UNIVERSITĂ DEGLI STUDI DI PALERMO

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA
IN SCIENZE UMANE E PEDAGOGICHE (87/S)

TESI

Lingua, linguaggio matematico, L.I.S.: un percorso di ricerca di uguaglianze/differenze nei processi di risoluzione dei problemi

Dott.ssa **Cammarere Nancy**

Relatore: Prof. Filippo Spagnolo

Venerdì 11 aprile 2008

INDICE

Introduzione

PARTE PRIMA

TEORIA

Capitolo primo

Lingue e linguaggio matematico

I. – Lingue orali, lingue segniche, linguaggio matematico, p. 8 – II. Iconicità ed arbitrarietà delle lingue, 11 – III. Linguaggio matematico, p. 13 – IV. Concreto ed astratto, p. 16 – V. L'esperienza della matematica, p. 19 – VI. Cinestesia e matematica, p. 25 – VII. Matematica e cultura linguistica, p. 27 – VIII. Confronto tra L.I.S. e grammatica cinese, p. 31.

Capitolo secondo

Schemi d'azione e strategie nella soluzione di problemi matematici

I. Campo educativo e soluzione di problemi, p. 34 – II. Risoluzione di problemi, p. 37 – III. Schemi di soluzione e strategie di conteggio, p. 44 – IV. Modelli di calcolo matematico, p. 46 – V. Soluzioni visive e memoria, p. 50 – VI. Pensiero senza linguaggio, 54.

PARTE SECONDA

SPERIMENTAZIONE

Capitolo terzo

La ricerca sperimentale

I. Premessa, p. 57 – II. L'importanza degli aspetti linguistici, p. 59 – III. Prove per udenti applicate a sordi, p. 60 – IV. Metodologia dell'osservazione sperimentale, p. 61 – V. Ipotesi di ricerca, p. 62 – VI. Fase di osservazione, p. 64 – VII. I luoghi e gli strumenti della sperimentazione, p. 68 – VIII. Prima prova, p. 69 – IX. Seconda prova, p. 79 – X. Terza prova, p. 87 – Appendice I, p. 99 – Appendice II, p. 104.

Conclusioni

Bibliografia

Alla mia famiglia

Introduzione

Le scienze cognitive vanno via via formulando ipotesi sempre più precise riguardo le abilità e le difficoltà coinvolte nei processi d'apprendimento dei concetti matematici. Molti studi recenti hanno evidenziato, inoltre, che i problemi maggiori nell'apprendimento della matematica sono dovuti ad un utilizzo sbagliato dei canali comunicativi che veicolano i concetti numerici: la comprensione linguistica sarebbe, quindi, una delle cause della non riuscita dei soggetti nella risoluzione dei problemi.

All'interno del lavoro di seguito presentato, saranno analizzati e messi in relazione i processi di apprendimento della matematica utilizzati sia da alunni udenti che da alunni sordi. Protagonisti della ricerca sperimentale effettuata sono, infatti, bambini sordi e udenti, messi a confronto per studiare uguaglianze e differenze nel loro approccio ai numeri ed ai calcoli matematici; ai processi messi in atto nella risoluzione di problemi; alle difficoltà comuni di decifrare codici linguistici spesso troppo astrusi, ecc.

Quando si è deciso di affrontare un tema così vasto, si è intuito da subito che la prima riflessione da fare era sicuramente quella sulla lingua, visto che udenti e sordi non sono solo separati da un deficit sensoriale, ma da una lingua, o meglio da una lingua e da un canale comunicativo: quello orale e quello segnico.

La prima parte del lavoro servirà a chiarire cosa s'intende per lingua, italiana o dei segni che sia, ponendo l'accento sulle differenze, ma soprattutto sui punti d'incontro tra due sistemi comunicativi così diversi: un ponte tra queste due lingue è stato individuato in un linguaggio settoriale, quello matematico. Esso, infatti, grazie agli elementi di cui è costituito fatti di segni e simboli, può andare incontro alle esigenze comunicative dei sordi, e nello stesso tempo degli udenti perché il linguaggio matematico non è così complicato come sembra o come molti lo presentano.

In campi del sapere come la matematica, quello che verrà analizzato nel seguente lavoro, la comunicazione potrebbe essere paradossalmente molto più semplice: la matematica, infatti, non è una lingua, è un sottocodice linguistico che utilizza segni e simboli con un significato ben circoscritto, mai equivoco. Dico paradossalmente perché sappiamo bene che la matematica è fatta di concetti ritenuti astratti. È da sottolineare, però, che l'astrattezza matematica nasce sempre dal reale, dalla concretezza quotidiana. È una sorta di continuum che va dall'oggetto al concetto. Ed è proprio da questo "oggetto" che sono partita per il mio lavoro sperimentale. La matematica parte da oggetti della nostra esperienza, della nostra percezione, da immagini e figure che, se ben utilizzate, possono veicolare il messaggio in modo chiaro e comprensibile anche a quelli a cui la matematica sembra incomprensibile. I problemi matematici, vengono spesso visti dai bambini sia udenti che sordi, come inaccessibili: questo modo di rivolgersi alla matematica parte, in primo luogo, da una mancanza di comprensione del problema stesso. Questa difficoltà di entrare dentro il problema è spesso dovuta, come sì è osservato durante la fase di ricerca, ai registri linguistici prettamente verbali con cui sono costruite le prove di verifica somministrate.

Sicuramente un bambino sordo, come uno udente, che si trovi a leggere il testo di un problema dove non ci sono immagini o figure o esempi che riportino all'esperienza concreta, difficilmente riuscirà a risolverlo o peggio ancora a comprenderlo. La mancata comprensione del testo non è dovuta, come fino a poco tempo fa si pensava, ad una carenza intellettuale del bambino sordo che lo "limiterebbe" nella risoluzione. È la lingua utilizzata ed il modo con cui essa viene usata il vero scoglio da superare. Durante il lavoro sperimentale, presentato nella seconda parte della tesi, si è osservato come spesso l'insegnante, nel somministrare un problema, leggesse ad alta voce la traccia spiegando le parole più complicate, e poi scrivesse alla lavagna i dati numerici dello stesso: essa s'illudeva che adottando questo metodo avrebbe fornito le basi necessarie per la sua risoluzione. Le cose, però, non sono mai così semplici. I bambini che non applicavano meccanicamente l'algoritmo di calcolo che ritenevano corretto (considerando solo i dati numerici), si trovavano a dover capire un testo che era la chiave di volta per andare avanti. La matematica, quindi, non è fatta solo di numeri, ma di parole e di significati che vanno compresi per poter andare avanti e prendere consapevolezza del lavoro che si sta svolgendo. E il linguaggio verbale è l'unico canale comunicativo che a scuola viene utilizzato. Dall'osservazione svolta si può asserire che l'utilizzo solo della lingua verbale è un ostacolo alla riuscita matematica sia degli udenti che dei sordi. Per entrambi gli studenti, sia con deficit sensoriale che non, si è potuto osservare che il linguaggio, o meglio, l'utilizzo di un solo canale comunicativo è un ostacolo alla comprensione.

