICE del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación*, n. 13, Rosario - Argentina, pp. 105-132. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno6.htm> - ISSN on-line 1592-4424.
- MARINO, T. e SPAGNOLO, F., 1996. Gli ostacoli epistemologici: Come si individuano e come si utilizzano nella Ricerca in Didattica della Matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 19B (2), pag.130 - 152.

- NESSELMANN, G. H., 1843. *Essez der Rechenkunst von Mohammed Beha-eddin ben Alhosain aus Amul*. Berlin: Arabisch und Deutsch. Op. cit. da Arzarello *et alii*, 1994.
- PELLOS, F., 1492. *Compendion de l'abaco*. Testo curato secondo l'edizione di 1492 da Robet Lafont. Op. cit. da M. Guillemot, 1990-91.
- RADFORD, L., 1996. The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: historical remarks form a didactic perspective. In N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht–Boston–London: Kluwer, pp. 39 – 53.
- RAPISARDI, F., 1865. Uno sguardo agli algebristi italiani. *Giornale del Gabinetto Letterario dell'Accademia Gioenia*, 4 (3), pag. 165 - 180. (Compilazione su Bollettino dell'Accademia Gioenia di scienze Naturali, 24 (338), pag. 41 - 56, 1991).
- RASHED, R., 1984. *Entre Arithmétique et Algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. (Paris: Les Belles Lettres).
- SPAGNOLO, F., 1995. Obstacles Epistémologiques: Le Postulat d'Eudoxe - Archimede. Tesi di Dottorato, Università di Bordeaux I. *Quaderni di Ricerca Didattica G.R.I.M., supplemento n. 5*. Pubblicata dall'Atelier National de Reproduction des Thésés Microfiches (BP - 38040 Grenoble. Cedex 9 - Francia).
- SPAGNOLO, F., 1998. Il ruolo della storia delle matematiche nella ricerca in didattica. *Storia e ricerca in didattica*. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/storiadida.pdf>
- TRATTATO D'ALGIBRA, 1988. (Manoscritto anonimo del XIV secolo). A cura e con l'introduzione di R. Franci e M. Pancanti. Siena, *Quaderno del Centro Studi della Matematica Medioevale*, 18.
- VER EECKE, P., 1959. Diophante d'Alexandrie. *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*. Paris : Blanchard. Op. cit. da L. Radford, 1996.
- ZAPPELLONI, M. T., 1930. Commento sulle proposizioni 28-29 del Libro VI degli Elementi di Euclide. In *Euclide*, pag. 150 - 157.

CAPITOLO DUE:

IL QUADRATO MAGICO. UN'ESPERIENZA SULLA TRANSIZIONE TRA IL LINGUAGGIO ARITMETICO E IL LINGUAGGIO ALGEBRICO

2.1 INTRODUZIONE

Molti studenti incontrano serie difficoltà nel passaggio dal pensiero aritmetico al pensiero algebrico. Numerose ricerche studiano i cambiamenti concettuali necessari in questa transizione, relativi all'uguaglianza, alle convenzioni di notazione e all'interpretazione del concetto di variabile (Matz, 1982; Kieran & Filloy, 1989; Kieran, 1991). Altri lavori centrano l'attenzione sulle difficoltà degli alunni nel risolvere espressioni algebriche, equazioni e problemi algebrici (Gallardo & Rojano, 1988; Filloy & Rojano, 1989; Herscovics & Linchevski, 1994, 1996).

Molti errori riscontrabili nei protocolli degli allievi affondano le loro radici nel rapporto dialettico, mai superato, tra aspetti procedurali e aspetti strutturali, osservati rispettivamente ma non esclusivamente nell'aritmetica e nell'algebra (Arzarello *et alii*, 1994).

Alcuni studi rivelano precisamente che il punto di transizione critica è rappresentato dall'introduzione del concetto di variabile (Matz, 1982; Wagner, 1981, 1983). Questo concetto è complesso perché si usa con significati diversi in differenti situazioni. La sua gestione dipende dal particolare modo di utilizzarlo nella risoluzione di problemi. Ma la molteplicità di aspetti è precisamente la causa per cui questa nozione diventa difficile da definire e gli alunni, possibilmente, incontrano delle difficoltà nello studio dell'algebra (Wagner, 1981, 1983; Usiskin, 1988).

Il concetto di variabile può assumere una pluralità di concezioni:

- Ø *numero generalizzato* (si presenta nelle generalizzazioni e nei metodi generali);
- Ø *incognita* (può essere calcolata considerando le restrizioni del problema);
- Ø *“in relazione funzionale”* (relazione di variazione con altre variabili);
- Ø *segno del tutto arbitrario* (si presenta nello studio delle strutture);
- Ø *registro di memoria* (in informatica) (Usiskin, 1988).

Le difficoltà incontrate dal soggetto che apprende possono essere molto vicine a quelle sperimentate da generazioni di matematici. Certi studi sperimentali (Harper, 1987; Sfar

1992) sembrano confermare la tesi piagetiana di convergenza tra sviluppo storico ed sviluppo individuale (Garcia e Piaget, 1989).

Dall'approfondita analisi storica effettuata nel capitolo precedente, abbiamo ricavato alcune osservazioni importantissime sullo sviluppo del linguaggio algebrico, mettendo in evidenza le principali concezioni, i procedimenti precursori e i passaggi da un concetto all'altro ed, in particolare, i passaggi attraverso i livelli linguistici delle diverse fasi retorica, sincopata e simbolica. A partire dalle riflessioni effettuate sulle rappresentazioni epistemologiche e storico-epistemologiche, si imposta lo studio degli ostacoli che gli alunni incontrano per costruire ed appropriarsi di certi concetti, nel passaggio tra il pensiero aritmetico ed il pensiero algebrico.

Il presente lavoro ha come finalità studiare alcune caratteristiche del periodo di transizione tra il linguaggio aritmetico e il linguaggio algebrico. Si pretende analizzare se le diverse concezioni di variabile vengono evocate dagli alunni nella risoluzione di problemi e se i procedimenti in lingua naturale e/o in linguaggio aritmetico prevalgono come strategie risolutive, in assenza di adeguata padronanza del linguaggio algebrico.

Questa sperimentazione fu effettuata, grazie alla collaborazione di un gruppo di insegnanti coordinati dalla Prof. Teresa Marino e dall'autore, in alcune classi della scuola media (11-12 anni) e superiore (14-15 anni) di Piazza Armerina (paese della provincia di Enna - Italia), durante i mesi di Gennaio e Febbraio del 2002. Questo lavoro fa parte di un progetto di sperimentazione sull'insegnamento-apprendimento della matematica intitolato "*Argomentare, congetturare e dimostrare nella scuola di tutti*", coordinato dal Prof. Filippo Spagnolo.

Il lavoro sperimentale è stato diviso in tre fasi: nella prima, i docenti hanno messo a punto delle situazioni a-didattiche e hanno realizzato l'analisi a-priori del problema (Cfr. Brousseau, 1986; Brousseau, 1998). Nella seconda, i dati sperimentali sono stati analizzati qualitativamente e nell'ultima fase, i dati sono stati analizzati quantitativamente, utilizzando il software di statistica inferenziale CHIC 2000 (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) e l'analisi fattoriale delle corrispondenze S.P.S.S. (Statistical Package for Social Sciences).

I docenti hanno eseguito la sperimentazione didattica sulla risoluzione del quadrato magico: "completare il quadrato inserendo i numeri mancanti, in modo che la somma dei numeri di ciascuna riga, colonna o diagonale sia sempre la stessa".

La proposta del quadrato magico ha diverse motivazioni: si tratta di un problema che si adatta abbastanza bene alla sperimentazione nei due livelli scolastici, perché può essere

presentato con modalità diverse e con differenti gradi di difficoltà. Ma fondamentalmente, il quadrato magico permette di studiare alcuni aspetti del periodo di transizione tra il linguaggio aritmetico e quello algebrico.

2.2 IPOTESI

H₁: Gli alunni evocano la diversa concezione di variabile (costante, incognita, cosa che varia, ecc.) anche in assenza di un'adeguata padronanza del linguaggio algebrico.

H₂: I procedimenti in lingua naturale e/o in linguaggio aritmetico prevalgono come strategie risolutive in assenza di un'appropriata padronanza del linguaggio algebrico.

2.3 RAPPORTI SPERIMENTALI PER LIVELLO SCOLASTICO

2.3.1 SCUOLA MEDIA

Hanno partecipato alla sperimentazione 27 alunni appartenenti a due classi prime medie (11-12 anni).

2.3.1.1 SITUAZIONE A-DIDATTICA E LE SUE FASI

Fase 1: Consegna

Si comunica agli alunni il tipo di gioco da fare.

Si invita un alunno a giocare con l'insegnante alla lavagna con uno dei quadrati magici 3×3 . Ci si accerta, con domande, che la consegna sia stata recepita in modo corretto da tutti.

Fase 2: Azione

Si consegna ad ogni singolo alunno un quadrato magico 3×3 da completare e si invitano tutti gli alunni a scrivere su un foglio il tipo di procedimento che man mano vanno utilizzando per arrivare alla soluzione del problema. Il vincitore sarà colui che per primo riesce a consegnare la soluzione con la descrizione completa del procedimento.

(I quadrati magici utilizzati nell'esperienza si presentano nell'Appendice N° 1 alla fine della Capitolo 2).

Fase 3: Formulazione

La classe viene divisa in tre gruppi eterogenei per abilità logico-matematiche. Ad ogni gruppo viene consegnato il seguente quadrato 4×4 :

“Completa il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire sia uguale a 92”.

Somma $26 + a$

14		1	
	9	12	
11		a	10
	16	13	

Ogni gruppo dovrà trovare ora una soluzione comune. Il procedimento risolutivo dovrà essere consegnato anche questa volta per iscritto dal gruppo. Vince il gruppo che per primo completa il quadrato e la descrizione del procedimento.

Fase 4: Validazione

Si scrivono sulla lavagna le affermazioni risolutive che tutti ritengono valide e si arriva a formulare un teorema.

Tempi: 50 minuti (un'unità oraria) per l'azione e altri 50 minuti consecutivi per la formulazione. La validazione potrà essere invece trattata in tempi successivi.

2.3.1.2 L'ANALISI A-PRIORI

Si ipotizza che gli alunni possano ricorrere ad una o più delle seguenti strategie risolutive individuate nell'analisi a-priori:

- A1: Inserire numeri a caso
- A2: Complementare + inserire numeri in caselle a caso
- A3: Differenza + inserire numeri in caselle a caso
- A4: Complementare
- A5: Complementare e per differenza
- A6: Per differenza
- A7: Complementare + equazione di primo grado
- A8: Differenza + equazione di primo grado

A9: Equazione di primo grado

A10: Non tenta nessuna strategia risolutiva

A11: Ha una strategia risolutiva, ma non riesce a comunicare per iscritto il procedimento.

In una tabella a doppia entrata “alunni/strategie”, per ogni alunno si indica con il valore 1 le strategie che esso ha utilizzato e con il valore 0 le strategie che non ha adoperato.

L’elenco delle strategie effettivamente utilizzate dagli alunni, che hanno partecipato alla sperimentazione, per risoluzione del quadrato magico e che sono state considerate nella tabulazione dei dati è il seguente:

A1: inserire i numeri a caso

A2: complementare attuata inserendo i numeri in una casella a caso

A4: complementare

A6: per differenza

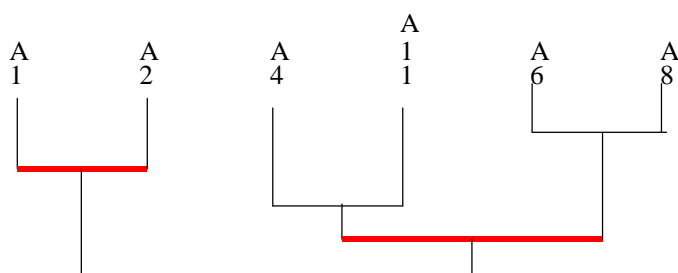
A8: per differenza con equazione di primo grado

A11: complementare senza la consegna di una descrizione scritta corretta

La tabella dei dati si presenta nell’Appendice N° 2 alla fine del Capitolo 2.

2.3.1.3 ANALISI QUANTITATIVA DEI DATI

Albero delle similarita’



Arbre de similarité : C:\CHIC\chic 2000\CartelEXC CSV (MS-DOS).csv

Dal grafico si evidenzia una maggiore similarità fra le seguenti coppie di strategie:

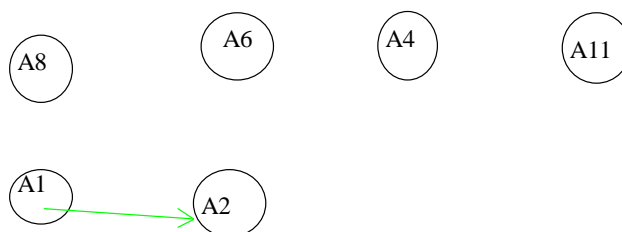
- A1 e A2: “inserire i numeri a caso” e “complementare inserendo numeri in una casella a caso”.
- A4 e A11: “complementare” e “complementare senza la consegna di una descrizione scritta corretta”.
- A6 – A8: “per differenza “ e “per differenza con equazione di primo grado”.

Dal grafico emergono due gruppi.

Al grande gruppo appartengono gli alunni che hanno completato il quadrato inserendo i numeri a caso o hanno applicato la strategia del complementare inserendo numeri in una casella a caso.

Al piccolo gruppo, invece, appartengono coloro che hanno scelto una strategia vincente, calcolando i numeri da inserire per differenza, per differenza con equazione di primo grado o hanno applicato la strategia del complementare anche senza la consegna di una descrizione scritta corretta.

Grafico implicativo

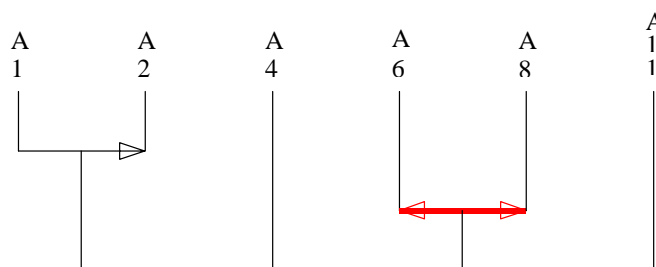


Graphe implicatif : C:\CHIC\chic 2000\CartelEXC CSV (MS-DOS).csv

99 95 92 85

Dal grafo implicativo si osserva che esiste un'unica implicazione fra la strategia dell'inserire i numeri a caso e la strategia complementare attuata inserendo i numeri in una casella a caso.

Albero gerarchico



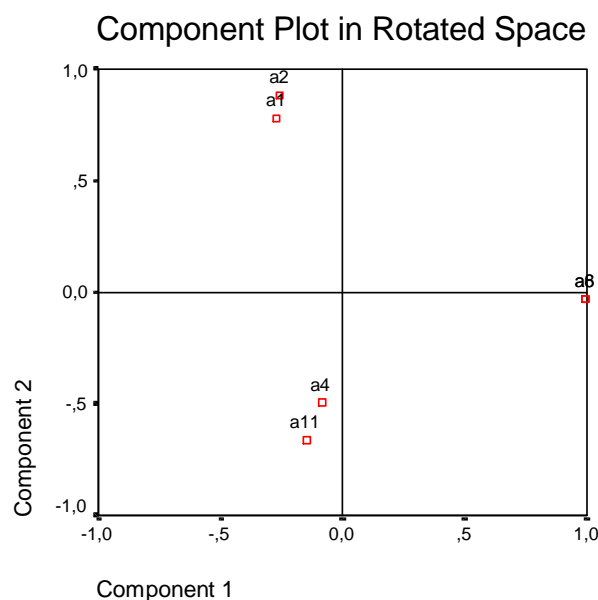
Arbre hiérarchique : C:\CHIC\chic 2000\CartelEXC CSV (MS-DOS).csv

Dall'albero gerarchico si evidenzia una gerarchia marcata tra la strategia A1 e A2, in quanto l'alunno che sceglie di inserire un numero a caso, sicuramente potrà anche scegliere la strategia del complementare e dell'inserire i numeri in una casella a caso.

Si evidenzia inoltre l'equivalenza (doppia implicazione) fra la strategia A6 “per differenza” e la strategia A8 “per differenza con equazione di primo grado”.

Non c'è gerarchia tra le variabili A4 “complementare” e A11 “complementare senza la consegna di un procedimento scritto in modo corretto”.

Analisi fattoriale



Dall'analisi fattoriale si evidenzia che le strategie A1 – A2 “inserire i numeri a caso e complementare inserendo numeri in una casella a caso”, e le strategie A4 – A11 “complementare e complementare senza la consegna di una descrizione scritta corretta”, sono contrapposte e la loro antitesi dipende dalla strategia risolutiva A8 “per differenza con equazione di primo grado”. Questa ultima quindi discrimina le due coppie.

2.3.1.4 ANALISI QUALITATIVA

In questa sezione si presenta l'analisi qualitativa effettuata in una classe di prima media. Nella fase di “formulazione” gli alunni sono stati divisi in tre gruppi e ogni gruppo aveva un portavoce. Sono state effettuate le registrazioni foniche delle discussioni. L'analisi qualitativa viene effettuata sui protocolli ottenuti dal lavoro della sbobinatura.

Gruppo 1

Il gruppo disattende la consegna che specifica che il numero più grande da inserire deve essere uguale a 92 e non consegna una strategia scritta.

Da subito si intuisce che uno degli elementi del gruppo funge da traino, mentre gli altri si lasciano guidare. Il gruppo, sin dall'inizio, procede tacitamente su progetto "somma 26". L'elemento trainante comincia da una casella a caso, in seguito, dopo essersi imbattuto quasi casualmente in alcuni "dati di fatto" (una colonna completa, una riga con una sola casella vuota) inizia un lavoro di gerarchizzazione e generalizzazione con alcuni riferimenti di tipo pragmatico. In tale lavoro la "a" che, in terza colonna compare già con numeri che complessivamente danno per somma 26, viene posta uguale al valore zero. Solo dopo che l'elemento trainante ha completato, con insuccesso, il quadrato, la restante parte del gruppo sembra incoraggiata ad intervenire. Il gruppo quindi, torna su ciò che si è fatto: *"proviamo in tutti i modi..."*, *"facciamo le diagonali"*, *"forse dobbiamo fare così..."*; *"forse dobbiamo cambiare questo..."*. Nel tentativo di "fare quadrare i conti" il gruppo in due o più occasioni inserisce in qualche casella numeri "da sottrarre". Si susseguono i vari tentativi, ma il gruppo non riesce a sistemare il quadrato neanche sulla somma $26+a$.

Gruppo 2

Il gruppo non consegna una strategia scritta. All'inizio del lavoro uno dei componenti afferma che la "a" è un numero che deve essere sommato a tutte le colonne, a tutte le righe e alle due diagonali, c'è quindi in maniera non consapevole l'intuizione del concetto di variabile.

Da subito il gruppo lavora in modo che la somma all'interno delle caselle delle varie righe, colonne e diagonali sia 92. I ragazzi procedono quindi, con una definizione non completamente corretta ma chiara della consegna. La strategia organizzativa manca però della fase progettuale in quanto i ragazzi procedono a caso, riempiendo ordinatamente le caselle delle varie righe. Completate le righe, i ragazzi pensano di essere arrivati alla soluzione. Quando si chiede loro di verificare se la somma risulta anche sulle diagonali, il gruppo pensa che forse il numero 66 è stato inserito in caselle sbagliate. I ragazzi tentano altre strategie ma non arrivano alla soluzione.

Nell'attività di questo gruppo emerge complessivamente un "germe" di pensiero algebrico.

Gruppo 3

Il gruppo disattende la consegna che specifica che il numero più grande da inserire deve essere uguale a 92. Consegna una descrizione scritta della strategia. L'analisi qualitativa

viene fatta sulla base di questa descrizione e sulla registrazione fonica eseguita durante il lavoro.

La “*a*” presente all’interno del quadrato viene considerata un simbolo sostituibile con un numero e i membri del gruppo concordano nel ritenere che la somma del quadrato 4×4 deve dare 26. Anche in questo gruppo manca una fase progettuale, poiché i ragazzi procedono a caso, riempiendo ordinatamente le caselle delle varie righe. Nell’ultima riga, dove la somma dei numeri già inseriti dà un valore maggiore di 26, il gruppo su suggerimento pragmatico “...io li ho fatti con il meno...” di uno dei componenti, inserisce l’uso del numero negativo (inteso come qualcosa da sottrarre).

L’attività successiva evidenzia l’uso di un falso ragionamento giustificato, in cui il gruppo lavora anche fuori del quadrato con l’obiettivo di raggiungere somma 26, cioè aggiungendo o sottraendo alla somma data dai numeri presenti in tutte le caselle di una riga o di una colonna altri numeri (che però non possono essere collocati in nessuna casella). Con questa ultima strategia il gruppo sistema le altre caselle delle successive colonne. Il problema resta aperto quando il gruppo deve affrontare la soluzione della diagonale secondaria.

2.3.1.5 DISCUSSIONE DEI RISULTATI

Gli sperimentatori ritengono che la ricerca di strategie risolutive relative al quadrato magico 3×3 sia risultata, in genere, abbastanza semplice ai ragazzi. Più difficile, invece, si è rivelato l’approccio alle strategie risolutive del quadrato magico 4×4 .

Nel proporre la risoluzione di questo ultimo quadrato, l’intento era quello di studiare alcuni aspetti del periodo di transizione tra il linguaggio aritmetico e quello algebrico.

La consegna riguardante il quadrato magico 4×4 (esplicitata forse volutamente con un linguaggio in parte ambiguo) è risultata sostanzialmente poco chiara alla maggior parte degli alunni.

Nel riproporre questa situazione a-didattica, gli sperimentatori consigliano quindi di sostituire il testo di questo quesito con una frase che renda più comprensibile la consegna, ad esempio: “completa il quadrato magico in modo che la sua somma sia uguale $26+a$. Sostituisci “*a*” in modo che il numero più grande da inserire in una delle caselle sia 92”.

Dall’analisi quantitativa e qualitativa dei dati emerge che, negli alunni compare già il pensiero aritmetico abbastanza strutturato. Anche se un gruppo numeroso procedeva ancora per tentativi, perché nel quadrato 3×3 hanno inserito i numeri a caso o hanno

scelto le caselle a caso, questo è dovuto sicuramente alla complessità stessa del compito. Per completare il quadrato magico è necessario capire la dipendenza reciproca che esiste tra le diverse righe, colonne e diagonali e quindi, l'alunno doveva individuare le caselle dalle quali poteva iniziare e, successivamente, continuare a giocare. E' interessante rilevare che, nel caso che la somma parziale di alcune caselle era superiore alla somma totale del quadrato, i ragazzi hanno utilizzato i numeri negativi come "numeri da sottrarre".

Rispetto alle diverse concezioni di variabile evocate dagli alunni, è possibile rilevare che alcuni hanno considerato la "a" una costante uguale a 0; per altri, invece, era un simbolo che poteva essere sostituito da un numero. Per altri ancora, la "a" rappresentava una variabile, in altre parole un simbolo che doveva essere sommato a tutte le colonne, a tutte le righe e alle due diagonali. Anche se questi alunni non avevano ancora iniziato lo studio dell'algebra, hanno considerato il simbolo "a" sotto differenti aspetti: costante, valore numerico, "0", "cosa che varia". Quindi, si osserva chiaramente la presenza del pensiero algebrico, anche se non ancora strutturato perché i ragazzi non sono riusciti ad operare con il valore simbolico.

L'analisi qualitativa delle registrazioni, relative alla fase della "formulazione", ha mostrato che le strategie risolutive utilizzano fondamentalmente il linguaggio naturale e quello aritmetico; il linguaggio algebrico è pressoché assente.

2.3.2 SCUOLA SUPERIORE

Hanno partecipato della sperimentazione 39 alunni appartenenti a due classi prime del Liceo Psico-Pedagogico (14-15 anni).

2.3.2.1 SITUAZIONE A-DIDATTICA E LE SUE FASI

Fase 1: Consegna (durata 30')

L'insegnante simula il gioco con l'alunno, spiegando in modo chiaro e comprensibile la procedura per la compilazione del quadrato 3×3 . Durante il gioco, commenta e illustra le fasi. Proseguono poi il gioco due alunni, scelti a caso, alla lavagna sempre con un altro quadrato magico 3×3 .

In seguito, gli altri ragazzi completano altri quadrati magici 3×3 , giocando a gruppi di due, decidendo di comune accordo i numeri da inserire, scegliendo dunque una strategia adeguata.

Le regole scaturiscono dalla situazione, non sono date dall'insegnante, di conseguenza l'azione riduce l'ambiguità del messaggio e introduce la retroazione.

(I quadrati magici utilizzati nell'esperienza sono presentati nell'Appendice N° 3 alla fine del Capitolo 2).

Fase 2: Lavoro individuale con motivazione, fase d'azione (durata 50')

L'insegnante si allontana e l'allievo si prende carico del problema. I ragazzi devono compilare un quadrato 4×4 individualmente, riportando sul foglio le varie fasi della strategia adottata. Devono decidere fra le eventuali strategie individuate, quella più conveniente e motivarla.

In questa fase ogni alunno viene responsabilizzato, costruisce da solo il proprio sapere.

Alla fine di questa fase, i ragazzi consegnano i propri lavori che verranno in seguito valutati quantitativamente mediante un'apposita griglia.

Fase 3: Gioco di squadra, gruppo contro gruppo (durata 20')

Tutti gli alunni sono divisi in due gruppi, diventa un gioco di squadra. Ogni gruppo ha un portavoce. All'interno del gruppo si discute, ciascun allievo cerca di convincere gli altri della propria strategia, e per fare questo deve comunicare: in questa fase entrano in gioco l'argomentare e il congetturare. Avviene dunque la formulazione di una conoscenza.

Questa fase e quella successiva, sono registrate dall'insegnante e poi saranno valutate qualitativamente.

Fase 4: Situazione di validazione (il gioco della scoperta, prova e dimostrazione) (durata 20').

In questa fase l'alunno deve fare retroazioni, deve ragionare, discutere una situazione, condividere o rivedere le opinioni.

Si prende coscienza della strategia decisa di comune accordo e poi si scrive su un foglio la dimostrazione. Gli alunni sono motivati a discutere una situazione, è così favorita la

loro validazione. Il “perché” è appreso dall’allievo, diventa un sapere sociale e non individuale.

Vince la squadra che riesce a completare prima il quadrato, a convincere tutto il gruppo della strategia usata e a formulare una dimostrazione valida.

2.3.2.2 DESCRIZIONE DELLA FASE DI VALIDAZIONE

Il gruppo vincente della 1° “A” ha utilizzato il **metodo aritmetico**: ha considerato che almeno una casella deve contenere il numero 92 e che la somma deve essere uguale a $26+a$. Prendendo in esame la colonna in cui sono inseriti i numeri 1, 12 e 13, la loro somma è 26 per cui hanno sostituito ad “a” il massimo numero che è 92.

Alcuni alunni del secondo gruppo della 1° A, invece, hanno iniziato con un **procedimento aritmetico-algebrico** inserendo alcuni valori: 5, $-4+a$, $9+3a$, ecc., ma non hanno completato il quadrato perché non capivano a quale casella attribuire il valore 92. Questa strategia è stata abbandonata per adoperare il **metodo aritmetico**.

Entrambi i gruppi della 1° B hanno adoperato il **metodo aritmetico-algebrico**: hanno considerato che una casella di ogni riga e di ogni colonna deve contenere il simbolo “a” e hanno completato il quadrato. Nelle caselle hanno notato la presenza di: a , $a-2$, $a-4$, $a-6$ e hanno considerato che il valore 92, il più grande, doveva sostituire “a”.

(Una descrizione più esauriente sui metodi risolutivi si presenta nell’Appendice N° 4 alla fine del Capitolo 2).

2.3.2.3 L’ANALISI A-PRIORI

L’analisi a-priori del problema ha permesso di determinare tutte le possibili strategie che possono utilizzare gli alunni per la risoluzione del quadrato magico.

- A1: Inserisce i numeri a caso.
- A2: Come A1 e abbandona.
- A3: Calcolo aritmetico considerando “a” costante qualunque, tiene conto della consegna 92.
- A4: Come A3 e abbandona.
- A5: Calcolo aritmetico considerando “a” costante qualunque, non tiene conto della consegna 92.
- A6: Come A5 senza giustificare i valori ottenuti.
- A7: Come A5 e abbandona.

- A8: Calcolo algebrico considerando “ a ” costante qualunque, inserisce alcuni valori sbagliati senza giustificarli, non considera la consegna 92.
- A9: Calcolo algebrico considerando “ a ” costante qualunque, inserisce alcuni valori sbagliati giustificandoli, non considera la consegna 92.
- A10: Calcolo aritmetico considerando “ a ” costante, considera la somma uguale a 92.
- A11: Come A10 e abbandona.
- A12: Calcolo algebrico, “ a ” costante ma non considera la consegna 92.
- A13: Come A12 senza giustificare i valori ottenuti.
- A14: Calcolo algebrico, “ a ” costante, considera la consegna 92.
- A15: Come A14 e abbandona.
- A16: Calcolo algebrico, “ a ” costante, imposta un sistema di 7 equazioni in 7 incognite.
- A17: Come A16, considera la consegna 92.
- A18: Come A16 e abbandona.
- A19: Come A17 e abbandona.
- A20: Calcolo algebrico, “ a ” variabile, imposta un sistema di 8 equazioni in 8 incognite, ma non considera la consegna 92.
- A21: Come A20, considera la consegna 92.
- A22: Come A20 e abbandona.
- A23: Come A21 e abbandona.
- A24: Calcolo algebrico, “ a ” costante, imposta un sistema di 3 equazioni in 3 incognite, ma non considera la consegna 92.
- A25: Come A24, considera la consegna 92.
- A26: Come A24 e abbandona.
- A27: Come A25 e abbandona.
- A28: Calcolo algebrico, “ a ” variabile, imposta un sistema di 3 equazioni in 3 incognite, ma non considera la consegna 92.
- A29: Come A28, considera la consegna 92.
- A30: Come A28 e abbandona.
- A31: Come A29 e abbandona.

In una tabella a doppia entrata “alunni/strategie”, per ogni alunno si indica con il valore 1 le strategie che esso ha utilizzato e con il valore 0 le strategie che non ha adoperato.

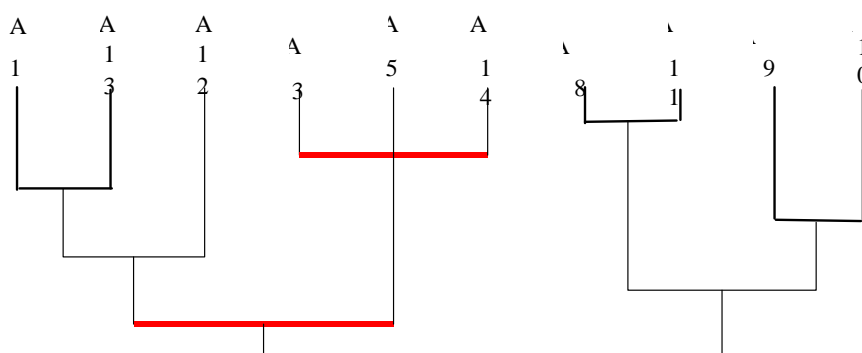
L'elenco delle strategie effettivamente utilizzate dagli alunni, che hanno partecipato alla sperimentazione, per risoluzione del quadrato magico e che sono state considerate nella tabulazione dei dati è il seguente:

- A1: Inserisce i numeri a caso.
- A3: Calcolo aritmetico considerando "a" costante qualunque, tiene conto della consegna 92.
- A5: Calcolo aritmetico considerando "a" costante qualunque, non tiene conto della consegna 92.
- A8: Calcolo algebrico considerando "a" costante qualunque, inserisce alcuni valori sbagliati senza giustificarli, non considera la consegna 92.
- A9: Calcolo algebrico considerando "a" costante qualunque, inserisce alcuni valori sbagliati giustificandoli, non considera la consegna 92.
- A10: Calcolo aritmetico considerando "a" costante e la somma uguale a 92.
- A11: Come A10 e abbandona.
- A12: Calcolo algebrico, "a" costante ma non considera la consegna 92.
- A13: Come A12 senza giustificare i valori ottenuti.
- A14: Calcolo algebrico, "a" costante, considera la consegna 92.

La tabella dei dati si presenta nell'Appendice N° 5 alla fine del Capitolo 2.

2.3.2.4 ANALISI QUANTITATIVA DEI DATI

Albero delle similarità



Arbre de similarité : C:\CHIC\chic 2000\GRIGRUPPO1.csv

Dal grafico emergono due raggruppamenti simili tra loro:

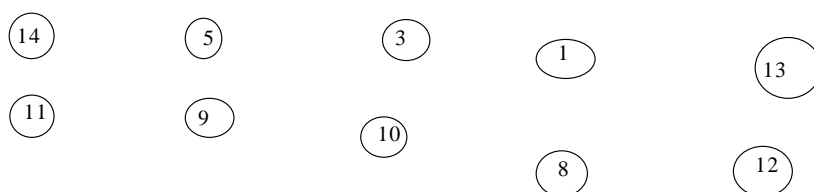
$R1 = (A1, A13, A12, A3, A5, A14)$ e $R2 = (A8, A11, A9, A10)$.

Al gruppo R1 appartengono soprattutto gli alunni che hanno utilizzato il calcolo algebrico assegnando ad “a” un valore costante. Le strategie A1, A3 e A5 di questo gruppo riguardano il calcolo aritmetico, ma sono state adoperate soltanto da quattro allievi.

Dal secondo gruppo fanno parte coloro che hanno utilizzato le strategie che si riferiscono, invece, al calcolo aritmetico o a calcoli algebrici errati senza considerare la consegna 92.

In ogni caso è interessante rilevare che la maggior parte degli alunni ha eseguito calcoli algebrici.

Grafico implicativo

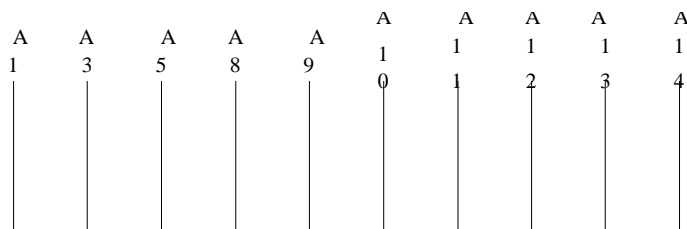


Graphe implicatif : C:\CHIC\chic 2000\GRIGRUPPO1.csv

99 95 90 85

Da questo grafico si deduce che non ci sono implicazioni rilevanti fra le variabili.

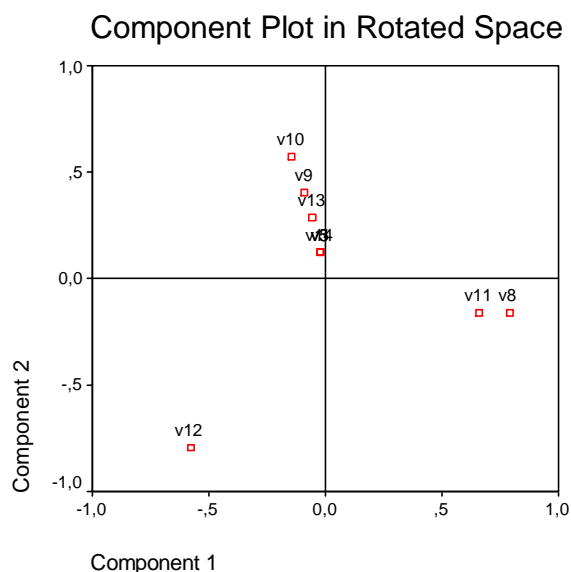
Albero gerarchico



Arbre hiérarchique : C:\CHIC\chic 2000\GRIGRUPPO1.csv

Il grafico non presenta dati significativi per la rilevazione statistica.

Analisi fattoriale



Dalla proiezione bidimensionale si osserva che le strategie A8 e A11 (calcoli algebrici sbagliati e calcolo aritmetico con abbandono della risoluzione) si contrappongono alla strategia A12 (calcolo algebrico), rispetto al secondo fattore (asse verticale). Tutte le altre variabili A5, A9, A10, A13, A14 formano una nuvola sull'asse verticale e corrispondono principalmente a quelle strategie che non considerano la consegna 92 o lo fanno in maniera sbagliata, cioè tenendo conto del 92 come la somma del quadrato magico.

2.3.2.5 ANALISI QUALITATIVA

Durante tutte le fasi del gioco, gli alunni hanno mostrato notevole interesse e una partecipazione attiva. Il compito è risultato stimolante e piacevole.

Nella **prima fase** sia quando è stato spiegato alla lavagna il quadrato 3×3 sia quando hanno giocato in coppia, gli alunni hanno risolto con facilità ed entusiasmo il lavoro assegnato.

Nella **seconda fase**, quando è stato consegnato il quadrato magico 4×4 , i ragazzi hanno lavorato individualmente mostrando qualche difficoltà. Infatti molti si aspettavano un quadrato magico 4×4 che non contenesse alcuna variabile, ma superato il primo impatto, la maggior parte ha potuto a completare il quadrato magico. Nessuno, però, è riuscito a comprendere la parte della consegna che diceva testualmente: “Completare il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire sia uguale a 92”. Su questa seconda parte gli alunni hanno discusso ampiamente nella **terza fase**, cioè

durante il lavoro di gruppo proponendo vari tipi di strategie. (I protocolli dell'esperienza si presentano nell'Appendice 6 alla fine del Capitolo 2).

2.3.2.6 DISCUSSIONI DEI RISULTATI

Dall'analisi qualitativa dei protocolli emerge anche che il simbolo "a" assume per gli alunni diversi aspetti, per esempio:

- "Quindi se $a = 92$, dobbiamo dare un *valore ad a*".
- "...ad a non si deve dare alcun valore".
- "...ad a non si deve attribuire niente".
- "... a deve avere un *valore*, perché a è una *costante*, non è *variabile*".
- "Se abbiamo detto che a è una *costante*, come può essere *negativa*?".
- " a è un *incognita* quindi deve essere sostituito con un numero che non supera il 92..."
- "Se noi mettiamo 92 e lo attribuiamo alla a , allora la a si deve considerare come una specie di *variabile* e dobbiamo sottrarla per questi: -6, -2, -4; il problema è..."

Quindi il simbolo "a" viene considerato come una costante, un valore numerico, una variabile, un'incognita, un simbolo senza alcun valore. E' eloquente l'espressione di Felicia, quando si riferisce al valore che assume la somma del quadrato: "...*dipende dal significato che diamo ad a*". Precisamente, una caratteristica difficile dei valori simbolici è che la loro natura precisa cambia, possono assumere aspetti diversi che hanno soltanto una particolarità in comune: il fatto di essere astratti.

Sia dall'analisi qualitativa che da quella quantitativa si evince che, la maggior parte degli alunni ha eseguito calcoli algebrici, in altre parole ha operato con il valore simbolico "a"; anche se in alcuni casi si sono registrati degli errori, per esempio: considerare $26+a$ come $26a$.

Mentre in una classe è prevalso il pensiero aritmetico su quello algebrico, perché gli alunni hanno trasformato il quadrato magico in un problema aritmetico attribuendo ad "a" il valore 92; nell'altra classe invece, i ragazzi hanno completato le diverse caselle con numeri ed espressioni contenenti la "a" poi, stimolati dall'insegnante a compiere una retroazione (feed-back), hanno dedotto che il valore 92 doveva essere attribuito ad "a". E' opportuno sottolineare che alcune delle strategie previste nell'analisi a-priori: impostazioni di equazioni di primo grado o di sistemi di equazioni, non sono state

adottate dagli alunni. Probabilmente ciò sia stato determinato dal fatto che questi argomenti non sono stati trattati nel corso dell'anno scolastico.

In ogni caso è importante mettere in evidenza la presenza del pensiero algebrico in fasi diverse di organizzazione, che dipendono dai singoli alunni.