Durante il lavoro di ricerca sono stati costruiti dei test matematici che utilizzano le immagini come canale comunicativo primario in modo da mettere gli alunni nella posizione di poter svolgere con consapevolezza il problema.
In questo modo gli studenti sordi si trovano nella condizione di utilizzare un canale comunicativo che è il loro, appunto quello visivo; gli udenti sono facilitati perché le immagini risultano sempre chiare da "leggere", a differenza delle parole. Sia i bambini udenti che i sordi, sin dalla prima infanzia, comunicano silenziosamente con i segni, anche se la maggior parte dei genitori non considera la comunicazione non verbale del figlio: la parola distrugge spesso tutte quelle componenti non verbali utilizzate dal bambino perché non li rinforza e soprattutto non si sforza di comprenderle. Quando un bambino udente utilizza lo stesso segno correntemente usato nella Lingua dei Segni per dire che "suo nonno sta lavorando", si ha la dimostrazione di quanto simili siano gli stadi dello sviluppo di udenti e sordi. Poi questi si discostano, vuoi per la strutturazione cognitiva differente a causa del maggiore sviluppo di un senso piuttosto che di un altro che spinge ad una maggiore specializzazione visiva o sonora, vuoi per una diversa lingua utilizzata. Con questo lavoro, abbiamo cercato di far vedere la matematica da un'altra prospettiva sia agli alunni che agli insegnanti.
La matematica viene ritenuta una materia complicata, difficile, e non è del tutto infrequente l'atteggiamento di rinuncia in partenza di fronte ad alcuni argomenti matematici che non sono immediatamente comprensibili. Per molti la matematica sembra un mondo a sé stante, fatto di simboli e concetti lontani dall'applicazione pratica. In realtà la parte nascosta della matematica riguarda proprio la "semplicità" della matematica stessa e uno degli scopi di questo lavoro è quella di renderla visibile.

Capitolo I. Lingue e linguaggio matematico

I. Lingue orali, lingue segniche, linguaggio matematico

> *[….]«La lingua è qualcosa di sociale, dotata di una sua struttura che non dipende dall'utilizzazione che ne viene fatta via via dal soggetto parlante (la parola), ed esiste soltanto all'interno di una comunità come un insieme di segni che possono essere studiati in modo oggettivo. In questo senso la lingua, come "istituzione sociale", analoga alla scrittura, all'alfabeto dei sordomuti, va considerata all'interno della semiologia come studio della vita dei segni nella vita sociale[1]».*

La lingua italiana si può manifestare attraverso il linguaggio verbale, facoltà tipica ed esclusiva del genere umano, così come la lingua italiana si può anche manifestare attraverso il linguaggio segnico, anch'esso tipico ed esclusivo del genere umano.
Le lingue sono considerate codici di comunicazione, cioè un insieme di segni usati intenzionalmente da una comunità di esseri viventi per comunicare. I segni sono a loro volta considerati come delle unità dotate di significato intenzionale.
Per De Saussure ogni lingua è un insieme d'elementi di cui ci serviamo per comunicare,

"*Una lingua, in particolare, si differenzia da altri sistemi comunicativi non linguistici, come la pantomima o i segnali stradali, per il suo alto grado di sistematicità e per la sua apertura al mutamento nel corso del tempo, nello spazio, e in relazione alle esigenze comunicative dei parlanti[2]*".

Sono diverse le proprietà su cui è importante attirare da subito l'attenzione per capire cos'è una lingua: sistematicità, arbitrarietà, iconicità, sintassi, indeterminatezza semantica, estensibilità dei significati, ecc. La lingua dei segni italiana, a differenza della posizione dello stato italiano nei suoi

---

[1] De Saussure F. , *Corso di linguistica generale,* in Adorno F., Gregory T., Verra V. , Storia della filosofia, Roma, La Terza, p. 102, 1990.
[2] Cardona Russo T., Volterra V., *Le lingue dei segni, storia e semiotica*, Roma, Carocci , 2007.

riguardi, viene considerata come lingua a tutti gli effetti così come l'italiano o l'inglese o altre lingue dei segni nel mondo.
A tal riguardo, un'affermazione che merita di essere citata è quella di Tullio De Mauro:

"Accanto alle lingue fatte di parole e frasi i cui significanti sono realizzati con la voce e percepiti con l'orecchio ci sono le lingue fatte di parole e frasi i cui significanti sono realizzati con i segni e percepiti con la vista. Accanto alle lingue che si avvalgono prima di tutto del canale fonico-uditivo ci sono le lingue che si avvalgono del canale visivo[3]".

L'interazione con le lingue dei segni richiede ai segnanti un continuo esercizio dell'attenzione alla struttura dei segni e dell'attenzione al loro contenuto. È indispensabile, per segnare una continua e fine vigilanza pragmatica, sintattico-testuale e semantica. L'uso delle lingue segnate obbliga a un affinamento e crescita delle capacità intellettive, rispetto a chi usa le lingue vocali.
L'auditorialità è uno strumento prezioso perché gli udenti diano corpo a certe caratteristiche della lingua, ma essa è perfettamente equivalente alla gestualità con cui i non udenti danno corpo esattamente alle stesse caratteristiche della lingua nel caso in cui usino i segni.
A questo punto sarebbe utile chiarire cosa, oggi, intendiamo noi per lingua. Una lingua è un codice semiologico, un insieme di strumenti che permette di regolare l'interazione tra viventi mediante segni. Essa prevede, come, altri codici, che i suoi segni siano articolati in parti le quali sono dotate di un loro significato. I segni, grazie al loro essere articolati, sono di numero potenzialmente infinito. Sono potenzialmente infiniti, i numeri della rifrazione araba, le combinazioni delle lettere di una scrittura alfabetica, le operazioni dell'aritmetica e dell'algebra, le frasi o i discorsi di una lingua audio-orale o segnata. E dunque fin qui, fino alla caratteristica della potenziale infinità delle differenti lingue troviamo una perfetta similarità, sia che si tratti di lingue orali, segniche o matematiche. Ma ci sono anche alcune proprietà che differenziano le lingue anche dal linguaggio matematico, in

[3] De Mauro T. *Vocalità, gestualità, lingue segnate e non segnate* in *Atti del II convegno nazionale Viaggio nella città invisibile,* a cura di Bagnara C., Chiappini G., Conte M., Ott M. Pisa, ed. Del Cerro, 2000.

particolar modo l'indeterminatezza semantica. I confini del significato delle singole parti significative di un segno, degli interi segni e dello stesso insieme di segni, cioè della lingua, non sono dati una volta per tutte, ma sono solo dilatabili e restringibili nell'uso. Una parola come azzurro, per esempio, può voler indicare una certa pietra, il colore di quella pietra, un certo colore a metà tra il blu e il verde, può essere sinonimo di cielo, ecc. questa dilatabilità e restringibilità dei significati si riflette sulle frasi in relazione al concetto : ed ecco una prima differenza tra i linguaggi orali e segnici e la matematica.

Per capire che cosa vuol dire un'addizione, per trovarne i giusti sinonimi equivalenti, per stabilire se 3+4 è o no equivalente a 2+5, non c'è bisogno di sapere se si riferisce a pere, a mele. La quantità espressa da 3+4 è la stessa espressa da 2+5 a qualsiasi cosa si riferiscano le due espressioni. Le frasi le capiamo solo sapendo o ricostruendo che cosa c'è prima e solo calandole nel loro contesto. Questa è la croce e delizia che accomuna profondamente lingue orali e lingue segniche: è la croce perché dobbiamo sempre contestualizzare gli enunciati per sperare di capirli o di farci capire e non siamo mai sicuri fino in fondo di averli capiti. È la delizia, perché l'imprevedibile dilatabilità dei significati fa si che no c'è limite fissabile preliminarmente alle esperienze che possiamo includere nel cerchio dei significati dei segni della nostra lingua. Diversamente dai pur potenti linguaggi matematici, che possono parlare principalmente di rapporti tra quantità, le lingue orali e segnate possono trattare di argomenti di ogni genere. Accade così che ogni lingua nativa possa accompagnare ogni nostra esperienza, perché ogni nostra esperienza trova sempre modo di essere ospitata e comunicata dai segni orali e segnati. La matematica, avendo un linguaggio finito e circoscritto, viene insegnata, non viene appresa automaticamente come si fa con il segno e la parola.

Frege[4] si impegnò a cercare un rigore linguistico che evitasse queste molteplici interpretazioni di una lingua. Egli voleva elaborare un linguaggio rigoroso, un linguaggio in formule di pensiero puro, a imitazione di quello aritmetico, appunto per sottrarre il pensiero agli inganni di cui per troppo tempo è stata vittima la lingua.

[4] Frege G., *Logica e aritmetica,* in Adorno F., Gregory T., Verra V., Storia della filosofia, Roma, ed. La Terza, p. 502, 1990.

Sappiamo bene, però, che uno dei paradossi del linguaggio è di essere caratterizzato non solo da una certa trasparenza ed intersoggettività dei significati che lo compongono, ma anche da una notevole "penombra connotativa" che circonda le parole: il linguaggio è un luogo contraddittorio cosa che invece non accade in molti linguaggi settoriali, come la matematica.

II. Iconicità ed arbitrarietà delle lingue

Nelle lingue esiste un'importante distinzione quando si parla di segni: quelli arbitrari e quelli iconici. Nei primi le parole o i segni possono cambiare di significato perché non ci sono rapporti fissati, una volta per tutte, tra le parole e i significanti: tutto questo avviene in maniera imprevedibile e quindi *arbitraria*, sulla base delle esigenze comunicative di singoli o di gruppi di parlanti. Quella dell'arbitrarietà è una nozione ponte che rimanda tanto al fatto che ogni parola o segno rientra in un sistema di relazioni tra parole diverso da lingua a lingua, quanto alla variabilità e mutabilità inserita in un contesto sociale e storico. L'equilibrio tra la sistematicità e la variabilità comporta questa caratteristica centrale delle lingue: appunto, la loro arbitrarietà. Anche se il significato di due parole, in due lingue diverse, può apparire lo stesso, di solito questo significato è espresso da significanti diversi: ad esempio, "cane" in italiano, "dog" in inglese. Questo è quello che si nota comunemente quando si dice che le parole o i segni sono convenzionali e cambiano da lingua a lingua. La realtà extra linguistica non determina necessariamente né la forma, né il significato delle parole e dei segni.

Passiamo, adesso, ad un'altra proprietà linguistica che è presente nelle lingue vocali: si tratta dell'*iconicità* che assume una rilevanza particolare nelle lingua dei segni. Per iconicità s'intende quell'insieme di tratti di una lingua che fanno sì che alcune caratteristiche sul piano del significante sembrino trovare corrispondenza sul piano del significato.

Il significante ha un rapporto naturale con il significato, esempio ne sono le onomatopee vale a dire quelle espressioni linguistiche che imitano i suoni delle cose che indicano: il fruscio di una foglia, dove la parola richiama il suono dell'oggetto indicato; il tic tac di una sveglia, ecc. Nel linguaggio segnico, l'attenzione viene giustamente spostata sulla sfera visiva: il segno di bicchiere, dà visivamente l'idea della forma del bicchiere, come il segno di libro, di scrittura, ecc.

" *Come si potrà facilmente comprendere, visto che è più semplice riprodurre visivamente un oggetto, che riprodurre il suo suono, esisteranno più segni iconici nel linguaggio segnico rispetto al linguaggio orale. Il fatto che i segni condividano la stessa sostanza fisica ed usino le stesse dimensioni delle entità visibili spiega perché essi nè diano una visione solistica e più dettagliata di quanto non facciano i suoni. Quindi una rappresentazione gestuale può condividere più aspetti della realtà fisica di quanto non faccia una rappresentazione acustica*[5]*"*.

Nonostante ciò, Piattelli Palmarini nota, scorrendo i lessici delle lingue moderne,

[...] "una mancanza totale di correlazione tra il "suono"o il "segno" di una parola ed il suo referente: niente d'obiettivo collega il suono della parola "carne" all'animale. In ogni lingua le onomatopee sono rare, e sono assai diverse da lingua a lingua, dimostrando che l'abbinamento tra suono e referente è arbitrario perfino per le onomatopee (in italiano "chicchirichì", in francese è "cocoricò")[6]*"*.

Nella lingua dei segni avviene la stessa cosa: i segni prettamente iconici come possono essere quelli di "carta" assumono forma diversa a seconda che si consideri l'ASL o la LIS.
In Italia, per esempio, il segno per indicare carta è effettuato da entrambe le mani, nello spazio neutro, come se si volesse stendere il bucato; in America per indicare carta si usa lo strofinio di una mano sull'altra.
Le mani sono impegnate quotidianamente in una serie di compiti che vanno dalla manipolazione d'oggetti, all'enumerazione, alla rappresentazione d'oggetti. È economico che le lingue dei segni usino nella creazione dei segni questa pre-codificazione delle mani e del corpo.

---

[5] Pietrandrea P., *Complessità dell'interazione di iconicità ed arbitrarietà nel lessico della LIS,* in Atti del convegno nazionale "Viaggio della Città Invisibile" a cura di Bagnara C., Chiappini G., Conte M., Ott M. ed. Del Cerro, Pisa 2000.
[6] Cacciari C., *Psicologia del linguaggio*, Il Mulino, Bologna , 2001.

Come ha insegnato De Saussure, con la nozione d'arbitrarietà di segno, non c'è una ragione di principio per cui una comunità decida di utilizzare una certa stringa di suoni per nominare un oggetto.
Ogni lingua si fonda su un patto che coinvolge tutti i parlanti: i significati delle parole sono convenzionali. Il patto consiste nel fatto che tutti i membri attribuiscono alle parole gli stessi significati e strutturano le frasi usando le stesse regole grammaticali.