2.4 CONCLUSIONI

Dall'analisi dei dati si evince che gli alunni di prima media considerano il simbolo "a" del quadrato magico come: costante, valore numerico, "0" e "cosa che varia", anche se non hanno iniziato ancora con lo studio dell'algebra. Per gli alunni della scuola superiore, invece, il simbolo "a" può assumere aspetti ben diversi: costante, costante non negativa, valore numerico, variabile, incognita e simbolo senza alcun valore, secondo del particolare modo di utilizzarlo all'interno dell'attività di risoluzione del problema e dallo sviluppo individuale del pensiero algebrico. Quindi questi risultati permettono di falsificare la prima ipotesi: "Gli alunni evocano le diverse concezioni di variabile anche in assenza di un'adeguata padronanza del linguaggio algebrico".

Gli allievi di prima media non sono riusciti ad operare con il valore simbolico e hanno utilizzato essenzialmente strategie risolutive in linguaggio aritmetico e/o naturale. La maggior parte degli alunni della scuola superiore, invece, ha eseguito calcoli algebrici anche se in qualche caso si sono registrati degli errori ($26 + a$ come $26a$).

In una prima della scuola superiore il gruppo vincente ha utilizzato il procedimento aritmetico che consiste nell'attribuire ad "a" il valore 92. Alcuni alunni dell'altro gruppo, invece, hanno iniziato con un procedimento aritmetico-algebrico inserendo alcuni valori: 5, $-4+a$, $9+3a$, ecc., ma non sono riusciti ad completare il quadrato perché non capivano a quale casella dovevano attribuire il valore 92. Quindi, gli studenti hanno abbandonato questa strategia per adoperare, anche essi, il metodo aritmetico.

Nell'altra classe della scuola superiore entrambi i gruppi hanno utilizzato il procedimento aritmetico-algebrico, considerando che una casella di ogni riga e di ogni colonna deve contenere il simbolo "a" e hanno completato il quadrato. Nelle caselle gli alunni hanno notato la presenza di: a , $a - 2$, $a - 4$, $a - 6$; stimolati dall'insegnante a compiere una retroazione (feed-back), hanno dedotto che il valore 92, essendo il più grande, doveva essere attribuito ad "a".

E' interessante sottolineare che gli alunni non hanno adottato nessuna delle strategie algebriche previste nell'analisi a-priori.

Quindi questi risultati permettono di falsificare la seconda ipotesi: “I procedimenti in lingua naturale e/o in linguaggio aritmetico prevalgono come strategie risolutive in assenza di un’appropriata padronanza del linguaggio algebrico”.

BIBLIOGRAFIA

- ARZARELLO, F., BAZZINI, L. e CHIAPPINI, G., 1994. *L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*. Progetto Strategico CNR - TID, Quaderno n. 6.
- BROUSSEAU, G., 1986. Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), pp. 33-115. (Grenoble: La Pensée Sauvage).
- BROUSSEAU, G., 1998. *Théorie des Situations didactiques*. (Grenoble: La pensée Sauvage).
- FILLOY, E. & ROJANO, T., 1989. Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9 (2), pp. 36 – 59.
- GALLARDO, A. & ROJANO, T., 1988. Areas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (2), pp. 155 - 188.
- GARCIA R. E PIAGET J.. 1989, *Psychogenesis and the history of scienze*. (New York: Columbia Univ. Press).
- GRAS, R., 1997. Metodologia di analisi di indagini. *Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull’Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.)*, n. 7, Palermo, pp. 99 - 109.
- GRAS, R., 2000. Les fondements de l’analyse statistique implicite. *Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull’Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.)*, n. 9, Palermo, pp. 189 - 209.
- HARPER E., 1987. Ghosts of Diophantus, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 18.
- HERSCOVICS, N. & LINCHEVSKI, L., 1994. A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27 (1), pp. 59 – 78.
- KIERAN, C. & FILLOY, E., 1989. El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), pp. 229-240.
- KIERAN, C., 1991. A procedural-structural perspective on algebra research. In F. Furinghetti (ed.), *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. II, pp. 245 – 253. (Genova: Università di Genova).
- LINCHEVSKI, L. & HERSCOVICS, N., 1996. Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics* 30, pp. 39 – 65.
- MALISANI, E., 1996. Storia del pensiero algebrico fino al cinquecento. Costruzione del simbolismo e risoluzione di equazioni. *Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull’Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.)*, n. 6, Palermo, pp. 26 - 77. ISSN on-line 1592-4424. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno6.htm>.

- MALISANI, E., 1999. Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico – Visión histórica. *Revista IRICE del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación*, n. 13, Rosario - Argentina, pp. 105-132. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno6.htm> - ISSN on-line 1592-4424.
- MALISANI, E. & MARINO, T., 2002. Il quadrato magico: dal linguaggio aritmetico al linguaggio algebrico. *Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.), Supplemento al n. 10*, Palermo– Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno10.htm>- ISSN on-line 1592-4424.
- MARINO, T. e SPAGNOLO, F., 1996. Gli ostacoli epistemologici: Come si individuano e come si utilizzano nella Ricerca in Didattica della Matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 19B (2), pag.130 - 152.
- MARINO, T., 1999. Sugli Ostacoli in Didattica delle Matematiche. *Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.), n. 8*, Palermo, pp. 45 - 59. – ISSN on-line 1592-4424. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno8.htm> –
- MATZ, M., 1982. Towards a process model for high school algebra errors. In D. Slleman & J.S. Brown (Eds.), *Intelligent tutoring systems*. (London: Academic Press).
- SFARD A., 1992. The development of algebra. Confronting historical and psychological perspectives. *Algebra Working Group*, ICME 7, Quebec.
- SPAGNOLO F., 1998. *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*. (Firenze: La Nuova Italia).
- TRIGUEROS, M., REYES, A., URSINI, S. & QUINTERO, R., 1996. Diseño di un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las Ciencias*, 14 (3), pp. 351-363.
- USISKIN, Z., 1988. Conceptions of school algebra and uses o variables. In Coxford A.F. e Shulte A.P. (eds.), *The ideas of Algebra, K-12.*, Reston Va: NCTM, pp. 8-19.
- WAGNER, S., 1981. An Analytical Framework for Mathematical Variables. *Proceedings of the Fifth PME Conference*, pp. 165-170. Grenoble, Francia,.
- WAGNER, S., 1983. What are These Things Called Variables? *Mathematics Teacher*, October, pp. 474-479.

APPENDICE N° 1: Quadrati magici utilizzati nella Fase II della Scuola media

Completa, inserendo i numeri mancanti nel quadrato magico, (la somma dei numeri di ciascuna riga, colonna o diagonale è sempre la stessa).

Somma 27

12		10
	9	

Somma 45

	15	
24		12

Somma 18

9		
	6	
5		

Somma 60

		8
	20	
		24

APPENDICE N° 2: Tabella relativa all'Analisi quantitativa della Scuola Media

Legenda: CAS 1C1 ÷ CAP 1C13: alunni

A1 ÷ A11: strategie

	A1	A2	A4	A6	A8	A11
CAS 1C1	1	1	0	0	0	0
CAS 1C2	1	1	0	0	0	0
CAS 1C3	1	1	0	0	0	0
CAS 1C4	1	1	0	0	0	0
CAS 1C5	1	1	0	0	0	0
CAS 1C6	1	1	0	0	0	0
CAS 1C7	1	1	0	0	0	0
CAS 1C8	1	1	0	0	0	0
CAS 1C9	1	1	0	0	0	0
CAS 1C10	1	1	0	0	0	0
CAS 1C11	1	1	0	0	0	0
CAS 1C12	1	1	0	0	0	0
CAS 1C13	1	1	0	0	0	0
CAS 1C14	1	1	0	0	0	1
CAP 1C1	0	0	0	0	0	1
CAP 1C2	0	1	0	0	0	0
CAP 1C3	0	0	0	0	0	1
CAP 1C4	1	1	0	0	0	0
CAP 1C5	0	0	0	1	1	0
CAP 1C6	0	0	0	0	0	1
CAP 1C7	0	0	1	0	0	0
CAP 1C8	0	1	0	0	0	0
CAP 1C9	0	0	1	0	0	0
CAP 1C10	1	0	1	0	0	0
CAP 1C11	0	0	0	0	0	1
CAP 1C12	0	1	0	0	0	0
CAP 1C13	1	0	0	0	0	0

APPENDICE N° 3: Quadrati magici utilizzati nella Scuola Superiore

Gioco: Il quadrato magico

Completa, inserendo i numeri mancanti nel quadrato magico, (la somma dei numeri di ciascuna riga, colonna o diagonale è sempre la stessa).

Somma 15

	5	
4		8

Altri quadrati magici utilizzati nella FASE 1

Somma 18

	6	
5		3

Somma 21

	7	
12		6

Somma 24

	8	
11		7

Somma 27

	9	
8		6

Somma 30

	10	
11		13

Somma 45

	15	
24		12

Somma 33

	11	
14		10

Somma 60

	20	
32		24

Somma 48

	16	
19		7

Somma 63

	21	
33		25

Quadrato magico utilizzato nelle FASI 2 e 3

Consegna: Completare il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire sia uguale a 92.

Somma $26 + a$

14		1	
	9	12	
11		a	10
	16	13	

APPENDICE N° 4: Analisi a-priori del quadrato 4×4

Procedimento aritmetico

Sappiamo che ci deve essere almeno un numero uguale a 92 e che la somma deve essere $26 + a$. Prendendo in esame la colonna in cui sono inseriti i numeri 1, 12 e 13, la loro somma è 26 per cui sostituiamo ad "a" il massimo numero che è 92.

Procedimento aritmetico-algebrico

Nella consegna non è preso in considerazione, dall'inizio, che il numero più grande da inserire è 92.

Si prende invece in considerazione che una casella di ogni riga e di ogni colonna deve contenere il simbolo "a".

Dopo di questa premessa ci si accorge che nella 4° riga la somma dei due numeri già inseriti è maggiore di 26. Si deduce allora che bisogna operare nell'insieme Z. La diagonale principale contiene già il simbolo "a", si completa allora con il numero mancante che fa raggiungere il totale di 26. A questo punto si torna nella quarta riga e nella casella vuota si mette il simbolo "a", più il numero relativo negativo, che fa arrivare a 26. Con lo stesso criterio si procede spostandosi in quelle righe o in quelle colonne che presentano una sola casella vuota da riempire. Guardando il quadrato completo, si evidenziano adesso i seguenti valori: a ; $a - 2$; $a - 4$; $a - 6$. Si considera a questo punto che il valore 92, dovendo essere il più grande dovrà sostituire "a".

Procedimento algebrico

1. Si considera "a" costante. Si parte dalla terza riga o dalla diagonale principale perché contengono entrambe tre elementi, attribuendo al valore mancante un'incognita si imposta un'equazione di 1° grado.

$$11 + x + a + 10 = 26 + a$$

oppure

$$14 + 9 + a + x = 26 + a.$$

Il percorso per completare il quadrato, non è obbligato perché si procede considerando le righe o colonne in cui sono presenti tre elementi.

Alla fine del procedimento ci si accorge che tre degli elementi inseriti sono termini letterali in cui compare "a".

14	a - 4	1	15
7	9	12	a - 2
11	5	a	10
a - 6	16	13	3

Da qui ci sono due possibilità:

- non si considera la consegna che il numero più grande sia 92.
 - ci si accorge della consegna e si attribuisce ad "a" il valore 92 perché gli altri tre valori sono inferiori ad "a".
2. Considerando "a" costante si può impostare un sistema lineare di 7 equazioni in 7 incognite.
Questa strategia viene subito abbandonata perché lunga e difficoltosa.
 3. Si considera "a" variabile e si imposta un sistema lineare di 8 equazioni in 8 incognite.
Questa strategia viene subito abbandonata perché lunga e difficoltosa.

4. Si considera “ a ” variabile e si imposta un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite, di cui una è un’identità, quindi per completare il quadrato si introducono altre variabili. Durante la risoluzione ci si accorge che alcune variabili dipendono da “ a ”. Da qui la necessità di dare ad “ a ” un valore costante che dovrà essere necessariamente 92 perché le altre variabili introdotte risultano inferiori a 92.

$$11 + x + a + 10 = 26 + a$$

$$1 + 12 + a + 13 = 26 + a$$

$$z + 9 + x + 16 = 26 + a$$

14	z	1	p
m	g	12	l
11	x	a	10
g	16	13	t

$$z = a - 4$$

$$g = a - 6 \quad a = 92$$

$$l = a - 2$$

APPENDICE N° 5: Tabella relativa all'Analisi quantitativa della Scuola Superiore

Legenda: b1 ÷ a17: alunni,
A1 ÷ A14: strategie

	A1	A3	A5	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14
b1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
b2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
b5	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
b6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
b9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b10	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
b11	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b12	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b13	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b14	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b15	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
b16	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
b18	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
b19	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
b20	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b21	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
b22	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
a1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
a2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
a4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
a5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
a6	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
a7	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
a8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a11	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a12	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
a13	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
a14	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a15	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
a16	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
a17	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

APPENDICE N° 6: Protocolli della Scuola Superiore

Protocolli dei gruppi

Nella terza fase gli alunni sono stati divisi in due gruppi e ogni gruppo aveva un portavoce. Sono state registrate le discussioni. Dal lavoro di sbobinatura si sono ottenuti i seguenti protocolli:

CLASSE: 1° A

Protocollo del Gruppo A (portavoce Giusy Quaceci)

- **Giusy:** “Prima di tutto ho cercato il valore di a , in modo che $26+a=92$ nella colonna dove si trova a . Ho trovato il valore mancante per ottenere 92, poi ho fatto $92-26=66$ che è il valore di a , ed ho continuato a compilare le altre colonne avendo come riferimento il valore di a e la somma 92”.
- **Ilenia:** “Leggendo l'intestazione ho visto che il numero più grande da inserire era 92, allora ho fatto 26, ma non risultava, allora ho aggiunto 91. Poi ho fatto $26+91=117$, ho sommato i numeri ed il risultato del quadrato magico era 117, tranne una colonna che non mi risultava”.
- **Valentina:** “Io ho provato, ma non ci sono riuscita”.
- **Marisa:** “Anche io ho tentato, ma non ci sono riuscita”.
- **Erika:** “Ho fatto lo stesso procedimento di Giusy, ho fatto valere $a=66$ e ho sommato per ogni numero”.
- **Francesca:** “Io ho fatto $92-26=66$ e poi ho trovato i numeri adatti per completare il quadrato magico”.
- **Giusy:** “Dai ragazzi iniziamo a svolgerli, via!”.
- **Ilenia:** “Il testo qua dice che nel quadrato magico il numero più grande sia 92, però dobbiamo inserire almeno un numero che arrivi 92, in modo che si completi il quadrato”.
- **Giusy:** “Secondo me, abbiamo sbagliato perché noi abbiamo messo come somma 92, invece non è la somma, ma il numero da inserire. Quindi, se $a=92$, dobbiamo dare un valore ad a ”.
- **Ilenia:** “Bisogna fare $26+92$?”.
- **Marisa:** “No ma che c'entra”.
- **Giusy:** “Ma in sostanza cosa si deve fare?”.
- **Valentina:** “Allora si deve fare $92-66$? Anzi $92-26=66$?”.
- **Ilenia:** “Ma se noi facciamo $66+26=92$, non possiamo fare 92 come somma totale”.
- **Giusy:** “92 lo abbiamo considerato come somma totale, invece 92 è il numero da inserire”.
- **Marisa:** “Allora non si fa $92-26$?”.
- **Giusy:** “No, 92 bisogna metterlo al posto di a . Proviamoci. Se mettiamo 92 al posto di a , abbiamo altri due numeri nella colonna: l'11 e il 10 quindi $92+10=102$; $102+11=113$ e poi bisogna fare la somma”.
- **Ilenia:** “Allora si fa così: nella terza colonna c'è 1, 2, a , 13, se al posto di a mettiamo il valore 92 si fa $92+1=93$; $93+12+13$ risulta 118 e secondo me bisognava sommare gli altri numeri in modo che la somma dava 118”.
- **Giusy:** “Attribuito ad a il valore di 92, il testo ci dice che la somma è $26+a$, quindi dobbiamo fare la somma $26+92=118$. Nella colonna abbiamo 11, il valore di a che è 92, 10, 13 e quindi la somma = 118. (Nelle altre colonne) dobbiamo trovare il valore mancante che sommato agli altri numeri ci dia 118. Stiamo riuscendo, dai $92+9=101$; $101+14=115$; $115+3=118$ ”.
- **Giusy e Ilenia:** “ $3+13+16=32$. Ora dobbiamo trovare un numero che sommato a 32 mi dia 118, è 86. Ora si fa $86+5=91$; $91+12=103$, 103 per arrivare 118 troviamo 15. Ora facciamo $15+1=16$, $16+14=30$, per arrivare a 118 si fa $118-30=88$. Poi $88+9=97$; $97+5=102$, $102+16=118$. Ora bisogna fare $15+10=25$; $25+3=28$, $118-28=90$. Proseguiamo: $90+9=99$; $99+12=111$, $101+17=118$. Ora facciamo $11+7=18$, $18+14=32$, $32+86=118$. Evviva! Abbiamo vinto!”.

Validazione

Giusy: “Abbiamo visto che ci sono molti procedimenti, tra i quali uno che ha trovato la mia compagna Francesca che aveva attribuito ad a il valore 66. Però leggendo bene il testo abbiamo capito che potevamo attribuire ad a il valore numerico 92, visto che il testo ci diceva che il valore da inserire era 92. La somma data è $26+a$, quindi $26+92=118$. Nella tabella abbiamo sostituito a con 92 e risolvendo la terza colonna verticale, il risultato era 118, quindi la somma del quadrato magico è 118. Facendo lo stesso procedimento per le altre colonne, il risultato era sempre quello. Possiamo concludere che il valore a che è 92 è costante”.

Protocollo del Gruppo B: (portavoce Giusy Martello)

- **Giusy:** “Ho risolto questo quadrato magico, trovando il numero che mancava per arrivare alla somma $26+a$ della terza linea orizzontale dove i numeri che avevo erano 11, a , 10 e per arrivare a $26+a$ ho aggiunto 5. Così risulta $26+a$. Considerando a una lettera, ho completato la seconda linea verticale. Avendo il 16, il 9 e il 5, ho messo $-4+a$ e così sono giunta al risultato. Dopo ho risolto la prima linea orizzontale dove avevo 14, $-4+a$, $+1$ e sono giunta al risultato $9+3a$. In alcune caselle ho messo alcuni numeri relativi come ad esempio $-2a$, $+3a$. Dopo ho risolto anche le altre linee però non riflettendoci, ho sbagliato un calcolo, ma ho trovato una strategia per risolverlo”.
- **Lorena:** “Il numero più grande da inserire era 92”.
- **Giusy:** “Infatti, il dubbio che abbiamo tutti, e che mi sono posta pure io quando l’ho fatto, è che questo numero si dovrebbe inserire, però non ho trovato in quale posto”.
- **Igea:** “Secondo me l’ho dobbiamo inserire nella a ”.
- **Giusy:** “Però questo 92 si deve sottrarre, si deve togliere per arrivare alla a ”.
- **Igea:** “Sempre 92 resta”.
- **Giusy:** “Non resta 92, perché la soluzione è $26+a$ ”.
- **Igea:** “ $26+92$ quanto fa? Fa 118. Se tu fai la somma $92+12+1+13$ fa 118, e gli altri devono risultare pure 118”.
- **Lorena:** “Secondo me ha ragione Igea perché qua c’è un legame, perché è $26+a$, tu devi attribuire il valore ad a , quindi se $a = 92$ la somma deve venire 118”.
- **Giusy:** “Non può essere un quadrato magico, perché il risultato deve venire uguale per tutti, infatti, dovrebbe risultare $26+a$. Se noi facciamo come dice Igea, non risulterebbe $26+a$, risulterebbe $118+a$ ”.
- **Felicia:** “Però dipende dal significato che diamo ad a ”.
- **Lorena:** “La somma vale 118 e basta, se a vale 92 il risultato non viene più $118+a$ ma solo 118”.
- **Felicia:** “Giusy, praticamente la a devi far finta che è 92”.
- **Igea:** “Attribuiamo ad a il valore 92, poi fai la somma $26+92$ che fa 118”.
- **Giusy:** “Quindi abbiamo trovato la soluzione: dobbiamo attribuire ad a il valore di 92 e trovando questo valore dobbiamo riuscire a risolvere tutto il quadrato magico”.
- **Lorena:** “Sin dall’inizio avevamo detto di attribuire un valore ad a che non cambiava, una volta si diceva 3, una volta 5 e così via. Allora abbiamo risolto il dubbio, grazie ad Igea!”.
- **Eugenia:** “Perché avete messo il 92 proprio nella a ?”.
- **Giusy:** “Perché a è senza valore e il testo ci dice che il numero più grande da inserire è uguale a 92”.
- **Eugenia:** “Secondo me è sbagliato, invece ad a non si deve attribuire niente”.
- **Igea:** “Secondo me abbiamo messo 92 al posto di a perché altrimenti il valore 92 dove lo metti? Così se tu fai la somma $26+92$ uguale 118”.
- **Lorena:** “Secondo me ha ragione Eugenia perché ad a non si deve dare alcun valore”.
- **Eugenia:** “Secondo me si deve trovare il valore 26 e poi aggiungere a , non dare il valore ad a ”.
- **Felicia:** “Invece secondo me no, a deve avere un valore, perché a è una costante, non è variabile”.

- **Giusy:** “Nella terza linea orizzontale il 5 è giusto. Il risultato deve essere 118, ora proviamo a risolvere anche le altre. Sappiamo che $a=92$, quindi procediamo. Facciamo $12+5=17$, dobbiamo arrivare a 118, possiamo fare 90”.
- **Vanessa:** “Secondo me ha ragione Igea e non Eugenia perché qui il testo dice che si deve inserire un numero uguale a 92 . Quindi in qualche modo a 92 lo dovete fare entrare da qualche parte e l’unico elemento che non ha valore è proprio a. Quindi $a=92$ secondo me, secondo Eugenia invece no”.
- **Giusy:** “Anche secondo me, hanno ragione Igea e Lorena”.
- **Felicia:** “E allora tu che stai svolgendo la linea trasversale, dove la metti la a, dove lo metti il 92?”.
- **Giusy:** “Il 92 non si deve ripetere tante volte!”.
- **Felicia:** “Perché non si deve ripetere?”.
- **Giusy:** “Perché nel quadrato magico non si possono ripetere gli stessi numeri anche se hai fatto errori di calcolo per risolverlo. Dobbiamo fare $92+17$ dove $17=5+12$ poi $92+17=109...$ ”.
- **Eugenia:** “Secondo me, ci sono numeri negativi, oltre a quelli positivi”.
- **Lorena:** “Secondo me, non è come dici tu”.
- **Felicia:** “Se abbiamo detto che a è una costante, come può essere negativa?”.
- **Giusy:** “Sto risolvendo la prima linea orizzontale. Quindi $14+1+92=107$ per arrivare a 118 abbiamo 11. Perché non riesce? $9+5+12$ + il valore di a che è 92 da 118, fino a qua è giusto. Risolviamo la prima linea verticale dove manca un solo numero”.
- **Lorena:** “Secondo me, hai sbagliato ad inserire il 92, perché lo hai messo qui sopra”.
- **Felicia:** “Perché questa linea trasversale risulta 118; $26+92$ uguale 118”.
- **Igea:** “Secondo me, potrebbe essere così, ma non ne sono sicura”.
- **Lorena:** “Ma a vile 92, non c’è un altro valore che è 92. Il 92 è qua oppure qua, non deve ripetersi due volte lo stesso valore. C’è qualcosa che non quadra. L’altro gruppo ha già finito, ma non prediamoci d’animo “.
- **Giusy:** “Siamo riusciti a risolverlo, trovando numeri tutti diversi”.
- **Lorena:** “Hai ripetuto due volte 92”.
- **Felicia:** “Non è così. Lorena dov’è il numero che si ripete”.
- **Igea:** “Secondo me non si può mettere così”.
- **Giusy:** “Si può mettere $90+2$ che non è 92”.

Validazione

Parla Giusy portavoce del gruppo:

“Quando abbiamo discusso, oltre la mia strategia, ne abbiamo trovata un’altra che consiste nell’attribuire ad a il valore di 92, e alla fine abbiamo deciso di utilizzare questa. Quindi abbiamo attribuito ad a il valore di 92 e sommandolo al 26 doveva dare il risultato di 118 e così abbiamo messo i numeri e completato la tabella che così è risultata. Ci siamo accorti che la strategia è giusta, ma ci sono degli errori di calcolo”.

CLASSE: 1° B

Protocollo del Gruppo A (portavoce Rita Di Martino)

- **Prof:** “Avanti, forza riempite il quadrato”.
- **Rita Di Martino:** “Allora lo abbiamo risolto tutti no!! Allora iniziamo da qua perché abbiamo due numeri e una lettera, quindi viene praticamente $21+a$ per arrivare a $26+a$ gliene mancano 5. Ora facciamo questo perché abbiamo tre numeri e ci va la a, per forza, e facendo la somma viene 30 quindi dobbiamo sottrarne quanto? 4, quindi viene $a-4$. Adesso facciamo questo abbiamo altri tre numeri, nella prima riga in alto, dobbiamo aggiungere 5. Ora facciamo la diagonale che inizia con 14 abbiamo due numeri e una lettera, la lettera a, quindi dobbiamo aggiungere un numero, dobbiamo aggiungere 3. Giusto, siete convinti?!”.
- **Componenti del gruppo:** “Si!!”.
- **Rita:** “Allora, praticamente”.

- **Componenti del gruppo:** “Qua ci va la a!”.
- **Prof.:** “Vi ricordo che il numero più grande da inserire è uguale a 92”.
- **Rita:** “Allora facciamo l’altra diagonale viene...”.
- **Anna Matranga:** “Viene 10, 15, 18...quindi 15”.
- **Rita:** “Sì certo 15!! Qui viene 20, 32 quindi ne dobbiamo sottrarre 6 ; viene 24-6, quindi ne dobbiamo mettere 7”.
- **Luana Romano:** “19 e 9, 36 No!?”.
- **Silvia:** “Quella da i numeri!!”.
- **Rita:** “Quindi qua viene 11, no aspetta...”.
- **Anna:** “19”.
- **Rita:** “28, quindi -2 ; l’ho detto già io, qua viene 28-2, giusto?! Ora dobbiamo ragionare sul 92. Qui dice: completa il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire sia uguale a 92”.
- **Prof.:** “Anna tu devi pensare!”
- **Anna:** “Sì io sto pensando”.
- **Luana:** “Nella terza colonna orizzontale”.
- **Rita:** “Nella terza riga!!”.
- **Prof.:** “No! nella terza riga”.
- **Rita:** “Abbiamo messo...”.
- **Prof.:** “Prima cosa hai messo?!”.
- **Rita:** “Nella terza riga il numero 5”.
- **Prof.:** “Perché...”.
- **Rita:** “Perché già avevamo due numeri e la lettera a...”.
- **Silvia:** “Quella che parla è Rita Di Martino”.
- **Rita:** “Poi abbiamo inserito nella seconda colonna da sinistra...”.
- **Silvia:** “E la scrittrice è Anna Matranga”.
- **Rita:** “...da sinistra verso destra a-4 perché avevamo già tre numeri esatti e poiché...”.
- **Prof.:** “Dovete convincere anche i vostri compagni. Tu Ciofalo lo stai capendo?”.
- **Rita:** “...e poiché la somma veniva maggiore di 26 abbiamo sottratto il numero 4. Poi, quindi, dove siamo arrivati? Si poi abbiamo inserito il numero 15 nella prima riga poiché avevamo già due numeri e la lettera a”.
- **Rita:** “Poi abbiamo inserito nell’ultima riga il numero 3 poiché, nella diagonale che inizia con il numero 14 avevamo già due numeri esatti e la lettera. Poi abbiamo inserito nell’ultima riga a-6 perché nella diagonale che inizia con il numero 15 avevamo già tre numeri corretti. Poi, alla fine, abbiamo inserito nella prima colonna il numero 7 perché già avevamo due numeri e la lettera a e alla fine, nell’ultima colonna , a-2”.
- **Silvia:** “Adesso viene il bello il 92!! Chissà dove lo dovremo mettere!!”.
- **I componenti:** “Sommiamo tutto quanto!!”.
- **Rita:** “Tutto quanto? Io non penso che sia tutto quanto perché altrimenti avrebbero messo la somma, invece, qui dice: completa il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire sia uguale a 92”.
- **Valeria Passarello:** “Io ho provato a fare 92:4, per 4*4 no!? E mi è venuto 23”.
- **Rita:** “Ma potrebbe essere, perché.....se noi non, magari non addizioniamo questi -6 -2 in ogni colonna, in ogni riga...”.
- **Valeria:** “Io ho fatto l’addizione di tutti i numeri normali più la sottrazione e mi veniva 104”.
- **Rita:** “Aspetta 4*4 fa 16; se noi facciamo 92-16 ,92:16... Per vedere questo 92 in ogni quadratino a quale numero corrisponde”.
- **Anna:** “Fa 23”.
- **Rita:** “Fa 23; no devi fare diviso16, per vedere... se noi facciamo 4*4=16 e poi diviso 92 otteniamo il numero che in ogni buco ci deve stare”
- **Anna:** “Scusa, non può essere che...”.
- **Rita:** “No, ma perché...”.
- **Anna:** “No, qui infatti dice, un attimo solo...”.

- **Rita:** “No, ma io ho fatto così perché qui si sta parlando del numero più grande da inserire”.
- **Anna:** “E appunto, quindi, lo dobbiamo inserire nella tabella”.
- **Valeria:** “Ma ci sarà un nesso logico per mettere questo 92, quindi io per questo ho pensato di fare...”.
- **Rita:** “Ma una calcolatrice non ce l’abbiamo? Per fare subito i calcoli”.
- **Anna:** “Ma questo 92 lo dobbiamo inserire nella tabella”.
- **Rita:** “Fai 92:16; si vediamo, perché io non penso che comunque vada inserito il 92 in questo modo, a meno che...”.
- **Valeria:** “2,75”.
- **Rita:** “Dunque...”.
- **Anna:** “Qui dice il numero più grande da inserire, quindi dobbiamo inserirlo”.
- **Silvia:** “Un momento di suspense!”.
- **Rita:** “Il numero più grande da inserire è uguale a 92; a meno che, forse con questo metodo che noi abbiamo fatto..., se utilizziamo un altro metodo con i numeri più grandi...”.
- **Valeria:** “Facciamo la somma e poi dividiamo?”.
- **Rita:** “Fare tutta la somma ! Sottraendo pure questi numeri che noi abbiamo sottratto?”.
- **Valeria:** “Prima...ehh...”.
- **Rita:** “Proviamo”.
- **Valeria:** “Io credo che viene 104”:
- **Rita:** “Scusa facciamolo con la calcolatrice, dato che...”.
- **Anna:** “Scusa ma volete sommarli?”.
- **Rita:** “Ma io non riesco a capire, perché, secondo me, questa somma non centra”.
- **Luana:** “I numeri 26?! 26,26,26,26”.
- **Rita:** “No! Vuole sommare...”.
- **Anna:** “Rita ma se dobbiamo inserirlo questo 92 lo metti dentro la tabella”.
- **Rita:** “Si, ma secondo me, sto inserire è una cosa, cioè inserire in un modo particolare, perché altrimenti sarebbe troppo semplice inserire il 92 nella tabella, secondo me ce sotto qualcosa, un ragionamento”.
- **Valeria:** “104 no, giusto viene!”.
- **Rita:** “104”.
- **Jessica Oliva:** “Ma perché 16?”.
- **Anna:** “4*4=16”.
- **Rita:** “Fai 16”.
- **Jessica:** “Ma perché 16?”.
- **Anna:** “Perché 4*4; ma se si fa 92 meno tutti questi numeri?! Avete provato a farlo”.
- **Jessica:** “Ma già dava 104 , 92-104 non si può fare”.
- **Anna:** “...dico la somma di tutti i numeri che abbiamo fatto da...”.
- **Rita:** “Dici quelli che abbiamo inserito?”.
- **Anna:** “Si, tutti i numeri che abbiamo inserito”.
- **Prof.:** “Anna...”.
- **Anna:** “Dobbiamo provare a sommare tutti i numeri che abbiamo inserito e poi a dividerli per 92 o...”.
- **Prof.:** “No! Perché, leggi bene”.
- **Anna:** “Ma qui dice il numero da inserire!”.
- **Prof.:** “Dobbiamo inserire un numero, e questo numero, il più grande deve essere 92”.
- **Anna:** “Quindi dobbiamo inserirlo”.
- **Valeria:** “Ma quindi dobbiamo rifare il quadrato?”.
- **Prof.:** “No, è già fatto il quadrato”.
- **Anna:** “Perché qua dice: completa il quadrato magico, quindi dobbiamo farlo, ed è fatto, in modo che il numero più grande sia uguale a 92; è un enigma!”.
- **Prof.:** “Il numero più grande da inserire è 92. Già questi ce li hai 15, 3, li puoi cambiare? No!”.
- **Anna:** “No!”.

- **Prof.:** “La somma è sempre $26+a$ ”.
- **Anna:** “No, ormai è fatto”.
- **Prof.:** “Allora dove lo devi mettere questo 92? La somma sempre $26+a$ deve dare”.
- **Giusy Gangemi:** “Una lettera può essere”.
- **Prof.:** “Quale lettera?”.
- **Componenti del gruppo:** “La a!”.
- **Prof.:** “Provate!”.
- **Luana:** “Quindi $92-6$ ”.
- **Prof.:** “Cosa hai detto Giusy? Dillo di nuovo”.
- **Luana:** “Sostituire le lettere a con 92”.
- **Prof.:** “Messe al posto di?”.
- **Giusy:** “Di a mettere 92”.
- **Anna:** “Aspetta un attimo, dobbiamo sottrarre per tutto: quindi fai $-6\dots$ ”.
- **Valeria:** “Cosa?!”.
- **Anna:** “86”.
- **Valeria:** “86 meno cosa?”.
- **Anna:** “Meno 5, 12-15”.
- **Rita:** “Se noi mettiamo 92 e lo attribuiamo alla a, allora la a si deve considerare come una specie di variabile e dobbiamo sottrarla per questi: $-6, -2, -4$; il problema è...”.
- **Valeria:** “Dobbiamo sottrarre tutti i numeri fino ad arrivare a $26+a$ ”.
- **Prof.:** “+a, ma “ a “, a cosa è uguale avete detto?”.
- **Componenti del gruppo:** “A 92”.
- **Giusy:** “La a diventa 92”.
- **Prof.:** “La a diventa...?”.
- **Giusy:** “92”.
- **Prof.:** “Quindi?”.
- **Giusy:** “Fa $26+92$, viene”.
- **Prof.:** “Brava Giusy!”.
- **Silvia:** “Giusy ha trovato la soluzione!”.
- **Rita:** “La $a=92; 92+26=118$ ”.
- **Enza Alessandro:** “Fa 118? Ah, finisce così?”
- **Anna:** “E’ così punto e basta. Abbiamo sostituito alla a il numero 92”.
- **Rita:** “Sottolinea questo passaggio e lo ripeti dopo; sottolinea e riporta sotto a parole....; quindi, abbiamo sostituito alla a il numero 92 e lo abbiamo addizionato al numero 26 ed abbiamo ottenuto il numero 118”.
- **Componenti del gruppo:** “Prof. abbiamo finito!”.
- **Silvia:** “La prof. ci deve fare una domanda?”.
- **Prof.:** “Avete spiegato tutto?”.
- **Anna:** “Sì, abbiamo sostituito alla a il numero 92 e sommato il 26 fa 118, perché a è una variabile”.
- **Prof.:** “Sì, ma perché proprio 92 ad a?”.
- **Rita:** “Perché già avevamo dei numeri, non si possono sostituire dei numeri”.
- **Prof.:** “Questo mi sta bene, però c’è un’altra risposta; perché il numero più grande, qua dice, è 92?”.
- **Giusy:** “Perché tutti i numeri sono minori di 92”.
- **Prof.:** “Tutti e anche..? Giusy, e anche....?”.
- **Giusy:** “E anche il 26”.
- **Prof.:** “Questi si vedono che sono più piccoli di 92, e anche...”.
- **Anna:** “E anche la somma”.
- **Prof.:** “No, la somma non è una variabile? Anche chi ?”.
- **Giusy:** “I numeri che abbiamo inserito!”.
- **Prof.:** “Questo si vede che sono più piccoli”.
- **Giusy:** “I numeri che già c’erano”.

- **Prof.:** “a-4 ; avreste potuto scrivere a=92 pensateci; che dici?”
- **Stefania Mattia:** “Perché facendo la sottrazione da 92 meno il numero che abbiamo inserito ci da un numero minore di 92”.
- **Prof.:** “Brava! Perché qua, a-4 viene più piccolo di 92; a-6 ci da un numero più piccolo. Scrivete questo”.
- **Rita:** “Abbiamo sostituito alla lettera a il numero 92 e lo abbiamo addizionato al numero 26 e abbiamo ottenuto il numero 118. Abbiamo fatto questo perché sottraendo il numero 92 a quei numeri che accompagnavano la lettera a abbiamo ottenuto un numero minore di 92”.

Validazione

“Sono la rappresentante del gruppo A Rita Di Martino. Allora, abbiamo inserito nel quadrato magico il numero 5 perché nella terza riga avevamo già due numeri e la lettera a. Poi abbiamo inserito la somma dei numeri che si trovavano nella seconda colonna, poiché già avevamo tre numeri ed abbiamo inserito a-4 perché andava inserita la a e perché eseguendo la somma dei tre numeri si otteneva un numero che era maggiore di 26 e più precisamente di 4 numeri e quindi abbiamo sottratto il numero 4 agli altri numeri, quindi a-4. Poi, successivamente, abbiamo eseguito tutti gli altri calcoli”.

“Per quanto riguarda il 92, il test diceva di completare il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire fosse 92; poiché avevamo già inserito tutti i numeri e il quadrato magico lo avevamo già risolto, potevamo attribuire il 92 solamente alla a considerandola, quindi, una variabile. Tutti i numeri che abbiamo inserito sono minori di 92 e, in oltre, eseguendo la sottrazione tra il 92 e i numeri che accostano la variabile a si ottiene anche in questo caso un numero minore di 92; ad esempio a-4,a-6,a-2 quindi necessariamente a deve essere 92”.

Componenti del gruppo:

Mattia Stefania, Anna Matranga, Rita Di Martino, Ciofalo Davide; Romano Luana, Silvia Rausa, Jessica Oliva , Alessandro Rosa, Giusy Gangemi, Valeria Passatello, Alessandro Enza.

Protocollo del Gruppo B (portavoce Ester Sanalidro)

- “Mi chiamo Ester Sanalidro abbiamo iniziato dalla terza colonna orizzontale perché mancava un solo termine per completare la somma, e quindi abbiamo raggiunto la somma $26 + a$ facendo $(11+a+10)$ che verrebbe 21a, poi abbiamo fatto $(26+a-21a)$ e il risultato è cinque e quindi il termine mancante è 5. Poi abbiamo fatto la prima colonna obliqua facendo $(14+9+a)$ e verrebbe 23a, quindi abbiamo sottratto da $26 + a$ il $23 + a$ e verrebbe 3. Poi abbiamo continuato con la seconda colonna verticale e abbiamo sommato $16+5+9$ che fa 30 e così abbiamo messo a-4 che viene 26a; ora continuiamo con l'ultima colonna orizzontale facendo $16+13$ che viene 29 che sommato al 3 fa 32 e quindi mettiamo a-6. Stiamo continuando con un'altra colonna obliqua e abbiamo i numeri a-6; 5 e 12 quindi facciamo $12+5$ che fa 17, poi sottraiamo a-16 e viene 11 e quindi il termine mancante è 15. Continuiamo con l'ultima colonna verticale facendo $15+10$ che viene 25, che sommato al 3 fa 28, quindi il termine mancante è a-2 ora rimane l'ultima colonna, che è la seconda orizzontale, con i numeri (9-12-a-2) facciamo la somma sottraiamo 26 a e troviamo 7. Ora possiamo verificare se l'operazione eseguita è stata corretta facendo la somma e vedendo se in tutte le colonne otteniamo $26+a$ ”.

Ora dobbiamo risolvere il problema del 92 perché dice “completa il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire sia uguale a 92” quindi per inserire il 92 potrebbero anche esserci altri metodi...”