III. Linguaggio matematico

In una presentazione del suo "Dizionario di Matematica Elementare", Stella Baruk sottolinea come:

"La matematica resta per troppi studenti una lingua sconosciuta, un senza senso cioè un senso in attesa di essere chiarito[7]*".*

Nella matematica le scelte comunicative assumono un ruolo centrale, ma purtroppo la comunicazione matematica rimane strettamente legata ad un livello prettamente orizzontale, cioè per pochi eletti scienziati e matematici, rimanendo per i non addetti ai lavori spesso astrusa ed incomprensibile. La comprensione dei registri linguistici utilizzati in matematica è indispensabile per l'attivazione delle competenze utilizzate per la risoluzione di un problema.
Il linguaggio può anche diventare un ostacolo supplementare all'acquisizione di conoscenze matematiche: la capacità di estrarre da un testo le informazioni rilevanti rispetto alla risoluzione dello stesso è influenzata dalla modalità di presentazione del testo. Questo spinge il bambino, sia udente che sordo, di scuola elementare ad estrapolare meccanicamente i dati numerici senza dare rilevanza all'enunciato scritto.
Il nodo ultimo della matematica sta nella sua comprensione, e dualmente nella sua comunicazione: alla fine delle cose è essenziale capire i termini con i quali la matematica è enunciata ed intorno ai quali si articola. Significativo è l'atteggiamento simboleggiato dallo studente di terza media "che va

[7] Baruk S., *Dizionario di Matematica Elementare,* a cura di Speranza F., Grugne L., Bologna, 1998.

benissimo in tutte le materie ma è totalmente ignorante di matematica. Tenta di affrontare un problema di geometria, e ne rimane subito atterrito. Non riesce neanche a disegnare la figura: il testo del problema è composto di parole per lui incomprensibili. Tuttavia non si scoraggia e così, da "ortocentro" passa a capire "altezza", da "altezza" a "perpendicolare", da "perpendicolare" ad "angolo retto" e via di questo passo. Alla fine, vittoria! La figura viene costruita.

"Uno degli ostacoli più pervasivi è quello legato all'uso del linguaggio formale in matematica. Molti allievi si bloccano già alle prime formule e manipolazioni dell'aritmetica; altri, non riuscendo a trovarvi un senso, si limitano ad imparare a memoria le formule, gli algoritmi e a eseguire meccanicamente esercizi pieni di simboli senza che ne abbiano compreso il significato[8]".

Se già gli studenti udenti che parlano e comprendono correttamente la lingua italiana, lingua ufficiale a scuola, hanno questa percezione della matematica, si pensi agli studenti che comunicano utilizzando altri canali sensoriali che non sono quelli vocali. Gli studenti sordi che si trovano alle prese con lo studio della matematica incontrano innumerevoli difficoltà.

"Una delle scelte che possono essere realizzate in questa direzione può essere proprio la semplificazione del linguaggio che si usa rispettosa dell'univocità del significato che qualifica ciascun termine matematico[9]".

Le difficoltà dei sordi, ma anche degli udenti, legate solo alla competenza linguistica, possono essere affrontate: la maggior parte dei concetti matematici può essere rappresentata da azioni, fatti, o come rete di metafore spaziali da utilizzare sia nelle spiegazioni che negli esercizi. Inoltre il linguaggio matematico, non è così complesso come viene presentato.
La matematica, diversamente da quanto avviene, ad esempio, per le materie di tipo umanistico, struttura un particolare legame tra parola e concetto: non è

[8] Sandri P.,, *Osservare, valutare, orientare gli alunni con deficit,* in P.Bruno Longo, A.Davoli, Sandri P. (a cura di), Osservare, valutare, orientare gli alunni in difficoltà, Pitagora, Bologna, pp. 232-244, 2003.
[9] Gouthier D., *Termini e linguaggio per comunicare matematica,* International Journal On Science Communication, n 2 giugno, 2002.

sempre detto che il termine che in italiano ha un significato, conservi il medesimo, quando è usato in ambito logico-matematico.

Nonostante tutto sarebbe arbitrario affermare che il linguaggio matematico non porti in sé profondi legami con il linguaggio comune, come tutti i linguaggi settoriali.

La matematica è un codice di comunicazione che, pur differenziandosi da altri codici come la lingua italiana o la lingua dei segni, a questi può essere comparato se consideriamo gli elementi che lo costituiscono: i numeri infatti sono scritti mediante 10 simboli più lo zero, legati nella lettura e nella comprensione da regole fisse, cosi come esistono 21 lettere dell'alfabeto che combinate tra loro danno vita al nostro codice linguistico. Per esempio:

213, 312, 123, 231

hanno un significato diverso tra loro, che è dato dalla posizione delle cifre stesse. Il linguaggio matematico, i simboli matematici più semplici, (+, -, x, :), la numerazione in base 10, sono per i sordi un linguaggio ideale perché ogni segno, ogni cifra, ogni regola hanno un significato per se stesso e per la posizione che occupano, non per il suono che produce la loro pronuncia. Per esempio, guardando l'espressione:

-12- (+ 3) = -15

Abbiamo nell'ordine:

- segno negativo

1 una decina

2 due unità

- segno negativo

()segno di separazione

+ addizione

3 unità

= uguale

- segno positivo

1 decina

5 sei unità

Ogni segno ha inequivocabilmente un suo specifico significato, dato dalla sua forma e dalla sua posizione. Esso offre alcuni vantaggi rispetto al linguaggio comune poiché si serve di segni e simboli che non sono mai ambigui.
Questa caratteristica è propria dei *linguaggi settoriali*[10] che sono stati anche definiti sottocodici perché, pur autoregolandosi attorno ad un proprio ambito specifico, sono comunque definiti nelle strutture generali e strettamente legati alla più ampia lingua di cui fanno parte.
Per leggere, per capire, risolvere l'espressione algebrica dell'esempio si possono pronunciare parole francesi, inglesi o cinesi o non pronunciare alcuna parola, senza che cambi nulla nella sostanza. Per leggere e per capire una frase in lingua straniera, invece, ci vuole allenamento acustico e memoria perché di ogni parola bisogna imparare il suono (pronuncia), il tipo di scrittura, il significato.
Se il bambino sordo viene avvicinato a questa disciplina ricordando che i segni e i simboli matematici hanno un significato per la loro forma grafica e per la loro posizione e non per il suono delle parole che li identificano, si trova a studiare senza avere l'handicap, cioè incontrando le stesse difficoltà di apprendimento che incontrano gli udenti.

IV. Concreto ed astratto

Può destare sorpresa, affermare che la matematica potenzia l'intuizione specie in chi ha avuto l'esperienza di un insegnamento matematico basato sull'acquisizione di definizioni e tecniche e non sulla scoperta e formazione personale di conoscenze, metodi e concetti.
Chi ha percorso questo cammino sa bene come l'intuizione sia il punto di partenza d'ogni processo d'astrazione e di come il sapere porre dei problemi sia più produttivo del saperli solo risolvere.
L'astrazione, la generalizzazione, la simbolizzazione sono modi particolari della nostra attività mentale, ma sono anche le caratteristiche fondamentali dell'attività matematica.

---

[10] Si tratta di uno sviluppo di una particolare area linguistica che da un lato perde alcuni termini obsoleti andati ormai in disuso e dall'altra né acquista altri imposti dai "contesti" emergenti. Il linguaggio settoriale nasce spontaneamente non appena vi sia il bisogno di coprire "un buco" comunicativo cui il linguaggio tradizionale non sa corrispondere: si pensi ai libri di Tolkien, dove l'autore inventa un linguaggio tutto suo o alle parole-significati coniate da J. K. Rowling, autrice di Harry Potter.

Questa, infatti, muovendo dall'osservazione della realtà e dalla "manipolazione del concreto", attraverso le operazioni mentali di discriminazione, confronto, associazione, elabora il "modello generale", concettuale simbolico, rappresentativo della realtà stessa. Questo modello, questo concetto, può diventare poi a sua volta un "concreto". Nel contempo si attiva anche una sorta di spirale estremamente importante per la formazione del pensiero: partendo dalle operazioni "sull'oggetto concreto", acquista una prima astrazione ed operando una successiva generalizzazione, sarà possibile raffrontare il "concreto".

Per questo è stato più volte affermato che la matematica più che un insieme di contenuti è soprattutto un modo di pensare: la matematica non è una materia è un metodo… il metodo che porta da situazioni fisiche a situazioni mentali, da strutture reali a strutture astratte, che però hanno a che fare con le strutture reali di partenza.

Il linguaggio matematico è caratterizzato da una forte astrazione, dal momento che gli oggetti matematici sono per loro natura non sempre riconducibili ad oggetti concreti: sono caratteristiche fondamentali della matematica l'astrazione, appunto, la generalizzazione e la simbolizzazione, tipiche attività del pensiero.

L'astrazione della matematica può essere rappresentata da un problema di comunicabilità della matematica stessa: l'enunciato di un problema, il testo di un esercizio, una spiegazione dell'insegnante, esprimono mediante frasi e parole un concetto matematico che non sempre è veicolato in modo corretto.

Dal momento che i concetti matematici non sono direttamente accessibili alla percezione, è necessario ricorrere a diverse rappresentazioni semiotiche per poterle comprendere, giungendo in tal modo alla concettualizzazione.

Il concetto di astrazione in matematica, non deve essere separato da quello operativo della matematica stessa: nella costruzione dei concetti matematici e nel loro apprendimento da parte di studenti sia piccoli che grandi, ciascun concetto viene visto e poi sperimentato prima come processo e solo in seguito si condensa come oggetto astratto.

"Nel processo di formazione dei concetti le concezioni operative, empiriche precedono quelle strutturali, astratte. La visione operazionale e quella strutturale, in questo modo, vengono considerate complementari, entrambe

necessarie come due facce della stessa medaglia. Nessuna delle due è privilegiata rispetto all'altra, mentre di solito i matematici tendono a considerare superiore la visione strutturale perché più astratta e difficile da raggiungere: questo in un certo senso è vero perché la visione operativa viene prima e sembra risultare più naturale[11]*".*

Le esperienze fatte sul piano fisico e motorio sono alla base dei concetti matematici, ma anche quando queste vengono rappresentate a livello iconografico non potrebbero essere ancora dei concetti matematici. Tutti i concetti matematici sono delle astrazioni e come tali non sono delle realtà fatte di materia o di energia: tante e esperienze dirette possono portare al concetto, ma il concetto non è alcuna di queste esperienze. Esaminiamo il seguente problema:

"Gino si trova sul 5° gradino di una scala, sale di altri tre gradini, su quale gradino si troverà[12]*?"*

Esso non richiede un'analisi eccessivamente complessa e i bambini immaginano rapidamente come farebbero a risolvere il problema; se avessero una scala nelle vicinanze lo farebbero vedere subito con l'azione diretta del corpo e con la lettura della posizione assunta alla fine dell'azione. Il problema su presentato, è stato risolto semplicemente e per molti bambini è stato più un modo di procedere che un vero e proprio problema. La vera difficoltà è iniziata quando il bambino ho dovuto risolvere il problema senza viverlo di persona. La risoluzione espressa ed ottenuta a livello simbolico, come la seguente:

5+3=8

è per la maggior parte dei bambini, troppo distante dal vissuto e sganciata dalla realtà presa in considerazione nel problema. La scrittura matematica simbolica rappresenta il punto di arrivo di un processo fatto di passaggi

---

[11] Mellone M.,Pezzia M., *Un progetto di ricerca-azione sulle strutture aritmetiche nelle scuole di base*, in Scuola e didattica, n.2, 2006, p. 25.
[12] Bazzini L., Colombi E., Sacconi P., Zampieri L., *Contesti e linguaggi in matematica, proposte per l'educazione di base,* IRRSAE Lombardia, Milano, 2001.

intermedi e non il punto di partenza per arrivare a conoscere e dominare la matematica.
Partendo dalla risoluzione ottenuta con l'agire diretto sulla scala, si è portati i bambini verso i significanti che permettono di risolvere il problema con il minor spreco di azioni. Questo processo ha reso il problema più facilmente dominabile anche dai bambini in difficoltà; ha portato a risultati più soddisfacenti sia relativamente alla comprensione dei concetti trattati, sia riguardo all'operatività che ne deriva; ha creato un naturale nesso fra i linguaggi più vicini all'esperienza motoria e i linguaggi simbolici[13].
Tutte le nozioni matematiche sono fondamentalmente "ideali" e, durante la scuola secondaria in particolar modo, vengono generalmente proposte senza far riferimento alla realtà, sulla base di relazioni tra oggetti o tra insiemi, definiti in maniera formale.
Il carattere ideale della matematica comporta che a livello didattico le nozioni matematiche debbano essere edificate principalmente come descrizioni discorsive, per giungere alla forma più elaborata che è la definizione.
La matematica può essere considerata un linguaggio costituito da termini tecnici e da simboli, grazie ai quali organizza i suoi discorsi in modo rigoroso, preciso e conciso. Per "fare matematica" occorre essere introdotti gradualmente a questo linguaggio caratterizzato da una formalizzazione rigidamente codificata, il cui apprendimento, a differenza del linguaggio naturale, non avviene per imitazione fin dalla nascita, in situazioni informali e fortemente caratterizzate affettivamente. Può accadere dunque che l'allievo non riesca a comprendere né l'utilità, né il significato dei simboli e delle regole sintattiche usate per collegare i segni e i significati tra loro.

V. L'esperienza della matematica

Al momento del suo ingresso a scuola, il bambino ha già fatto esperienze significative, ha integrato conoscenze mediate culturalmente, ha costruito concetti, ha acquisito comportamenti cognitivi. La scuola, l'apertura verso nuove relazioni, le scelte educative e didattiche degli insegnanti, le abilità e competenze che acquisisce, aggiungono nuove "realtà" a quelle già esperite.

[13] L'esperimento integrale è riportato in Appendice 1, p. 98.

Alcune definizioni ci possono far notare quanto la vera matematica si discosti dall'opinione comune che spesso la riduce ad una banale ginnastica mentale fatta di calcoli macchinosi:

"La matematica è la disciplina che s'interessa di oggetti qualsiasi definiti solo attraverso l'enunciazione delle loro proprietà, delle relazioni che è possibile far intercorrere fra questi oggetti e delle proprietà che verificano queste relazioni[14]*".*

"La matematica è la scienza che concerne la deduzione logica di conseguenze dalle premesse generali ad ogni ragionamento[15]*".*

Per esempio, il bambino comincia a studiare l'aritmetica, ma già molto tempo prima di andare a scuola egli ha acquisito una certa esperienza riguardante le quantità, ha già incontrato varie operazioni di divisione e di addizione; perciò, egli ha già avuto una sua "pre-scuola" di aritmetica. Un attento esame mostra che questa aritmetica prescolastica è estremamente complessa, che il bambino è già passato attraverso un proprio sviluppo aritmetico molto tempo prima di impegnarsi a scuola. In definitiva si deve ribadire che il bambino che arriva alla scuola è un soggetto attivo che confronta, esclude, ordina, categorizza, riformula, verifica, elabora ipotesi ecc. impegnando pensiero ed azione. Si è detto che i bambini, lungi da essere egualmente "ignoranti" sono molto differentemente "esperti".