- **Ester:** “L'esercizio dice: completa il quadrato magico in modo che il numero più grande da inserire sia uguale a 92”.
- **Prof.:** “Pensate”.
- **Ester:** “Ma in pratica, professoressa dobbiamo inserire il 92?”.

- **Prof.:** “Sì, che sia più grande”.
- **Ester:** “Oltre il 92?”.
- **Prof.:** “No. Così c’è scritto? Concetta cosa stavi pensando?”.
- **Concetta Oste:** “Forse fare la somma di tutti i termini, se è più grande di 92 sottrarlo con 26 a .
- **Prof.:** “Proviamo!”.
- **Irene:** “Io dicevo, sommiamo solo quelli che abbiamo scritto noi”.
- **Concetta:** “Non ci arriviamo a 92”.
- **Simona:** “Oppure sommare tutti i numeri di una colonna e moltiplicarla per 26”.
- **Ester:** “Forse sommare tutti i numeri scritti e sottrarli con tutti quelli che abbiamo scritto noi.
- **Morena:** “Oppure fare la somma di tutte le colonne per 4”.
- **Prof.:** “Il massimo numeroGià voi avete dei numeri. Sì! E sono 14, 11, 7, 10, in qualche posto questi già ci sono. Dobbiamo metterci il 92”.
- **Concetta:** “Forse il 92 metterlo al posto della lettera a”.
- **Ester:** “E se aggiungiamo un'altra colonna?”.
- **Jessica Grisaffi:** “Io dicevo di sottrarre il 92 per il risultato di ogni colonna”.
- **Irene:** “Non può risultare!”.
- **Ester:** “Secondo me non ha senso...”.
- **Serena:** “Io dicevo di sommare tutti i numeri e sottrarli a quelli con cui noi abbiamo sottratto a-4, a-2...”.
- **Jessica Giunta:** “Prima stiamo sommando tutti i numeri che erano già presenti nel quadrato magico e quelli che abbiamo inserito noi. Dopo di che il risultato intendiamo sottrarlo a 26 solo che non ci risulta perché ci viene 82 e invece deve risultare 92”.
- **Serena:** “Sommiamo prima tutti i numeri positivi tranne quelli negativi, cioè a-2, a-6 e così via.
- **Jessica Giunta:** “Quelli che hanno a-2, a-4.... E sottrarli a 26”.
- **Serena:** “Eh ! no a 26. E perché a 26?”.
- **Jessica Giunta:** “Non si può sottrarre a 26”.
- **Serena:** “No, va bene si può sottrarre”.
- **Jessica Giunta:** “No perché è un numero troppo grande”.
- **Serena:** “Allora il risultato della somma dei numeri negativi dà -12 più quelli positivi dà 82; ma non può essere perché dovrebbe risultare 92. Sì ma facciamola questa somma”.
- **Jessica Giunta:** “Abbiamo provato a fare la somma dei numeri positivi meno la somma dei numeri negativi (116-12)”.
- **Serena:** “E questo volevo dire io”.
- **Morena:** “Viene un numero con lo zero”.
- **Jessica:** “Verrebbe 90, ma forse ho sbagliato a fare il calcolo”.
- **Prof.:** “Fatemi capire!”
- **Jessica:** “Se facciamo la somma di tutti i numeri positivi tranne a-4 e gli altri numeri negativi”.
- **Ester:** “No stiamo sbagliando, il massimo numero da inserire è 92, giusto prof.?”.
- **Prof.:** “Sì, il massimo numero da inserire è 92”.
- **Ester:** “Ma si può inserire un'altra colonna?”.
- **Jessica:** “Se le colonne sono tutte occupate, come facciamo a inserire un altro numero?”.
- **Prof.:** “Ci sono alcune colonne che non sono ben definite”.
- **Ester:** “Ad esempio dove c’è scritto a-2 ...”.
- **Jessica:** “16+5+9 no e se facciamo il 92 meno la somma di alcune colonne”.
- **Prof.:** “Il massimo numero da inserire sia 92”.
- **Concetta:** “Se facciamo la somma $26 * 4$ (numero delle colonne). Il risultato verrebbe 104 meno la somma dei numeri negativi (12) e dà come risultato 92”.
- **Jessica Grisaffi:** “Ma non è il risultato 92, lo devi usare!”.

- **Concetta:** “Io ho fatto la somma $26+a$ per 4, il numero delle colonne che dà 104 meno la somma dei numeri negativi, cioè -12 , risulta 92”.
- **Prof.:** “Dove lo metti il 92?”.
- **Jessica:** “Ma se noi lo inseriamo, poi non risulta più 26 a”.
- **Prof.:** “Ma non è $26a$, è $26+a$ ”.
- **Serena:** “Se facciamo $92 - 26$ si trova a”.
- **Simona:** “Ma che centra!”
- **Prof.:** “E’ sbagliato ma centra!”.
- **Ester:** “a” è un’incognita quindi deve essere sostituito con un numero che non supera il 92, quindi per esempio “a-4” se noi mettiamo un numero che sottratto ad a-4, poi sommato con tutta la colonna, dobbiamo trovare il massimo numero che sia 92 e quindi vediamo se risulta. Stiamo cercando di sostituire “a” con un numero, però non più grande di 92”.
- **Irene:** “Ma se facciamo $16+5+9=30-4=26+92$ (che è la “a”) e viene $26+92$ ed ecco risultato il problema “a” è 92”.
- **Morena:** “Penso che: il numero deve essere per forza 92 perché sottratto con “a-4” dà -92 quindi è un numero minore di 92 e anche a-6 ed a-2 perché tutti i numeri sarebbero minori di 92”.

Validazione:

Parla Ester Sanalidro, portavoce del gruppo.

“Faccio parte del secondo gruppo e mi chiamo Sanalidro Ester, noi abbiamo risolto nel quadrato magico per prima cosa la terza riga orizzontale perché mancava un solo termine quindi dopo averla eseguita trovando 5 abbiamo continuato con la diagonale obliqua ed abbiamo trovato 3, in seguito abbiamo svolto la seconda colonna verticale trovando “a-4”, perché dovevamo mettere per forza la “a” dato che la somma è $26+a$, abbiamo sottratto da “a” un numero che era quattro, perché la somma dava un numero maggiore di “ $26+a$ ”.

Poi abbiamo riflettuto, dopo aver completato il quadrato inserendo altri numeri, sul fatto di inserire nella tabella il 92 e siamo arrivati alla conclusione che dato che la “a” è un’incognita, abbiamo provato a sostituirla con 92 sottraendola in questo caso con 4 viene un numero che è risultato più piccolo di 92 e quindi abbiamo fatto la stessa operazione con “a-2” ed “a-6” e vengono sempre numeri più piccoli di 92.

Poi abbiamo provato a fare anziché “a-4”; “a+4” ed abbiamo visto che il numero era maggiore di 92 e quindi non poteva risultare”.

Componenti del gruppo:

Ester Sanalidro, Jessica Giunta, Concetta Oste, Morena Costanzo, Serena Costa, Jessica Grisaffi, Gabriele Perra, Federica Guaietta, Irene Grommino.

CAPITOLO TRE:

LA NOZIONE DI VARIABILE IN CONTESTI SEMIOTICI DIVERSI*

3.1 INTRODUZIONE

La nozione di variabile può assumere una pluralità di concezioni: numero generalizzato, incognita, “cosa che varia”, segno del tutto arbitrario, registro di memoria, ecc. Nel capitolo precedente abbiamo verificato che queste concezioni vengono evocate spontaneamente dagli alunni, anche in assenza di un’adeguata padronanza del linguaggio algebrico.

La scuola superiore privilegia soprattutto le prime tre concezioni: numero generale, incognita e relazione funzionale, ma si utilizza anche la nozione di registro di memoria in informatica.

E’ possibile che molte difficoltà che incontrano gli alunni nello studio dell’algebra provengano dalla costruzione inadeguata del concetto di variabile. Questa costruzione dovrebbe includere le sue principali concezioni e la possibilità di passare da una all’altra con flessibilità, in relazione alle esigenze del problema da risolvere.

Kücheman (1981) ha mostrato che la maggior parte degli alunni tra 13 e 15 anni tratta le lettere in espressioni o in equazioni come incognite specifiche prima che come numeri generalizzati o come variabili in relazione funzionale. Trigueros, M. *et alii* (1996) hanno dimostrato che gli studenti che iniziano gli studi universitari hanno una concezione abbastanza povera di variabile nei suoi aspetti di numero generalizzato e relazionale-funzionale. Hanno difficoltà, soprattutto, per capire la variazione in forma dinamica, cioè quella che considera la relazione di variazione con altre variabili. Gli ostacoli sono maggiori quando i quesiti non si risolvono mediante la manipolazione, ma attraverso l’interpretazione e la simbolizzazione.

Panizza *et alii* (1999) hanno mostrato che l’equazione lineare in due variabili non è riconosciuta dagli alunni come un oggetto che definisce un insieme di infinite coppie di numeri. La nozione di incognita non sarebbe efficace per interpretare il ruolo delle lettere in questo tipo di equazioni. L’alunno che, invece, si appoggia nel concetto di funzione si trova in migliori condizioni per calcolare diverse soluzioni.

Il presente capitolo si propone di studiare l'aspetto relazionale-funzionale della variabile nel problem-solving, considerando i contesti semiotici dell'algebra e della geometria analitica. Si pretende analizzare se la nozione di incognita interferisce con l'interpretazione dell'aspetto funzionale, e se la lingua naturale e/o il linguaggio aritmetico prevalgono come sistemi simbolici in assenza di adeguata padronanza del linguaggio algebrico.

Per effettuare questa ricerca abbiamo scelto l'equazione lineare in due variabili per due motivi: innanzi tutto, perché consideriamo che rappresenta un punto nodale per fare scaturire le concezioni degli alunni sulle lettere come incognite o "cose che variano". Anticipiamo che gli studenti troveranno certe difficoltà nel trattare le equazioni che hanno una pluralità di soluzioni, nell'ambito di situazioni problematiche concrete⁽¹⁾. In secondo luogo, questo tipo di equazione risulta un oggetto ben conosciuto dagli alunni, trattato sotto diverse ottiche: funzione lineare, equazione di una retta e componente dei sistemi lineari.

Anche se dal punto di vista matematico questi tre termini, funzione lineare, equazione di una retta e componente dei sistemi lineari, rappresentano lo stesso oggetto, per l'alunno significa evocare modelli mentali (esterni) diversi⁽²⁾. Secondo Bagni (2001), la scelta di collocare l'espressione $ax + by + c = 0$ in un contesto geometrico (evocando, ad esempio, modelli del concetto di *retta* nell'ambito della geometria analitica), oppure in un contesto prettamente algebrico (parlando cioè di *equazione di primo grado* o addirittura, impropriamente, di *polinomio*) riflette un atteggiamento ben diverso, che ha motivazioni interessanti (le quali risulteranno legate anche al contratto didattico) e conseguenze didattiche rilevanti.

3.2 METODOLOGIA DELLA RICERCA

A questo studio hanno partecipato 111 alunni di 16-18 anni del Liceo Sperimentale della città di Ribera (AG) - Italia, così distribuiti: 23 alunni di Quinta del Liceo Classico e 88 del Liceo Scientifico, 37 di Terza, 20 di Quarta e 31 di Quinta.

Vorremmo precisare che tutti gli alunni conoscevano gli argomenti riguardanti: equazioni e disequazioni di primo e di secondo grado, sistemi di equazioni, geometria analitica e funzioni. In particolare, gli studenti di Quinta avevano già realizzato lo studio grafico di funzioni nell'ambito dell'analisi matematica.

Il questionario proposto consta di quattro quesiti (Appendice N° 1). Nel **primo** di loro, la variabile assume l'aspetto relazionale – funzionale nel contesto di una situazione

problematica concreta. Si chiede anche di riflettere sull'insieme soluzione. Con questo quesito si pretende analizzare le strategie risolutive messe in atto e se la nozione di incognita interferisce con l'interpretazione dell'aspetto funzionale.

Il **secondo quesito** chiede la formulazione di un problema che può risolversi utilizzando un'equazione data, in altre parole l'allievo deve realizzare la traduzione dal linguaggio algebrico al linguaggio naturale. Consideriamo che questa attività rappresenta un punto basilare per svelare le difficoltà che essi incontrano nell'interpretare la variabile sotto l'aspetto relazionale-funzionale.

Nel **terzo quesito** si chiede di interpretare, mediante una "breve risposta", le seguenti relazioni di uguaglianza: $ax + by + c = 0$ e $y = mx + q$. Si cerca di capire a quale modello esse vengono associate dagli allievi e in quale contesto. Lo scopo di questo quesito è confrontare i modelli evocati dalle equazioni particolari dei problemi 1 e 4, con quelli attivati attraverso le espressioni sopra indicate.

Nel **quarto quesito** la variabile assume il suo aspetto relazionale – funzionale nell'ambito di una situazione problematica concreta. Si chiede anche di riflettere sull'insieme soluzione. Mentre nel primo problema l'alunno era libero di scegliere il contesto risolutivo in questo, invece, lo si costringe ad operare nell'ambito della geometria analitica.

Per ogni quesito del questionario si effettuò l'analisi a-priori per determinare tutte le possibili strategie che possono essere utilizzate dagli alunni. Sono stati anche individuati i possibili errori che possono commettere gli studenti nell'applicare queste strategie.

La somministrazione del questionario si è realizzata durante l'ultima settimana di Aprile 2002. Gli alunni hanno risolto la prova individualmente, non è stata permessa la consultazione di libri o di appunti. Il tempo concesso è stato di sessanta minuti.

In una tabella a doppia entrata "alunni/strategie", per ogni alunno si indicò con il valore 1 le strategie che esso ha utilizzato e con il valore 0 le strategie che non hanno applicato. I dati rilevati sono stati analizzati in modo quantitativo, utilizzando l'analisi implicativa delle variabili di Regis Gras (1997, 2000) mediante il software CHIC 2000 e l'analisi fattoriale delle corrispondenze attraverso il software S.P.S.S.

3.3 ANALISI A-PRIORI

Per ogni quesito del questionario abbiamo effettuato un'analisi a-priori molto dettagliata per favorire lo sviluppo di un'approfondita analisi qualitativa e quantitativa delle variabili sperimentali. L'obiettivo era determinare tutte le possibili strategie che gli alunni possono utilizzare ed individuare gli errori che essi possono effettuare nell'applicare queste strategie.

Nel **primo quesito** la variabile assume il suo aspetto relazionale – funzionale nel contesto di una situazione problematica concreta. Le principali variabili sperimentali determinate a partire dall'analisi a-priori sono le seguenti:

AL1: L'alunno risponde al quesito.

AL2: Esibisce un procedimento in lingua naturale.

AL3: Esibisce un procedimento per tentativi ed errori in lingua naturale e/o in linguaggio semi-formalizzato.

AL4: Aggiunge un dato.

AL5: Traduce il problema ad un'equazione di primo grado a due incognite.

AL7: Traduce il problema ad un'equazione di primo grado a due incognite e utilizza il metodo algebrico di "sostituzione in se stessa"⁽³⁾.

AL9: Cambia procedimento risolutivo, abbandonando quello pseudo-algebrico.

AL11: Considera, in modo esplicito o implicito, che il problema rappresenta una relazione funzionale.

AL13: Commette degli errori nella risoluzione dell'equazione e trova (o tenta di trovare) la soluzione unica.

AL14: Considera che tra x e y esiste una relazione di proporzionalità.

AL15: Ha scarsa padronanza del linguaggio algebrico (AL4 + AL7 + AL9 + AL13 + AL14 + ~AL5).

AL16: Utilizza il linguaggio naturale come mezzo espressivo, sia nel procedimento risolutivo sia per motivare le risposte (include AL2).

AL17: Utilizza il linguaggio aritmetico in un contesto non prettamente algebrico, sia in modo esplicito (perché effettua delle operazioni) sia in maniera implicita (perché si esprime facendo riferimento ai risultati di alcuni calcoli realizzati mentalmente o con la calcolatrice).

ALb1: L'alunno determina l'insieme soluzione.

ALb2: Mostra una soluzione particolare che verifica l'equazione.

ALb3: Mostra più soluzioni che verificano l'equazione.

ALb4: Considera esplicitamente le infinite soluzioni.

ALb5: Considera in modo esplicito che mancano dati per determinare la soluzione unica.

ALb6: Considera una pluralità di soluzioni (comprende ALb4 e ALb5) ⁽⁴⁾.

Il **secondo quesito** chiede di effettuare la traduzione dal linguaggio algebrico al linguaggio naturale. Le variabili sperimentali più rappresentative individuate a partire dall'analisi a-priori sono le seguenti:

IAL1: L'alunno risponde al quesito.

IAL2: Trasforma l'equazione alla sua forma esplicita.

IAL3: Risolve l'equazione applicando il metodo di "sostituzione in se stessa" ⁽³⁾.

IAL4: Mostra una soluzione particolare che verifica l'equazione.

IAL5: Mostra più soluzioni che verificano l'equazione.

IAL6: Aggiunge altra equazione e forma un sistema.

IAL7: Produce un testo che considera soltanto costanti.

IAL7.1: La domanda si riferisce al secondo membro dell'equazione, cioè al 18.

IAL9: Produce un testo significativo per la relazione data, ma non formula la domanda.

IAL10: Produce un testo significativo per la relazione data e formula la domanda, ma con qualche errore.

IAL11: Risponde correttamente.

IAL12: Produce un testo che considera 2 variabili, ma che non traduce esattamente l'equazione data.

IAL14: Traduce con difficoltà il linguaggio algebrico.

Il **terzo quesito** pretende indagare a quale modello mentale l'alunno associa due espressioni algebriche ed in quale contesto. Le principali variabili sperimentali sono le seguenti:

MMa1: L'alunno risponde al quesito.

MMa2: Associa l'espressione all'equazione di una retta.

MMa4: Associa l'espressione all'equazione di una parabola o di una circonferenza.

MMa5: Associa l'espressione ad un'equazione di primo grado in due incognite.

MMa6: Associa l'espressione ad un polinomio.

MMb1: L'alunno risponde al quesito.

MMb2: Associa l'espressione all'equazione di una retta.

MMb3: Associa l'espressione all'equazione di un fascio di rette.

Nel **quarto quesito** la variabile assume il suo aspetto relazionale – funzionale in una situazione problematica concreta nel contesto della geometria analitica. Le principali variabili sperimentali determinate a partire dell'analisi a-priori sono le seguenti:

GAa1: L'alunno risponde al quesito.

GAa2: Esibisce un procedimento in lingua naturale.

GAa3: Esibisce un procedimento per tentativi ed errori in lingua naturale e/o in linguaggio semi-formalizzato.

GAa4: Traduce il problema ad un'equazione di 1° grado a 2 incognite.

GAa5: Rappresenta graficamente la relazione, anche se in modo non completamente corretto.

GAa6: Rappresenta graficamente la relazione in modo corretto, ma non considera i vincoli.

GAa7: Rappresenta graficamente in maniera corretta.

GAa8: Considera che tra x e y esiste una relazione di proporzionalità.

GAa9: Considera i vincoli in modo esplicito.

GAa12: Motiva la pluralità di soluzioni, considerando che l'equazione rappresenta una relazione funzionale.

GAa14: Rappresenta graficamente e abbandona.

GAbc1: L'alunno determina l'insieme soluzione.

GAbc2: Mostra una soluzione particolare che verifica l'equazione.

GAbc3: Mostra più soluzioni che verificano l'equazione.

GAbc4: Considera esplicitamente le infinite soluzioni.

GAbc5: Considera in modo esplicito che mancano dati per determinare la soluzione.

GAbc6: Considera una pluralità di soluzioni (comprende GAbc4 e GAbc5)⁽⁴⁾.

La tabella completa delle variabili sperimentali si trova nell'Appendice N° 2 alla fine del Capitolo 3.

3.4 LE IPOTESI E LA TABELLA A-PRIORI

H₁: La concezione di variabile come incognita interferisce con l'interpretazione del suo aspetto funzionale.

Se nel contesto di una situazione problema prevale la concezione di variabile come incognita	allora non viene evocato il suo aspetto relazionale-funzionale
AL4, ALb2	~AL3, ~AL11, ~AL14, ~ALb3, ~ALb4, ~ALb5, ~ALb6

Nel contesto del primo problema, la concezione di variabile come incognita si mette in evidenza mediante la variabile sperimentale AL4 “aggiunge un dato”. Precisamente, “aggiungere un dato” è equivalente ad introdurre una nuova equazione per formare, con l'equazione del problema o parte di essa, un sistema di due equazioni in due incognite. La soluzione del sistema è una “soluzione particolare che verifica l'equazione del problema” (ALb2).

L'aspetto relazionale-funzionale della variabile viene evocato se l'alunno esibisce un “procedimento per tentativi ed errori” (AL3), mediante il quale richiama la nozione di dipendenza tra le variabili. In questo modo, l'alunno “considera implicitamente o esplicitamente che il problema rappresenta una relazione funzionale” (AL11) o mette in evidenza, erroneamente, che “tra le variabili esiste una relazione di proporzionalità diretta” (AL14). Quindi l'alunno “mostra alcune soluzioni che verificano l'equazione” (ALb3) o “considera che il problema ha una pluralità di soluzioni” (ALb6). La variabile sperimentale ALb6 comprende le variabili ALb4 “riconosce, in modo esplicito, l'esistenza delle infinite soluzioni” e ALb5 “ritiene che mancano dati per determinare la soluzione unica” ⁽⁴⁾.

Di conseguenza il “non evocare l'aspetto relazionale-funzionale della variabile” è equivalente alla negazione delle variabili sperimentali sopra descritte: ~AL3, ~AL11, ~AL14, ~ALb3, ~ALb4, ~ALb5, ~ALb6.

H₂: La lingua naturale e/o il linguaggio aritmetico prevalgono come sistemi simbolici in assenza di un'adeguata padronanza del linguaggio algebrico.

Se l'alunno utilizza prevalentemente il linguaggio naturale e/o il linguaggio aritmetico	allora ha una scarsa padronanza del linguaggio algebrico
AL16 o AL17	AL15 (AL4, ~AL5, AL7, AL9, AL13)

Nel contesto del primo quesito, la variabile sperimentale AL16 considera “*l’impiego della lingua naturale come mezzo espressivo, sia nel procedimento risolutivo (e quindi contiene la variabile AL2), sia per motivare le risposte*”.

La variabile sperimentale AL17 prende in considerazione “*l’utilizzazione del linguaggio aritmetico in un contesto non prettamente algebrico, sia in modo esplicito perché l’alunno effettua delle operazioni, sia in maniera implicita perché egli si esprime facendo riferimento ai risultati di alcuni calcoli realizzati mentalmente o con la calcolatrice*”.

La “*scarsa padronanza del linguaggio algebrico*”(AL15) viene messa in evidenza quando l’alunno “*non traduce il problema ad un’equazione di primo grado in due incognite*” (~AL5) e “*aggiunge un dato*” (AL4) o quando “*effettua la traduzione, ma risolve l’equazione utilizzando il metodo algebrico di sostituzione in se stessa*” (AL7). Questo metodo consiste nello scrivere una variabile in funzione dell’altra per, poi, sostituirla nell’equazione originale ottenendo così un’identità. Non sapendo interpretare l’identità, l’alunno “*cambia procedimento risolutivo, abbandonando quello pseudo-algebrico*” (AL9) o inizia nuovamente a “*risolvere l’equazione effettuando delle trasformazioni algebriche errate per trovare la soluzione unica*” (AL13).

H₃: La traduzione di una relazione funzionale dal linguaggio algebrico a quello naturale non “avviene spontaneamente”.

Se l’alunno realizza una manipolazione puramente sintattica della formula algebrica oppure, produce il testo di un problema non significativo per la relazione data	allora. traduce con difficoltà il linguaggio algebrico
IAL2, IAL3, IAL4, IAL5, IAL6 oppure IAL7, IAL7.1, IAL12	IAL14

Nel contesto del secondo quesito, si considera che l’alunno realizza una manipolazione puramente sintattica della formula quando opera su di essa delle trasformazioni algebriche, anziché produrre il testo di un problema. Così per esempio, quando l’allievo “*trova una o più soluzioni che verificano l’equazione*” (IAL4 - IAL5), o “*trasforma l’equazione alla sua forma esplicita*” (IAL2) e “*la risolve applicando il metodo di sostituzione in se stessa*” (IAL3) o “*aggiunge altra equazione e forma un sistema*” (IAL6).

La produzione di un testo non significativo per la relazione data considera i casi in cui l'alunno produce *“il testo di un problema aritmetico con valori numerici specifici”* (IAL7) e/o *“formula la domanda riferita al secondo membro dell'equazione, cioè al 18”* (IAL7.1) oppure quando scrive *“un testo che prende in considerazione le due variabili, ma che non traduce esattamente l'equazione data”* (IAL12).

La variabile sperimentale IAL14 *“traduce con difficoltà il linguaggio algebrico”* è stata definita come la negazione di IAL11, cioè \sim IAL11 *“risponde al quesito ma non correttamente”*.

H₄:

	Se in una situazione problema si mettono a disposizione registri rappresentativi visuali	allora l'alunno coglie più facilmente l'aspetto relazionale funzionale della variabile
PROBLEMA 1	NO	NO (preponderanza di GAbc2 = soluzione unica)
PROBLEMA 4	SI	SI (preponderanza di GAbc6 = pluralità di soluzioni)

La variabile assume il suo aspetto relazionale - funzionale nell'ambito di una situazione problematica concreta sia nel primo sia nel quarto quesito. Mentre nel primo l'alunno è libero di scegliere il contesto risolutivo nel quarto, invece, lo si costringe ad operare nell'ambito della geometria analitica utilizzando registri rappresentativi visuali.

Si considera che l'alunno coglie più facilmente l'aspetto relazionale – funzionale della variabile, quando è capace di tenere conto dell'esistenza di una pluralità di soluzioni.

3.5 ANALISI QUANTITATIVA

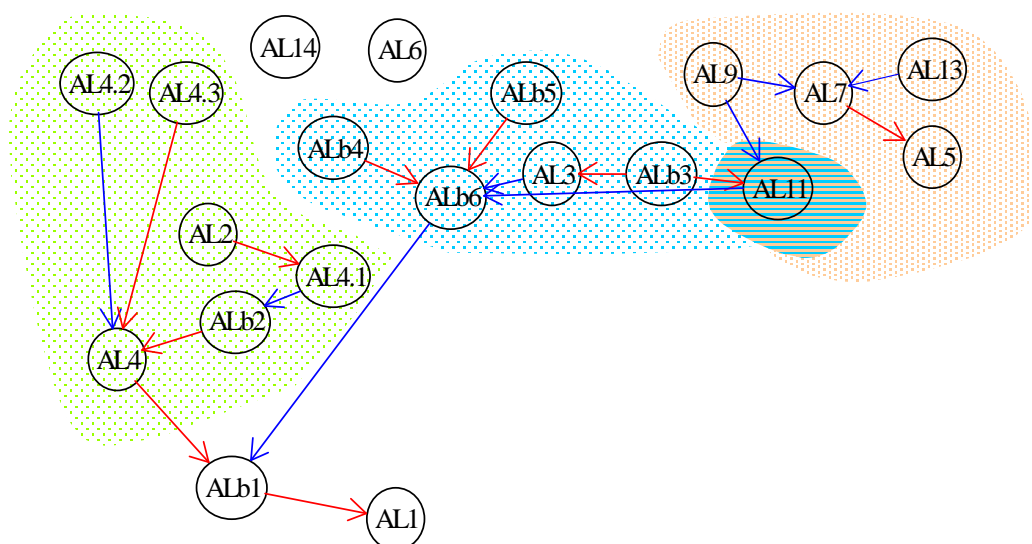
Dalla tabella di frequenze si evince che le percentuali più alte di risposte si ottengono nel primo problema con il 95% e nelle due domande del terzo quesito con il 97% ed il 99% rispettivamente. Nel quarto problema troviamo il 76% delle risposte, mentre nel secondo quesito solo il 60%. [Cfr. le variabili sperimentali AL1, MMa1, MMb1, GAa1 e IAL1 nell'Appendice N° 3 alla fine del Capitolo 3].

Nel terzo quesito, il 76% degli allievi interpreta l'espressione $ax + by + c = 0$ nell'ambito della geometria analitica (equazione di una retta 49%, di una circonferenza o parabola 26% e di un fascio di rette 1%), mentre il 26% lo fa nel contesto algebrico

(equazione di primo grado in due variabili 21% e di un polinomio 5%). Per l'espressione $y = mx + q$, invece, la totalità degli alunni fa riferimento all'ambito della geometria analitica (equazione di una retta 68%, fascio di rette 30% e parabola 1%). [Cfr. le variabili sperimentali MMA2, MMA4, MMA3, MMA5, MMA6, MMb2, MMb3 e MMb4 nell'Appendice N° 3 alla fine del Capitolo 3].

Si osservi che l'esatta coincidenza delle espressioni $ax + by + c = 0$ e $y = mx + q$ con le equazioni esplicita e implicita della retta (presentata generalmente in questo modo dai libri di testo e dagli insegnanti) può orientare l'interpretazione verso il contesto della geometria analitica. Questi risultati trovano riscontro con quelli di Bagni (2001).

3.5.1 Prima analisi implicativa e commenti del primo problema



Graphe implicatif : C:\CHIC\chic 2000\Rev-Dati.csv

99 95 90 85

Figura 1

Il grafico implicativo (realizzato con il software CHIC 2000) mostra, con percentuali del 95% e 99%, tre raggruppamenti ben definiti delle variabili sperimentali, messi in evidenza mediante le nuvole verde, gialla e celeste (la nuvola rigata gialla-celeste indica l'intersezione tra queste due nubi). I tre raggruppamenti si collegano direttamente o indirettamente con le variabili ALb1 "l'alunno determina l'insieme soluzione" e AL1 "l'alunno risponde al quesito". Ad ogni raggruppamento corrisponde un tipo differente di strategia utilizzata dagli alunni:

∅ **Procedimento in lingua naturale** (nuvola verde): l'alunno aggiunge un dato considerando che le vincite sono uguali (generalmente dividendola a metà) o che le scommesse sono uguali⁽⁵⁾. In questo modo, l'allievo trasforma il quesito in un tipico

problema aritmetico e lo risolve trovando soltanto una soluzione particolare che verifica l'equazione. Questo risultato viene confermato dai legami implicativi tra le variabili sperimentali AL2, ALb2 ed AL4 (con le sue varianti AL4.1, AL4.2 ed AL4.3).

Il procedimento in lingua naturale è il più utilizzato dagli alunni, conduce ad una soluzione unica e quindi la concezione di variabile predominante è quella di incognita.

Ø **Metodo per tentativi ed errori in lingua naturale o in linguaggio semi-formalizzato** (nuvola gialla): l'alunno che applica questa strategia generalmente assegna più valori ad una delle variabili (per esempio, la somma scommessa da Carlo) e trova i valori corrispondenti dell'altra variabile (la somma giocata da Lucia). In questo modo, l'allievo mostra alcune soluzioni che verificano le equazioni e/o considera che essa ha una pluralità di soluzioni, in altre parole, tiene conto generalmente in maniera implicita che il problema rappresenta una relazione funzionale. Il risultato descritto si ottiene dai legami implicativi tra le variabili AL3, ALb3, AL11 e ALb6.

Questo metodo conduce a più soluzioni, permette di evocare la dipendenza tra le variabili, ma non compare ancora una concezione forte dell'aspetto relazionale-funzionale.

Ø **Strategia pseudo-algebrica** (nuvola celeste): l'alunno traduce il testo del problema ad un'equazione di primo grado in due incognite ed applica il metodo di "sostituzione in se stessa", cioè il procedimento scorretto che consiste nello scrivere una variabile in funzione dell'altra per sostituirla poi nell'equazione originale ottenendo così un'identità⁽³⁾. Siccome l'alunno non riesce ad interpretare l'identità, cambia procedimento risolutivo abbandonando quello pseudo-algebrico o riprende la risoluzione dell'equazione effettuando alcuni errori per tentare di trovare la soluzione unica. Il risultato descritto si evince dai legami implicativi tra le variabili sperimentali AL9, AL13, AL7 e AL5.

E' interessante rilevare che se l'alunno abbandona questa strategia allora considera in modo implicito o esplicito che il problema rappresenta una relazione funzionale. Questo risultato viene confermato dal legame implicativo tra le variabili sperimentali AL9 ed AL11 che permette il collegamento tra i due procedimenti: per tentativi ed errori e pseudo-algebrico (nuvola rigata celeste-gialla). Questo risultato

viene rafforzato dalla doppia implicazione $AL9 \leftrightarrow AL11$ dell'albero gerarchico [Cfr. Appendice N° 4 alla fine del Capitolo 3].

In ogni caso la strategia pseudo-algebrica non è molto utilizzata e soltanto in alcuni casi conduce alla soluzione corretta del problema.

3.5.2 Falsificazione di H_1 :

Consideriamo

p : nel contesto di una situazione problema prevale la concezione di variabile come incognita (variabili sperimentali AL4 e ALb2);

q : viene evocato il suo aspetto relazionale funzionale (variabili sperimentali AL3, AL11, AL14, ALb3, ALb4, ALb5 e ALb6).

L'ipotesi 1 è equivalente a:

$p \rightarrow \sim q$ che, dal punto di vista logico, è equivalente a

$\sim(p \wedge \sim q)$ oppure $\sim(p \wedge q)$

Quindi per falsificare questa ipotesi basta dimostrare l'intersezione vuota tra le variabili sperimentali di p e q , in altre parole:

p corrisponde al *procedimento in lingua naturale* nel quale prevale la concezione di variabile come incognita;

q è equivalente al *metodo per tentativi ed errori* nel quale predomina l'aspetto relazionale-funzionale della variabile.

Dalla fig. 1 si evince precisamente che gli insiemi delle variabili sperimentali corrispondenti a p (nuvola verde) e a q (nuvola gialla) sono disgiunti. Questo risultato permette di falsificare la prima ipotesi.

3.5.3 Profilo degli alunni

A partire dall'analisi effettuata in precedenza emergono chiaramente i possibili profili degli alunni che affrontano il primo problema. Essi sono:

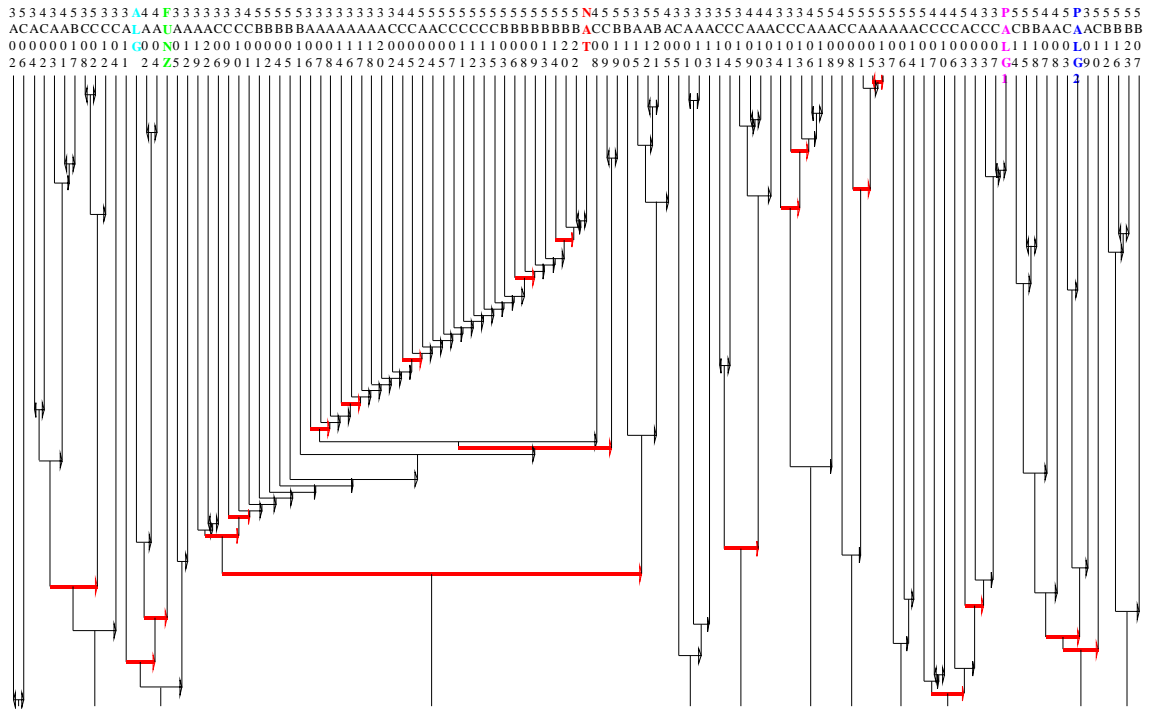
∅ **NAT**: questo profilo corrisponde all'alunno che esibisce un procedimento in lingua naturale. Quindi egli aggiunge un dato considerando che le vincite sono uguali (generalmente dividendola a metà) o che le scommesse sono uguali⁽⁵⁾ e risolve il problema trovando soltanto una soluzione particolare che verifica l'equazione.

Questo profilo è caratterizzato dalla presenza delle seguenti variabili sperimentali: AL1, AL2, AL4, AL15, ALb1 e ALb2.

- Ø **FUNZ**: corrisponde all'alunno che applica una strategia per tentativi ed errori in lingua naturale e/o in linguaggio semi-formalizzato. Egli generalmente assegna più valori ad una delle variabili e trova i valori corrispondenti dell'altra variabile mostrando alcune soluzioni che verificano le equazioni e/o considerando che essa ha una pluralità di soluzioni. Le variabili sperimentali che descrivono questo profilo sono: AL1, AL3, AL11, ALb1, ALb3, ALb4, ALb5 e ALb6).
- Ø **PALG1**: corrisponde all'alunno che utilizza il procedimento pseudo-algebrico. Egli traduce il testo del problema ad un'equazione di primo grado in due incognite ed applica il metodo di "sostituzione in se stessa" ⁽³⁾. Quando arriva all'identità non riesce a darle un'interpretazione adeguata e allora riprende la risoluzione dell'equazione effettuando alcuni errori di tipo sintattico per tentare di trovare la soluzione unica. Questo profilo è caratterizzato dalla presenza delle variabili sperimentali: AL1, AL5, AL7, AL13, AL15, ALb1 e ALb2.
- Ø **PALG2**: è una variazione del profilo PALG1, in quanto l'alunno che arriva all'identità cambia procedimento risolutivo abbandonando quello pseudo-algebrico. Le variabili sperimentali che descrivono questo profilo sono le seguenti: AL1, AL3, AL5, AL7, AL9, AL11, AL15, ALb1 e ALb3.
- Ø **ALG**: corrisponde all'alunno che applica un procedimento algebrico. Egli traduce il problema ad un'equazione di primo grado in due incognite, considera in modo implicito o esplicito che essa rappresenta una relazione funzionale e quindi che è verificata da una pluralità di soluzioni. Le variabili sperimentali implicate sono: AL1, AL5, AL11, AL15, ALb1, ALb4 e ALb6.

3.5.4 Grafo implicativo gerarchico

Nel grafo implicativo gerarchico della fig. 2 si osserva un raggruppamento di variabili molto significativo che implica il profilo NAT evidenziato in colore rosso. A destra di NAT si rileva un piccolo insieme di variabili che appartengono allo stesso raggruppamento. Queste variabili corrispondono agli alunni che hanno seguito il procedimento descritto in NAT, trovando una soluzione del problema, ma dovendo rispondere in seguito sulle possibili soluzioni, hanno considerato che l'equazione è soddisfatta da una pluralità di soluzioni.



Arbre hiérarchique : C:\CHIC\chic 2000\Var-Sup.csv

Figura 2

Si osservano anche due piccoli gruppi che implicano i profili PALG1 (evidenziato in colore fucsia) e PALG2 (in colore blu elettrico). Non ci sono implicazioni significative, invece, per le variabili supplementari ALG (in turchese) e FUNZ (in verde brillante). Quindi il profilo descritto in NAT è il più significativo perché rappresenta la strategia più utilizzata dagli alunni.

3.5.5 Analisi fattoriale

Dall'analisi fattoriale si osserva che, rispetto alla componente orizzontale, le variabili supplementari NAT (cerchiata in rosso) e PALG1 (evidenziata in fucsia) assumono un ruolo determinante e lo caratterizzano fortemente.