Le abilità che il bambino mette in atto in un certo ambito, sono in realtà il risultato di attività di problem solving che egli stesso ha svolto via via in quel campo.

Il bambino impara ad interrogarsi sulle esperienze che vive, familiarizza con l'idea che certe conoscenze matematiche acquisite a scuola sono gli strumenti "naturali" per rispondere alle domande che si pone riguardo al mondo che lo circonda.

L'imparare è dunque un processo di costruzione di conoscenze e non una conoscenza trasmessa o assorbita, è anche un sapere dipendente perché si usa

14 Sawyer W., I concetti matematici hanno un significato oggettivo?, in Archimede, n. 2, p. 47, 1993.
15 Boero P., Argomentazione e dimostrazione:una relazione complessa, produttiva e inevitabile nella matematica e nella didattica della matematica, in International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical, p. 5, 1999.

quello che già si sa per costruire nuove conoscenze, è strettamente legato alla situazione in cui ha luogo: apprendimento e conoscenza non sono indipendenti dai contesti mentali, fisici, sociali, in cui si originano.
Boero definisce il campo di esperienza in relazione al contesto:

"Campo di esperienza è un settore dell'esperienza (attuale o potenziale) degli allievi identificabile da essi, con specifiche caratteristiche che lo rendono adatto (sotto la guida dell'insegnante) per attività di modellizzazione matematica, per la posizione di problemi matematici[16] , *ecc."*

Negli ultimi vent'anni la ricerca sui processi di apprendimento, non solo in ambito matematico, ha messo in evidenza che se un campo di esperienza è ben conosciuto dal bambino, ciò faciliterà e renderà più significativa la comprensione dei concetti.
Queste definizioni ci obbligano ad estendere i confini della disciplina fino a riconoscere aspetti matematici anche in alcuni nostri comportamenti quotidiani.

"Il mondo della matematica è fatto d'astrazioni collegate a simboli che servono per scoprire, distinguere e registrare strutture, modelli e relazioni valide universalmente[17] *".*

Questo mondo che sembra lontano da quello del bambino in età prescolastica, può invece, attraverso le esperienze delle cose, i sensi e il movimento, essere affrontato nei suoi schemi e nelle sue relazioni fondamentali fin dai primi anni di vita.
Infatti il bambino fa numerose esperienze su materiali relativi a quantità continue e discontinue, spazi, forme e dimensioni, capacità di contenere, corrispondenze, misurazioni, etc.

[16] Boero P. (Dipartimento di matematica- Università di Genova), *Argomentazione e dimostrazione:una relazione complessa, produttiva e inevitabile nella matematica e nella didattica della matematica* , in "Preuve: international newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof", Julliet-Aoùt 1999.
[17] Ragusa F., *Ritmo, struttura e corpo logico-matematico: considerazioni sperimentali per lo sviluppo del linguaggio matematico e delle strutture logiche nel bambino della scuola dell'infanzia*, Tesi di Laurea anno 2003-2004 relatore: Prof. Filippo Spagnolo.

I bambini, oltre che contare e trattare i numeri con una discreta competenza, sanno eseguire addizioni e sottrazioni. La tecnica di addizione è spesso di tipo ordinale: se il bambino deve fare 5+6 si posiziona su 5 che fa idealmente corrispondere allo 0 ordinale e poi esegue un'addizione di tipo peaniano:
5+1(1)+1(2)+1(3)+1(4)+1(5)+1(6), aggiungendo cioè 1 per più volte, contando 6 volte l'aggiunta di 1, fino ad arrivare alla somma voluta. Lo fa con destrezza, con sicurezza, spesso aiutandosi con uno strumento eccellente, le dita delle mani, dicendo a voce alta il numero raggiunto di volta in volta, facendo scorrere le dita-unità fino al risultato ritenuto corretto. Alla fine, dice a voce più alta, o ripete, la somma finale. I bambini giocano al mercato e quindi pagano, danno somme, aggiungono, danno resti... Lo fanno con sicurezza e con maestria, basta osservarli. Essi passeggiano per il quartiere cercando numeri di qualsiasi tipo, li leggono, li commentano, li trascrivono in aula ed in casa. Leggono e scrivono numeri anche di più cifre, li sanno confrontare anche mettendo in campo strategie complesse. Sanno risolvere semplici problemi di addizione e di sottrazione, mettendo in campo strategie aritmetiche, grafiche e di altro tipo.

"Tutto ciò dimostra dunque che i bambini sanno maneggiare e sono piuttosto abili di fronte a questioni numeriche, anche se si trovano di fronte a numeri con più cifre[18]".

Questo tipo di atteggiamento nei confronti della matematica è dovuto principalmente ad una serie di stimoli verbali che il bambino recepisce: gli udenti, ricevono continuamente rinforzi verbali che sono indispensabili per l'acquisizione di un primo, semplice, linguaggio matematico, i sordi sono estranei a questo primo bagno linguistico.
Se il bambino sordo è figlio di sordi, i rinforzi arriveranno in lingua dei segni; se invece il bambino è figlio di udenti le cose saranno più complicate.
Generalmente, però, sia i bambini udenti che i sordi, ben prima di andare a scuola, usano termini numerici in diversi contesti, ma deve trascorrere ancora del tempo perché essi li possano abbinare a dei significati precisi.

[18] AA. VV., *Le competenze dei bambini di prima elementare: un approccio all'aritmetica* in La matematica e la sua didattica, n. 1, 47-95, 2004.

Questo non è in contraddizione con quanto affermato in precedenza: qui viene sottolineata l'importanza di una crescita metacognitiva e di una graduale maturazione dei processi matematici appresi. Infatti, i bambini da piccoli, imparano a contare senza conoscere il significato dei numeri. Non capiscono che il numero 3 sta per 3 di qualcosa.

Un bambino, sordo od udente, che non è messo nella condizione di capire che i numeri corrispondono a cose reali, avrà delle difficoltà nell'imparare l'aritmetica, mentre chi sa che i numeri rappresentano oggetti reali, avrà delle solide fondamenta per affrontare addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni.

Il primo passo nell'insegnamento della matematica è quello di giungere al concetto di numero attraverso l'esperienza concreta: dalla manipolazione, al gioco, alla strutturazione, alla comprensione finale, a nuovi esercizi concreti per fissare più profondamente il nuovo concetto.

Occorre tenere presente che ogni volta che si conta, bisogna farlo in termini concreti (palleggi, saltelli, libri o passi, palline).

I Programmi ministeriali, avvertono esplicitamente che:

"Non è possibile giungere all'astrazione matematica senza percorrere un luogo itinerario che collega l'osservazione della realtà, l'attività di matematizzazione, la risoluzione di problemi, la conquista dei primi livelli di formalizzazione". Noi riteniamo che nel curriculum di matematica per la scuola elementare i contenuti e le attività proposte debbano prendere avvio da situazioni di esperienza (la giornata, le stagioni, il calendario, la classe, la scuola, le monete, le banconote) su cui viene poi innestata l'attività matematica. Uno degli aspetti più significativi è costituito dal modo di considerare e assumere questa realtà esperienziale del bambino: dunque una realtà studiata non solo dal punto di vista matematico, ma in tutti i suoi aspetti e quindi anche nelle sue implicazioni interdisciplinari[19]".