I profili ALG (cerchiata in turchese), PALG2 (in blu elettrico) e FUNZ (in verde) formano una nuvola che caratterizza fortemente la componente verticale. La variabile supplementare PALG2 è molto vicina a FUNZ perché l'alunno che abbandona il procedimento pseudo-algebrico, generalmente adotta quello descritto in FUNZ.

Grafico componenti ruotato

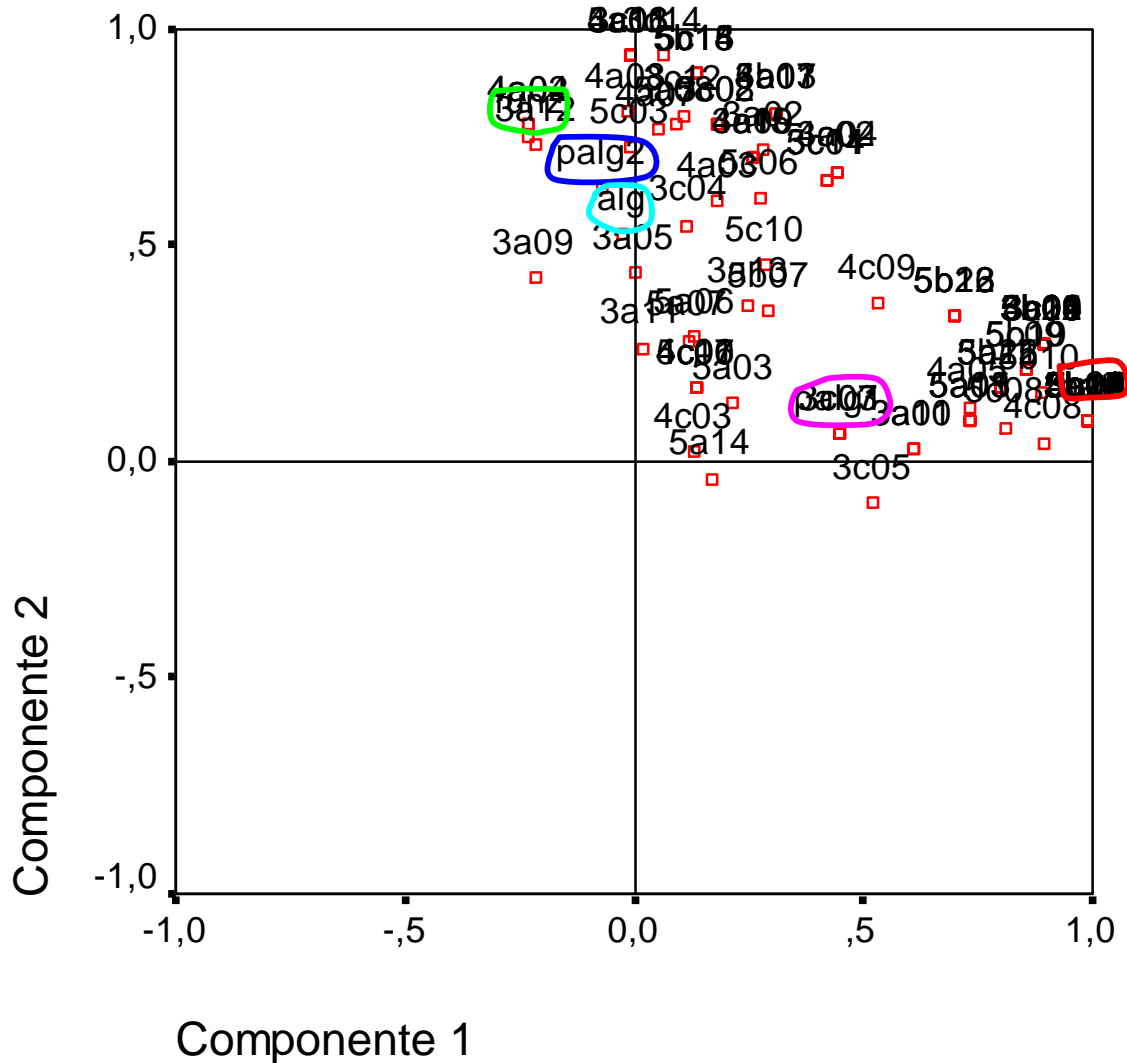
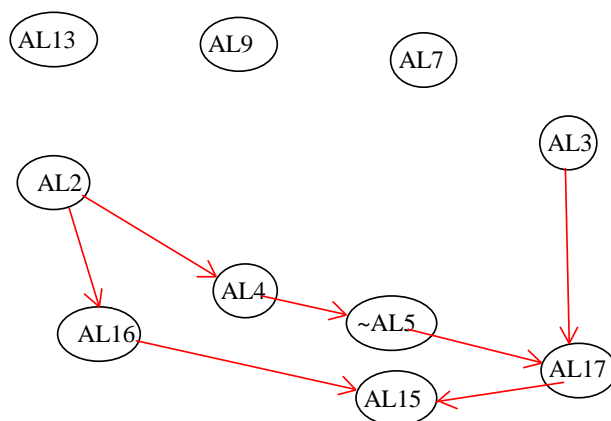


Figura 3

Le strategie vincenti sono precisamente quelle descritte nei profili ALG, PALG2 e FUNZ che portano alla pluralità di soluzioni, mentre NAT e PALG1 conducono alla soluzione unica. Questo trova una forte corrispondenza con le diverse concezioni del concetto di “variabile”. Quindi l’asse orizzontale rappresenta la concezione di “variabile” come incognita, l’asse verticale, invece, riproduce il suo aspetto relazionale-funzionale. Questi risultati permettono nuovamente di falsificare la prima ipotesi.

3.5.6 Seconda analisi implicativa e commenti del primo problema



Graphe implicatif : C:\CHIC\chic 2000\Ipot-2.csv

99 95 90 85

Figura 4

Il grafico implicativo della fig. 4 mostra tre gruppi ben definiti di variabili sperimentali:

- Ø *Primo gruppo implicativo* (con percentuale del 99%): è rappresentato dal legame $AL2 \rightarrow AL16 \rightarrow AL15$. La prima implicazione è ovvia perché la variabile sperimentale AL16 (*l'alunno utilizza il linguaggio naturale*) contiene la variabile AL2 (*esibisce un procedimento in lingua naturale*). La seconda implicazione, invece, è molto importante: se l'alunno utilizza il linguaggio naturale come mezzo espressivo allora ha una scarsa padronanza del linguaggio algebrico.
- Ø *Secondo gruppo implicativo* (con percentuale del 99 %): se un alunno esibisce un procedimento in lingua naturale allora aggiunge un dato, non traduce il problema ad un'equazione di primo grado in due incognite, quindi utilizza il linguaggio aritmetico e di conseguenza evidenzia una scarsa padronanza del linguaggio algebrico (Legame $AL2 \rightarrow AL4 \rightarrow \sim AL5 \rightarrow AL17 \rightarrow AL15$).
- Ø *Terzo gruppo implicativo* (con percentuale del 99%): se l'alunno usa un procedimento per tentativi ed errori allora utilizza, in modo implicito o esplicito, il linguaggio aritmetico in un contesto non prettamente algebrico e, quindi, mostra una scarsa padronanza del linguaggio algebrico (Legame $AL3 \rightarrow AL17 \rightarrow AL15$).

E' interessante osservare che le variabili AL7 (*applica il metodo di "sostituzione in se stessa"*), AL13 (*risolve l'equazione eseguendo delle trasformazioni algebriche errate per trovare la soluzione unica*) e AL9 (*cambia procedimento risolutivo abbandonando quello pseudo-algebrico*) sono collegate fra loro con percentuale del 95% (vedasi fig.

1). Queste variabili, invece, non risultano connesse con AL15 (evidenzia una scarsa padronanza del linguaggio algebrico), probabilmente perché registrano una bassa percentuale di risposta e in alcuni casi conducono alla soluzione corretta del problema.

3.5.7 Falsificazione di H₂:

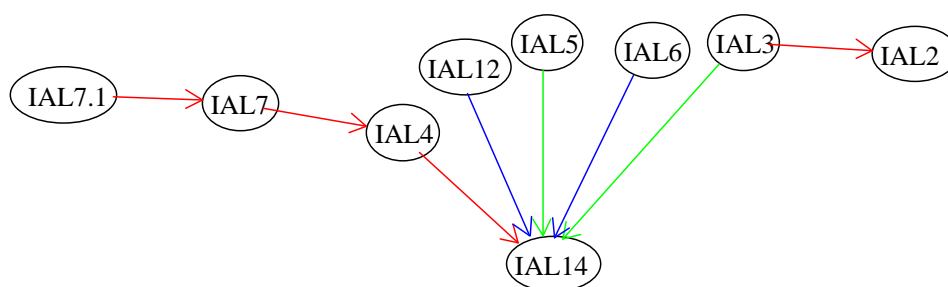
Dall'analisi effettuata in precedenza si evince che:

- ∅ AL16 → AL15: se l'alunno utilizza la lingua naturale come mezzo espressivo allora ha una scarsa padronanza del linguaggio algebrico.
- ∅ AL17 → AL15, se l'alunno usa il linguaggio aritmetico, in modo esplicito o implicito, in un contesto non prettamente algebrico allora ha una scarsa padronanza del linguaggio algebrico.

Questo risultato permette di falsificare l'ipotesi 2.

3.5.8 Terza analisi implicativa e commenti del secondo problema

Il secondo quesito chiede la formulazione di un problema che possa risolversi utilizzando un'equazione data, in altre parole si deve realizzare la traduzione dal linguaggio algebrico a quello naturale. Questo compito si è rivelato difficile per gli alunni, perché dal 60% che ha risposto al quesito soltanto il 7% lo ha fatto correttamente [Cfr. le variabili sperimentali IAL1 e IAL11 nell'Appendice N° 3 alla fine del Capitolo 3].



Graphe implicatif : C:\CHIC\chic 2000\Ipotesi-3.csv

99 95 90 85

Figura 5

Dall'analisi della fig. 5 si ricavano diversi percorsi implicativi, ma tutti hanno lo stesso conseguente: la variabile sperimentale IAL14 *“l'alunno traduce con difficoltà il linguaggio algebrico”*. Il percorso implicativo più importante, con una validità statistica del 99%, è il seguente: se un alunno formula la domanda del problema riferita al secondo membro dell'equazione, cioè al 18, allora ha prodotto il testo di un classico problema aritmetico con valori numerici specifici, quindi ha mostrato una soluzione particolare che verifica l'equazione e di conseguenza evidenzia delle difficoltà per tradurre il linguaggio algebrico (Legami implicativi IAL7.1, IAL7, IAL4 e IAL14).

Altre implicazioni, con percentuali del 95% e 90%, hanno come antecedenti le seguenti variabili sperimentali: IAL12 *“produce il testo di un problema che considera le due variabili, ma che non traduce esattamente l'equazione data”*, IAL6 *“aggiunge altra equazione all'equazione data e forma un sistema”*, IAL5 *“mostra più soluzioni che verificano l'equazione”* e IAL3 *“risolve l'equazione applicando il metodo di sostituzione in se stessa”*. In più se un alunno utilizza questo metodo, allora ha trasformato l'equazione alla sua forma esplicita (IAL3 → IAL2).

3.5.9 Falsificazione di H₃:

Dall'analisi realizzata in precedenza si ricavano due raggruppamenti di variabili sperimentali che corrispondono a due strategie diverse per affrontare il quesito. Il primo gruppo implicativo è costituito dalle variabili IAL2, IAL3, IAL5 e IAL6 che caratterizzano l'attività di manipolazione puramente sintattica della formula. Il secondo gruppo contiene la variabile IAL12 e il percorso IAL7.1 → IAL7 → IAL4 che corrisponde alla produzione del testo di un problema non significativo per la relazione data.

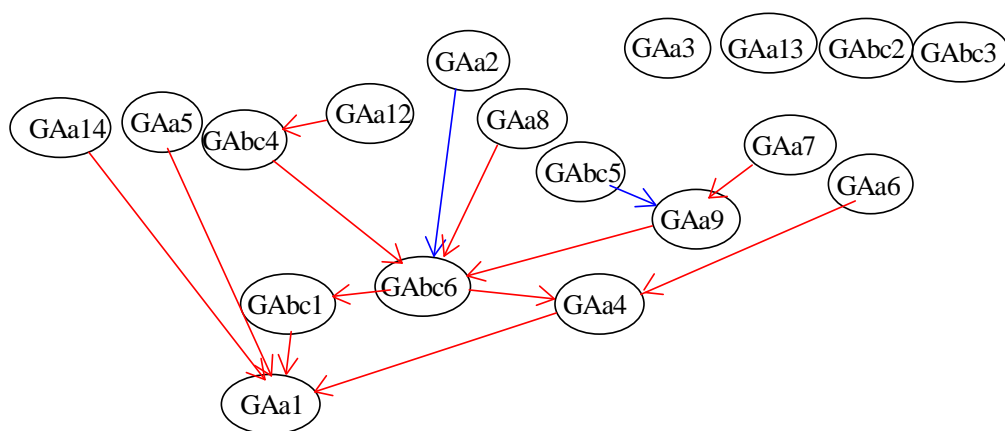
I due gruppi implicano la variabile IAL14 *“l'alunno traduce con difficoltà il linguaggio algebrico”*. Questo risultato permette di falsificare la terza ipotesi.

3.5.10 Quarta analisi implicativa e commenti del quarto problema

Dal grafico implicativo della fig. 6 emergono alcune particolarità interessanti:

∅ Tutte le implicazioni arrivano, direttamente o per transitività, alla variabile sperimentale GAa1 *“l'alunno risponde al quesito”*, evidenziando, con percentuale del 99%, una variata gamma di possibili risposte: *“traduce il problema ad un'equazione di primo grado in due incognite”* (GAa4), *“rappresenta graficamente la relazione con qualche errore o senza considerare i vincoli”* (GAa5 e GAa6),

“*abbandona subito dopo la rappresentazione grafica*” (GAa14), risolve il problema e “*risponde sulle possibili soluzioni*” (GAbc1).



Grphe implicatif : C:\CHIC\chic 2000\Problema-4.csv

99 95 90 85

Figura 6

- ∅ La variabile sperimentale GAbc6 rappresenta un nodo implicativo importante perché in esso convergono, con percentuali del 99% e in qualche caso del 95%, le variabili GAa2, GAa7, GAa8, GAa9 e GAa12. In altre parole, “*se l’alunno esibisce un procedimento in lingua naturale*” (GAa2) “*se rappresenta graficamente in maniera corretta*” (GAa7), “*se considera i vincoli in modo esplicito*” (GAa9), “*se motiva la pluralità di soluzioni considerando che l’equazione rappresenta una relazione funzionale*” (GAa12) o “*se ritiene in modo errato che tra x e y esiste una relazione di proporzionalità*” (GAa8) allora, in ogni caso, l’allievo “*considera che il problema ha una pluralità di soluzioni*” (GAbc6). La convergenza delle variabili sperimentali GAbc4 e GAbc5 in GAbc6 è ovvia perché “*la pluralità di soluzioni*” (GAbc6) comprende sia i casi di “*infinite soluzioni*” (GAbc4), sia quelli di “*manca di dati per determinare la soluzione unica*” (GAbc5).
- ∅ L’allievo che risponde sulle possibili soluzioni considera fondamentalmente che il problema ha una pluralità di soluzioni (legame implicativo tra le variabili sperimentali GAbc6 e GAbc1). Questo risultato viene rafforzato dalla mancanza di collegamento tra le variabili sperimentali GAbc2 (mostra una soluzione che verifica l’equazione) e GAbc3 (mostra più soluzioni che verificano l’equazione) con GAbc1, ma soprattutto dall’implicazione $GAbc6 \rightarrow GAbc1$ al primo livello dell’albero gerarchico (Cfr. Appendice N° 6 alla fine del Capitolo 3). Dall’altra parte, le

percentuali di risposte confermano il risultato precedente: 3% per GAbc2, 4% per GAbc3 e 57% per GAbc6 (Cfr. Tabella di Frequenze dell'Appendice N° 3 alla fine del Capitolo 3).

3.5.11 Quinta analisi implicativa e confronto tra il primo ed il quarto problema

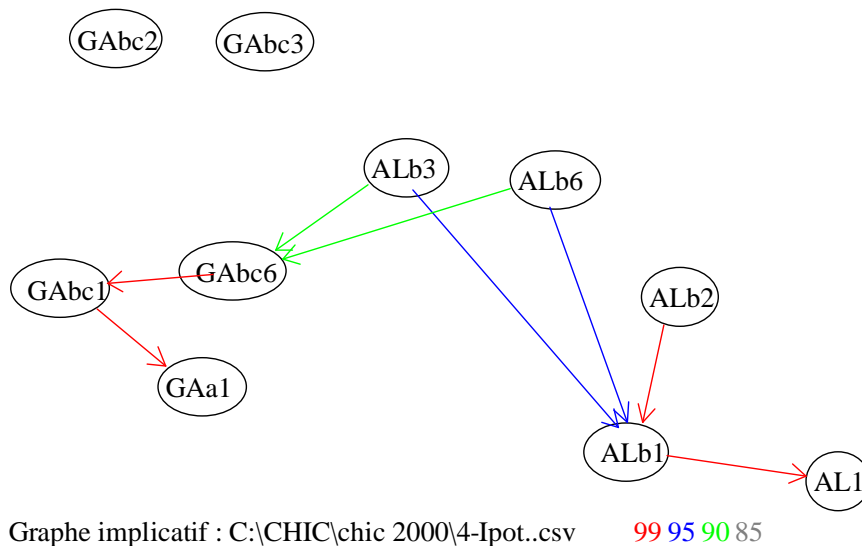


Figura 7

Per falsificare la quarta ipotesi si devono mettere a confronto le risposte del primo e del quarto problema. Anche se in entrambi la variabile assume l'aspetto relazionale – funzionale, nel primo quesito l'alunno è libero di scegliere il contesto risolutivo, mentre nel quarto lo si costringe ad operare nell'ambito della geometria analitica utilizzando registri rappresentativi visuali.

- ∅ Nel primo problema la maggior parte degli alunni che determina l'insieme soluzione considera che l'equazione ha soluzione unica (legame implicativo $ALb2 \rightarrow ALb1$, con percentuale del 99%). Meno numerosi sono, invece, quelli che mostrano più soluzioni che verificano l'equazione o che considerano che essa ha una pluralità di soluzioni (legami implicativi $ALb3 \rightarrow ALb1$ ed $ALb6 \rightarrow ALb1$, con percentuale del 95%).
- ∅ Nel quarto problema l'alunno che risponde sulle possibili soluzioni considera fondamentalmente che il problema ha una pluralità di soluzioni (legame implicativo $GAbc6 \rightarrow GAbc1$ con percentuale del 99%). Non esistono, invece, collegamenti tra le variabili sperimentali GAbc2 e GAbc3 “*mostra una o più soluzioni che verificano*

l'equazione” e la variabile GAbc1 “*determina l'insieme soluzione*”. Questi risultati sono stati discussi nella sezione precedente.

- Ø E' interessante rilevare due implicazioni (con percentuale statistica del 90%) che collegano il primo al quarto problema: $ALb3 \rightarrow GAbc6$ e $ALb6 \rightarrow GAbc6$. In altre parole, se l'alunno considera che l'equazione del primo quesito è verificata da più soluzioni o da una pluralità di soluzioni allora anche nel quarto problema tiene conto delle molteplici soluzioni.

3.5.12 Falsificazione di H_4 :

Si considera che l'alunno coglie più facilmente l'aspetto relazionale – funzionale della variabile, quando è capace di tenere conto dell'esistenza di una pluralità di soluzioni. Questo si verifica soprattutto nel quarto problema in presenza di registri rappresentativi visuali e per gli alunni che non hanno una buona padronanza del linguaggio algebrico. Questo risultato permette di falsificare la quarta ipotesi.

3.6 CONCLUSIONI

Dall'analisi dei dati si evince che le strategie utilizzate dagli alunni per risolvere il primo problema sono le seguenti:

- Ø *procedimento in lingua naturale*: corrisponde al profilo NAT, risulta il più utilizzato dagli alunni e conduce ad una soluzione unica. La concezione di variabile predominante è quella di incognita.
- Ø *metodo per tentativi ed errori in lingua naturale e/o in linguaggio semi-formalizzato* (generalmente aritmetico): corrisponde al profilo FUN e conduce a più soluzioni. Viene evocata la dipendenza tra le variabili, ma non compare ancora una concezione forte dell'aspetto relazionale-funzionale.
- Ø *strategia pseudo-algebrica* (corrispondente ai profili PALG1 e PALG2): è poco utilizzata dagli alunni e soltanto in alcuni casi conduce alla soluzione corretta del problema.

Lo studio minuzioso effettuato, sia con l'analisi implicativa sia con l'analisi fattoriale, permette di falsificare la prima ipotesi, cioè: “se nel contesto di una situazione problema prevale la concezione di variabile come incognita allora non viene evocato il suo aspetto relazionale-funzionale”.

Dall'analisi realizzata si ricava che per risolvere il primo problema gli alunni usano prevalentemente la lingua naturale come mezzo espressivo. Utilizzano anche, in modo esplicito o implicito, il linguaggio aritmetico in un contesto non prettamente algebrico. Questi risultati permettono di falsificare la seconda ipotesi: “la lingua naturale e/o il linguaggio aritmetico prevalgono come sistemi simbolici, in assenza di adeguata padronanza del linguaggio algebrico”.

E' interessante osservare che per risolvere il primo quesito, nessun alunno utilizza registri rappresentativi visuali e che buona parte di essi considera che la situazione problematica ha soluzione unica (variabile come incognita). Per il quarto problema, invece, con una situazione concreta simile alla precedente ma formulata nel contesto della geometria analitica, gli allievi che rispondono sulle possibili soluzioni considerano direttamente la pluralità di soluzioni (variabile in relazione funzionale).

Questi risultati dimostrano che gli alunni, con insufficiente padronanza del linguaggio algebrico, possono considerare più facilmente la pluralità di soluzioni in presenza di registri rappresentativi visuali, evocando il modello mentale dell'equazione della retta.

Nel terzo quesito la maggior parte degli alunni ha interpretato le espressioni $ax + by + c = 0$ e $y = mx + q$ nell'ambito della geometria analitica, ma il modello di retta non è stato richiamato con l'equazione del primo problema. In questo modo la rappresentazione grafica è completamente assente dal processo risolutivo. Questo comportamento chiamato “rifiuto della visualizzazione” è già stato rilevato nella ricerca didattica (Cfr. Eisenberg & Dreyfus, 1991; Vinner, 1989; Furinghetti & Somaglia, 1994; Chiarugi, I. *et alii*, 1995).

Si presuppone che questo comportamento sia dovuto ad una questione di contratto didattico. Di solito i problemi con equazioni presentati a scuola si risolvono in un contesto algebrico dove la variabile assume l'aspetto di incognita. Le situazioni problematiche concrete non vengono mai risolte nell'ambito della geometria analitica, richiamando registri rappresentativi visuali. I problemi di geometria analitica proposti a scuola sono diversi. Nel quarto quesito, l'alunno si vede costretto ad utilizzare il modello di retta con la sua rappresentazione cartesiana. Quindi l'equazione diventa “percepibile” attraverso il grafico e lo studente riesce a “visualizzare” più facilmente la pluralità di soluzioni. Questi risultati permettono di falsificare la quarta ipotesi: “Se in una situazione problema si mettono a disposizione registri rappresentativi visuali allora l'alunno coglie più facilmente l'aspetto relazionale - funzionale della variabile”.

Dall'analisi precedente si evince che l'alunno è più propenso a considerare la variabile sotto l'aspetto di incognita (cercando l'unicità della soluzione dell'equazione in due variabili) nel contesto di una situazione concreta e in assenza di registri rappresentativi grafici. Di conseguenza, si può affermare che si manifesta una certa interferenza della concezione di incognita su quella funzionale. In ogni caso, crediamo che la questione deva essere ancora approfondita analizzando più dettagliatamente le strategie risolutive utilizzate. Si dovrebbe indagare come vengono attivate le concezioni di incognita e di relazione funzionale nel processo di risoluzione di una situazione problematica concreta e come può avvenire il passaggio da una concezione all'altra senza interferenza.

La traduzione dal linguaggio algebrico al linguaggio naturale si rivela un compito difficile per gli alunni (Ipotesi 3). Alcuni di loro si limitano a realizzare una manipolazione puramente sintattica della formula, altri, invece, riescono a produrre il testo di un problema che non è significativo per la relazione data. Sono emerse alcune particolarità interessanti, per esempio, gli alunni che producono il testo di un classico problema aritmetico con valori numerici specifici, formulano la domanda riferita al secondo membro dell'equazione, cioè al 18. Quindi, per questi alunni l'equazione si presenta come una relazione unidirezionale e con la risposta del lato destro. Si manifesta, così, un retrocesso alle percezioni primitive che gli studenti di 12-13 anni hanno sulle equazioni di primo grado in un'incognita (Kieran, 1981). Certi alunni hanno bisogno di mostrare qualche soluzione particolare che verifica l'equazione prima di coinvolgerla nell'elaborazione di un problema. Questo dimostra un ostacolo del linguaggio a livello puramente sintattico che dovrebbe essere analizzato più approfonditamente.

Altre questioni centrali che emergono da questa ricerca sono: l'importanza della visualizzazione nella risoluzione di problemi e della coordinazione di diversi registri rappresentativi (Duval, 1999).

NOTE:

- (1) Nel presente lavoro si preferisce utilizzare il termine “**pluralità** di soluzioni” al vocabolo “**infinite** soluzioni”, perché non sono state considerate le possibili connotazioni della parola “infinito”. In ogni modo, sono state definite due variabili sperimentali ALb4 (per il primo problema) e GAbc4 (per il quarto) per tenere conto dei casi in cui l'alunno considera in modo esplicito l'esistenza di infinite soluzioni.
- (2) Riteniamo opportuno precisare la terminologia utilizzata in questa ricerca; a tale proposito seguiremo D'Amore & Frabboni (1996). Si chiama immagine mentale ciò che viene elaborato dall'alunno, anche involontariamente, a fronte di una qualsiasi sollecitazione (sia interna che esterna): si tratta di un'immagine interna, pertanto non espressa, almeno

inizialmente. Tutte le immagini mentali riferite ad un concetto costituiscono il modello mentale relativo a tale concetto (Johnson-Laird, 1988). Le concezioni così costruite devono spesso essere espresse, comunicate mediante una specifica traduzione, quindi, si viene a creare un modello esterno, esprimibile frequentemente in un ben determinato linguaggio. Ogni forma di comunicazione di un contenuto, di un qualsiasi messaggio matematico avviene dunque con l'impiego di modelli esterni (Shepard, 1980).

- (3) Abbiamo chiamato “procedimento di sostituzione in se stessa” il metodo scorretto che consiste nello scrivere una variabile in funzione dell'altra per sostituirla poi nell'equazione originale ottenendo così un'identità. In altre parole, il metodo di sostituzione utilizzato per risolvere i sistemi di equazioni viene applicato ad una singola equazione.
- (4) Le variabili sperimentali ALb6 e GAbc6 “*considera una pluralità di soluzioni*” ammettono le risposte del tipo: “tante soluzioni”, “molte soluzioni” e “infinite soluzioni”. Questa ultima corrisponde alle variabili ALb4 e GAbc4. La pluralità di soluzioni comprende anche i casi in cui l'alunno considera in modo esplicito che mancano dati per determinare la soluzione unica (ALb5 e GAbc5).
- (5) La variabile sperimentale **AL4** “*aggiunge un dato*” considera due possibilità: vincite uguali o scommesse uguali (AL4.3). Il primo caso tiene conto di altri due: la vincita si divide a metà (AL4.1) o entrambi i ragazzi vincono 300 € (AL4.2).
 “*Aggiungere un dato*” è equivalente ad introdurre una nuova equazione per formare, con l'equazione del problema $3x + 4y = 300$ o parte di essa, un sistema di due equazioni in due incognite. Quindi ad ogni caso corrisponde un sistema:

∅ “*La vincita di 300 € si divide a metà*” (AL4.1) è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 300 \\ 3x = 4y = 150 \end{cases}$$

∅ “*La vincita è uguale a 300 € per entrambi i ragazzi*” (AL4.2) corrisponde al sistema:

$$\begin{cases} 3x = 300 \\ 4y = 300 \end{cases}$$

∅ “*Le scommesse sono uguali*” (AL4.3) equivale al sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 300 \\ x = y \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

- ARZARELLO, F., BAZZINI, L. e CHIAPPINI, G., 1994. *L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*. Progetto Strategico CNR - TID, Quaderno n. 6.
- BAGNI, G. T., 2001. “Che cos'è?” Modelli mentali evocati da espressioni algebriche: scelta del contesto e contratto didattico. *Bollettino dei docenti di matematica*, 43, pp. 29-50.
- CHIARUGI, I., FRACASSINA G., FURINGHETTI F. & PAOLA D., 1995. Parametri, variabili e altro: un ripensamento su come questi concetti sono presentati in classe. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, 18B, 1, pp. 34-50.
- D'AMORE, B. & FRABBONI, F., 1996. *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milano: Angeli.
- DUVAL, R., 1999. L'apprendimento in matematica richiede un funzionamento cognitivo specifico? *La matematica e la sua didattica*, 1, pp. 17-42.

- EISENBERG, T. & DREYFUS, T., 1991. On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Mathematical Association of America, pp. 25-38.
- FURINGHETTI, F. & SOMAGLIA, A., 1994. Functions in algebraic and graphical environments. In A. Antibi (Ed.), *Proceedings of CIEAEM 46*, Toulouse.
- GRAS, R., 1997. Metodologia di analisi di indagine. *Quaderni di Ricerca Didattica*, 7, pp. 99-109.
- GRAS, R., 2000. I fondamenti dell'analisi statistica implicativa. *Quaderni di Ricerca Didattica*, 9, pp. 189-209.
- JOHNSON-LAIRD, P. N., 1988. *Modelli mentali*. Bologna: Il Mulino (edizione originale: 1983).
- KIERAN, C., 1981. Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies of Mathematics*, 12, pp. 317-326.
- KÜCHEMAN, D., 1981. Algebra. In Hart, K.M., (ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16*. John Murray: London, pp. 102-119.
- MALISANI, E., 1990. Incidencia de distintos tipos de estructura lògica de un problema sobre la conducta de resoluciòn. *Revista IRICE del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educaciòn*, n. 1, Rosario - Argentina, pp. 41-59. ISSN on-line 1592-4424. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno3.htm>.
- MALISANI, E., 1992. Incidenza di diversi tipi di struttura logica di un problema sulla condotta di risoluzione. *Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.)*, n. 3, Palermo, Italia, pp. 65 – 86. ISSN on-line 1592-4424. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno3.htm>.
- MALISANI, E., 2002. The notion of variable in semiotic contexts different. *Proceedings of the International Conference "The Humanistic Renaissance in Mathematics Education"*. Palermo, pp.245-249. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/21project.htm> - ISSN on-line 1592-4424.
- MALISANI E., 2005. The notion of variable: some meaningful aspects of algebraic language. In A. Gagatsis, F. Spagnolo, Gr. Makrides & V. Farmaki (eds.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education (MEDCONF 2005)*, University of Palermo, Italia. Vol. II, pp. 397-406.
- MATZ, M., 1982. Towards a Process Model for High School Algebra Errors. In Sleeman, D. e Brown, J.S. (eds.), *Intelligent Tutoring Systems*, London: Academic Press.
- PANIZZA, M., SADOVSKY, P. & SESSA, C. 1999. La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3), pp. 453-461.
- SHEPARD, R. N., (1980). *Internal representations: studies in perception imagery and cognition*. Montgomery: Bradford.
- SPAGNOLO F., 1998. *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*. La Nuova Italia, Firenze, Italia.

- TRIGUEROS, M., REYES, A., URSINI, S. & QUINTERO, R., 1996. Diseño di un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las Ciencias*, 14 (3), pp. 351-363.
- USISKIN, Z., 1988. Conceptions of school algebra and uses o variables. In Coxford A.F. e Shulte A.P. (eds.), *The ideas of Algebra*, K-12. Yearbook, NCTM, Reston, Va, pp. 8-19.
- VINNER, S., 1989. Avoidance of visual considerations in calculus students, *FOCUS on Learning Problems in Mathematics* **11** (2), pp. 149-156.
- WAGNER, S., 1981. An Analytical Framework for Mathematical Variables. Proceedings of the Fifth PME Conference, pp. 165-170. Grenoble, Francia.
- WAGNER, S., 1983. What are These Things Called Variables? *Mathematics Teacher*, October, pp. 474-479.

APPENDICE N° 1: Questionario

- 1- Carlo e Lucia vincono al lotto la somma complessiva di €300. Sappiamo che Carlo vince il triplo del denaro scommesso, mentre Lucia il quadruplo del proprio.
- Determina le somme di denaro che Carlo e Lucia hanno giocato. Commenta il procedimento seguito.
 - Quante sono le possibili soluzioni? Motiva la tua risposta.
- 2- Inventa una possibile situazione problema che possa risolversi utilizzando la seguente relazione di uguaglianza: $6x - 3y = 18$.
- Commenta il procedimento seguito.
- 3- Che cosa è? Interpreta mediante una “breve risposta” le seguenti espressioni:
- $ax + by + c = 0$
 - $y = mx + q$
- 4- Una persona per poter usufruire di un telefono fisso installato presso di un'altra, pattuisce con questa ultima di pagare mensilmente €5 più €2 per ora telefonate effettuate.
- Detto: x il numero di ore mensili di telefonate effettuate e
 y la somma complessiva pagata mensilmente
- Stabilire quale tipo di relazione intercorre tra x e y e rappresentarla graficamente nel piano cartesiano.
 - Determina la somma complessiva pagata mensilmente ed il numero di ore mensili di telefonate effettuate. Commenta il procedimento seguito.
 - Quante sono le possibili soluzioni? Motiva la tua risposta

APPENDICE N° 2: Tabella completa delle variabili sperimentali

Per ogni quesito del questionario abbiamo effettuato un'analisi a-priori molto dettagliata. A continuazione riportiamo le tabelle con tutte le variabili sperimentali analizzate.

PRIMO QUESITO

AL	1	2	3	4	4.1	4.2	4.3
1	L'alunno risponde	Esibisce un procedimento in lingua naturale	Esibisce un procedimento per tentativi ed errori in lingua naturale e/o in linguaggio semi-formalizzato	Aggiunge un dato	Come 4, dividendo la vincita a metà	Come 4, considerando che entrambi i ragazzi vincono 300 €	Come 4, considerando che le somme scommesse sono uguali
0	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO

AL	5	6	7	8	9	10
1	Traduce il problema ad un'equazione di 1° grado a 2 incognite	Considera i vincoli del problema in modo esplicito	Come 5, utilizzando il metodo algebrico di "sostituzione in se stessa" (3)	Aggiunge altra equazione e forma un sistema	Cambia procedimento risolutivo, abbandonando quello pseudo-algebrico	Considera che l'equazione rappresenta una retta
0	NO	NO	NO	NO	NO	NO

AL	11	12	13	14	15
1	Considera, in modo esplicito o implicito, che il problema rappresenta una relazione funzionale	Considera che un'equazione indeterminata ha infinite soluzioni	Commette degli errori nella risoluzione dell'equazione e trova (o tenta) la soluzione unica	Considera che tra x e y esiste una relazione di proporzionalità	Ha scarsa padronanza del linguaggio algebrico (AL4 + AL7 + AL9 + AL13 + AL14 + ~AL5)
0	NO	NO	NO	NO	NO

AL	16	17
1	Utilizza il linguaggio naturale, sia nel procedimento risolutivo sia per motivare le risposte (include AL2).	Utilizza il linguaggio aritmetico in un contesto non prettamente algebrico, in modo esplicito o implicito.
0	NO	NO

ALb	1	2	3	4	5	6
1	L'alunno risponde	Mostra una soluzione particolare che verifica l'equazione	Mostra più soluzioni che verificano l'equazione	Considera esplicitamente le infinite soluzioni	Considera in modo esplicito che mancano dati per determinare la soluzione unica	Considera la pluralità di soluzioni (Comprende ALb4 e ALb5)
0	NO	NO	NO	NO	NO	NO

ALb	2*	3*
1	Considera soltanto una soluzione particolare che verifica l'equazione	Considera soltanto alcune soluzioni che verificano l'equazione
0	NO	NO

SECONDO QUESITO

IAL	1	2	3	4	5	6
1	L'alunno risponde	Trasforma l'equazione alla sua forma esplicita.	Risolve l'equazione applicando il metodo di "sostituzione in se stessa"	Mostra una soluzione particolare che verifica l'equazione	Mostra più soluzioni che verificano l'equazione	Aggiunge altra equazione e forma un sistema
0	NO	NO	NO	NO	NO	NO

IAL	7	7.1	8	9	10
1	Produce un testo che considera soltanto costanti	La domanda si riferisce al secondo membro dell'equazione, cioè al 18.	Produce un testo che considera soltanto una variabile	Produce un testo significativo per la relazione data, ma non formula la domanda	Produce un testo significativo per la relazione data e formula la domanda, ma con qualche errore
0	NO	NO	NO	NO	NO

IAL	11	12	13	14
1	Risponde correttamente	Produce un testo che considera 2 variabili, ma che non traduce esattamente l'equazione data	Formula un problema nel contesto della geometria analitica	Traduce con difficoltà il linguaggio algebrico
0	NO	NO	NO	NO

IALb	1	2	3	4
1	L'alunno risponde	Commenta la risoluzione dell'equazione	Commenta l'assegnazione di particolari oggetti alle variabili	Come 3, spiegando la formulazione della domanda
0	NO	NO	NO	NO

TERZO QUESITO

Prima equazione

MMa	1	2	3	4	5
1	L'alunno risponde	Associa l'espressione all'equazione di una retta	Associa l'espressione all'equazione di un fascio di rette	Associa l'espressione all'equazione di una parabola o di una circonferenza	Associa l'espressione ad un'equazione di primo grado in due incognite
0	NO	NO	NO	NO	NO

MMa	6	7
1	Associa l'espressione ad un polinomio	Associa l'espressione ad un'equazione di secondo grado
0	NO	NO

Seconda equazione

MMb	1	2	3	4	5
1	L'alunno risponde	Associa l'espressione all'equazione di una retta	Associa l'espressione all'equazione di un fascio di rette	Associa l'espressione all'equazione di una parabola o di una circonferenza	Associa l'espressione ad un'equazione di primo grado in due incognite
0	NO	NO	NO	NO	NO

MMb	6	7
1	Associa l'espressione ad un polinomio	Associa l'espressione ad un'equazione di secondo grado
0	NO	NO

QUARTO QUESITO.

L'analisi a-priori corrispondente è il seguente:

GAa	1	2	3	4	5
1	L'alunno risponde	Esibisce un procedimento in lingua naturale	Esibisce un procedimento per tentativi ed errori in lingua naturale e/o in linguaggio semi-formalizzato	Traduce il problema ad un'equazione di 1° grado a 2 incognite	Rappresenta graficamente la relazione, anche se in modo non completamente corretto.
0	NO	NO	NO	NO	NO

GAa	6	7	8	9	9.1
1	Rappresenta graficamente la relazione in modo corretto, ma non considera i vincoli.	Rappresenta graficamente in maniera corretta	Considera che tra x e y esiste una relazione di proporzionalità	Considera i vincoli in modo esplicito	Considera i vincoli inferiori in modo esplicito
0	NO	NO	NO	NO	NO

GAa	9.2	10	11	12	13	14
1	Considera i vincoli superiori in modo esplicito	Utilizza il metodo algebrico di "sostituzione in se stessa"	Cambia procedimento risolutivo, abbandonando quello pseudo-algebrico	Motiva la pluralità di soluzioni, considerando che l'equazione rappresenta una relazione funzionale	Motiva la pluralità di soluzioni, considerando che l'equazione rappresenta una retta	Rappresenta graficamente e abbandona
0	NO	NO	NO	NO	NO	NO

GAbc	1	2	3	4	5	6
1	L'alunno risponde	Mostra una soluzione particolare che verifica l'equazione	Mostra più soluzioni che verificano l'equazione	Considera esplicitamente le infinite soluzioni	Considera in modo esplicito che mancano dati per determinare la soluzione	Considera la pluralità di soluzioni (Comprende GAbc4 e GAbc5)
0	NO	NO	NO	NO	NO	NO

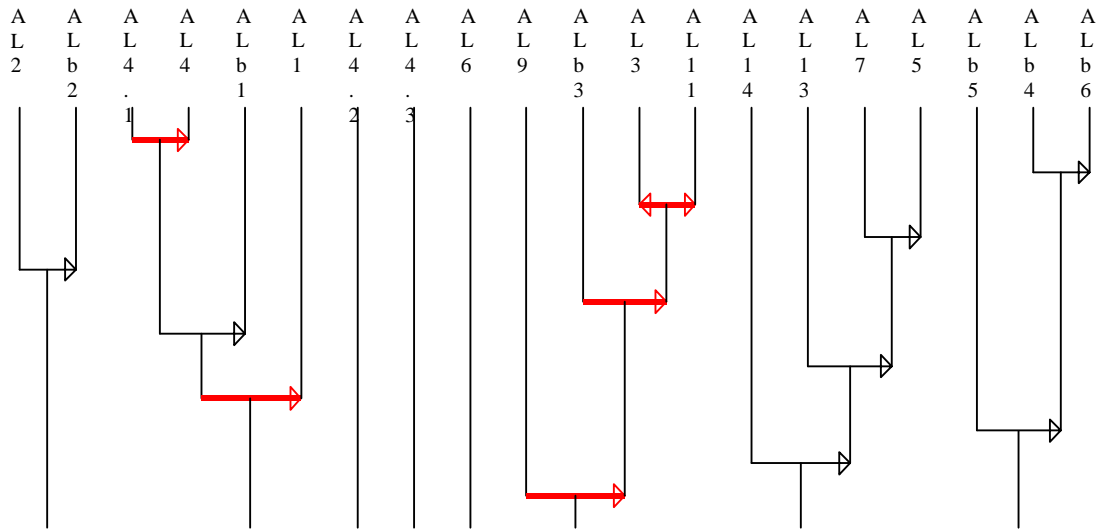
GAbc	2*	3*
1	Considera soltanto una soluzione particolare che verifica l'equazione	Considera soltanto alcune soluzioni che verificano l'equazione
0	NO	NO

APPENDICE N° 3: Tabella di frequenze

Variabile	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Percentuale	Scarto
AL1	106.00	0.95	95	0.21
AL2	44.00	0.40	40	0.49
AL3	34.00	0.31	31	0.46
AL4	71.00	0.64	64	0.48
AL4.1	53.00	0.48	48	0.50
AL4.2	11.00	0.10	10	0.30
AL4.3	13.00	0.12	12	0.32
AL5	27.00	0.24	24	0.43
AL6	4.00	0.04	4	0.19
AL7	13.00	0.12	12	0.32
AL8	1.00	0.01	1	0.09
AL9	9.00	0.08	8	0.27
AL10	1.00	0.01	1	0.09
AL11	34.00	0.31	31	0.46
AL12	1.00	0.01	1	0.09
AL13	8.00	0.07	7	0.26
AL14	3.00	0.03	3	0.16
AL15	98.00	0.88	88	0.32
AL16	82.00	0.74	74	0.44
AL17	91.00	0.82	82	0.38
ALb1	99.00	0.89	89	0.31
ALb2	63.00	0.57	57	0.50
ALb3	33.00	0.30	30	0.46
ALb4	25.00	0.23	23	0.42
ALb5	13.00	0.12	12	0.32
ALb6	36.00	0.32	32	0.47
ALb2*	45.00	0.41	41	0.49
ALb3*	18.00	0.18	18	0.38
IAL1	67.00	0.60	60	0.49
IAL2	8.00	0.07	7	0.26
IAL3	5.00	0.05	5	0.21
IAL4	27.00	0.24	24	0.43
IAL5	5.00	0.05	5	0.21
IAL6	7.00	0.06	6	0.24
IAL7	20.00	0.18	18	0.38
IAL7.1	18.00	0.16	16	0.37
IAL8	1.00	0.01	1	0.09
IAL9	3.00	0.03	3	0.16
IAL10	7.00	0.06	6	0.24
IAL11	8.00	0.07	7	0.26
IAL12	11.00	0.10	10	0.30
IAL13	1.00	0.01	1	0.09
IAL14	59.00	0.53	53	0.50
MMa1	108.00	0.97	97	0.16
MMa2	55.00	0.50	50	0.50
MMa3	1.00	0.01	1	0.09
MMa4	29.00	0.26	26	0.44
MMa5	23.00	0.21	21	0.41
MMa6	5.00	0.05	5	0.21
MMb1	110.00	0.99	99	0.09
MMb2	76.00	0.68	68	0.46
MMb3	33.00	0.30	30	0.46

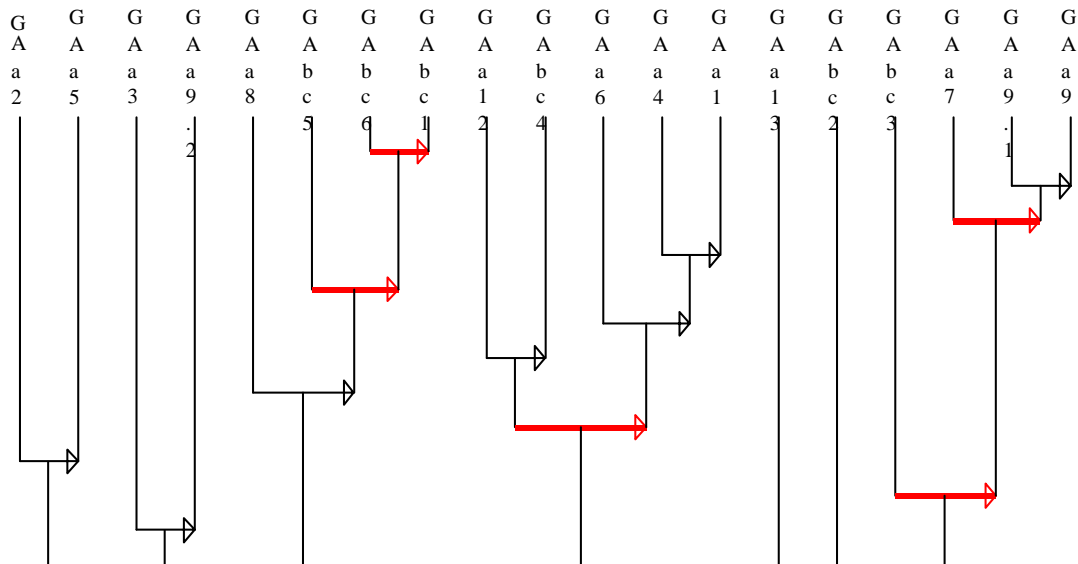
Variabile	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Percentuale	Scarto
GAa1	84.00	0.76	76	0.43
GAa2	6.00	0.05	5	0.23
GAa3	3.00	0.03	3	0.16
GAa4	61.00	0.55	55	0.50
GAa5	20.00	0.18	18	0.38
GAa6	34.00	0.31	31	0.46
GAa7	25.00	0.23	23	0.42
GAa8	19.00	0.17	17	0.38
GAa9	42.00	0.38	38	0.48
GAa9.1	35.00	0.32	32	0.46
GAa9.2	17.00	0.15	15	0.36
GAa10	1.00	0.01	1	0.09
GAa11	1.00	0.01	1	0.09
GAa12	18.00	0.16	16	0.37
GAa13	2.00	0.02	2	0.13
GAa14	22.00	0.20	20	0.40
GAbc1	61.00	0.55	55	0.50
GAbc2	3.00	0.03	3	0.16
GAbc3	4.00	0.04	4	0.19
GAbc4	24.00	0.22	22	0.41
GAbc5	31.00	0.28	28	0.45
GAbc6	57.00	0.51	51	0.50
GAbc2*	3.00	0.03	3	0.16
GAbc3*	1.00	0.01	1	0.09

APPENDICE N° 4: Albero gerarchico del primo problema



Arbre hiérarchique : C:\CHIC\chic 2000\Rev-Dati.csv

APPENDICE N° 5: Albero gerarchico del quarto problema



Arbre hiérarchique : C:\CHIC\chic 2000\Rev-Dati.csv

CAPITOLO QUATTRO:

LA VARIABILE TRA INCOGNITA E “COSA CHE VARIA”. ALCUNI ASPETTI DEL LINGUAGGIO SIMBOLICO

4.1 INTRODUZIONE

Il lavoro sperimentale effettuato nel Capitolo 3 mette in evidenza che nel contesto di una situazione - problema, se prevale la concezione di variabile come incognita allora non viene evocato il suo aspetto relazionale-funzionale. Si dimostra anche che i procedimenti risolutivi si appoggiano prevalentemente alla lingua naturale e/o il linguaggio aritmetico come sistemi simbolici, quando gli alunni non hanno un'adeguata padronanza del linguaggio algebrico.

Dallo studio realizzato abbiamo rilevato che nella risoluzione di problemi l'alunno coglie più facilmente l'aspetto relazionale – funzionale della variabile in presenza di registri rappresentativi visuali. L'alunno, invece, è più propenso a considerare la variabile sotto l'aspetto di incognita, cercando l'unicità della soluzione dell'equazione lineare, in assenza della rappresentazione grafica.

Abbiamo visto anche che la traduzione dal linguaggio algebrico alla lingua naturale si rivela un compito difficile per gli alunni. Alcuni di loro riescono a produrre il testo di un problema che non risulta significativo per la relazione data. Altri, invece, si limitano a realizzare una manipolazione puramente sintattica della formula, mostrando una soluzione particolare che verifica l'equazione.

Da questa ricerca emergono anche una serie di questioni per le quali non abbiamo ancora trovato delle risposte. Per esempio, nel processo di risoluzione di una situazione problematica:

- ∅ Come vengono attivate le concezioni di incognita e di relazione funzionale?
- ∅ Si verifica il passaggio da una concezione all'altra? Se sì, come avviene?
- ∅ Il passaggio dalla singola soluzione ad una pluralità di soluzioni dell'equazione lineare coincide necessariamente con il passaggio da una concezione all'altra?

- Ø E' presente il linguaggio simbolico? Se sì, è utilizzato per risolvere il problema o solo nella descrizione verbale come modo di comunicare?
- Ø Come avviene il processo di traduzione dal linguaggio algebrico a quello naturale?
- Ø Come si rappresenta il rapporto sintassi–semantica all'interno del codice algebrico?

Per approfondire questa problematica abbiamo effettuato una nuova sperimentazione, sottoponendo lo stesso questionario a due coppie di alunni.

4.2 METODOLOGIA DELLA RICERCA

Due coppie di alunne del Terzo Anno del Liceo Scientifico Sperimentale di Ribera (AG) che si sono offerte volontariamente a partecipare a questa sperimentazione.

Il questionario proposto è lo stesso di quello utilizzato nella sperimentazione precedente. e la sua somministrazione si è effettuata durante la prima settimana di Maggio 2003.

L'equipe che ha condotto l'intervista era formata da due docenti: un intervistatore e un osservatore. Il primo aveva il compito di porre i problemi e di guidare l'intervista, il secondo di prendere nota di tutti gli elementi che riteneva opportuno mettere in evidenza.

L'intera intervista è stata registrata su audiocassetta e successivamente trascritta. Essa si è svolta nel modo seguente:

- Ø Gli alunni dovevano scrivere soltanto dopo essere messi d'accordo nella loro discussione.
- Ø L'intervistatore cercava di stimolare gli alunni solo se essi si trovavano in difficoltà e in modo asettico.

4.3 ANALISI DEI PROTOCOLLI DEL PRIMO PROBLEMA

4.3.1 PRIMA COPPIA: Serena e Graziella

4.3.1.1 Tipi di linguaggio: prevale la lingua naturale. Usano il linguaggio aritmetico, ma il linguaggio algebrico è completamente assente.

4.3.1.2 Procedimento risolutivo

AL1, AL2, AL4, AL4.3, (AL4.1), ALb1, ALb3, ALb4, ALb6

Serena e Graziella risolvono il primo problema utilizzando un procedimento in lingua naturale. Aggiungono un dato, considerando che le somme scommesse sono uguali e trovano una soluzione. Poi si chiedono con quale criterio Carlo e Lucia avessero diviso la somma di 300 €, perché potevano aver scommesso somme diverse. Su suggerimento dell'intervistatore dividono la vincita a metà e trovano la soluzione. Concludono che: *“non sapendo in che modo dividono la somma e in che maniera hanno giocato, le soluzioni possibili sono infinite”* (Riga 11).

Concezione di variabile	Risoluzione	Interpretazione del procedimento eseguito	
Incognita	AL2: Esibiscono un procedimento in lingua naturale AL4.3: Aggiungono un dato considerando che le scommesse sono uguali	Sistema di due equazioni in due incognite: $\begin{cases} 3x + 4y = 300 \\ x = y \end{cases}$	
	Trovano una soluzione	Risolvono il sistema	
	La ricerca di un criterio per dividere la somma	è equivalente a	la ricerca di un'equazione per formare un sistema.
	Su suggerimento dell'intervistatore: Aggiungono un dato considerando le vincite uguali (AL4.1)		Sistema di due equazioni in due incognite: $\begin{cases} 3x + 4y = 300 \\ 3x = 4y \end{cases}$
	Trovano una soluzione		Risolvono il sistema
	<i>“Non sappiamo in che modo dividono la somma oppure in che maniera hanno giocato”</i> (Riga 8)		Non si conosce: un'altra relazione tra $3x$ e $4y$, oppure, tra x e y
	L'impossibilità di trovare il criterio	equivale a	l'impossibilità di formare un unico sistema



Incognita	Concludono che: <i>“le soluzioni possibili sono infinite”</i> Non determinano l'insieme delle soluzioni
------------------	--

4.3.1.3 Commenti

Una questione importante è analizzare il passaggio dalle singole soluzioni, ottenute mediante la risoluzione dei sistemi di equazioni, alle infinite soluzioni del problema considerate nella conclusione finale. La frase di Graziella è eloquente: *“Quindi... non dipende da quante parti vincono oppure dalla somma che hanno giocato...”* (Riga 8); in altre parole, la risoluzione del problema è indipendente dai supposti che si possano

effettuare sulle vincite o le scommesse. E continua: “...non sappiamo in che modo loro abbiano diviso il denaro, oppure quale cifra hanno giocato...” (Riga 8); in altre parole, il problema non stabilisce con quale criterio Carlo e Lucia abbiano diviso le vincite o le scommesse, quindi non è possibile formare un sistema di equazioni. E concludono: “le soluzioni possibili sono infinite” (Riga 11). La concezione di variabile predominante in questo protocollo è quella di incognita.

4.3.2 SECONDA COPPIA: Vita e Alessandra

4.3.2.1 Tipi di linguaggio: prevale il linguaggio naturale. Usano il linguaggio aritmetico. Il linguaggio algebrico viene utilizzato soltanto nella parte finale della risoluzione, ripresa dopo aver iniziato la discussione del secondo quesito che richiede precisamente la traduzione dal linguaggio algebrico a quello naturale.

4.3.2.2 Procedimento risolutivo

AL1, AL3, ALb1, ALb4, ALb2, AL11, ALb6, AL6, AL4, AL4.3, AL5, ALb3, ALb6

Le alunne discutono animatamente su quale criterio adottare per determinare le scommesse, poi decidono di procedere per tentativi: “ Non ci sono i dati delle scommesse..., dobbiamo dare una...” (Riga 22) e proseguono formulando delle ipotesi: “...ammesso che Carlo ha scommesso 10 €...” (Riga 13 e 31), “Mettiamo, se Carlo scommette 50 € ...” (Riga 30), “Se (la scommessa) è 30 € ...” (Riga 37).

Le alunne considerano che il problema ha infinite soluzioni e a modo di esempio, fissano una delle scommesse e determinano l'altra utilizzando operazioni aritmetiche inverse:

Linguaggio naturale	Traduzione	
	L. aritmetico	L. algebrico
Alessandra: - Se è 30 €, il triplo... dovrebbe vincere 90.... Quindi da 90 per arrivare a 300, giusto? Ci sono 210... (Riga 37 e 41).	$3 \times 30 = 90$ $300 - 90 = 210$	$y = (300 - 3x) : 4$ per $x = 30$
Vita: - Lucia è il quadruplo di quello... però è diviso 4, no? (Riga 46). Vita: - Se vince 210 che è la somma totale... (Riga 50) Alessandra: - Quindi e questo deve essere il quadruplo... (Riga 51). Vita: - Diviso 4 (Riga 52).	$210 \div 4 = 52,5$	

E' interessante osservare che in questa discussione compare implicitamente l'idea di dipendenza lineare tra le due scommesse, cioè tra le due variabili.

Alessandra ritiene necessario determinare l'insieme soluzione, "*... per me c'è un limite, ci sono delle soluzioni che vanno...*" (Riga 63), "*secondo me ... le possibili soluzioni ... vanno da tot a tot..., ma dobbiamo vedere...*" (Riga 67). A tale scopo considera i vincoli del problema in modo esplicito: "*...si sta parlando di scommesse questo significa che non può essere un numero negativo*" (Riga 86).

Vita suppone che le scommesse siano uguali e trova la soluzione utilizzando un procedimento per approssimazioni successive, ma Alessandra insiste sul fatto che il problema ha una pluralità di soluzione e sulla necessità di determinare l'insieme delle soluzioni.

Le alunne determinano senza difficoltà la scommessa minima uguale a 0, ma discutono animatamente per calcolare le scommesse massime di Carlo e Lucia, in un contesto dove la variabile assume l'aspetto relazionale-funzionale.

Vita e Alessandra riprendono spontaneamente la risoluzione del primo problema dopo aver iniziato la discussione del secondo quesito. Hanno trovato una certa similitudine tra loro, (il secondo richiede la traduzione dal linguaggio algebrico a quello naturale): "*...mi sa che (il secondo problema) sarà qualcosa ...come il primo, sarà qualcosa di simile*" (Riga 339).

Quindi traducono il primo problema ad un'equazione di primo grado in due incognite: "*...io sto facendo altre ipotesi, cioè anzi che avere una soluzione possibile ho un'equazione generale come viene data qua (per il secondo problema), in quanto 300 è la somma totale e mettiamo che 3 per non sapendo quanto ha scommesso e 4 per non sapendo quanto ha scommesso...*" (Riga 351). Scrivono $3x + 4y = 300$.

Le alunne discutono animatamente per determinare gli insiemi delle soluzioni delle due variabili. Anche se scrivono correttamente l'equazione, nel momento di calcolare questi insiemi usano la stessa lettera "x" per designare le due variabili. Si confondono e non riescono a risolvere questo problema di designazione, quindi indicano soltanto l'insieme soluzione della variabile x.

Concezione di variabile	Risoluzione	Interpretazione del procedimento eseguito
Relazione-funzionale	AL3: Esibiscono un procedimento per tentativi ed errori in lingua naturale	
	ALb4: Considerano che il problema ha infinite soluzioni	
	Fissano una delle scommesse e determinano l'altra utilizzando operazioni aritmetiche inverse	$y = (300 - 3x) : 4$ <i>per</i> $x = 30$
	Alessandra esprime la necessità di determinare l'insieme delle soluzioni, considerando i vincoli	$x \geq 0$ e $y \geq 0$
Incognita	Vita aggiunge un dato. AL4.3: suppone che le scommesse siano uguale	$\begin{cases} 3x + 4y = 300 \\ x = y \end{cases}$
	Trova la soluzione utilizzando il metodo aritmetico di approssimazioni successive	Risoluzione del sistema
Relazione-funzionale	ALb6: Considerano una pluralità di soluzioni Determinano le scommesse massime	$3x + 4y = 300$ <i>Se</i> $y = 0$, $x = 100$ <i>Se</i> $x = 0$, $y = 75$
	AL5: Traducono il problema ad un'equazione di primo grado in due incognite	$3x + 4y = 300$
	Usano la stessa lettera "x" per designare le due variabili e riescono a determinare solo l'insieme soluzione di essa.	$0 \leq x \leq 100$ $(0 \leq y \leq 75$ non viene esplicitato)



Relazione-funzionale	Concludono che le soluzioni sono infinite Determinano l'insieme delle soluzioni di una sola variabile
-----------------------------	--

4.3.2.3 Commenti

Vita e Alessandra esibiscono un lunghissimo procedimento risolutivo, utilizzando prevalentemente la lingua naturale, arricchita dal linguaggio numerico.

Nella prima parte della risoluzione, Alessandra considera che il problema ha infinite soluzioni in un contesto dove la variabile assume l'aspetto relazionale-funzionale. Subito dopo ritiene necessario determinare l'insieme soluzione considerando i vincoli dell'universo numerico imposti dal contesto del problema (scommesse non negative). Si presume che l'ottimo controllo semantico delle quantità in relazione alla situazione che offre la lingua naturale permette di rendersi conto più facilmente dell'importanza dei vincoli.

Anche se l'obiettivo del problema appare abbastanza chiaro dall'inizio, il procedimento risolutivo è lungo, contorto e mostra un andirivieni di ipotesi e contro-ipotesi. Riteniamo che nella discussione, ridondante e poco chiara in alcuni aspetti, compaia

tutta l'ambivalenza della lingua naturale per esprimere certe relazioni tra gli elementi in gioco. Per esempio, dopo avere considerato che il problema ha infinite soluzioni, Alessandra confonde il numero di soluzioni con la vincita massima: *“Il numero di soluzioni è 300”* (Riga 133). Vita, invece, considera che le possibili soluzioni si ottengono dalla somma delle scommesse massime che possono effettuare Carlo e Lucia: *“Le soluzioni sono queste, 175, ... perché poi alla fine si somma...”* (100 scommessa massima di Carlo più 75 scommessa massima di Lucia) (Riga 187).

E' interessante osservare che l'utilizzo del linguaggio simbolico avviene soltanto nella parte finale della risoluzione, ripresa dopo avere iniziato la discussione del secondo problema. Dato che questo quesito richiede la traduzione dal linguaggio algebrico a quello naturale, le alunne trovano una certa simmetria con il primo problema formulato in lingua naturale; in questo modo lo traducono ad un'equazione di primo grado in due incognite. Ma evidenziano subito la necessità di dotare alle variabili x e y di un significato in relazione al contesto del problema: *“Perché x e y rappresentano... il denaro scommesso...”* (Riga 354 e 451). In altre parole, le alunne manifestano l'esigenza di collegare la “storia originale del problema” (word problem) con la “storia raccontata in simboli” o la *narrativa simbolica* utilizzando i termini di Radford (2002a)⁽³⁾.

Alessandra e Vita usano i simboli nella descrizione verbale come modo di comunicare: *“Perché x e y forse erano diverse...”* (Riga 352), ma non per risolvere il problema. In altre parole, il linguaggio simbolico viene usato in modo piuttosto superficiale perché il flusso di ragionamento si appoggia fundamentalmente sulla lingua naturale. E' interessante notare che essa produce delle interferenze per determinare gli insiemi delle soluzioni. Durante la discussione, le alunne sono capaci di calcolare gli insiemi soluzioni di x e y , ma per scritto riescono soltanto ad esprimere quello di x : $0 \leq x \leq 100$. Esse indicano l'insieme soluzione di y come: $0 \leq x \leq 75$ e quindi lo considerano incluso nel primo, motivando la loro scelta in questo modo: *“Volevo fare tutte le possibili soluzioni. Perché se non ci fosse, qua, può andare al massimo 75 e 75 già è compreso. Il massimo che si può scommettere è 100 per arrivare ad un totale del triplo di 300”* (Riga 403). Si evidenzia così che le alunne non possiedono una buona rappresentazione del rapporto tra semantica e sintassi all'interno del codice algebrico.

La concezione di variabile predominante in questo protocollo è quella relazionale-funzionale. Anche se in un certo passaggio della risoluzione Vita considera la variabile

come incognita perché forma un sistema aggiungendo un dato, subito dopo abbandona questa concezione a favore dell'aspetto funzionale.

4.4 ANALISI DEI PROTOCOLLI DEL SECONDO PROBLEMA

4.4.1 PRIMA COPPIA: Serena e Graziella

4.4.1.1 Procedimento risolutivo

IAL1, IAL4, IAL12, IAL11

Serena e Graziella iniziano la risoluzione del quesito cercando una coppia di valori che soddisfi l'equazione: *"...mi viene come l'istinto di cercare dei numeri..."* (Riga 21). Scrivono la soluzione trovata: $x = 3, y = 0$ e commentano: *"...abbiamo trovato dei numeri che facevano l'uguaglianza vera... quindi possiamo anche costruire tipo un problema su questi due numeri..."* (Riga 27). Ma in realtà, la loro discussione si basa fondamentalmente sulla risoluzione dell'equazione: *"...facciamo un problema in cui si danno due numeri e si devono trovare altri due numeri..."* (Riga 29) e più avanti Graziella continua ancora: *"Bisogna trovare una coppia di numeri, per esempio il 6 e il 3, ora questa coppia di numeri il primo deve essere moltiplicato per il primo, il secondo per il secondo..., e al primo sottrarre il secondo..."* (Riga 35). Ad un certo punto Graziella si chiede: *"Trovare la soluzione di un problema, ma che significa trovare il problema?"* (Riga 39).

L'intervistatore fa notare che inventare un problema significa effettuare una traduzione dal linguaggio algebrico al linguaggio naturale.

Le alunne parafrasano il testo di un problema simile al primo, ma a partire da un'equazione che ha come coefficienti la coppia soluzione trovata in precedenza, cioè: $3x - 0y = 18$. Poi Graziella si rettifica: *"Mi sembra che dobbiamo fare all'incontrario, mettere questi due numeri..."* (Riga 51) ed indica i coefficienti 6 e 3. Infine le alunne riformulano il seguente testo:

60. **Graziella:** - *"Ci sono due persone che giocano queste due somme di denaro diverse. La prima vince sei volte di quello che ha scommesso, la seconda vince tre volte di quello che ha scommesso, la differenza ..."*
61. **Serena:** - *"... tra le vincite..."*
62. **Graziella:** - *"...tra le vincite è uguale a 18. Trovare quanto hanno scommesso"*.

4.4.1.2 Commenti

Dall'analisi precedente si evince che le alunne confondono l'attività di risolvere un'equazione con quella di inventare un problema a partire da un'equazione. La domanda di Graziella è eloquente: "...*ma che significa trovare il problema?*" (Riga 39). Probabilmente questa confusione sia dovuta ad una questione di contratto didattico, a scuola di solito si risolvono problemi, non si inventano.

Quando l'intervistatore suggerisce loro di tradurre l'equazione al linguaggio naturale, di dotarla di una semantica, le alunne abbandonano la sintassi precedente, in altre parole la risoluzione, ma inventano un problema in cui considerano come dati le soluzioni trovate proprio all'inizio. In altre parole, esse realizzano un interscambio dei ruoli tra i coefficienti dell'equazione e la coppia soluzione. Si presuppone che questo equivoco sia dovuto ad una certa difficoltà per capire il senso dell'espressione $6x - 3y = 18$.

Le alunne si rettificano e finalmente riescono a formulare il testo di un problema significativo per la relazione data, ma parafrasando una situazione identica al primo quesito. Cioè, esse non sono grado di dotare l'equazione di una semantica diversa da quella di "soldi e scommesse". Non si evidenzia nemmeno il tentativo di cambiare contesto. Questa osservazione si potrebbe interpretare come la mancanza di una certa dose di inventiva. Pensiamo, invece, che tratti di un insufficiente dominio o controllo sui simboli stessi che permetta di garantire loro una vita autonoma all'interno della situazione problema. Questa difficoltà si manifesta perché le alunne hanno un'inadeguata rappresentazione del rapporto tra semantica e sintassi all'interno del codice algebrico.

4.4.2 SECONDA COPPIA: Vita e Alessandra

4.4.2.1 Procedimento risolutivo

IAL1, IAL6, IAL4, IAL7, IAL8, IAL11

Le alunne affrontano il quesito chiedendo: "*Che vuole dire inventare una possibile situazione problema? Dobbiamo inventare un problema?*" (Riga 193). L'intervistatore spiega la differenza tra le attività di risolvere un'equazione e quella di inventare un problema a partire da un'equazione.

Vita propone di inventare un sistema di due equazioni che abbia come soluzione l'equazione del problema: $6x - 3y = 18$. Alessandra ritiene che non è possibile costruire un sistema simile e motiva la risposta in questo modo: "*Non ti può venire*

questa (l'equazione) del problema. Lo sai perché? Non si può risolvere perché abbiamo due incognite diverse. Due incognite diverse non si possono mai sommare” (Riga 218).

La discussione diventa animata perché Vita insiste nel formare un sistema, ma non realizza nessuna proposta concreta. In realtà, sembra non capire cosa significhi “inventare una possibile situazione problema”. Anche Alessandra appare abbastanza confusa e persiste nell'idea iniziale: “... non possono dare mai un'uguaglianza perché non si possono sommare ($6x$ e $3y$), quindi anche se noi poniamo un problema, **non sarà mai un problema, giusto?**” (Riga 235).

Poi si manifestano i tentativi di Alessandra di inventare un problema e di Vita di trovare una soluzione particolare che verifichi l'equazione. Va avanti l'ultima proposta, sostituiscono i simboli con numeri e determinano una coppia soluzione. Eloquenti è la frase di Vita per esprimere la necessità di conoscere le soluzioni: “... non ci possiamo aiutare a fare questo problema dando, per esempio, le soluzioni?” (Riga 317).

Finalmente iniziano i tentativi per formulare una situazione problema e qui possiamo evidenziare alcune fasi importanti:

FASI	PROTOCOLLO
<p>1. La produzione di un testo che considera soltanto costanti, cioè i coefficienti dell'equazione</p>	<p>“...al mercato ci sono 18 mele che erano già di prima poi ne ha prese, tipo Marco ne ha prese 6 e sono rimaste qua. Quante..., (poi tipo devi mettere quindi un altro dato, tipo poi li devi mettere eh?). C'è n'erano 3 nell'armadio, quante sono rimaste complessivamente?” (Riga 308).</p>
<p>2. Il collegamento tra il primo e il secondo quesito</p>	<p>“Pero qua abbiamo il triplo e il quadruplo e qua abbiamo 6 e 3, 6 meno. Quindi, secondo me, queste cose verranno simile da svolgere, poi non lo so... Perché c'è 18 e qua c'è 300 la somma complessiva, Carlo vince, per esempio, il triplo del denaro, invece, qua l'incognita x ha 6... La somma complessiva...” (Riga 342).</p>
<p>3. La necessità di far emergere le variabili nel testo del problema</p>	<p>Alessandra: - E 18 €.. Allora, Carlo perde 6 € del denaro scommesso, mentre Lucia...(Riga 450). Vita: - Il denaro scommesso è questo x. x e y sono le incognite di quanto hanno scommesso. Noi abbiamo 3 che sarebbe forse il triplo, uno ne perde il triplo, uno ne vince...(Riga 450). Alessandra: - Allora Carlo e Lucia vincono la somma complessiva di 18 € Sappiamo che Carlo ne vince 6 € del denaro scommesso, mentre Lucia ne perde il triplo... (Riga 453). Vita: - Non è 6 € perché il 6 è sestuplo ... (Riga 460). Alessandra: - Ah! Si...(Riga 461). Vita: - ...perché x e y sono le incognite che rappresentano il denaro scommesso. Il sestuplo, per esempio, ne vince il sestuplo...(Riga 462).</p>

4. Interpretazione del segno meno	Alessandra: - Una sottrazione abbiamo... (Riga 477). Intervistatore: - Si (Riga 478). Vita: - <i>Forse, può essere che, uno vince e l'altro perde...</i> (Riga 479). Vita: - <i>No, per esempio, Carlo ne ha vinto un sesto della somma che abbia messo e, invece, Lucia forse ne ha perso il triplo...</i> (Riga 485).
5. Formulazione di un testo che considera soltanto una variabile	"Carlo e Lucia vincono al lotto la somma complessiva di 18 €. In un primo momento vincono 6 € del denaro scommesso... In un secondo momento ne perdono 3 €. Determina le somme di denaro che Carlo e Lucia hanno giocato. <u>Quante sono le possibili soluzioni?</u> " (Riga 513).
6. Formulazione di un testo con due variabili	"Carlo e Lucia vincono al lotto la somma complessiva di 18 €. In un primo momento vincono sei volte il denaro scommesso, poi ne perdono 3 volte (del denaro scommesso). <u>Quante sono le possibili soluzioni?</u> ". (Riga 516).

Queste sei fasi non si succedono in forma progressiva perché le alunne procedono a tentoni andando avanti e indietro, generando la seguente sequenza temporale: 1, 5, 2, 1, 4, 3, 4, 6, 5, 6:

		SEQUENZA TEMPORALE									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F A S I	1										
	2										
	3										
	4										
	5										
	6										

Con questo processo risolutivo ambiguo e poco chiaro, Alessandra e Vita riescono soltanto a formulare una situazione problema identica a quella del primo quesito.

4.4.2.2 Commenti

Dall'analisi di questo protocollo si evince che le alunne manifestano una notevole difficoltà per ragionare sulle variabili. Nella prima parte della risoluzione esse restano sul piano sintattico, realizzano una manipolazione puramente sintattica della formula come se fosse un gioco di segni senza senso, in altre parole sembra che le alunne vedono l'equazione come una stringa di simboli arbitrari, governate da regole altrettanto

arbitrarie (Linchevski e Sfard, 1991). Questo si rileva precisamente in alcuni passaggi della discussione, per esempio:

∅ Vita propone di inventare un sistema di due equazioni che abbia come soluzione l'equazione $6x - 3y = 18$. Questo è possibile soltanto se si costruisce un sistema equivalente a $6x - 3y = 18$, cioè formato da essa e da un'altra equazione con i coefficienti di x e y e il termine noto direttamente proporzionali a 3, 6 e 18 rispettivamente ⁽¹⁾. Vita non tiene conto di questa esigenza e non realizza nessuna proposta coerente sul modo di procedere per formare il sistema.

∅ Alessandra ritiene che tale sistema non si possa costruire e, nel tentativo di motivare la sua risposta, commette alcuni errori simili a quelli riscontrati da altri autori nell'abbondante letteratura sulle difficoltà e misconcezioni nell'apprendimento dell'algebra:

◆ Chiede se formare un sistema del tipo (Riga 202):

$$\begin{cases} 6x - 3y = 0 \\ 18 = 0 \end{cases}$$

e non se ne accorge di questa uguaglianza aritmetica senza senso (Lee & Wheeler, 1989)⁽²⁾.

◆ Risponde: *“Non si possono sommare due incognite (6x e 3y) e quindi non ...possono dare un risultato uguale, un risultato giusto...”* (Riga 239). In questo caso si evidenzia una certa riluttanza a produrre una soluzione che non sia un numero, quello che Collis (1974) ha chiamato “difficoltà nell'accettare la mancanza di chiusura”.

La necessità di manipolare sintatticamente la formula, sostituendo anche i simboli con numeri, evidenzia un importante scollamento tra il linguaggio simbolico e la possibilità di trovare un contesto per dare significato alla formula. Le alunne hanno tentato di formulare il problema in un contesto di “mele e mercato”. Mettono a punto il testo tipico di un problema aritmetico, nel quale compaiono unicamente costanti, per poi riuscire ad inserire solo una variabile. Abbandonano questa strada e riprendono il contesto del primo problema dopo aver effettuato il collegamento tra il primo e il secondo quesito.

L'approssimazione alla formulazione finale avviene in forma graduale, a piccoli passi. Pensavamo che elaborare un testo nell'ambito di “soldi e scommesse” avrebbe significato parafrasare il primo problema; le alunne, invece, hanno manifestato la

necessità di interpretare il segno meno e di far emergere le variabili nel testo, usando alternativamente una o due.

Secondo Radford (2002b), in determinate occasioni i simboli prodotti dagli alunni (in questo caso il segno meno) costituiscono delle scritture semplificate (scripts) che raccontano alcune parti importanti della storia originale⁽⁴⁾. Quindi l'esigenza di fare l'interpretazione è associata alla possibilità di conferire all'espressione il senso algebrico corretto e non quello degli scripts. Dall'altra parte, la frase: "*Il denaro scommesso è questo x . x e y sono le incognite di quanto hanno scommesso*" (Riga 451) rappresenta il punto di collegamento tra l'equazione e il testo del problema, cioè tra la narrativa simbolica e la storia del problema. Individuati gli oggetti del contesto, bisogna lavorare sulla relazione esplicitata nell'equazione.

Il primo testo con due variabili è il seguente: "...hanno vinto complessivamente 18 € Carlo, per esempio, ha vinto, per esempio, il sesto (invece di sestuplo) della somma che aveva messo, invece, Luigi, per esempio, meno 3, per esempio, y dovrebbe essere meno 3, che hanno vinto..." (Riga 512). In questa formulazione si osserva un intreccio tra linguaggio naturale e linguaggio simbolico, la traduzione non è completa perché ancora manca dotare a $3y$ di una semantica appropriata alla situazione problema. Allora, le alunne tornano indietro formulando un testo ambiguo che considera soltanto una variabile e infine lo correggono adeguatamente per farlo diventare con due variabili.

Da questa analisi si evince che Vita e Alessandra manifestano serie difficoltà per gestire e controllare i simboli all'interno di una situazione problema. Per esempio, se il contesto è "il mercato" e 18 sono mele, x e y potrebbero essere le quantità: di due varietà differenti o possedute da due persone o contenute in due cassette di dimensioni diverse. Se, invece, il 18 rappresenta soldi, x e y potrebbero essere i prezzi di due articoli diversi o due prezzi (compra e vendita) dello stesso articolo. Le alunne non riescono a cogliere questa diversità tra le due variabili nel contesto scelto, le loro formulazioni rappresentano un girare a vuoto tra enunciati che considerano solo costanti e quelli che introducono una variabile. Nel testo finale ne compaiono due, ma esso risulta una riproduzione del primo problema.

4.5 CONCLUSIONI FINALI

Dall'analisi dei protocolli del primo problema si ricava che i procedimenti risolutivi si appoggiano alla lingua naturale e seguono il ritmo del pensiero parlato entro il quale si sviluppa e si opera il controllo semantico della situazione.

La seconda coppia, da una parte, sfrutta il controllo semantico delle quantità in relazione al problema per determinare i vincoli all'universo numerico. Dall'altra, si aggroviglia in una discussione ridondante e poco chiara che conduce solo a sviluppare un procedimento lunghissimo e contorto con un andirivieni di ipotesi e contro-ipotesi. Si manifesta così l'ambivalenza della lingua naturale per esprimere certe relazioni tra gli elementi in gioco.

Il linguaggio simbolico è completamente assente nel primo protocollo. Nel secondo compare, invece, nella parte finale della risoluzione, ma le alunne lo utilizzano in modo superficiale, solo per comunicare. Quindi manca il controllo che può operare la formula sul flusso del ragionamento verbale.

Nel primo protocollo la concezione di variabile predominante per risolvere il primo problema è quella di incognita. Le alunne calcolano alcune soluzioni particolari mediante la risoluzione di due sistemi lineari. Siccome non conoscono il criterio per dividere le somme di denaro, concludono che le soluzioni sono infinite. L'impossibilità di trovare questo criterio è equivalente all'impossibilità di formare un unico sistema. Quindi il passaggio dalle singole soluzioni alle infinite soluzioni si produce attraverso i sistemi di equazioni. In altre parole, per questa coppia le infinite soluzioni costituiscono un insieme di soluzioni singole che provengono dalla risoluzione di diversi sistemi lineari che contengono l'equazione data. Di conseguenza, non si pongono il problema dei vincoli imposti dal contesto in cui l'espressione è considerata.

Nel secondo protocollo, invece, prevale l'aspetto relazionale-funzionale della variabile. Quindi le infinite soluzioni costituiscono un insieme di coppie di valori che si ottengono variando uno di loro e calcolando l'altro a partire dalla dipendenza lineare tra le variabili.

Le due coppie affrontano il secondo quesito realizzando una manipolazione puramente sintattica dell'equazione per trovare alcune soluzioni. Dallo studio effettuato si evince che in realtà le alunne confondono l'attività di risolvere un'equazione con quella di inventare un problema a partire da un'equazione. Si presuppone che questa difficoltà sia dovuta ad una questione di contratto didattico: di solito a scuola si risolvono problemi, non si inventano.