Si aiuterà il bambino a capire che i numeri rappresentano determinate quantità e quando conterà, saprà di che cosa sta parlando.

19 Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca- Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema Educativo d'Istruzione e di Formazione, R*ilevazione degli apprendimenti anno scolastico 2004-2005,* Prova di Matematica, Scuola Primaria**,** Classe Terza.

“In questo modo anche il bambino sordo, potrà accedere all’apprendimento della matematica: utilizzare esercizi concreti e direttamente visibili aiuta il bambino a formare i primi concetti matematici che saranno la base per gli apprendimenti successivi. Quando il bambino sordo inventa gesti per comunicare, abbiamo la dimostrazione che l’attività cognitiva si sviluppa prima rispetto all’attività linguistica ed in modo separato da essa perché è il pensiero a produrre ed ideare il mezzo di comunicazione nel bambino sordo[20]*”.*

Furth in “*Pensiero senza linguaggio*”, aprì la strada a nuove teorie, sui rapporti tra pensiero, simboli e linguaggio, dimostrando come sia possibile insegnare ai bambini il pensiero logico nonostante le carenze linguistiche. Egli, infatti attribuiva le difficoltà che i sordi incontrano nel pensiero astratto, non all’utilizzo di una lingua visivo-manuale, ma alla loro non conoscenza della lingua italiana e alle carenze esperienziali, derivate dal ristretto ambiente sociale di appartenenza.
Le convinzioni di Furth derivavano da una serie di esperimenti condotti su alcuni sordi, messi a confronto con udenti della stessa età. Essi restavano indietro rispetto agli udenti più che nella comprensione e nell’applicazione di concetti, in quelle attività che richiedevano:

[…]“iniziativa spontanea e la scoperta della mente che ricerca” dimostrando “un’incapacità di cercare le ragioni, non di ragionare”, attribuibile, come abbiamo detto, alle carenze esperienziali, ma soprattutto alle difficoltà della lingua vocale. Furth mostra che nell’attività didattica la parola non è sempre essenziale, soprattutto nell’accesso ad un argomento scientifico poiché si intrecciano molteplici modi di guardare, osservare, agire, oltre che di parlare, ascoltare, scrivere[21]*.*

[20] Pigliacampo R., *Lingua e Linguaggio nel sordo, analisi e problemi di una lingua visivo-manuale,* Armando Editore, Roma, 1998.
[21] Furth H. G., *Thinking withaut language: psychological implication of deafness,* Roma: A. Armando, 1971.

VI. Cinestesia e matematica

Il corpo, l'esperienza diretta, il gioco e l'esercizio motorio sono basilari per l'acquisizione dei concetti matematici, ma bisogna anche sottolineare che questi aspetti educativi sono tali solo quando si dispone di opportuni strumenti linguistici e simbolici che permettono di analizzare tutte le peculiarità contingenti della realtà vissuta.

Lavorando con i bambini sordi si nota subito la necessità che questi hanno, più degli udenti, di sistemare le categorie spazio-temporali e logiche. Al di là di tutte le strategie che si possono mettere in atto per insegnare le categorie logiche e spazio-temporali, bisogna primariamente far acquisire "categorie primitive", cioè categorie mentali non riconducibili ad altre e quindi come tali non assimilabili attraverso la spiegazione, l'esempio, conquistabili solo con l'esperienza diretta basata sull'attività cinestetica.

L'essere categorie primitive e che cosa queste implichino è più facilmente comprensibile attraverso esempi appartenenti al mondo dei sentimenti. Un individuo non può capire cos'è l'amore attraverso le spiegazioni, i racconti, ma solo attraverso l'esperienza diretta potrà possedere e capire questo sentimento primitivo. Analogamente per lo spazio e per il tempo, solo quando l'esperienza diretta ha fornito questi concetti è possibile affinarli e farli evolvere fino a raggiungere una capacità nel comunicarli sinteticamente e simbolicamente. Solo così concetti diventano strumenti per capire altri concetti ed altri strumenti che derivano da questi.

La conoscenza del proprio essere fisico non costituisce un concetto matematico, ma è alla base dei concetti matematici. La matematica arriva quando un individuo proietta la sua struttura corporea e il suo agire sulla realtà che sta dentro o fuori se stesso, in questo modo gli attributi e le proprietà della fisicità del suo corpo sono il tramite che gli permette di dare o di scoprire gli attributi e le proprietà della realtà. Sono questi ultimi i concetti matematici e si possono elencare: ordine, posizione, dimensione, quantità, operatività aritmetica, forma.

Tante incapacità matematiche di molti sordi hanno la loro origine nella incompleta o scorretta maturazione degli schemi corporeo-motori. Se si considera il concetto spaziale davanti/dietro, per esempio, ci si rende conto che tutti i bambini, sordi e non, nelle prime fasi delle conoscenze posizionali non hanno il concetto di riferimento ed esprimono un valore posizionale ubbidendo a stimoli mutati dall'apparenza sensoriale o da criteri d'ordine. Anche se i bambini utilizzano le parole davanti e dietro, non esprimono una corretta concezione dello spazio; sono termini che esprimono un mondo ancora legato alle apparenze sensoriali.

L'insegnante deve lavorare per portare il bambino verso una concezione posizionale più obiettiva, cioè legata alla rappresentazione mentale del riferimento. Il primo riferimento che il bambino scopre è il proprio corpo e in maniera particolare il proprio tronco corporeo: quando acquisisce questa consapevolezza è pronto ad utilizzare questa concezione proiettandola fuori di sé e riuscendo così ad ottenere una partizione dello spazio. Ad esempio, attraverso attività psicomotorie il bambino ha sensazioni corrette, ma diverse tra il davanti e il dietro: ciò significa che ha acquisito la capacità di suddividere mentalmente il tronco corporeo in due parti creando così una concezione mentale chiamata "piano corporeo".

A questo punto anche se il bambino gira la testa, il davanti/dietro non cambia perché non è la vista che lo determina, ma il suo piano corporeo. L'azione come fonte principale della conoscenza prende lo spunto dal fatto che ogni intervento dell'uomo su di una realtà permette, oltre che di modificare la realtà stessa, di conoscerla. La percezione, unitamente alla sensazione, svolge la funzione di segnalazione che permette di compiere l'azione e di attivare l'isomorfismo fra l'azione fatta e lo specifico dell'intelligenza che è il trasformare. La sordità non è un impedimento all'intelligenza, ma potrebbe essere un impedimento ad una giusta esperienza spazio-temporale. Sappiamo che i riferimenti temporali, come quelli spaziali, si acquistano attraverso l'azione e l'attività cinestetica che è alla base dell'apprendimento delle categorie temporali.

"A causa del loro deficit, i sordi hanno difficoltà ad agire in simultaneità sugli oggetti, specialmente quando cominciano a relazionarsi, come nei giochi interattivi, con i compagni non sordi. Può conseguire una carenza di esperienze temporali che è la causa principale della carenza in aritmetica[22]".

[22] Bartolomei A., *Linguaggio dei segni e Matematica* in I Care, anno 23, n. 3 pag. 96-102, 1998.