La formulazione di un problema a partire da un'equazione implica fondamentalmente tre attività:

- ∅ Scegliere un contesto adeguato per dare significato all'equazione
- ∅ Identificare gli oggetti del contesto che rappresentino le variabili

Ø Individuare le proprietà degli oggetti messi in evidenza dalla relazione espressa nell'equazione.

Crediamo che il punto critico sia precisamente: “individuare gli elementi del contesto da associare alle variabili”. Nel secondo protocollo si osserva il tentativo di selezionare un contesto di “mercato e mele”, ma le alunne non riescono ad identificare x e y con le quantità di mele appartenenti a due soggetti-oggetti diversi: siano essi due commercianti, due varietà diverse, due cassette differenti, ecc. Così mettono a punto il testo di un classico problema aritmetico con valori numerici specifici (i coefficienti dell'equazione); nel tentativo di migliorare la formulazione, riescono solo ad inserire una variabile e quindi abbandonano questo contesto.

Le due coppie risolvono il quesito producendo un testo simile a quello del primo problema. Questo significa avere a disposizione il contesto “soldi e scommesse” e gli elementi “due persone che giocano”. Occorre solo adattare le proprietà degli oggetti alla nuova relazione espressa dall'equazione. Credevamo che questa attività avrebbe significato parafrasare il testo del primo problema, invece non si è rivelata così ovvia, soprattutto nel secondo protocollo. Le alunne hanno avuto bisogno di fare emergere le variabili nel testo del problema e di interpretare il segno meno; la loro formulazione finale è il risultato di un'elaborazione graduale e a piccoli passi.

Nei due protocolli si evidenzia chiaramente un importante scollamento tra il linguaggio simbolico e la possibilità di trovare un contesto diverso da “soldi e scommesse” per dare significato all'equazione. Si presuppone che non si tratti della mancanza di una certa dose di inventiva, ma da un insufficiente controllo sui simboli che si manifesta nell'impossibilità di associare le variabili a certi elementi del contesto.

Dallo studio realizzato risulta evidente che un'equazione in sé non attiva forme di pensiero produttivo, non viene assolutamente considerata come modello interpretativo di un problema o meglio ancora di una classe di problemi.

Per approfondire queste conclusioni sarebbe interessante analizzare la relazione esistente tra le variabili di un'equazione e gli oggetti del contesto che le rappresentano da una prospettiva semiotica del discorso. Sarebbe importante studiare come avviene la costruzione del senso di un'espressione simbolica nello spazio nel quale il dominio della narrativa simbolica non si è ancora raggiunto completamente e la storia del problema è appena abbozzata.

NOTE

- (1) In altre parole, si dovrebbe formare un sistema per il quale la matrice dei coefficienti e la matrice completa abbiano lo stesso rango r , minore del numero delle incognite, per esempio:
$$\begin{cases} 6x - 3y = 18 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

Il rango r è 1 e il numero delle incognite è 2, quindi la soluzione non è unica. Infatti, il sistema equivale alla sola seconda equazione.
- (2) Lee & Wheeler (1989) hanno osservato che certi studenti lavorando sintatticamente con espressioni algebriche sono arrivati a risultati senza senso in aritmetica, per esempio, $20 = 4$. La maggior parte degli alunni ha motivato lo sviluppo effettuato mediante una “regola” (anche inventata) e non ha considerato un problema che queste “regole” portassero a risultati aritmetici impossibili.
- (3) Radford (2002a) preferisce parlare di *narrativa simbolica* per indicare la traduzione in equazione di un problema dato. Secondo l’autore questo termine permette di segnalare che si racconta ancora una storia ma in simboli matematici.
- (4) Radford (2002b) considera che per certi alunni il segno meno, nell’espressione $x - 2$, non sempre indica una sottrazione sull’incognita, a volte rappresenta il segno di una scrittura semplificata in relazione con la storia originale.

BIBLIOGRAFIA

- ARZARELLO, F., BAZZINI, L. e CHIAPPINI, G., 1994. *L’Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*. Progetto Strategico CNR - TID, Quaderno n. 6.
- COLLIS K. F., 1974. Cognitive development and mathematics learning, Manoscritto presentato a Psychology of Mathematics Workshop, Centre for Science Education, Chelsea College, London.
- GALLARDO A. & ROJANO T., 1988. Areas di dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **9** (2), pp. 155-188.
- LEE L. & WHEELER D., 1989. The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematics*, **20**, pp.41-54.
- LINCHESKI L. & SFARD A., 1991. Rules without reasons as processes without objects. The case of equations and inequalities. *Proc. of PME XV*, Assisi.
- MALISANI, E., 2002. The notion of variable in semiotic contexts different. *Proceedings of the International Conference “The Humanistic Renaissance in Mathematics Education”*. Palermo, pp.245-249. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/21project.htm> - ISSN on-line 1592-4424.
- MALISANI, E., 2005. The notion of variable: some meaningful aspects of algebraic language. In A. Gagatsis, F. Spagnolo, Gr. Makrides & V. Farmaki (eds.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education (MEDCONF 2005)*, University of Palermo, Italia. Vol. II, pp. 397-406.
- RADFORD L., 2002a. On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking. In Anne D. Cockburn and Elena Nardi (eds.). *Proceedings of PME 26*, Vol 4, pp. 81-88.

RADFORD L., 2002b. *Narratives, expressions algébriques et calcul formel: de la constitution à la transformation du sens*. Pre-prints, École des sciences de l'éducation, Université Laurentienne; Canada.

YERUSHALMY M., 2000. Problem solving strategies and mathematical resources: a longitudinal view on problem solving in a function based approach to algebra. *Educational Studies in Mathematics* **43**, pp. 125-147.

APPENDICE N° 1: Sintesi dell'analisi dei protocolli del terzo e quarto quesito

PRIMA COPPIA: Serena e Graziella

Nel terzo quesito le alunne interpretano le espressioni $ax + by + c = 0$ e $y = mx + q$ nell'ambito della geometria analitica, come le equazioni generiche di una retta in forma implicita ed esplicita, rispettivamente.

Il procedimento risolutivo seguito nel quarto problema è il seguente: GAa1, GAa4, GAa7, GAa9.1, GAbc1, GAbc4, GAbc6.

Graziella riconosce subito che la rappresentazione grafica è una retta. Poi le alunne traducono il problema ad un'equazione di primo grado a due incognite, la rappresentano mediante una tabella di valori e tracciano il grafico cartesiano a partire da essa.

Graziella considera che l'equazione ha infinite soluzioni e motiva la sua risposta in questo modo: "...se il grado dell'equazione è inferiore al numero di incognite, ...l'equazione ha infinite soluzioni" (Riga 104). Ci si aspettava una spiegazione scaturita dal grafico, invece, Graziella formula una corretta motivazione di tipo algebrico nell'ambito della geometria analitica.

Le alunne non tengono conto dei vincoli all'universo numerico che comporta il senso contestualizzato dell'espressione. L'intervistatore interviene chiedendo se la retta si potrebbe prolungare indefinitamente nel contesto del problema e se x potrebbe assumere valori negativi. Rispondendo a queste domande Graziella considera soltanto il vincolo inferiore, cioè $x \geq 0$.

SECONDA COPPIA: Vita e Alessandra

Le alunne interpretano l'espressione $ax + by + c = 0$ come un'equazione di primo grado a due incognite e l'espressione $y = mx + q$ come l'equazione di un fascio proprio di rette.

Il procedimento risolutivo seguito nel quarto problema è il seguente: GAa1, GAa2, GAa5, GAa9, GAa9.1, GAa9.2, GAbc1, GAbc4, GAbc6.

In questo lunghissimo procedimento le alunne utilizzano prevalentemente la lingua naturale, arricchita dal linguaggio aritmetico. Non effettuano la traduzione del problema ad un'equazione di primo grado a due incognite, iniziano direttamente con il disegno degli assi cartesiani e la rappresentazione dei punti (1, 7) e (2, 14). Il secondo punto non appartiene alla retta $y = 2x + 5$ ma alla retta $y = 7x$: "*Per un'ora paghi 7 €, per due ore ne paghi 14, no?*" (Riga 615). Si presuppone che questo errore sia dovuto alla procedura applicata che segue il ritmo del pensiero parlato e manca di riscontro con l'equazione del problema.

Poi Vita e Alessandra si correggono e rappresentano nel piano cartesiano la retta $y = 2x$, cioè la somma pagata per le ore mensili di telefonate realizzate, escludendo il canone fisso. Discutono animatamente per calcolare la spesa che si potrebbe fare in un mese, poi determinano quella massima in un mese composto di 30 giorni, telefonando 24 ore su 24. A questa somma aggiungono i 5 € di canone. In questo modo calcolano correttamente i valori mensili massimi di x e y . Per i valori minimi, invece, considerano la cifra pagata per un'ora di telefonate, non indicano quelli mensili.

APPENDICE N° 2: PROTOCOLLO DI SERENA E GRAZIELLA

PRIMO QUESITO

1. **Graziella:** - E... allora, innanzi tutto ci sono due persone Carlo e Lucia che vincono una somma complessiva di 300 € e sappiamo che uno dei due, Carlo, vince il triplo del denaro scommesso mentre Lucia il quadruplo, e siccome...
2. **Serena:** - Se loro vincono 300 €..
3. **Graziella:** - Allora se loro si dividono..., se Carlo ha vinto il triplo di quello che ha scommesso, quindi i 3/4, invece Lucia i 4/4, possiamo dividere 300 € in 7 parti, cioè la divisione viene 4,8.
4. **Serena:** - No 42,8
5. **Graziella:** - 42,8; se però loro avessero diviso la somma di 300 € con un criterio stabilito, tipo per esempio...
6. **Serena:** - Stavo pensando se loro avessero giocato la stessa somma di denaro, oppure avevano giocato una somma di denaro diversa, perché uno ha vinto il triplo, l'altro il quadruplo, quindi non sapendo in che modo hanno diviso la somma Carlo e Lucia, non possiamo stabilire...
7. **Sperimentatore:** - Se erano uguali, per esempio, le vincite cosa succedeva?
8. **Graziella:** - Se ad esempio Carlo vinceva 150 €, e anche Lucia 150 € voleva dire che Carlo aveva giocato 50 €..., invece Lucia aveva giocato di meno. Quindi ... non dipende da quante parti vincono oppure dalla somma che hanno giocato complessiva, cioè non sappiamo in che modo loro abbiano diviso il denaro, oppure quale cifra hanno giocato...
9. **Serena:** - E' la stessa cosa, lo stesso ragionamento di prima...
10. **Sperimentatore:** - E' allora a che conclusione siete arrivate...
11. **Graziella:** - Che non sapendo in che modo dividono la somma e in che maniera hanno giocato, cioè se hanno giocato la stessa parte di denaro non possiamo stabilire quant'è questo denaro che hanno giocato. Quindi le soluzioni possibili sono infinite.

SECONDO QUESITO

12. **Graziella:** - Allora nel secondo problema dobbiamo inventare un problema, alla cui soluzione si possa arrivare tramite un'uguaglianza; l'uguaglianza $6x - 3y = 18$. Allora... questo problema...
13. **Serena:** - Questo è un problema qualunque? Che genere di problema deve essere?
14. **Sperimentatore:** - Voi siete abituate che vi danno il problema...
15. **Serena:** - Infatti...
16. **Sperimentatore:** - ...e lo iniziate a risolvere, qui il gioco è diverso.
17. **Serena:** - Cioè, la soluzione dobbiamo cercare...
18. **Sperimentatore:** - Qui dovete inventare il problema.
19. **Graziella:** - Cioè, un problema..., un quesito normale?
20. **Sperimentatore:** - Sì, un problema...
21. **Graziella:** - Allora, quindi..., fa 18..., mi viene come l'istinto di cercare dei numeri...
22. **Serena:** - Infatti noi abbiamo al posto di..., che danno un'uguaglianza vera
23. **Graziella:** - Quindi... questo fa 18, quindi faccio come risultato un'uguaglianza vera, quindi 6 per, 6 per 3...
24. **Serena:** - 18, alla y \longrightarrow 0
25. **Graziella:** - Alla x \longrightarrow 3 e alla y \longrightarrow 0 ...
26. **Sperimentatore:** - Che cosa avete scritto?
27. **Graziella:** - Cioè, abbiamo trovato dei numeri che facevano l'uguaglianza vera..., quindi possiamo anche costruire tipo un problema su questi due numeri in modo per arrivare alla...
28. **Sperimentatore:** - Allora mi dite cosa ne pensate?
29. **Graziella:** - Allora un problema, vabbè può darsi che... non ci siano altre soluzioni quindi, questo non centra niente..., e allora se mettiamo caso, per esempio dobbiamo..., facciamo un problema in cui si danno due numeri e si devono trovare altri due numeri...
30. **Serena:** - Una coppia di valori che deva soddisfare...
31. **Graziella:** - Sì una coppia di valori che...

32. **Serena:** - Però era la somma...
33. **Graziella:** - Trovare una coppia di valori che...
34. **Serena:** - Due numeri...
35. **Graziella:** - Bisogna cercare una coppia di valori di cui il primo moltiplicato per il primo numero dato deve essere sottratto al secondo... Bisogna trovare una coppia di numeri, per esempio il 6 e il 3, ora questa coppia di numeri il primo deve essere moltiplicato per il primo, il secondo per il secondo..., e al primo sottrarre il secondo...
36. **Serena:** - Ma deve essere...
37. **Sperimentatore:** - Forza! Senza paura! Che dice qua?
38. **Serena:** - Sicuramente queste cose le abbiamo fatte e le sappiamo fare, ma adesso... non riusciamo a ricordare... quindi
39. **Graziella:** - Trovare la soluzione di un problema, ma che significa trovare il problema?
40. **Sperimentatore:** - Di solito a scuola si risolvono problemi, non si inventano problemi.
41. **Graziella:** - Allora... la questione...
42. **Sperimentatore:** - Perché voi siete abituate a tradurre dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico, a scrivere l'equazione..., qui vi si chiede la traduzione al contrario, dal linguaggio algebrico al linguaggio naturale... e non è facile questo...
43. **Graziella:** - Quindi ci sono due persone... con le caramelle... Allora ci sono due persone che...
44. **Serena:** - Vabbé come si fosse una... per esempio... bastava...
45. **Graziella:** - Ci sono due persone che vincono al lotto una cifra, che vincono al lotto una determinata cifra, la sottrazione tra queste due cifre è 18, la prima ha vinto tre volte, tre volte quello che ha scommesso e la seconda ha vinto zero volte quello che ha scommesso...
46. **Serena:** - Ma sempre complicato è...
47. **Graziella:** - Trovare quanto ogni persona ha giocato.
48. **Serena:** - Quindi è lontano dalla soluzione...
49. **Graziella:** - Quindi se due persone giocano una cifra, questo qua è uguale a 18. Ecco, la prima persona ha vinto il triplo di quanto ha scommesso, quindi 3 per x, l'altra ha vinto zero volte di quanto ha scommesso e viene 3 per un numero, quello che ha scommesso e viene 3 per 6 è 18 meno 0 per quello che ha scommesso è 0
50. **Serena:** - Ma deve essere 18
51. **Graziella:** - Mi sembra che dobbiamo fare all'incontrario, mettere questi due numeri...
52. **Sperimentatore:** - Questa equazione è quella che figura nel problema?
53. **Serena:** - No
54. **Graziella:** - No, è uscito..., no... non è quella che dice il problema. Dobbiamo mettere questi numeri, infatti... e abbiamo messo gli altri...
55. **Serena:** - Secondo me, deve essere diversa questa cosa...
56. **Graziella:** - Allora due persone giocano una somma di denaro ciascuno. A (*nome della persona*): vince sei volte di quello che ha scommesso, l'altra persona vince tre volte quello che ha scommesso e la differenza... la differenza della loro vincita è uguale a 18. Quindi...
57. **Serena:** - Questo è uguale a quello che ci ha fatto fare... che abbiamo trovato la soluzione...
58. **Graziella:** - Però qua la somma di denaro scommessa è diversa. Me lo dice che...
59. **Sperimentatore:** - Allora...
60. **Graziella:** - Ci sono due persone che giocano queste due somme di denaro diverse. La prima vince sei volte di quello che ha scommesso, la seconda vince tre volte di quello che ha scommesso, la differenza ...
61. **Serena:** - ... tra le vincite...
62. **Graziella:** - tra le vincite è uguale a 18. Trovare quanto hanno scommesso.
63. **Serena:** - Però è un problema che non ha soluzione...
64. **Sperimentatore:** - Non confondere, non ha soluzione o ne ha tante soluzioni?
65. **Serena:** - Ne ha tante soluzioni..., ha tante soluzioni, però in questo no ci ha chiesto di trovare le soluzioni...
66. **Sperimentatore:** - No, cosa chiede di trovare?
67. **Graziella:** - Trovare le somme di denaro che hanno scommesso.

TERZO QUESITO

68. **Sperimentatore:** - Nel terzo quesito avete due equazioni, dovete dire la prima idea che vi viene in mente, quando vedete le equazioni... Per esempio, a me sembra che rappresenta questo, forse può essere anche altro..., ma qual è la prima cosa che vi viene in mente?
69. **Serena:** - Allora con la seconda ...
70. **Graziella:** - La prima, a me viene in mente l'equazione della prima... Deve essere l'equazione di una retta...
71. **Serena:** - Sì
72. **Sperimentatore:** - Allora, scrivete...
73. **Serena:** - Allora... però con y viene l'equazione di una retta...
74. **Graziella:** - Questo è un fascio, un fascio proprio... (*per la seconda equazione*).
75. **Serena:** - E' un fascio proprio nelle due...
76. **Graziella:** - Sembra un fascio... con un solo parametro... Equazione della retta, però in forma generica, questa dovrebbe essere... Non quella, in forma generica (*per la prima equazione*).
Anche questa ... Solo che noi di solito il coefficiente lo chiamiamo n
77. **Serena:** - Sì, sì.
78. **Sperimentatore:** - Va bene n o q è la stessa cosa. Voi scrivete $y = m x + n$, dipenda dal libro di testo, in alcuni libri si trova $m x + q$, in altri, invece, $m x + n$.
79. **Graziella:** - Equazione di una retta in forma generica.
80. **Serena:** - Equazione generica di una retta in forma implicita. Equazione generica di una retta in forma esplicita.
81. **Graziella:** - Equazione generica di una retta in forma implicita. Equazione generica di una retta in forma esplicita (*ripete mentre scrive le risposte*).

QUARTO QUESITO

82. **Graziella:** - Una persona paga mensilmente 5 € e 2 € per ogni ora di telefonate, quindi 5 € è il costo fisso, il minimo ...
83. **Serena:** - ... più 2 €...
84. **Graziella:** - 2 € per ogni ora di telefonata, che sarebbe x , il numero di ore mensili di telefonate effettuate.
85. **Serena:** - Allora x è ... y ...
86. **Graziella:** - Viene una retta
87. **Serena:** - x è il numero di ore mensili quindi x è uguale a...
88. **Graziella:** - y è la somma complessiva e x è uguale alle ore di telefonate. La y che è la somma complessiva è uguale a 5 €, che sarebbe il costo fisso in un mese, più 2 € per le ore di telefonate. Quindi 2, 2 € per le ore di telefonate, per x (*mentre scrive l'equazione*).
89. **Serena:** - Deve essere x ...
90. **Graziella:** - La ci siamo
91. **Sperimentatore:** - Allora, non sei convinta?
92. **Serena:** - Allora pagare mensilmente 5 €, la somma complessiva pagata mensilmente è quindi 5 €...
93. **Graziella:** - No. Deve pagare 5 € mensile, che sarebbe il canone del telefono, più 2 € per ogni telefonata, 2 € per ogni ora di telefonate...
94. **Serena:** - Ah! Sì.
95. **Graziella:** - Quindi ora dobbiamo disegnarla... Quindi il termine noto è 5, dobbiamo trovare due punti, almeno un punto, quindi se x è 2 più 5 uguale a 9 (*effettuano il grafico*).
96. **Serena:** - Dobbiamo scrivere qualche altro punto..., $x = 0$ e $y = 5$.
97. **Graziella:** - y è la somma complessiva pagata mensilmente, x è il numero di ore mensili di telefonate effettuate.
98. **Sperimentatore:** - Perché questa parte del grafico la avete fatta tratteggiata? Quindi va o non va?
99. **Graziella:** - Perché continua all'infinito quindi, si può prolungare dall'altra parte...

100. **Graziella:** - Ma l'equazione, dobbiamo trovare il numero di telefonate, di ore telefonate e la somma complessiva. Ma le equazioni di primo grado con due incognite non si possono risolvere, quindi...
101. **Sperimentatore:** - Che significa che non si possono risolvere?
102. **Graziella:** - Non si possono risolvere nel senso che ci sono infinite soluzioni.
103. **Sperimentatore:** - Perché?
104. **Graziella:** - In poche parole se il grado dell'equazione è inferiore al numero di incognite, non si possono risolvere... Al numero delle incognite l'equazione ha infinite soluzioni (*ripete mentre sta scrivendo*).
105. **Sperimentatore:** - Voi avete detto che la retta si può prolungare indefinitamente, nel contesto di questo problema si può prolungare indefinitamente?
106. **Graziella:** - Nel contesto? Credo di sì, perché dipende da quante ore loro, da quante ore di telefonate... se ha avuto un'ora di telefonate, allora la retta... deve essere...
107. **Sperimentatore:** - Che cosa rappresentano gli assi?
108. **Graziella:** - x è le ore di telefonate, y è la somma complessiva, quindi a man mano che aumenta la x , il valore che diamo alla x , aumenterà anche il valore che diamo alla y quindi, il punto trovato sarà più in alto...
109. **Sperimentatore:** - E dall'altra parte?
110. **Graziella:** - A differenza di... diminuendo le ore di telefonate diminuirà anche il...
111. **Sperimentatore:** - Posso prolungare anche da questa parte? (*segnalando il secondo quadrante, per i valori negativi di x*)
112. **Graziella:** - Dipende se le ore di telefonate sono zero...
113. **Sperimentatore:** - Se sono zero mi trovo qua [*segnala il punto (0,5)*]
114. **Graziella:** - Quindi sarà il punto (0, 5). Da qui se utilizzano numeri negativi, quindi... non si possono avere ore di telefonate negative...
115. **Sperimentatore:** - Per questo ho formulato la domanda.
116. **Graziella:** - Eh...
117. **Sperimentatore:** - Da dove parte questa grafico?
118. **Graziella:** - Allora da questo punto...
119. **Sperimentatore:** - ... che non è una retta...
120. **Graziella:** - Una semiretta
121. **Sperimentatore:** - Parte da questo punto...
122. **Graziella:** - Quindi dobbiamo cancellare questo che abbiamo fatto in più...

APPENDICE N° 3: PROTOCOLLO DI VITA E ALESSANDRA

PRIMO QUESITO

1. **Alessandra:** - Somma totale, somma complessiva 300 € Sappiamo che Carlo vince il triplo del denaro scommesso, quindi la somma scommessa totale ...
2. **Vita:** - Pero quello che hanno scommesso, non sappiamo quant'è ...
3. **Alessandra:** - Ah... vincono al lotto la somma complessiva di 300 € Carlo vince il triplo del denaro.
4. **Vita:** - No, c'è il quadruplo...
5. **Alessandra:** - Allora Carlo e Lucia vincono al lotto la somma complessiva di 300 € Carlo vince il triplo del denaro, quindi Carlo il triplo.
6. **Vita:** - Carlo e Lucia hanno vinto 300 €...
7. **Alessandra:** - Si, somma totale infatti, quella che hanno vinto, sono 300 €...
8. **Vita:** - Il triplo del denaro, pero noi dobbiamo sapere quanto hanno scommesso, quanto..., perché... quanto hanno scommesso?
9. **Alessandra:** - Determina la somma di denaro che Carlo e Lucia hanno giocato. Commenta il procedimento seguito. Quanto sono le possibili soluzioni? Motiva la tua risposta (*legge il testo*).
10. **Vita:** - Ah... forse vedrò perché... Carlo vince il triplo di quello scommesso.
11. **Alessandra:** - Appunto dobbiamo vedere quanto hanno scommesso. Quadruplo di... Se la somma totale è di 300, giusto?
12. **Vita:** - Dobbiamo levare il triplo per sapere... che Carlo ...
13. **Alessandra:** - Ma come facciamo... dobbiamo vedere... Allora mettiamo, mettiamo, no? che se Carlo ha scommesso, mettiamo tipo, non è un dato, che Carlo ammesso che tipo ha scommesso... 10 €e ne ha vinto il triplo...
14. **Vita:** - Ma non lo sappiamo...
15. **Alessandra:** - Perché di questo, giusto? Perché di questo qui... Ma dobbiamo sapere quanto hanno giocato alla...
16. **Vita:** - Si
17. **Alessandra:** - E siccome dobbiamo arrivare alla... a questo che è la somma totale e di questo dobbiamo dividerla una per quello che la scommessa di Carlo..., però dobbiamo vedere quanto hanno scommesso ... Quindi la somma di questi due deve arrivare a 300 €
18. **Vita:** - Si
19. **Alessandra:** - Pero dobbiamo vedere che questo con la somma che ha scommesso ne ha fatto il triplo, quindi ne ha vinto il triplo... E' compreso con questo perché la somma totale è questa, giusto?
20. **Vita:** - Si
21. **Alessandra:** - E' compresa con questo quello che ha scommesso, quello che ha vinto il triplo, mentre quella ha vinto il quadruplo... Quindi, si ammettiamo, no? E per questo si devono dare prima i dati...
22. **Vita:** - Non ci sono i dati delle scommesse ... Dobbiamo dare una ... Sono 300 € giusto? Forse... se Carlo vince il ...triplo e la somma complessiva di quello che hanno vinto è 300 e Lucia vince il quadruplo e dobbiamo dividere e dobbiamo dividere, no? 300 come il triplo di ... vince il triplo di una scommessa...
23. **Alessandra:** - Si ma si deve vedere quanto è il triplo, infatti quello che hanno scommesso ... quello che dobbiamo dare..., dobbiamo dare intanto... una... tipo...
24. **Vita:** - Si ma non sappiamo quanto vincono, supponiamo che vincono 300 €in tutto loro, e non sappiamo quanto hanno scommesso sia Carlo che Lucia pero sappiamo che Carlo vince il triplo.
25. **Alessandra:** - No, non sappiamo quanto hanno scommesso.
26. **Vita:** - Lo sappiamo, Carlo vince il triplo del denaro scommesso... e se lui vince il triplo e la somma è 300 ...
27. **Alessandra:** - E quello vince il quadruplo...
28. **Vita:** - ...il quadruplo di quello che ha scommesso..., tipo quello che ...ha scommesso Carlo deve essere per forza 300 € per forza ... la somma complessiva
29. **Alessandra:** - Infatti, la somma totale è di 300 €

30. **Vita:** - Mettiamo se Carlo scommette 50 €, Carlo, per esempio, Lucia, per esempio, scommette 100 € 200 €..
31. **Alessandra:** - Tipo scommette 10 € il triplo, il triplo sono...
32. **Vita:** - 30 €, quindi... e Carlo mettiamo ha scommesso...
33. **Alessandra:** - Perché poi alla fine dobbiamo essere noi a dare delle soluzioni, perché non ci le dà. Quindi qua dice quante sono le possibili soluzioni... deve essere, però ci possono essere infinite soluzioni, infinite relativamente però ai numeri fino a quando possiamo arrivare, qua dice il quadruplo qua dice il triplo... Quindi se mettiamo... Se Carlo ha scommesso 10 € giusto? Scommessa Carlo ...
34. **Vita:** - Ma mettiamo 50 €
35. **Alessandra:** - No poi è troppo... non so quanto è il quadruplo.
36. **Vita:** - Si va bene, non si sa quanto è veramente...
37. **Alessandra:** - Se è 30 € il triplo... dovrebbe vincere 90. In totale... avrebbe dovuto vincere... ipotesi...
38. **Vita:** - Allora... se è 30... il triplo deve vincere 90
39. **Alessandra:** - Se è 30... il triplo deve vincere 90 e se...
40. **Vita:** - Stai parlando sempre del quadruplo, la somma totale deve essere di 90 deve arrivare a 300,
41. **Alessandra:** - Quindi da 90 per arrivare a 300, giusto? Ci sono 210...
42. **Vita:** - Si
43. **Alessandra:** - ... quindi per vincere 210 Lucia ..., giusto?
44. **Vita:** - Si
45. **Alessandra:** - ... per vincere 210 €...
46. **Vita:** - Lucia è il quadruplo di quello... però è diviso 4, no?
47. **Alessandra:** - Non so...
48. **Vita:** - Vediamo se vengono più o meno giusto i numeri?
49. **Alessandra:** - Aspetta...
50. **Vita:** - Se vince 210 che è la somma totale...
51. **Alessandra:** - Quindi e questo deve essere il quadruplo...
52. **Vita:** - Diviso 4
53. **Alessandra:** - Contiene la somma scommessa.
54. **Vita:** - Questo è il triplo e forse l'ho capito... e questo dovrebbe essere il quadruplo... qua c'è la somma scommessa e poi ci sono 210 diviso 4.
55. **Alessandra:** - Sì, ma non sappiamo se è veramente 30 €
56. **Vita:** - Lo abbiamo visto come ipotesi
57. **Alessandra:** - E qua dice le possibili soluzioni
58. **Vita:** - Quante sono le possibili soluzioni?
59. **Alessandra:** - Però può essere... possono essere tante in base a quanto possano scommettere ...
60. **Vita:** - Sì... aspetta..., non è così, c'è... le soluzioni possono essere... possono essere appunto, ma così tante soluzioni vengono...
61. **Alessandra:** - Eh?
62. **Vita:** - ...così tante soluzioni vengono... se per esempio questa signora fa il triplo... tante soluzioni vengono, invece qua dice quante sono le possibili soluzioni?
63. **Alessandra:** - Sì, infatti, ti voglio dire, noi dobbiamo calcolare quante sono le possibili soluzioni, perché le somme di denaro che Lucia e Carlo hanno scommesso sono relative. Perché sì quello vince il triplo e quello vince il quadruplo, però tipo non è che possiamo sapere quanto hanno scommesso, noi abbiamo fatto l'ipotesi che scommettano..., invece abbiamo il triplo, il quadruplo però mi sembra che su questo..., per me c'è un limite, ci sono delle soluzioni che vanno... Mi sembra che non vanno però...
64. **Vita:** - No secondo me, se ci sono tante soluzioni alla fine...
65. **Alessandra:** - Questo è anche impossibile tipo... non impossibile, cioè inutile, perché si dice quante possono essere le possibili soluzioni, noi invece i valori che possiamo dare..., giusto? tipo una scommessa sia Carlo che Lucia possono quindi vincere il triplo; supponiamo che diamo 20 - 40 tipo vince il triplo 40 - 60 - 80 e sono 80 e se quello però per arrivare a 300, deve mettere sempre di meno, giusto?

66. **Vita:** - Certo...
67. **Alessandra:** - Quindi è sempre relativo le somme che noi mettiamo, secondo me, sono le possibili soluzioni possono andare tipo, tipo qua ci sono 300, tipo vanno da tot a tot, queste possibili soluzioni..., ma dobbiamo vedere...
68. **Vita:** - Intanto qua dobbiamo vedere quant'è la somma scommessa?
69. **Alessandra:** - Secondo me, non ha senso, perché si qua dice determina le somme... perché, infatti, questo non è qualche numero che dobbiamo mettere...
70. **Vita:** - Comunque...
71. **Alessandra:** - Allora dobbiamo vedere quante possono essere quindi queste soluzioni, da quando possono andare...
72. **Vita:** - Sì
73. **Alessandra:** - ...possono esserci, possono esserci 300 soluzioni possibili, può essere 150? Perché per...
74. **Sperimentatore:** - Che cosa ne pensate?
75. **Vita:** - Stiamo facendo qua... Come vengono ... questo, poi dobbiamo vedere...
76. **Alessandra:** - Scriviamo dal più basso al più alto...
77. **Vita:** - Invece...
78. **Alessandra:** - Dal più piccolo al più grande...
79. **Vita:** - Perché non sai come sono...
80. **Alessandra:** - Ma possiamo scommettere qualsiasi somma?
81. **Vita:** - Per questo è impossibile...
82. **Alessandra:** - L'importante è che non superi questo qua, capisci quello che ti voglio dire io?
83. **Vita:** - Carlo vince il triplo del denaro scommesso, forse il denaro scommesso sarà uguale, quello che loro hanno scommesso...
84. **Alessandra:** - Eh, può essere...
85. **Vita:** - Sapendo che Carlo vince il triplo del denaro scommesso...
86. **Alessandra:** - Ma c'è il quadruplo e si sta parlando di scommesse per questo significa che non può essere un numero negativo.
87. **Vita:** - E se noi facciamo per esempio il triplo sempre di 10 € sarebbe 30 e... invece è sempre 10 € sarebbe poi 40, il quadruplo che sarebbe 40, la somma dovrebbe venire poi 70, noi possiamo fare se la somma deve venire per esempio 300, noi possiamo fare...
88. **Alessandra:** - Come?
89. **Vita:** - Per esempio, del denaro scommesso è uguale sia per Carlo, mettiamo per esempio che è uguale sia per Carlo sia per Lucia, mettiamo per esempio 10 € in questo caso, se è 10 € per Carlo, il triplo è 30 € per Lucia 40 e poi vincono al lotto la somma complessiva, quella somma deve essere per esempio, questo viene 70, quindi è sbagliato, invece deve mettere il denaro scommesso deve essere uguale e che poi con la somma deve fare 300
90. **Alessandra:** - Può essere...
91. **Vita:** - Se per esempio noi mettiamo 30 € deve venire 90, giusto?
92. **Alessandra:** - Sì ...
93. **Vita:** - 30 € il quadruplo, 90 e 30, 120, 120 + 90
94. **Alessandra:** - Fanno 230
95. **Vita:** - No, 210, 210. Quindi non ci siamo. Per esempio, 40,
96. **Alessandra:** - 40 il triplo...
97. **Vita:** - 120, 40 il quadruplo, 120 + 40, fa 160, 160 + 120 fa
98. **Alessandra:** - 280
99. **Vita:** - 280 e ancora non ci siamo...
100. **Alessandra:** - No ci vuole poi tanto...
101. **Vita:** - Mettiamo per esempio 42, se facciamo..., per esempio 42
102. **Alessandra:** - ...il triplo sarebbe..., 42 e 42 fanno...
103. **Vita:** - 84 più 42 fanno 126, 126
104. **Alessandra:** - il quadruplo...
105. **Vita:** - 126 + 42 fanno 168, giusto? 168 + 126,
106. **Alessandra:** - No, non è 300
107. **Vita:** - 126 + 168 è 294.

108. **Alessandra:** - No, non ci siamo
109. **Vita:** - 43, hai capito come risalire?
110. **Alessandra:** - Sì, sì
111. **Vita:** - Quindi, con 43...
112. **Alessandra:** - Anche così ci possono essere infinite soluzioni?
113. **Vita:** - No, dipende da quello che ha scommesso, ma così ti viene quanto hanno scommesso...
114. **Alessandra:** - Ma se hanno scommesso la stessa somma, non è che sappiamo se hanno scommesso la stessa somma...
115. **Vita:** - Secondo me, sì, ma bisogna dirlo, che hanno scommesso la stessa somma...
116. **Alessandra:** - Tu prova a farlo...
117. **Vita:** - Non viene, viene 302. Il procedimento, come può essere? Non lo so
118. **Alessandra:** - Come possono essere...?
119. **Vita:** - Carlo e Lucia scommettono la stessa somma?
120. **Sperimentatore:** - Il problema lo specifica?
121. **Alessandra:** - No, appunto quello che dico io per questo..., noi possiamo supporre..., tutto è una supposizione, un'ipotesi, non è un dato certo...
122. **Sperimentatore:** - Sì un'ipotesi, come voi avete supposto per esempio che...
123. **Vita:** - Avevamo scritto 30 €
124. **Alessandra:** - Quindi, secondo me, no? Essendo che si deve arrivare ad un tot di 300 € si devono calcolare da tanto a tanto per un massimo, per un totale, ossia che non si può superare quella..., giusto?
125. **Sperimentatore:** - Sì
126. **Alessandra:** - E dobbiamo vedere quante sono le soluzioni, perché se noi dobbiamo determinare le somme di denaro che hanno scommesso, possono essere tante le somme di denaro che hanno scommesso per arrivare alla somma di 300 €
127. **Sperimentatore:** - Sì
128. **Alessandra:** - Però, noi dobbiamo vedere quante sono le possibili soluzioni, cioè quante possono essere le soluzioni per arrivare...
129. **Sperimentatore:** - Fino a quello che voi siete arrivate qua, voi avete detto "questo problema è impossibile", attenzione che cosa significa che questo problema sia impossibile?
130. **Vita:** - Che non si può avere nessuna soluzione.
131. **Sperimentatore:** - In tutta la discussione, a quale conclusione siete arrivate, quante soluzioni si possono trovare?
132. **Vita:** - Ci possono essere fino ad arrivare ad un totale di 300 €
133. **Alessandra:** - Quindi, sono 300 soluzioni.
134. **Vita:** - No
135. **Alessandra:** - 300 perché poi...
136. **Sperimentatore:** - Perché poi?
137. **Alessandra:** - Può anche..., però qua dice che ha scommesso..., può non avere scommesso niente e avere vinto il quadruplo e non avere scommesso niente.
138. **Vita:** - Non ha vinto nulla.
139. **Sperimentatore:** - Sì, si potrebbe pensare questo. Voi volete vedere da dove a dove si va... La cosa importante di questo problema è determinare quante soluzioni esistono. Secondo voi, si può determinare un numero preciso di soluzioni?
140. **Vita:** - No, non so...
141. **Alessandra:** - Dipende..., però essendo che..., possono essere anche tipo...
142. **Vita:** - Soluzioni ... il doppio della somma scommessa perché può tipo ...
143. **Alessandra:** - Sì sono 300 € giusto? ed è il totale devono partire..., partono sicuro da 0 perché possono anche aver scommesso 0
144. **Sperimentatore:** - Sì
145. **Alessandra:** - Possono arrivare...
146. **Vita:** - Secondo me, va da 0 a 150 perché si l'altro può scommettere massimo 150, cioè per non avere quindi...
147. **Alessandra:** - No

148. **Vita:** - ... che poi...
149. **Alessandra:** - ... che poi... anche il doppio..., può non avere scommesso così...
150. **Sperimentatore:** - Allora facciamo il riassunto di tutto il problema..., che cosa dovresti scrivere?
151. **Alessandra:** - Che non sappiamo intanto quanto possono avere scommesso, quindi noi abbiamo..., dobbiamo essere noi ad imporre un dato.
152. **Sperimentatore:** - Allora scrivete questo.
153. **Vita:** - Sì ma...
154. **Sperimentatore:** - ...se siete d'accordo. Non sei d'accordo Vita?
155. **Alessandra:** - Scriviamo...
156. **Vita:** - Secondo me, si può vedere quanto hanno scommesso tutti e due, però... non so...
157. **Sperimentatore:** - Però dando qualche condizione, secondo te...
158. **Vita:** - Sì delle ipotesi sempre...
159. **Alessandra:** - Ma è quello che dico io
160. **Vita:** - Però tu dici che non possiamo vedere le possibili..., le somme..., le possibili soluzioni...
161. **Alessandra:** - Sì perché non viene detto di valutare tutte le possibilità, ma possono essere tante, qua no poi alla fine determina le somme...
162. **Vita:** - Sì, ma
163. **Alessandra:** - ...noi possiamo imporre la somma che hanno scommesso e quindi, può essere, può variare, è una cosa che varia... in base a quanto hanno scommesso perché non abbiamo dati certi. Però le soluzioni per quanto possono essere, si possono sapere però..., cioè io penso..., però..., cioè...
164. **Vita:** - Non sono dati certi..., perché si possono...
165. **Alessandra:** - No, perché da un massimo di 300, proprio è il massimo, a 300 si può arrivare...
166. **Vita:** - Sì, per quello tipo... va a scommettere 300 €e quello mettiamo scommette, giusto? Il quadruplo poi già la somma viene sorpassata e quindi deve arrivare ad un massimo per quella...
167. **Alessandra:** - Allora..., aspetta..., secondo me è così, allora il triplo di 300..., cioè devo fare, 300 diviso 3...
168. **Vita:** - Sì
169. **Alessandra:** - Perché quello può avere scommesso un numero che possa arrivare a 300, e che Lucia non ha scommesso niente, in questo caso, anche si ha vinto il quadruplo, mettiamo questa come possibile ipotesi, quindi diviso 3 e viene...
170. **Vita:** - 10
171. **Alessandra:** - Che stiamo facendo? Giusto 10
172. **Sperimentatore:** - Quant'è 300 diviso 3? 100, no?
173. **Vita:** - Appunto
174. **Alessandra:** - E' giusto, quindi il triplo...
175. **Vita:** - Non è che la..., il triplo non fa più di 100
176. **Alessandra:** - Quello che ha il triplo deve avere scommesso 100, giusto?
177. **Vita:** - Sì
178. **Alessandra:** - Perché...
179. **Vita:** - ...invece, il quadruplo è diviso 3
180. **Alessandra:** - ...diviso 4...
181. **Vita:** - ...diviso 4...
182. **Alessandra:** - 100 triplo... Facciamo per il quadruplo, 300, il 4 non spunta... Allora... (*Fanno 300 : 4*).
183. **Sperimentatore:** - 75, dai
184. **Alessandra:** - Allora... giusto?
185. **Vita:** - E' impossibile.
186. **Alessandra:** - No, non ho capito...
187. **Vita:** - Le soluzioni sono queste, 175, possono essere, perché poi alla fine si somma, quanto...
188. **Alessandra:** - No, non si può passare avanti...

189. **Vita:** - Se vediamo...
190. **Sperimentatore:** - Allora, una cosa importante, si può determinare un numero preciso di soluzioni in questo problema? Sì o no? Posso dire che le soluzioni sono 20, 30, 100 o che sono tantissime?
191. **Vita:** - Tantissime
192. **Alessandra:** - Sono variabili

SECONDO QUESITO

193. **Alessandra:** - Che vuole dire inventare una possibile situazione problema? Dobbiamo inventare un problema?
194. **Sperimentatore:** - Dovete inventare un problema. Al contrario di quello che si fa abitualmente, invece di avere un problema e risolverlo, è al contrario, data un'equazione, inventate un problema.
195. **Alessandra:** - E appunto...
196. **Vita:** - E' un problema, per esempio Carlo e..., oppure per esempio è un'eguaglianza?
197. **Sperimentatore:** - Come volete voi.
198. **Alessandra:** - Tipo... può essere per esempio...
199. **Vita:** - Se noi facciamo, per esempio, un sistema di due equazioni, ci viene questo? ci può venire questo?
200. **Alessandra:** - Come?
201. **Vita:** - Sai quando facciamo un sistema, un sistema di due equazioni...
202. **Alessandra:** - Sì, tipo $6x - 3y = 0$ e $18 = 0$, questo dici tu?
203. **Vita:** - No, per esempio deve risultare questo, per esempio devono essere due equazioni che poi alla fine deve risultare questo...
204. **Alessandra:** - Quest'uguaglianza?
205. **Vita:** - Quest'uguaglianza
206. **Alessandra:** - Se per esempio noi consideriamo che devono venire due incognite... o che restano altre incognite...
207. **Vita:** - Sì... Noi dobbiamo inventare un problema..., tipo di...
208. **Alessandra:** - Però come si fa di essere $6x - 3y = 18$, perché x e y, essendo due variabili, e sono diverse non si possono sommare...
209. **Sperimentatore:** - No
210. **Alessandra:** - E quindi non è possibile che si possa, giusto? Essendo due variabili, che sono diverse x e y, x e y non si possono sommare, e quindi non possiamo dare mai il risultato..., caso mai si potrebbero dare..., se ammettiamo tipo, se facciamo $6 - 3$ viene $3xy$
211. **Vita:** - Non può essere x e y non si possono mai sommare
212. **Sperimentatore:** - No. E' giusto quello che dici.
213. **Alessandra:** - E quindi non può essere, non può essere... Non si può risolvere, giusto?
214. **Sperimentatore:** - Tu vuoi risolvere l'equazione?
215. **Vita:** - Per esempio, se noi troviamo due equazioni, se per esempio troviamo due equazioni, le mettiamo in un sistema, giusto?
216. **Alessandra:** - Sì, ma...
217. **Vita:** - Per esempio, mettere..., per esempio, ...
218. **Alessandra:** - Non ti può venire questa del problema. Lo sai perché? Non si può risolvere perché abbiamo due incognite diverse, due incognite diverse non si possono mai sommare.
219. **Vita:** - Lo so
220. **Alessandra:** - Non si può quindi svolgere, non si può svolgere questo, noi dobbiamo fare un nuovo problema.
221. **Vita:** - Quando ci sono due incognite, perché non si può risolvere? Perché non si può risolvere? Si può trovare una soluzione. Se noi mettiamo due equazioni e le facciamo al sistema, possiamo ottenere...

222. **Alessandra:** - ...quello della x , per esempio, si può imporre un numero, tipo $x = 0$ poi l'equazione verrà sicuro un'incognita soltanto, però noi dobbiamo fare il problema oppure dobbiamo svolgere il..., o entrambi.
223. **Sperimentatore:** - L'enunciato dice di inventare una possibile situazione problema... Inventare un problema. Di solito non fate questo, di solito si risolvono problemi a scuola, non si inventano... Questo quesito chiede il contrario.
224. **Vita:** - Eh!...
225. **Alessandra:** - Che cosa facciamo?
226. **Vita:** - Possiamo trovare per esempio la x ...
227. **Alessandra:** - No, non dobbiamo...
228. **Vita:** - No va bene, si ti dico poi per esempio quello che ci troviamo, ci troviamo qua la y , se poi ci troviamo qua la y ...
229. **Alessandra:** - Dobbiamo inventare il problema
230. **Vita:** - Il problema..., non si può fare per esempio un sistema, non il problema?
231. **Alessandra:** - Il problema, il problema dobbiamo inventare, dobbiamo dare i dati, un problema... come questo.
232. **Vita:** - Va bene, per esempio di risolvere due equazioni.
233. **Alessandra:** - No quale risolto, qua è un problema, altrimenti non era questo il problema.
234. **Sperimentatore:** - Non è un esercizio, un problema dovete fare.
235. **Alessandra:** - Secondo me, non possono dare mai un'uguaglianza perché non si possono sommare, quindi anche se noi poniamo un problema, non sarà mai un problema, giusto?
236. **Vita:** - Ma ..., quindi...
237. **Alessandra:** - ...un problema...
238. **Vita:** - ...anche se abbiamo per esempio due equazioni e risolvere, non è un problema questo? Di trovare per esempio una relazione...
239. **Alessandra:** - Ma è falsa, è falsa... non possiamo trovare..., è un'ipotesi falsa, perché non può essere un'uguaglianza se $6x - 3y = 18$. Non si possono sommare due incognite e non si possono dare quindi un risultato uguale, un risultato giusto...
240. **Vita:** - Dobbiamo dare un numero alla x , un numero alla y che per risultato dia 18, non dovrebbe essere questo? Un valore alla x , un valore alla y che poi per risultato deve dare 18. Un'uguaglianza per essere vera deve essere così, no?
241. **Alessandra:** - Non ci può aiutare?
242. **Vita:** - Io, per esempio, volevo trovare un valore della y e poi, per esempio, mettendo qua trovare il valore della x , perché noi il problema è forse questo, dobbiamo trovare un valore della x , un valore della y e poi, per esempio, bisogna moltiplicare tipo...
243. **Alessandra:** - Se Marco, se Marco ammettiamo...
244. **Vita:** - Perché Marco..., perché un nome?
245. **Alessandra:** - Dai qualsiasi nome...
246. **Vita:** - Per forza dei nomi ci devono essere..., se..
247. **Alessandra:** - Allora nel mercato ci sono 6..., mettiamo e abbiamo 3 tipo... Ah! tipo Lucia...
248. **Vita:** - No nel supermercato ci sono 6, non so come dirlo, per questo...
249. **Alessandra:** - In totale erano 18 frutta, giusto?
250. **Vita:** - Non lo so...
251. **Alessandra:** - Vediamo se dà il risultato qua...
252. **Sperimentatore:** - Che cosa scrivi, lì?
253. **Alessandra:** - Sto facendo un'equazione..., sto facendo...
254. **Vita:** - Vediamo se è vero, se mettiamo per esempio..., x e y ...
255. **Sperimentatore:** - Vorrei sapere che cosa scrivi? Spiegami
256. **Alessandra:** - Un attimo...
257. **Sperimentatore:** - Hai scritto x uguale?
258. **Alessandra:** - Ho fatto x , ho scritto prima x ...
259. **Sperimentatore:** - Scrivetelo o non siete d'accordo con questo?
260. **Vita:** - Non lo so
261. **Sperimentatore:** - Allora...
262. **Alessandra:** - Sai perché, sai perché ...

263. **Vita:** - Se questa è un'uguaglianza che deve risultare vera, perché: "Inventa una possibile situazione che possa risolversi utilizzando la seguente relazione"
264. **Alessandra:** - Situazione problema...
265. **Vita:** - Un problema è anche con due equazioni è, un problema, per esempio, il problema sarebbe che noi dobbiamo trovare la x e la y , il valore di x e il valore di y che messi in questa cosa da per risultato 18 perché è uguaglianza. Per esempio, qua per esempio diamo una delle due 2...
266. **Alessandra:** - Sì ma qua non dobbiamo dare un valore alla x e dare un valore alla y ...
267. **Vita:** - ...dobbiamo trovare tipo..., e qui tipo...
268. **Alessandra:** - Non è una cosa..., è che $6x - 3y = 18$... Capisci?
269. **Vita:** - e come fai, e come fai tu...?
270. **Alessandra:** - Non si può fare perché è già fatta l'uguaglianza...
271. **Vita:** - Perché è fatta se diamo un valore alla x e un valore alla y , l'uguaglianza vera è. Il problema questo è ...
272. **Alessandra:** - Se noi per esempio diamo 3
273. **Vita:** - Sempre lì siamo, dipende di quanto siano i valori allora è, se diamo 3, se diamo 3...
274. **Alessandra:** - Aspetta, 6 per 3 è 18 meno..., mettiamo 0 qua alla y , meno 0 uguale a 18
275. **Vita:** - Se noi, per esempio non lo so, se mettiamo non si possono cambiare sempre i valori...
276. **Alessandra:** - Aspetta un minuto, 6 per 4 è 24, giusto? 24 meno... E allora cosa ho detto $6 \times 3 = 18$, $3 \times 0 = 0$ e viene 18. $6 \times 4 = 24$, e viene $3 \times 1 = 3$, $24 - 3 = 21$ e questo viene... $6 \times 5 = 30$, $3 \times 2 = 6$... (*Sostituisce x e y con diversi valori*).
277. **Vita:** - E' sbagliato questo ...
278. **Alessandra:** - Perché deve venire uguale a questo numero, capisci... Deve essere un problema io non lo so come si fa un problema, può essere che sia sbagliata la consegna...
279. **Vita:** - E' sbagliata... Ci vuole un'incognita e solo se è la stessa potevamo...
280. **Alessandra:** - Può essere...
281. **Vita:** - Una possibile soluzione, una perché ce ne sono tante soluzioni, giusto? Se noi inventiamo una ed è giusta e fa venire questa uguaglianza vera...
282. **Alessandra:** - E allora ..., $6 \times 3 = 18$...
283. **Vita:** - Inventa una possibile soluzione...
284. **Alessandra:** - Problema, problema..., non centrano le soluzioni...
285. **Vita:** - Il problema e se tu per esempio, il problema no..., noi non abbiamo né la x né la y ...
286. **Alessandra:** - Sì ma dobbiamo inventare un problema, un problema proprio.
287. **Vita:** - Ma perché un problema proprio?
288. **Sperimentatore:** - Dovete inventare un problema.
289. **Alessandra:** - Dobbiamo inventare un problema, non è che lo dobbiamo risolvere.
290. **Vita:** - Io metto per esempio..., Marco...
291. **Alessandra:** - Un problema...
292. **Vita:** - Eh!
293. **Alessandra:** - Allora "è andato", cominciamo a scrivere, giusto? Allora, "al mercato..."
(*Frase scritta: Marco è andato al mercato...*).
294. **Vita:** - Se mettiamo i valori alla x e alla y ?
295. **Alessandra:** - Ma risolvere no..., ma qua diceva il problema, capito?
296. **Sperimentatore:** - Non chiede di risolvere
297. **Vita:** - Forse è così, per esempio, la somma di tot complessiva, giusto? Per esempio..., forse ti immagini per esempio a questo, per esempio 6, vince per esempio quello...
298. **Alessandra:** - Carlo e Lucia vincono al lotto...
299. **Vita:** - Carlo e Lucia...
300. **Alessandra:** - Ah! Sì! Carlo e Lucia vincono al lotto la somma complessiva di 18 € Sappiamo che Carlo vince il triplo del denaro scommesso, in questo caso vince il doppio, il triplo del denaro scommesso e dovrebbe avere scommesso 2...
301. **Vita:** - Meno 3, c'entra?
302. **Alessandra:** - E Lucia...
303. **Vita:** - Secondo me, non c'entra perché 6 per..., aspetta...

304. **Alessandra:** - Se noi mettiamo, no? Che... mettiamo...
305. **Vita:** - Per esempio, il tot complessivo è 18...
306. **Alessandra:** - Non ha senso, non ha senso... Perché no...
307. **Vita:** - Lo sai perché, perché noi non siamo riuscite a fare quello di prima...
308. **Alessandra:** - Non c'entra, per me è stato facile perché possono essere tante soluzioni però... Sai che cosa è? Tu no? vuoi fare tipo... ammettiamo no? tipo *al mercato ci sono 18 mele* che erano già di prima poi ne ha prese, tipo *Marco ne ha prese 6* e sono rimaste qua. *Quante*, poi tipo devi mettere quindi un altro dato, tipo poi li devi mettere eh! C'è n'erano 3 nell'armadio quante sono rimaste complessivamente? Giusto? Tipo questo, no? Così.
309. **Vita:** - Sì, sì
310. **Alessandra:** - Allora, allora, *Marco è andato...*, no Marco...
311. **Vita:** - ...*ha*, per esempio, *18 mele*, no Marco...
312. **Alessandra:** - ...al mercato...
313. **Vita:** - Queste 3 sono perché...
314. **Alessandra:** - Guarda..., *al mercato...*
315. **Vita:** - Non sarebbe, non è mercato... Marco, per esempio, e Lucia hanno 18 mele...
316. **Alessandra:** - Sai che cosa ti voglio dire io che un negoziante va a comprare 18 mele, da cui 6 le mette fuori così, le altre le dà..., le porta..., insomma le mette dentro qualche parte, tipo... le vuole mettere..., non lo so, le vuole mettere..., e poi il negoziante è andato a prendere tot mele. Quante ci sono complessivamente tra quelle rimaste e quelle..., giusto?
317. **Vita:** - Per me però..., non ci possiamo aiutare a fare questo problema dando, per esempio, le soluzioni?
318. **Alessandra:** - Secondo me, tu dimmi quale...
319. **Vita:** - Una possibile soluzione qua c'è scritta, no? Se noi, per esempio, diamo un valore per esempio...
320. **Alessandra:** - Non ci può essere perché...
321. **Vita:** - Sono tante le soluzioni...
322. **Alessandra:** - Nooo
323. **Vita:** - Sono tante le soluzioni, come no? Se noi, per esempio, aspetta...
324. **Alessandra:** - Un problema secondo me...
325. **Vita:** - Con due... due incognite
326. **Alessandra:** - E per questo dico io che secondo me non si può svolgere, giusto?
327. **Sperimentatore:** - Allora che cosa vi traumatizza tanto, che ci siano due incognite diverse?
328. **Alessandra:** - Cioè, dobbiamo fare un problema, noi non è che abbiamo fatto tipo... non abbiamo risposto mai ad un problema, noi abbiamo avuto sempre l'equazione senza risolvere...
329. **Vita:** - Cioè, l'abbiamo soltanto...
330. **Alessandra:** - Però no, no...
331. **Vita:** - Ma poi Lei ci dice com'è?
332. **Sperimentatore:** - Sì, poi vi lo dico... E allora concludendo possiamo scrivere questo problema o no?
333. **Alessandra:** - Vicine c'eravamo?
334. **Sperimentatore:** - Che?
335. **Alessandra:** - Vicine c'eravamo?
336. **Sperimentatore:** - Lo possiamo scrivere o no? Succede che non vi mettete d'accordo, una dice una cosa e l'altra risponde sempre di no...
337. **Alessandra:** - Secondo me...
338. **Sperimentatore:** - In parte ha ragione ciascuna, ma non mi mettete d'accordo tra voi... Vediamo Vita come faresti tu il problema?
339. **Vita:** - Non lo so..., non lo so, perché mi sa che sarà qualcosa ...come il primo, sarà qualcosa di simile.
340. **Sperimentatore:** - Hai trovato un collegamento tra il secondo ed il primo quesito? Tu cosa ne pensi?

341. **Alessandra:** - Sì perché c'è solamente un'equazione del sistema come già ha detto la mia compagna, per cui per trovare la x e la y possiamo mettere anche infinite soluzioni per avere...
342. **Vita:** - Pero qua abbiamo il triplo e il quadruplo e qua abbiamo 6 e 3, 6 meno 3, quindi secondo me queste cose verranno simile da svolgere, poi non lo so... Perché c'è 18 e qua c'è 300 la somma complessiva, Carlo vince, per esempio, il triplo del denaro invece qua l'incognita x ha 6... La somma complessiva...
343. **Sperimentatore:** - E allora come possiamo fare?

Le alunne riprendono il PRIMO QUESITO

344. **Alessandra:** - 300 che è uguale a ... Ah! perfetto, possiamo dare una cosa qualsiasi, se noi mettiamo, mettiamo il triplo del denaro, triplo 3...
345. **Sperimentatore:** - State parlando del primo quesito o del secondo?
346. **Alessandra:** - Del primo...
347. **Vita:** - Nella domanda ci mettiamo per esempio infinite soluzioni, però qua mettiamo per esempio infinite soluzioni, però mettiamo per esempio una, solo un esempio, non era così...
348. **Sperimentatore:** - Allora siete tornate al primo? Nel primo che cosa hai scritto?
349. **Alessandra:** - Un'equazione, un'uguaglianza, cioè la somma totale è di 300, però noi non sappiamo quant'è la x e quant'è la ...
350. **Vita:** - Tu sei sicura di...
351. **Alessandra:** - Io non lo posso sapere, io sto facendo altre ipotesi, cioè anzi che avere una soluzione possibile ho un'equazione generale come viene data qua, in quanto 300 è la somma totale e mettiamo che 3 per non sapendo quanto ha scommesso e 4 per non sapendo quanto ha scommesso...
352. **Vita:** - Perché x e y forse erano diverse.
353. **Alessandra:** - Però...
354. **Vita:** - Infatti, perché x e y rappresentano forse il denaro scommesso, giusto? Il denaro scommesso...
355. **Alessandra:** - Se noi per esempio....
356. **Vita:** - Ma noi non lo possiamo sapere mai...
357. **Alessandra:** - Infatti, secondo me sono delle variabili, è tutto un'ipotesi anche questa, noi dobbiamo vedere quante sono, però io penso che se mettiamo, per esempio, che sono le possibili soluzioni...
358. **Sperimentatore:** - Quante sono le possibili soluzioni?
359. **Vita:** - Non sono certa, tranne 0 forse...
360. **Alessandra:** - No, perché?
361. **Vita:** - Perché può essere che non ha scommesso niente.
362. **Alessandra:** - Aspetta però... No però poi dice che quello ha scommesso il triplo, quindi dà per certo che hanno scommesso qualcosa...
363. **Vita:** - C'è una relazione tra questi due? Sono simili? (*il primo e il secondo quesito*)
364. **Sperimentatore:** - Si tratta di fare un problema per volta. Con quale quesito dobbiamo finire, con il primo?
365. **Vita:** - Con il primo
366. **Sperimentatore:** - Che cosa dovresti scrivere? Quante sono le possibili soluzioni? Scrivete quello che ne pensate.
367. **Alessandra:** - Dobbiamo calcolare un numero preciso? Sempre...
368. **Vita:** - Un numero preciso non c'è, ma possono essere tante soluzioni...
369. **Sperimentatore:** - Perché avete tanta paura di scrivere?
370. **Vita:** - Si sbagliamo...
371. **Sperimentatore:** - Non si tratta di giusto o sbagliato, io analizzo forme di pensiero non correggo per giusto o sbagliato...
372. **Vita:** - Infinite tranne 0 questo è sicuro, perché si hanno vinto qualcosa hanno scommesso... Per esempio, qui x e y sempre dobbiamo trovare, per esempio, il denaro scommesso...

373. **Alessandra:** - Sì, però...
374. **Vita:** - Infinite soluzioni, secondo me sono, perché dipende per esempio, possiamo dare, per esempio, che Marco, per esempio...
375. **Alessandra:** - Ma infinite soluzioni... può essere anche che tu ci metti 6 per 300 e 6 per 300 è maggiore di 300, della somma totale...
376. **Vita:** - Deve essere maggiore di 0 e minore di 300?
377. **Alessandra:** - Qui invece dobbiamo mettere..., però se noi mettiamo la x poi vengono uguali questi due, giusto? Se noi mettiamo tipo, perché voglio fare tipo, com'è che stiamo facendo adesso, tipo quelli lì che vanno..., qui la variabile può andare da... sia maggiore di 0 sia minore di 300, non compreso 300, compreso 300...
378. **Vita:** - No aspetta, maggiore di 0 giusto? Ma deve essere minore di 300 non uguale, perché tu non puoi, per esempio, se qua dice...
379. **Alessandra:** - No, può essere che uno è 0 e l'altro è 300.
380. **Vita:** - Allora è compreso...
381. **Alessandra:** - No, no, no, 300 no, perché se poi noi mettiamo 300, il triplo di 300... 150
382. **Vita:** - Che 150? 150, la metà tu dici? Forse 150 per x ...
383. **Alessandra:** - Forse..., qual è il quadruplo di 300? Qual è il quadruplo di 300?
384. **Vita:** - Sarebbe 300 diviso 4
385. **Alessandra:** - Il quadruplo..., 300 diviso 4 ...
386. **Sperimentatore:** - 75
387. **Alessandra:** - 75
388. **Vita:** - Viene 75? Perché se è il triplo, il triplo di 300...
389. **Alessandra:** - Capisco questo
390. **Vita:** - Capito?
391. **Alessandra:** - Il triplo, ci sono tutte queste soluzioni.
392. **Sperimentatore:** - Allora scriviamo...
393. **Alessandra:** - No, però il triplo di 300?
394. **Sperimentatore:** - 900
395. **Vita:** Il triplo?
396. **Sperimentatore:** - Sì
397. **Vita:** No, voglio dire...
398. **Sperimentatore:** - La terza parte, 100
399. **Alessandra:** - 100, quindi vanno da questo a 100.
400. **Sperimentatore:** - x va da 0 a?
401. **Alessandra:** - 100
402. **Vita:** - Perché è triplo...
403. **Alessandra:** - Volevo fare tutte le possibili soluzioni. Perché se non ci fosse qua può andare al massimo 75 e 75 già è compreso. Il massimo che si può scommettere è 100 per arrivare ad un totale del triplo di 300
404. **Vita:** - Sì
405. **Alessandra:** - Quindi...
406. **Sperimentatore:** - Allora scrivi, le possibili soluzioni sono...
(Scrivono $0 \leq x \leq 100$).
407. **Sperimentatore:** - Allora tornando al secondo quesito potete scrivere il problema o no?
408. **Vita:** - Se non è una specie così ...
409. **Alessandra:** - Perché è compreso 0 ed è compreso 100.

Le alunne riprendono il SECONDO QUESITO

410. **Vita:** - Se facciamo, per esempio, il secondo sarà pure così... Dobbiamo trovare, però qui ci sarà sicuramente una soluzione, queste forse vogliono tutte le soluzioni possibili invece qua ci dice una sola soluzione...
411. **Alessandra:** - Soluzione problema, non soluzione della..., soluzione problema. (*Risponde: "soluzione" per "situazione"*).
412. **Vita:** - Sì.
413. **Alessandra:** - Problema, quindi...

414. **Vita:** - Non possiamo fare, per esempio, scriviamo il testo del secondo...
415. **Alessandra:** - Non va bene, mettiamo il numero due.
416. **Vita:** - No il testo, il testo lo dobbiamo dare noi.
417. **Alessandra:** - Sì ma soltanto questo dobbiamo scrivere, questo è il problema.
418. **Vita:** - Infatti.
419. **Alessandra:** - Questa è la cosa...
420. **Vita:** - Se mettiamo, per esempio, un'altra cosa... Le possibili soluzioni di questo funziona.
421. **Sperimentatore:** - Di quale quesito state parlando, del primo o del secondo?
422. **Alessandra:** - Del secondo, sì ma qua è il problema...
423. **Sperimentatore:** - Il secondo non è necessario risolverlo...
424. **Alessandra:** - Dobbiamo fare un problema, un problema...
425. **Vita:** - Simile a quello di prima facciamo. Per esempio, Carlo e Lucia hanno 18 mele, per esempio, perché quello è complessivo...
426. **Alessandra:** - Carlo e ...
427. **Vita:** - No, prima lo possiamo vedere, prima di scrivere
428. **Alessandra:** - Carlo e Lucia...
429. **Vita:** - No
430. **Alessandra:** - Allora al mercato ci sono 18 mele, il negoziante le mette 6, quelle le mette un tot di mele di queste 18, le mette, cioè le vende, l'altro decide di metterle di riserva, che ne so... Il negoziante arriva e ne prende 3. Quante devono essere le mele totale che ci sono tra quelle che si è preso il negoziante e ...
431. **Vita:** - Va bene, mancano di 3 e quelle che ne so, che ha preso suo cugino...
432. **Alessandra:** - Sì ma no, 6 quelle di là...
433. **Vita:** - Sì ma se uno ne prende 13, ne restano 18? (*Silenzio*)
434. **Sperimentatore:** - Vita, secondo te, come lo faresti?
435. **Vita:** - Simile a questo lo farei...
436. **Sperimentatore:** - E come lo faresti?
437. **Vita:** - Per esempio, vincono 18 €e mettiamo che Carlo ha vinto, per esempio, il triplo...
438. **Alessandra:** - No, vince 6 €del denaro scommesso, perché qui noi sappiamo che il triplo e il quadruplo, pero qua noi abbiamo 6 e 3.
439. **Vita:** - Pero questo meno 3 sarà qualche cosa? C'è qualche cosa con questo meno 3?
440. **Alessandra:** - Certo questi non ci sono più, qua invece sono..., quant'è il denaro totale quindi quello più quello.
441. **Vita:** - Può essere che si sottraggono, quelli lì hanno in tutto, hanno...
442. **Alessandra:** - Ah!..., scommesso..., allora...
443. **Vita:** - ...qua vincono...
444. **Alessandra:** - ...qua perdono...
445. **Vita:** - Forse..., può essere?
446. **Alessandra:** - Allora, Carlo e Lucia perdono la somma complessiva di 18 € sappiamo che Carlo ne perde, ne...
447. **Vita:** - ...ne perde, per esempio, uno ne perde il triplo, l'altro ne perde 6, come si dice per esempio 6?
448. **Sperimentatore:** - Sestuplo
449. **Vita:** - Il sestuplo
450. **Alessandra:** - E 18 €.. Allora, Carlo perde 6 €del denaro scommesso, mentre Lucia...
451. **Vita:** - Il denaro scommesso è questo x. x e y sono le incognite di quanto hanno scommesso. Noi abbiamo 3 che sarebbe forse il triplo, uno ne perde il triplo, uno ne vince...
452. **Alessandra:** - Sì ma alla fine deve essere 18 e non ho capito perché... Se Carlo...
453. **Vita:** - Forse perché... Se noi, per esempio, alla y forse..., ci sarebbe per esempio che Lucia metta soldi forse, poi ne toglie il triplo...
454. **Alessandra:** - Allora Carlo e Lucia vincono la somma complessiva di 18 € Sappiamo che Carlo ne vince 6 €del denaro scommesso, mentre Lucia ne perde il triplo...
455. **Vita:** - Se giocano insieme com'è che uno vince e uno perde?
456. **Sperimentatore:** - Allora, come finisce?

457. **Vita:** - Non si può fare...
458. **Sperimentatore:** - Non siete molto lontane...
459. **Alessandra:** - C'era l'ipotesi di poco fa, quella quando dicevo "vince 6 €.."
460. **Vita:** - Non è 6 € perché il 6 è sestuplo ...
461. **Alessandra:** - Ah! Sì...
462. **Vita:** - ...perché x e y sono le incognite che rappresentano il denaro scommesso. Il sestuplo, per esempio, ne vince il sestuplo...
463. **Alessandra:** - 6 €..
464. **Vita:** - Se fosse meno ne perde...
465. **Alessandra:** - Appunto e quindi non possono giocare assieme, ma però la somma complessiva...
466. **Sperimentatore:** - Possono giocare in tavoli diversi, o no?
467. **Vita:** - Fare un problema è più difficile di svolgerlo, perché poi deve venire sempre questa equazione...
468. **Alessandra:** - E' lo stesso, è lo stesso...
469. **Sperimentatore:** - E allora?
470. **Alessandra:** - Carlo e Lucia perdono al lotto la somma complessiva di 300 € Sappiamo che Carlo ne perde il triplo, ne perde 6 € del denaro scommesso mentre Lucia ne perde 3 € del denaro scommesso...
471. **Vita:** - Sì perché forse, per esempio, Lucia ne ha messo forse di più soldi anche se hanno vinto forse ci verrebbe una perdita
472. **Alessandra:** - Carlo e Lucia perdono al lotto (*ripete mentre scrive*).
473. **Vita:** - No, mettiamo, per esempio, hanno 18 € Carlo e Lucia giusto? Uno...
474. **Alessandra:** - Com'è che nessuno vince? Aspetta, la somma complessiva di 18 € giusto? (*ripete mentre scrive*).
475. **Vita:** - Carlo perde 6 € del denaro scommesso, quindi loro 6 € del denaro che hanno scommesso. Può essere che hanno scommesso di più? Tipo che hanno perso ancora di meno, cioè non hanno perso tutti i soldi, può essere che di quello che hanno scommesso ne hanno perso una parte.
476. **Sperimentatore:** - E allora? Siete d'accordo o no? (*Silenzio*). Allora, qua c'è una differenza, che cosa indica questa differenza?
477. **Alessandra:** - Una sottrazione abbiamo...
478. **Sperimentatore:** - Sì
479. **Vita:** - Forse può essere che uno vince e l'altro perde...
480. **Alessandra:** - Infatti. Sì ma non può essere che uno vince sempre
481. **Vita:** - Se noi mettiamo, per esempio, o che perdono o che hanno 18 € complessivamente. Come possiamo dire, per esempio, che uno perde e uno vince?
482. **Sperimentatore:** - Forse uno ha fatto una giocata e l'altro ha fatto un'altra...
483. **Vita:** - E quindi forse Carlo ha 18 € giusto? e Lucia...
484. **Alessandra:** - Carlo ne ha perso 6 e...
485. **Vita:** - No, per esempio, Carlo ne ha vinto un sesto della somma che abbia messo e, invece, Lucia forse ne ha perso il triplo...
486. **Sperimentatore:** - E allora?
487. **Alessandra:** - Mettiamo che siano questioni...
488. **Vita:** - Ma sono questioni diverse
489. **Alessandra:** - Ma si questi due sono in comunità, hanno dei soldi in comune però giocano...
490. **Vita:** - Non può essere che hanno soldi in comune, non può essere che uno vince e uno perde se sono in comunità
491. **Alessandra:** - Sono questioni diverse, hanno soldi in comune, però fanno due giocate diverse, uno vince e l'altro perde...
492. **Vita:** - Se loro mettono i soldi in comune giocano assieme, perché devono giocare in tavoli diversi? Forse sono due soli, per esempio, la somma complessiva forse è di 18 € uno vince il sesto, invece quello ne perde il triplo. Sono diversi?
493. **Alessandra:** - Secondo me, sì
494. **Sperimentatore:** - E allora, concludendo che cosa dovete scrivere?

495. **Alessandra:** - Carlo e Lucia giocano al lotto la somma complessiva di 18 €
496. **Vita:** - No la somma complessiva, non sono assieme, secondo me, questi, perché non può essere che uno perde e uno vince la somma complessiva di 18 €
497. **Alessandra:** - Carlo e Lucia hanno, cioè ognuno ha 18 € giusto?
498. **Vita:** - Sì
499. **Alessandra:** - Deve fare in modo che scommettendo 6 € Lucia... 6 per 3 è 18...
500. **Vita:** - Non possiamo, per esempio, mettere invece somme diverse. Carlo e Lucia, la somma complessiva di 18 €
501. **Alessandra:** - Non può essere...
502. **Vita:** - Se c'era più se poteva fare che vincevano assieme 18 € ma come c'è meno, c'è un meno, forse si dovrebbe mettere...
503. **Sperimentatore:** - Andate troppo nei dettagli delle cose, non interessa se si sono implicati gli stessi numeri o diversi, state inventando un problema...
504. **Vita:** - Facciamo quello che ci ho detto io, scrivi...
505. **Alessandra:** - La somma complessiva di 18 € Sappiamo che Carlo perde 6 € del denaro scommesso perché poi c'è la sottrazione, vince l'altro perde...
506. **Vita:** - Come li vince questi soldi? Perché è la somma complessiva e perde?
507. **Alessandra:** - In un primo momento vincono 6 € ognuno
508. **Vita:** - Non c'è primo momento, complessivamente devi fare, non in un primo momento
509. **Alessandra:** - Sì ma nella serata è, nell'arco della serata, e poi alla fine ti ritrovi quello, giusto? In un primo momento vincono 6 € del denaro scommesso, poi perdono 3 €
510. **Vita:** - Forse sarebbe che, per esempio, Carlo non mette, facciamo quello, per esempio, che non mette proprio nessun euro, capisci? Però come si scrive?
511. **Alessandra:** - Determina le somme di denaro...
512. **Vita:** - Vincono complessivamente, hanno vinto complessivamente 18 € Carlo, per esempio, ha vinto, per esempio, il sesto della somma che aveva messo, invece, Luigi, per esempio, meno 3, per esempio, y dovrebbe essere meno 3, che hanno vinto...
513. **Alessandra:** - Allora guarda com'è: Carlo e Lucia vincono al lotto la somma complessiva di 18 €. In un primo momento vincono 6 € del denaro scommesso, poi ne perdono 3 € sempre del denaro scommesso tra parentesi, giusto? In un secondo momento ne perdono 3 € Determina le somme di denaro che Carlo e Lucia hanno giocato. E poi: Quante sono le possibili soluzioni? (*Riscrivono il testo*).
514. **Vita:** - Non sono 3 € è il sesto ormai e quello è il triplo
515. **Sperimentatore:** - Allora scrivete
516. **Alessandra:** - (*Si correggono*) Sei volte del denaro scommesso e tre volte
517. **Sperimentatore:** - Va bene
518. **Vita:** - Ma non è così, per tre volte, aspetta ...
519. **Sperimentatore:** - E poi...
520. **Vita:** - No, niente...
521. **Alessandra:** - Dobbiamo mettere "determina le somme di denaro", perché poi fa sempre lì, non è che posso fare, queste vanno da questo a questo, perché questi qua poi come fanno?
522. **Sperimentatore:** - E allora...
523. **Alessandra:** - Ah! Forse, per esempio, e va bene, può andare determina: "Determina..."
524. **Vita:** - No, mettiamo: "Quante possibili soluzioni?"
525. **Alessandra:** - ...le somme di denaro che Carlo e Lucia hanno giocato"
526. **Vita:** - E noi non le sappiamo determinare..., ma le possibili soluzioni... qualunque sono, quante sono le possibili soluzioni...
527. **Alessandra:** - Può essere che sono infinite, che non c'è una somma di denaro ben precisa
528. **Vita:** - E va bene, scriviamo...
529. **Sperimentatore:** - Allora, andiamo al numero tre.

TERZO QUESITO

530. **Alessandra:** - Equazione di primo grado con due incognite e quella, invece, un'equazione della retta oppure del fascio...

531. **Sperimentatore:** - Dovete dire la prima idea che vi viene in mente quando vedete le equazioni...
532. **Alessandra:** - Equazione di primo grado con due incognite (*per la prima*).
533. **Vita:** - Oppure può essere, aspetta... No così, potrebbe essere una parabola, una parabola no, non c'entra...
534. **Alessandra:** - ... è al quadrato...
535. **Vita:** - Poi, circonferenza non è...
536. **Alessandra:** - Dobbiamo, per esempio, spiegare è una curva...?
537. **Vita:** - Intanto scriviamo equazione di primo grado con due incognite.
538. **Sperimentatore:** - Quando vedete le equazioni dovete dire la prima idea che vi viene in mente ...
539. **Alessandra:** - Questa è un fascio di rette proprio (*per la seconda*).
540. **Vita:** - Sì. Aspetta...
541. **Sperimentatore:** - Sì o no?
542. **Alessandra:** - Sta rappresentando la...
543. **Vita:** - Sì ma anche qua...
544. **Alessandra:** - Va bene tu hai detto che ha i numeri, come $mx + n$, questo qua, questo è...
545. **Vita:** - Proprio
546. **Sperimentatore:** - Allora andiamo al numero 4
547. **Vita:** - Ancora un problema?
548. **Sperimentatore:** - Sì.

QUARTO QUESITO

549. **Alessandra:** - Una persona per poter usufruire di un telefono fisso installato presso di un'altra, pattuisce con questa ultima di pagare mensilmente 5 € più 2 € per ora di telefonate effettuate. Detto: x il numero di ore mensili di telefonate effettuate e y la somma complessiva pagata mensilmente. Una persona per poter usufruire di un telefono fisso installato presso di un'altra, pattuisce con questa ultima di pagare mensilmente 5 € più 2 € per ora di telefonate effettuate. (*Legge e rilegge il testo del problema*).
550. **Vita:** - 5 € ce li dà e 2 € all'ora.
551. **Alessandra:** - Una persona per poter usufruire di un telefono fisso installato presso di un'altra, pattuisce con questa ultima di pagare mensilmente 5 €. Quindi... (*Rilegge il testo del problema*).
552. **Vita:** - Sì, spiega quale tipo di relazione intercorre tra x e y . Sia per esempio che x ... Allora, x ...
553. **Alessandra:** - x è il numero delle ore da fare. Prima dobbiamo fare x
554. **Vita:** - Mentre y
555. **Alessandra:** - Allora, x è il numero delle ore mensili telefonate effettuate
556. **Vita:** - Forse questa cosa non si può fare
557. **Alessandra:** - y è la somma complessiva pagata mensilmente. Intanto, c'è una riga per disegnare?
558. **Vita:** - Va bene, niente fa.
559. **Sperimentatore:** - A mano, a mano. (*Disegnano il diagramma cartesiano*)
560. **Alessandra:** - x , che rappresenta x ?
561. **Vita:** - Ore mensili di telefonate, giusto?
562. **Alessandra:** - Sì.
563. **Vita:** - E y ...
564. **Alessandra:** - Quindi, y la somma complessiva...
565. **Vita:** - La somma complessiva, metti ore più 5 € che sarebbe la somma complessiva ore più...
566. **Alessandra:** - Sì ore più 5 €
567. **Vita:** - La somma complessiva sarebbe 5 € e 0
568. **Alessandra:** - No, 0 delle ore di telefonate, 1 e 2
569. **Vita:** - Aspetta, allora... E x ..., va avanti... (*Rilegge il testo del problema*)
570. **Alessandra:** - Più 5 €..

571. **Vita:** - Più 2 € per le ore di telefonate
572. **Alessandra:** - 1, 2, 3, 4 e 5
573. **Vita:** - Perché 5, tu devi sommare 5 più l'euro
574. **Alessandra:** - y è la somma complessiva pagata mensilmente
575. **Vita:** - E y è la somma complessiva, giusto?
576. **Alessandra:** - E' 5 €
577. **Vita:** - No, non è 5 € la somma complessiva, la somma complessiva sarebbe 5 € più 2 € 2 € per ora. Se un'ora sarebbe 7 € sarebbe...
578. **Alessandra:** - Per 2 ore
579. **Vita:** - Per esempio se..., allora pattuisce con questo e paga 5 € 5 € più 2 € sarebbe 7 € 7 € per esempio, per un'ora. Giusto? Hai capito?
580. **Alessandra:** - Sì. Quindi, ho sbagliato il grafico, lo faccio di nuovo qua
581. **Sperimentatore:** - Va bene, non ti preoccupare
582. **Vita:** - Per esempio, 7 €..
583. **Alessandra:** - ... e qua c'è uno... Qua è il primo punto, intanto...
584. **Vita:** - Hai fatto il 7?
585. **Alessandra:** - Sì
586. **Vita:** - Il 7 è un'ora
587. **Alessandra:** - Sì
588. **Vita:** - Forse con il grafico, forse con il grafico...
589. **Alessandra:** - Sì
590. **Vita:** - Non si potrebbe fare in altro modo, senza grafico? (*Sorridono*).
591. **Alessandra:** - Ricominciamo?
592. **Vita:** - Secondo me, per esempio a $7 \rightarrow 14$
593. **Alessandra:** - Al $7 \rightarrow 1$
594. **Vita:** - Ah! sì, al $7 \rightarrow 1$
595. **Alessandra:** - E questo è il primo punto.
596. **Vita:** - Mettici a $7 \rightarrow 1$, però.
597. **Alessandra:** - Aspetta, aspetta 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. A $7 \rightarrow 1$, è qui.
598. **Vita:** - Poi metti 2
599. **Alessandra:** - 8, 9, ..., 14.
600. **Vita:** - Scrivi 14
601. **Alessandra:** - Allora dobbiamo fare mensilmente, però...
602. **Sperimentatore:** - A $1 \rightarrow 7$, a 2?
603. **Alessandra:** - A $1 \rightarrow 7$, a $2 \rightarrow 14$
604. **Sperimentatore:** - 14. E come avete trovato il 14?
605. **Alessandra:** - Perché, allora se x è uguale a 1, se noi mettiamo quindi un'ora quindi possiamo vedere appunto che si paga...
606. **Vita:** - Un'ora è 7, no 2 € se poi dobbiamo sommare 5 € che ci paga, sono 7 €
607. **Sperimentatore:** - Sono 7 e poi per due ore?
608. **Vita:** - Per due ore, sarebbe il doppio, 14.
609. **Alessandra:** - Aspetta non ho capito. Ah! forse proprio così è.
610. **Vita:** - Mensilmente 5 € non è ad esempio a ora. Mensilmente 5 € più 2 ore.
611. **Alessandra:** - Mensilmente quindi sono 7 € in tutto.
612. **Sperimentatore:** - Per un'ora.
613. **Alessandra:** - Per un'ora....
614. **Sperimentatore:** - Per due ore?
615. **Vita:** - Se un'ora è di 7, giusto? Per un'ora paghi 7 € per due ore ne paghi 14, no?
616. **Alessandra:** - 5 più due...
617. **Vita:** - Sai come forse è? Tu paghi, per esempio, 2 € all'ora, in due ore paghi, per esempio, 4 € poi mensilmente sarebbe, per esempio, per 30
618. **Alessandra:** - 30...
619. **Vita:** - La somma complessiva è, per esempio 30, per 30 più 5 € perché è mensilmente. Allora...
620. **Alessandra:** - Aspetta, facciamo così, intanto svolgiamolo
621. **Vita:** - Questo è sbagliato..., perché non è detto mensilmente.

622. **Alessandra:** - Facciamo di nuovo il grafico?
623. **Sperimentatore:** - Se lo volete fare. Comunque, potresti lasciarlo così...
624. **Alessandra:** - Allora...
625. **Vita:** - Prima si sbaglia e poi
626. **Alessandra:** - Sì ma dobbiamo fare...
627. **Vita:** - Entro un'ora
628. **Alessandra:** - ...ma non ci va qui..., se noi facciamo 30, per 30
629. **Vita:** - Va bene lo mettiamo, per esempio, ci mettiamo 30 non è che deve andare per forza 30, ci lo metti tu 30, lo devi scrivere, niente fa.
630. **Alessandra:** - Mettiamo, ore...
631. **Vita:** - 30
632. **Alessandra:** - Ore, ore di telefonate, giusto? y è la somma complessiva, giusto?
633. **Vita:** - Metti per esempio un'ora paghi 2 € 2 ore paghi 4 €
634. **Alessandra:** - 1 uguale a 2
635. **Vita:** - Qua ci devi mettere uno
636. **Alessandra:** - Uno, vedi un euro
637. **Vita:** - No, 2 € In un'ora tu paghi 2 € qua è scritto... Allora, più 2 € per ora
638. **Alessandra:** - 2 € per ora, giusto è 1 € 2
639. **Vita:** - Giusto, giusto. Un'ora 2 € per 2 ore
640. **Alessandra:** - Paghi 4 €
641. **Vita:** - Sì. (*Silenzio*). In due ore paghi 4 € Poi mensilmente che sarebbe 30, la somma complessiva pagata mensilmente e il numero di ore mensili
642. **Alessandra:** - Allora...
643. **Vita:** - Il numero di ore mensili.
644. **Alessandra:** - ...che paghiamo per mese.
645. **Vita:** - 30, 30 giorni, per esempio
646. **Alessandra:** - Per ore, 30 ore
647. **Vita:** - Sì, 30 ore che, per esempio, sarebbero 60, 60 più 5 fa 65 questo. Giusto?
648. **Alessandra:** - Non mi convince
649. **Vita:** - Questo giusto è
650. **Alessandra:** - Se dice: "Determina la somma complessiva che viene pagata mensilmente", un mese è fatto da 30 giorni come potrebbe essere fatto di 31 oppure di 28.
651. **Sperimentatore:** - Sì
652. **Vita:** - E noi dobbiamo prendere ad esempio, prendiamo ad esempio come riferimento...
653. **Alessandra:** - Facciamo 28, facciamo 31 o 28 di Febbraio.
654. **Sperimentatore:** - E quante ore potresti parlare al mese?
655. **Vita:** - E' variabile
656. **Alessandra:** - Dipende dai giorni la cosa
657. **Vita:** - No, aspetta se il giorno ha 24 ore, giusto?
658. **Alessandra:** - Sì ma tu che fai 24 ore giusto? 12 ore sto a ... In un giorno di 24 ore parli 12 ore al telefono, come fai?
659. **Vita:** - No, se tu parli per esempio, aspetta...
660. **Alessandra:** - E' variabile.
661. **Vita:** - Ma con questo "variabile"...
662. **Alessandra:** - E' tutto, è tutto variabile...
663. **Vita:** - Problemi variabili fecero.
664. **Alessandra:** - Proprio qua è il problema. (*Ridono*). Perché non possiamo sapere quanto possiamo parlare in un'ora c'è quando non telefoniamo proprio, c'è quando telefoniamo per..., per 5 ore, giusto?
665. **Sperimentatore:** - Sì, e allora cosa dite?
666. **Vita:** - Determina la somma complessiva pagata mensilmente. (*Legge il testo*).
667. **Alessandra:** - Quante sono le possibili soluzioni? (*Ridono*)
668. **Vita:** - E' quindi si deve parlare...
669. **Alessandra:** - Sono della probabilità questi problemi?
670. **Sperimentatore:** - No, poi vi spiego cosa sono...
671. **Vita:** - Questo è giusto, però...

672. **Alessandra:** - Vicine ci siamo? Vicine ci siamo?
673. **Sperimentatore:** - Allora...
674. **Vita:** - Stabilire quale tipo di relazione intercorre tra x e y . (*Legge il testo*)
675. **Alessandra:** - Appunto questo qua di nuovo, questo qua...
676. **Vita:** - Non è valido questo.
677. **Alessandra:** - ...relazione tra x e y ...
678. **Vita:** - ...determina la somma complessiva pagata mensilmente..., la somma complessiva... (*Legge il testo*)
679. **Alessandra:** - Però non sappiamo quante ore al telefono ci sta...
680. **Vita:** - ...e il numero delle ore mensili... di telefonate effettuate.
681. **Alessandra:** - Quante sono le possibili soluzioni? (*Continuano a leggere il testo*).
682. **Sperimentatore:** - E allora, che cosa chiede all'inizio?
683. **Alessandra:** - Rappresentarla graficamente nel piano cartesiano
684. **Vita:** - Stabilire il tipo di relazione.
685. **Sperimentatore:** - Graficamente che cosa verrebbe?
686. **Alessandra:** - Sarebbe il numero delle ore.
687. **Sperimentatore:** - Provate a fare un grafico di questo...
688. **Alessandra:** - ... e quindi , ci sono 3, giusto? Qui è 9. (*Silenzio*). Qua continuerà il grafico sarà sempre elevato, continuerà sempre durante il mese a diventare sempre più...
689. **Vita:** - Quindi, va bene aumenterà la somma...
690. **Alessandra:** - Se aumenta il mese aumenta la somma...
691. **Vita:** - Aumenta la somma e qua mettici 5 € mensilmente.
692. **Sperimentatore:** - E che cosa è il grafico?
693. **Alessandra:** - Una retta
694. **Sperimentatore:** - Fate il grafico
695. **Vita:** - Forse sarebbe che..., la somma complessiva pagata mensilmente..., 30 giorni .
696. **Alessandra:** - Dobbiamo fare adesso per 30
697. **Vita:** - Un giorno è formato da 24 ore
698. **Alessandra:** - Sì, ma non sappiamo quanto può stare una persona al telefono.
699. **Vita:** - Se tu per esempio 2 ore, 3 ore... se tu, per esempio, metti 24 ore che è un giorno... Per esempio, mettiamo..., però ma non sappiamo se è giusto 30 € al mese, poi alla somma tu aggiungi più 5 € perché mensilmente si deve aggiungere 5 € perché deve essere la somma complessiva... Però da quanto è questo mese?
700. **Sperimentatore:** - Scegliete voi
701. **Vita:** - Ah! possiamo dare noi i giorni al mese?
702. **Sperimentatore:** - Sì
703. **Vita:** - Mettiamo a caso che il mese è di 28 giorni, giusto? Se un giorno è, per esempio, di 24
704. **Alessandra:** - Allora, 30 è di più, mettiamo uno di 30
705. **Vita:** - 30 ad esempio, 30 giusto? 30 giorni, un giorno è di 24 ore
706. **Alessandra:** - Ogni giorno 24 ore. Stai facendo una cosa, tu...
707. **Vita:** - Sì ma ti dico in un giorno 24 ore, giusto? E sarebbe che noi, per esempio, mettiamo nel grafico qua 24 ore, mettiamo a caso che sia 24 ore... 24 ore...
708. **Alessandra:** - E' sbagliato. Tu che fai per 30 giorni e vai a mettere 24 ore...
709. **Vita:** - Per ogni ora è forse, no?
710. **Sperimentatore:** - Il problema considera ogni ora, non è specificato quante sono le ore
711. **Alessandra:** - Infatti, non è specificato, capito?
712. **Sperimentatore:** - Dovresti trovare il valore massimo
713. **Vita:** - Sì, tutte le ore vorrei calcolare, giusto? Per esempio 24 ore se calcoliamo quanto è la somma complessiva.
714. **Alessandra:** - E' 30 giorni
715. **Vita:** - E' sarebbe la somma complessiva è, per esempio, ogni giorno, poi la facciamo per 24, la facciamo per 30 giorni e aggiungiamo più 5 €
716. **Sperimentatore:** - E questo sarebbe la somma...
717. **Vita:** - Per esempio, per esempio...
718. **Alessandra:** - Per ogni mese

719. **Vita:** - Sì, per esempio, prima lo facciamo per 24 ore che sarebbe un giorno.
720. **Alessandra:** - Quindi è sempre come quella che...
721. **Vita:** - Poi dobbiamo fare, per esempio sì come, per esempio, questo... sappiamo che...
722. **Alessandra:** - Allora, dobbiamo dire che si uno è fatto da 2 ore 2 allora 24, no?
723. **Vita:** - Ci vuole un grafico?
724. **Sperimentatore:** - Il grafico è orientativo, per poi rispondere alle altre domande
725. **Alessandra:** - Allora, intanto dobbiamo vedere per 48. (*Fanno i calcoli*).
726. **Vita:** - 48 € per 24, 48 € e questo sarebbe un giorno.
727. **Alessandra:** - Sì
728. **Vita:** - Un giorno, per esempio se tu metti...
729. **Alessandra:** - 30
730. **Vita:** - Se tu ora fai, metti per esempio, questo sono le ore, 24 ore questo è messo. Se tu, per esempio, fai un altro metti in un grafico poi, metti 30 giorni, giusto? Se tu, per esempio, metti qua... questo è per ore il grafico. Se tu per esempio prendi 30 giorni devi mettere, per esempio, 48 € che sarebbe per un giorno, 48 per 30 più 5 €
731. **Alessandra:** - Ma, secondo me... il massimo è di 24 ore.
732. **Vita:** - Ma, così non è giusto per esempio perché...
733. **Alessandra:** - 24 per 30. Dobbiamo calcolare per 30 giorni quante ore ci sono?
734. **Sperimentatore:** - 24 per 30.
735. **Alessandra:** - No, aspetta se 24 ore è in giorno di quante ore?
736. **Vita:** - Di quante ore è formato il mese?
737. **Sperimentatore:** - 720
738. **Alessandra:** - 320
739. **Sperimentatore:** - 720
740. **Vita:** - 720, poi sarebbe
741. **Alessandra:** - 720 l'ora
742. **Vita:** - No, 720 ore ha detto che è un mese.
743. **Alessandra:** - Un mese è 720 ore
744. **Sperimentatore:** - 30 per 24 è uguale a 720.
745. **Vita:** - 720, metti un attimo 720
746. **Alessandra:** - Facciamo che è qui, giusto?
747. **Vita:** - 720, giusto? Se 24 era 48 €..
748. **Alessandra:** - 720, dobbiamo vedere a quanto...?
749. **Vita:** - ...per 2 più 5 €..
750. **Alessandra:** - Perché per 2?
751. **Vita:** - Perché era 2 € la somma...
752. **Alessandra:** - All'ora, all'ora...
753. **Vita:** - No, Alessandra perché...
754. **Alessandra:** - 720
755. **Vita:** - Come abbiamo fatto, sempre così abbiamo fatto, qua veniva due, due, 24 per 2 e 720 per 2 più 5 € no?
756. **Alessandra:** - Più 5 €
757. **Vita:** - Più 5 € Sarebbe 1440 più 5 € 1445 €
758. **Alessandra:** - Può essere?
759. **Sperimentatore:** - E questo, cosa sarebbe?
760. **Vita:** - Questo sarebbe la somma complessiva di un mese.
761. **Sperimentatore:** - Se parla al telefono...
762. **Alessandra:** - 24 ore, ma non è sempre così.
763. **Vita:** - Se parla 24 ore su 24 è questa la somma complessiva.
764. **Sperimentatore:** - Sarebbe la somma...?
765. **Vita:** - La somma di un mese
766. **Alessandra:** - Quindi sempre con i limiti si può fare non essendo...
767. **Vita:** - Intanto questo lo metti nel grafico, questo dato e poi se, per esempio, parla 24 ore su.
768. **Alessandra:** - Mettiamo qua sicuro dovrebbe venire qua sopra, non possiamo disegnarlo.
769. **Sperimentatore:** - Il grafico è orientativo per poi rispondere alle domande.

770. **Vita:** - Poi sarebbe... determina la somma complessiva pagata ed il numero delle ore mensili...
771. **Sperimentatore:** - E allora?
772. **Vita:** - Le possibili soluzioni sono, dipende sempre dipende da quante ore parla al telefono.
773. **Alessandra:** - E non si sa questo
774. **Vita:** - Qua abbiamo messo 24 ore su 24, Alessandra, questa somma...
775. **Alessandra:** - E quindi dobbiamo mettere sempre là, quella che ne parlano, 24 e dobbiamo mettere quindi tutte le altre...
776. **Sperimentatore:** - Scrivete allora quello che avete detto.
777. **Vita:** - Queste soluzioni prima...
778. **Alessandra:** - Che possono andare per...
779. **Vita:** - Per x sarebbe il numero delle ore, giusto? (*Silenzio*). Se sono, per esempio, 24 ore che sarebbe un giorno...
780. **Sperimentatore:** - Scrivete quello che avete detto.
781. **Alessandra:** - Non sappiamo se è giusto.
782. **Vita:** - Ma è giusto questa cosa così?
783. **Sperimentatore:** - Allora, scrivete la vostra conclusione.
784. **Alessandra:** - Sempre come quella che abbiamo fatto?
785. **Sperimentatore:** - Sì quello che avete detto alla fine, scrivetelo così resta qualcosa scritta.
786. **Alessandra:** - Scriviamo...
787. **Vita:** - Scriviamo questo così? Quest'ultima cosa?
788. **Sperimentatore:** - Sì
789. **Alessandra:** - Allora, per quindi, per un mese...
790. **Vita:** - ...la somma complessiva...
791. **Alessandra:** - No totale 720 ore le pagano 1445 €
(Scrivono: "*Per un mese (totale 720 ore) si pagano 1445 €*").
792. **Vita:** - Per un mese...
793. **Alessandra:** - Per un'ora...
794. **Vita:** - Scrivi questa cosa...
795. **Alessandra:** - Va bene si capisci... Il totale di ore per un'ora si paga...
796. **Vita:** - Si paga....
797. **Alessandra:** - 7 €
798. **Vita:** - No, non è 7 € aspetta... è sbagliato 7 €
799. **Alessandra:** - Perché?
800. **Vita:** - Per un'ora è 2 € perché 7 €?
801. **Alessandra:** - 2 € più però 5
802. **Vita:** - No, no perché 5 € vengono messe al mese, no? Mensilmente 5 € paga Alessandra, in un'ora paga 2 € poi arrivando ad un mese
803. **Alessandra:** - Quindi non sono 7 €
804. **Vita:** - Paga 5 €
805. **Alessandra:** - Sì. Sempre l'incognita c'è
806. **Vita:** - Sì è normale... (*Silenzio*).
807. **Alessandra:** - No, bisogna vedere...
808. **Vita:** - No per x, per x per esempio un'ora y ... così è. Perché x rappresenta le ore e y rappresenta la somma.
809. **Sperimentatore:** - Sì
810. **Vita:** - Se tu metti, per esempio, per x 1 ora metti y è uguale...
811. **Alessandra:** - Per x questa cosa..., uguale... Non è che c'è per x
812. **Vita:** - Per, per, scrivi, per x un'ora, mettici y uguale a 2 ore
813. **Alessandra:** - 2 € appunto
814. **Vita:** - Per y, per x giusto, uguale a 2 ore y uguale a 4 €
815. **Alessandra:** - Per x
816. **Vita:** - Per x, giusto, 2 ore, uguale a 2 ore, y uguale a 4 €
817. **Alessandra:** - Per x uguale a...
818. **Vita:** - 720 ore y è 1445 €

819. **Alessandra:** - E che relazione c'è ora tra...?
820. **Vita:** - E' il doppio sempre
821. **Alessandra:** - Compreso
822. **Vita:** - Aspetta un attimo...
823. **Sperimentatore:** - Allora, cosa stai calcolando?
824. **Alessandra:** - Se sbaglio
825. **Sperimentatore:** - Allora, che cosa calcoli?
826. **Vita:** - Di sicuro che questo è così?
827. **Alessandra:** - Non lo so
828. **Vita:** - Facciamo di nuovo questo calcolo
829. **Sperimentatore:** - E allora abbiamo finito?
830. **Alessandra:** - Per y mentre x (*Scrivono* $2 \text{ €} \leq y \leq 1445 \text{ €}$ $1 \text{ ora} \leq x \leq 720 \text{ ore}$).
831. **Sperimentatore:** - Va bene...

CAPITOLO 5: CONCLUSIONI FINALI

L'analisi storica realizzata nel primo capitolo sulla costruzione del linguaggio algebrico ha permesso di mettere in evidenza le principali concezioni, i procedimenti precursori, i passaggi da un concetto all'altro ed, in particolare, i passaggi attraverso i livelli linguistici delle diverse fasi: retorica, sincopata e simbolica. A partire da questo studio abbiamo formulato delle conclusioni applicabili allo studio degli ostacoli epistemologici che incontrano gli alunni nelle situazioni di apprendimento del linguaggio algebrico. Quelle che abbiamo ritenuto importante per la realizzazione del lavoro sperimentale sono le seguenti: i passaggi tra algebra retorica e algebra simbolica sono stati molto lenti, si passa da certi *nomi* per denotare l'incognita e certe relazioni, alle *abbreviazioni di queste parole*, ai *codici intermedi* fra linguaggio retorico e sincopato ed infine ai *simboli*. Nel processo di elaborazione di un simbolismo algebrico corretto sintatticamente ed efficiente operativamente, si osserva l'abbandono progressivo della lingua naturale come mediatore di espressione. Nella fase sincopata i linguaggi naturale, aritmetico e geometrico si utilizzano come supporto al linguaggio algebrico in via di elaborazione. Questi linguaggi —semanticamente più ricchi di quello algebrico— consentono di interpretare adeguatamente il problema da risolvere, di ottenere la sua soluzione, di formulare le regole e di giustificare i passaggi effettuati algebricamente. Perché precisamente nella costruzione del linguaggio algebrico esistono due livelli di concepire la generalità di un metodo: uno riguardante la fattibilità di applicarlo ad una pluralità di casi specifici, e l'altro relativo la possibilità di esprimerlo attraverso il linguaggio dell'algebra simbolica.

E' interessante osservare che l'aritmetica svolge un ruolo di supporto/ostacolo all'evoluzione dell'algebra. Perché nella fase di transizione tra il pensiero aritmetico e il pensiero algebrico, certi ostacoli a livello aritmetico possono ritardare lo sviluppo del linguaggio algebrico. Ma si verifica anche che l'introduzione di nuove strategie e dei nuovi contenuti algebrici possono eclissare le conoscenze aritmetiche precedenti (Cfr. Malisani, 1990 e 1993).

Dall'analisi dei diversi procedimenti risolutivi si ricava che i registri rappresentativi visuale sono presenti in quelli che utilizzano il linguaggio geometrico, ma essi vengono anche richiamati in alcuni metodi di tipo aritmetico o analitico. Nelle fasi retorica e

sincopata, il concetto di uguaglianza varia in base ai procedimenti adottati, può rappresentare: il risultato di un'operazione aritmetica, l'equivalenza di figure piane, l'equivalenza tra due modi di esprimere la stessa quantità o "l'uguaglianza condizionata" tra due membri di un'equazione.

Le nozioni di incognita e di variabile come "cosa che varia" hanno un'origine e un'evoluzione totalmente differenti. Il concetto di variabile si sviluppa lentamente passando dalla relazione iniziale tra i numeri inclusi nelle tabelle, alle quantità dinamiche relazionate attraverso una formula, alla variabile connessa a quantità continue nello studio della fisica, alle curve descritte in termini cinematica, alla relazione tra variabili che conduce finalmente al concetto di funzione. L'incognita, invece, ha la sua origine nella risoluzione di problemi che richiedono il calcolo di una o più quantità. La preponderanza di questa nozione nei procedimenti risolutivi è notevole fino al 600.

Oggi l'idea di variabile come numero qualsiasi ci sembra così ovvia e semplice che risulta difficile capire perché tardò così tanto ad affermarsi. Ma se riflettiamo un momento sul processo di pensiero che viene attivato, scopriamo che si tratta di un pensiero in termini funzionale e richiede perciò l'abilità di pensare simultaneamente su intere famiglie di numeri piuttosto che su una qualsiasi quantità specifica, nonché sulle reciproche relazioni tra famiglie di numeri (Arzarello *et alii*, 1994).

Diversi studi ritengono che il concetto di variabile rappresenta un punto di transizione critico (Matz, 1982; Wagner, 1981, 1983). Questo concetto è complesso perché si usa con significati diversi in differenti situazioni. La sua gestione dipende dal particolare modo di utilizzarlo nella risoluzione di problemi. La nozione di variabile può assumere una molteplicità di aspetti: numero generalizzato, incognita, "cosa che varia", segno del tutto arbitrario, registro di memoria, ecc. Usiskin (1988) ritiene che la pluralità di concezioni sia precisamente la causa per cui questa nozione diventa difficile di definire e gli alunni, possibilmente, incontrano delle difficoltà nello studio dell'algebra.

La ricerca sperimentale del secondo capitolo ha come finalità studiare alcune caratteristiche del periodo di transizione tra il linguaggio aritmetico e il linguaggio algebrico. Si pretende analizzare se le diverse concezioni di variabile vengono evocate dagli alunni nella risoluzione di problemi e se i procedimenti in lingua naturale e/o in linguaggio aritmetico prevalgono come strategie risolutive, in assenza di adeguata padronanza del linguaggio algebrico.

Sono state messe a punto delle situazioni a-didattiche sulla risoluzione del quadrato magico: “completare il quadrato inserendo i numeri mancanti, in modo che la somma dei numeri di ciascuna riga, colonna o diagonale sia sempre la stessa”. Hanno partecipato alla sperimentazione 27 alunni di prima media e 39 di prima liceo psicopedagogico.

Dall’analisi qualitativa e quantitativa dei dati si ricava che il simbolo “ a ” del quadrato magico può assumere aspetti ben diversi per gli alunni di 11 e 14 anni: costante, costante non negativa, valore numerico, variabile, incognita e simbolo senza alcun valore. La varietà di concezioni evocate dipende dallo sviluppo individuale del pensiero algebrico (più numerose negli alunni di 14 anni) ed al particolare modo di utilizzare “ a ” nella risoluzione del problema. Quindi gli alunni richiamano le diverse concezioni di variabile anche in assenza di un’adeguata padronanza del linguaggio algebrico (ipotesi 1).

E’ interessante osservare che, gli alunni di prima media utilizzano strategie risolutive in lingua naturale o in linguaggio aritmetico. Il linguaggio algebrico è pressoché assente perché essi non sono riusciti ad operare con il valore letterale “ a ”. Gli studenti di prima superiore hanno applicato il procedimento aritmetico o il metodo aritmetico-algebrico e hanno eseguito calcoli algebrici anche se con qualche errore. Gli alunni non hanno utilizzato nessuna delle strategie algebriche previste nell’analisi a-priori. Quindi i procedimenti in lingua naturale e/o in linguaggio aritmetico prevalgono come strategie risolutive, in assenza di un’appropriata padronanza del linguaggio algebrico (ipotesi 2). Da questo punto di vista, si registra una chiara corrispondenza tra sviluppo individuale e sviluppo storico.

I lavori sperimentali presentati nel terzo e quarto capitolo hanno l’obiettivo di studiare l’aspetto relazionale-funzionale della variabile nel problem-solving, considerando i contesti semiotici dell’algebra e della geometria analitica. Si pretende analizzare se la nozione di incognita interferisce con l’interpretazione dell’aspetto funzionale e se la lingua naturale e/o il linguaggio aritmetico prevalgono come sistemi simbolici in assenza di adeguata padronanza del linguaggio algebrico. Si vuole anche indagare quali difficoltà trovano gli alunni per interpretare il concetto di variabile nel processo di traduzione dal linguaggio algebrico a quello naturale.

Per effettuare questa ricerca abbiamo messo a punto un questionario composto di quattro quesiti sull’equazione lineare in due variabili. Nel primo e nel quarto la variabile assume l’aspetto relazionale-funzionale nel contesto di una situazione problematica

concreta. Nel primo problema l'alunno è libero di scegliere il contesto risolutivo nel quarto, invece, lo si costringe ad operare nell'ambito della geometria analitica. Il secondo quesito chiede la formulazione di un problema che possa risolversi utilizzando un'equazione data e il terzo pretende l'interpretazione di due relazioni di uguaglianza: $ax + by + c = 0$ e $y = mx + q$.

La sperimentazione è stata realizzata in due fasi. Alla prima hanno partecipato 111 alunni di 16-18 anni del Liceo Sperimentale che hanno risolto il questionario individualmente. La seconda sperimentazione è stata realizzata con quattro alunne di terza liceo scientifico che hanno lavorato a coppie.

Dall'analisi dei dati si evince che le strategie utilizzate per risolvere il primo problema sono le seguenti:

- Ø *procedimento in lingua naturale*: l'alunno aggiunge un dato e trova una soluzione particolare che verifica l'equazione. Questo procedimento conduce ad una soluzione unica ed è quello più utilizzato dagli studenti. La concezione di variabile predominante è quella di incognita.
- Ø *metodo per tentativi ed errori in lingua naturale e/o in linguaggio semi-formalizzato*: generalmente aritmetico, conduce a più soluzioni. Gli alunni richiamano la dipendenza delle variabili, ma non compare ancora una concezione forte dell'aspetto relazionale-funzionale.
- Ø *strategia pseudo-algebrica*: è poco utilizzata dagli alunni e soltanto in alcuni casi conduce alla soluzione corretta del problema.

Dallo studio realizzato si ricava che per risolvere il primo problema i procedimenti risolutivi si appoggiano alla lingua naturale e seguono il ritmo del pensiero parlato entro il quale si sviluppa e si opera il controllo semantico della situazione. Gli alunni utilizzano anche, in modo esplicito o implicito, il linguaggio aritmetico in un contesto non prettamente algebrico. Dall'analisi dei protocolli delle interviste si evince che il linguaggio simbolico è completamente assente in uno di loro, mentre nell'altro è utilizzato in modo superficiale, solo per comunicare, non per risolvere il problema. Quindi manca il controllo che può operare la formula sul flusso del ragionamento verbale. E' possibile falsificare così la seconda ipotesi: "la lingua naturale e/o il linguaggio aritmetico prevalgono come sistemi simbolici, in assenza di adeguata padronanza del linguaggio algebrico". Quindi, si registra una netta corrispondenza tra sviluppo storico e sviluppo individuale.

E' interessante osservare che per risolvere il primo problema, gli alunni non utilizzano registri rappresentativi visuali e che buona parte di loro risponde che il quesito ha soluzione unica (variabile come incognita). Nel quarto problema, invece, con una situazione concreta analoga alla precedente ma formulata nel contesto della geometria analitica, gli studenti considerano che essa è verificata da una pluralità di soluzioni (variabile in relazione funzionale).

Questi risultati dimostrano che gli alunni, con insufficiente padronanza del linguaggio algebrico, possono considerare più facilmente la pluralità di soluzioni in presenza di registri rappresentativi visuali, evocando il modello mentale di retta.

Nel terzo quesito la maggior parte degli studenti ha interpretato le espressioni $ax + by + c = 0$ e $y = mx + q$ nell'ambito della geometria analitica, ma il modello di retta non è stato richiamato nel primo problema. Così la rappresentazione grafica è completamente assente dal processo risolutivo. Questo comportamento chiamato "rifiuto della visualizzazione" è già stato rilevato nella ricerca didattica (Cfr. Eisenberg & Dreyfus, 1991; Vinner, 1989; Furinghetti & Somaglia, 1994; Chiarugi, I. *et alii*, 1995).

In questa situazione si presuppone che il "rifiuto della visualizzazione" sia dovuto ad una questione di contratto didattico. Generalmente i problemi con equazioni proposti a scuola si risolvono in un contesto algebrico dove la variabile assume l'aspetto di incognita. Le situazioni problematiche concrete non vengono mai risolte nell'ambito della geometria analitica, richiamando registri rappresentativi visuali. I problemi di geometria analitica proposti a scuola sono diversi. Nel quarto quesito, lo studente si vede costretto ad utilizzare il modello di retta con la sua rappresentazione cartesiana. Quindi l'equazione diventa "percepibile" attraverso il grafico e l'alunno riesce a "visualizzare" più facilmente la pluralità di soluzioni. E' possibile falsificare così la quarta ipotesi: "L'alunno coglie più facilmente l'aspetto relazionale-funzionale della variabile in presenza di registri rappresentativi visuali".

E' interessante rilevare che si manifesta una chiara convergenza con il punto di vista storico. La nozione di incognita appare nella risoluzione di problemi che richiedono il calcolo di una o più quantità ed esercita un forte predominio nei procedimenti risolutivi fino al 600. Storicamente la concezione relazionale-funzionale compare spesso in presenza di registri visuali: tabelle, curve, descrizioni di un moto, ecc.

Dall'indagine statistica e dall'analisi qualitativa dei protocolli si evince che l'alunno è più propenso a considerare la variabile sotto l'aspetto di incognita (cercando l'unicità della soluzione dell'equazione lineare) nel contesto di una situazione concreta e in

assenza di registri rappresentativi grafici. In pochi casi, pur prevalendo la concezione di incognita, si verifica il passaggio dalla singola soluzione ad una pluralità di soluzioni. Questo avviene attraverso i sistemi di equazioni. In altre parole, per questi alunni le infinite soluzioni costituiscono un insieme di soluzioni singole che provengono dalla risoluzione di diversi sistemi lineari che contengono l'equazione data. Di conseguenza, non si pongono il problema dei vincoli imposti dal contesto in cui l'espressione è considerata.

Nei casi in cui prevale la concezione relazione-funzionale della variabile, le infinite soluzioni dell'equazione lineare costituiscono un insieme di coppie di valori che si ottengono variando uno di loro e calcolando l'altro a partire dalla dipendenza tra le variabili. In questo modo, gli alunni riescono anche a considerare i vincoli all'universo numerico imposti dal senso contestualizzato dell'equazione.

Quindi, si può affermare che si manifesta una certa interferenza della concezione di incognita su quella funzionale, nel contesto di una situazione problematica e in assenza di registri rappresentativi visuali (Ipotesi 1). In ogni caso, crediamo che la questione deva essere ancora approfondita analizzando come può avvenire il passaggio da una concezione all'altra senza interferenza, nel processo di risoluzione di una situazione problematica.

La traduzione dal linguaggio algebrico ($6x - 3y = 18$) a quello naturale si rivela un compito difficile per gli alunni, quindi è possibile valicare anche la terza ipotesi.

Alcuni ragazzi riescono a produrre il testo di un problema che non risulta significativo per la relazione data. Altri, invece, si limitano a realizzare una manipolazione puramente sintattica della formula, perché confondono l'attività di risolvere un'equazione con quella di inventare un problema a partire da un'equazione. Si presuppone che questa difficoltà sia dovuta ad una questione di contratto didattico: a scuola generalmente si risolvono problemi, non si inventano.

La formulazione di un problema a partire da un'equazione implica fondamentalmente tre attività:

- Ø Scegliere un contesto adeguato per dare significato all'equazione;
- Ø Identificare gli oggetti del contesto che rappresentino le variabili;
- Ø Individuare le proprietà degli oggetti messi in evidenza dalla relazione espressa nell'equazione.

Dall'analisi dei protocolli delle interviste si ricava che il punto critico è precisamente: "individuare gli elementi del contesto da associare alle variabili". In un protocollo si

osserva il tentativo di formulare il problema in un contesto di “mercato e mele”, ma le alunne non riescono ad identificare x e y con le quantità di mele appartenenti a due soggetti-oggetti diversi: siano essi due commercianti, due cassette differenti, due varietà diverse, ecc. Così formulano il testo di un classico problema aritmetico con valori numerici specifici (i coefficienti dell’equazione); nel tentativo di migliorare la formulazione, riescono solo ad inserire una variabile e quindi abbandonano questo contesto.

Le due coppie risolvono il quesito producendo un testo analogo a quello del primo problema. Questo significa avere a disposizione il contesto “soldi e scommesse” e gli elementi “due persone che giocano”. Occorre solo adattare le proprietà degli oggetti alla nuova relazione espressa dall’equazione. Eravamo certi che questa attività avrebbe significato parafrasare il testo del primo problema, invece non si è rivelata così ovvia. Una coppia ha avuto bisogno di fare emergere le variabili nel testo del problema e di interpretare il segno meno della sottrazione; la loro formulazione finale è il risultato di un’elaborazione graduale e a piccoli passi.

Nei due protocolli si manifesta chiaramente un importante scollamento tra il linguaggio simbolico e la possibilità di trovare un contesto diverso da “soldi e scommesse” per dare un significato all’equazione. Si presuppone che non si tratti della mancanza di una certa dose di inventiva, ma da un insufficiente controllo sui simboli che si manifesta nell’impossibilità di associare le variabili a certi elementi del contesto.

Quindi, si evince che una formula in sé non attiva forme di pensiero produttivo, non viene assolutamente considerata come modello interpretativo di un problema o meglio ancora di una classe di problemi.

Nella costruzione del linguaggio algebrico l’espressione di una classe di problemi mediante una formula è stata il risultato di una lunga conquista, perché ci sono due livelli di concepire la generalità di un metodo: uno riguardante la possibilità di applicarlo ad una pluralità di casi particolari, e l’altro relativo la fattibilità di esprimerlo attraverso il linguaggio dell’algebra simbolica. Il secondo livello si raggiunge soltanto con l’introduzione dei parametri, così intere famiglie di problemi possono essere trattate mediante procedure concise, cioè attraverso una formula.

Per approfondire queste conclusioni sarebbe interessante a studiare il primo livello di generalizzazione, analizzando la relazione esistente tra le variabili di un’equazione e gli oggetti del contesto che le rappresentano da una prospettiva semiotica del discorso. Sarebbe importante studiare come avviene la costruzione del senso di un’espressione

simbolica nello spazio nel quale il dominio della narrativa simbolica non si è ancora raggiunto completamente e la storia del problema è appena abbozzata (Cfr. Radford, 2002).

Altri questioni centrali che emergono da questa ricerca e che sarebbero interessanti di approfondire sono le seguenti:

- Ø come potrebbe avvenire il passaggio dalla concezione di incognita a quella relazionale-funzionale (o viceversa) senza interferenza, nel processo di risoluzione di una situazione problematica?
- Ø in quale modo il contesto semiotico influisce sulle concezioni della variabile dal punto di vista dell'alunno? In altre parole sarebbe interessante studiare l'interazione di altri contesti: linguaggio naturale, linguaggio geometrico, schemi percettivi, ecc. con l'operatoria degli alunni nell'ambito strettamente algebrico.
- Ø quale influenza esercitano la visualizzazione e la coordinazione di diversi registri rappresentativi nella risoluzione di problemi sulle concezioni della variabile dal punto di vista dell'alunno?

BIBLIOGRAFIA

- ARZARELLO, F., BAZZINI, L. e CHIAPPINI, G., 1994. *L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*. Progetto Strategico CNR - TID, Quaderno n. 6.
- CHIARUGI, I., FRACASSINA G., FURINGHETTI F. & PAOLA D., 1995. Parametri, variabili e altro: un ripensamento su come questi concetti sono presentati in classe. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, 18B, 1, pp. 34-50.
- EISENBERG, T. & DREYFUS, T., 1991. On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Mathematical Association of America, pp. 25-38.
- FURINGHETTI, F. & SOMAGLIA, A., 1994. Functions in algebraic and graphical environments. In A. Antibi (Ed.), *Proceedings of CIEAEM 46*, Toulouse.
- MALISANI, E., 1990. Incidencia de distintos tipos de estructura lògica de un problema sobre la conducta de resoluciòn. *Revista IRICE del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educaciòn*, n. 1, Rosario - Argentina, pp. 41-59. ISSN on-line 1592-4424. Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno3.htm>.
- MALISANI, E., 1993. *Individuazione e classificazione di errori nella risoluzione de problemi algebrici e geometrici*. Tesi di Laurea. Università degli Studi di Palermo, Italia.

- MATZ, M., 1982. Towards a Process Model for High School Algebra Errors. In Sleeman, D. e Brown, J.S. (eds.), *Intelligent Tutoring Systems*, London: Academic Press.
- RADFORD L., 2002. On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking. In Anne D. Cockburn and Elena Nardi (eds.). *Proceedings of PME 26*, Vol 4, pp. 81-88.
- USISKIN, Z., 1988. Conceptions of school algebra and uses o variables. In Coxford A.F. e Shulte A.P. (eds.), *The ideas of Algebra*, K-12. Yearbook, NCTM, Reston, Va, pp. 8-19.
- VINNER, S., 1989. Avoidance of visual considerations in calculus students, *FOCUS on Learning Problems in Mathematics* **11** (2), pp. 149-156.
- WAGNER, S., 1981. An Analytical Framework for Mathematical Variables. *Proceedings of the Fifth PME Conference*, pp. 165-170. Grenoble, Francia.
- WAGNER, S., 1983. What are These Things Called Variables? *Mathematics Teacher*, October, pp. 474-479.