Il numero naturale "dodici" è un aggettivo che può esprimere un attributo di una determinata realtà: potrebbe essere la quantità di caramelle contenute in un sacchetto oppure, nella forma "dodicesimo", il valore posizionale di un gradino nel contesto dei gradini di una scalinata. Ma il dodici non è in queste realtà, è un concetto che si forma all'interno dell'uomo ed esprime l'aver colto un nesso logico chiaro: questo numero non sarebbe raggiungibile come concetto senza l'agire dell'intero o di una parte del corpo dell'uomo. Si osservi che un uomo, posto davanti ad un insieme di caramelle sparpagliate sul banco, per arrivare a trovare quante sono, ha la necessità di compiere azioni che si susseguano nel tempo in modo che ad ogni azione corrisponde biunivocamente un oggetto collocato spazialmente: questa proiezione dello schema motorio sulla realtà è ciò che viene chiamato contare. Le esperienze fatte sul piano fisico sono alla base della conoscenza, sensoriale, percettiva e mentale dei concetti. Attraverso un buon approccio spaziale alle cose è possibile apprendere quei concetti che saranno alla base della futura conoscenza matematica.

VII. Matematica e cultura linguistica

Il modo in cui gli esseri umani apprendono il sistema di conteggio è proprio della cultura di appartenenza ed è strettamente correlato con la rappresentazione iniziale del concetto di numero.
Secondo l'impostazione teorica di Luis Radford è evidente la specificità degli ambienti nei quali, nella storia, si è sviluppata la ricerca scientifica e matematica:

"Un semplice sguardo alle varie culture nella storia mostra che ciascuna ha avuto interessi scientifici propri. Inoltre, ciascuna cultura ha avuto modalità proprie di definire e di delimitare la forma e il contenuto degli oggetti della propria ricerca[23]*".*

[23] Bagni G. T., D'Amore B., *Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale*, in La matematica e la sua didattica 1, 73-89 Dipartimento di Matematica e Informatica Università di Udine, 2005.

In tale situazione il ruolo della storia non può che essere interpretato con riferimento alle diverse culture e fornisce dunque una preziosa occasione per la ricostruzione critica dei contesti socio-culturali del passato.
La configurazione e il contenuto della conoscenza matematica è propriamente ed intimamente definita dalla cultura nella quale essa si sviluppa.
Questa tesi è supportatala altri studiosi e cultori della matematica che evidenziano, infatti, che anche il contesto culturale può in effetti influire sullo sviluppo delle abilità matematiche.
In particolare ricordiamo le ricerche di Hatano che afferma che un differente modello di sviluppo delle abilità matematiche può essere causato da fattori culturali e linguistici. I suoi studi riguardano principalmente la correlazione del pensiero logico-matematico di soggetti occidentali e di soggetti cinesi. Quest'ultimi superano notevolmente gli europei nelle abilità di calcolo. Questa superiorità può essere attribuita, secondo Hatano, alla maggior quantità di esercizio che i bambini cinesi fanno sia a scuola che a casa, e al fatto che la cultura cinese dà maggiore importanza al calcolo mentale e all'applicazione costante.
Un altro fattore che sembra migliorare le abilità di calcolo è l'abaco cinese. L'uso di questo strumento può ridurre l'ansia dei bambini quando devono affrontare un compito di calcolo: manipolare un abaco, soprattutto dopo la terza classe elementare, è più semplice che non scrivere le operazioni. Il suo utilizzo permette inoltre di fare un notevole esercizio mentale che facilita il bambino a memorizzare i risultati delle addizioni e sottrazioni ad una cifra. Va infine osservato che la logica dell'abaco si basa su un modello alternativo di conteggio, non in senso crescente o decrescente come generalmente insegnato nella nostra cultura, ma per "raggruppamento" che può velocizzare e facilitare il calcolo mentale.
Vi sono anche dei fattori linguistici che privilegiano i soggetti cinesi: le parole cinesi corrispondenti ai numeri sono regolari e sistematiche; ad esempio, undici, dodici, tredici, in cinese si dicono rispettivamente, dieci-uno, dieci-due, dieci-tre,. Questa struttura linguistica limiterebbe alcuni fattori di confusione quando, nelle prime fasi dell'apprendimento matematico, i bambini operano con i numeri.
Di seguito riportiamo un esempio numerico cinese:

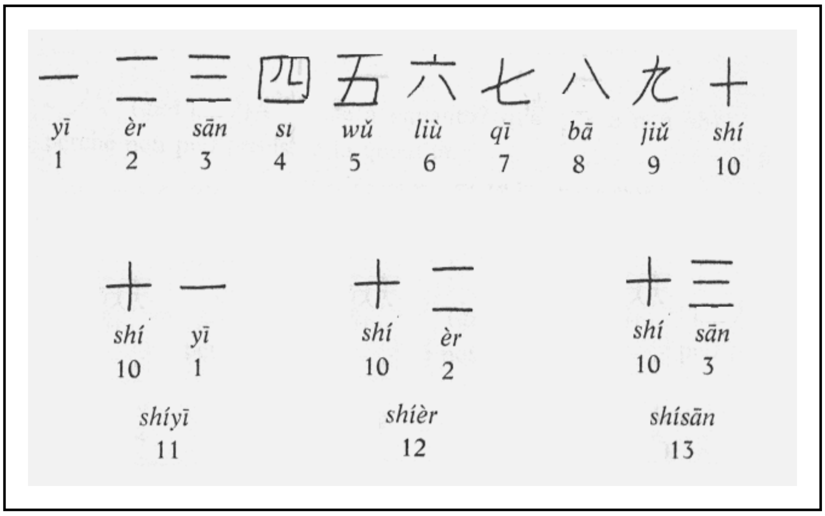


Figura 1

In cinese, quando si vuole quantificare un oggetto, una sostanza, espressa da un nome, è sempre necessario accompagnare il numero da un'altra forma, inserita tra un numero e un nome, la cui funzione consiste nell'individuare la misura necessaria della quantificazione.

Questa lingua introduce un elemento che nelle lingue europee non esiste ed è noto solo in alcune lingue africane, e nelle Lingue dei Segni, il classificatore.

In italiano, usiamo spesso, dopo un numerale, delle parole che ci precisano il gruppo o la categoria d'appartenenza di un dato sostantivo: ad esempio tre pacchetti, sei scatole, otto pezzi, ecc., ci anticipano alla mente le sigarette, i cerini, il sapone. Allo stesso modo un branco ci anticipa alla mente le pecore o comunque animali, e una banda i ladri. In cinese avviene pressappoco lo stesso fenomeno, ma con maggiore estensione e con l'uso del CL anche con altre parti del discorso che non siano numerali. Tali CL sono presenti nel lessico cinese in maniera notevole ma, per fortuna, nell'uso corrente il numero dei CL è assai ridotto, al punto che, spesso, se ne usano tre o quattro.

E ancora. Nella lingua italiana per contare oggetti numerabili è sufficiente indicare un numero seguito dal nome, ad esempio:'tre cavalli,'due fanti', 'un re'; in cinese e nelle lingue dei segni questo non è possibile, non si può dire "san rén" per dire 'tre uomini' o segnare prima il numero tre e poi il sostantivo uomini: in cinese tra numero e nome va inserito il classificatore, in LIS il classificatore uomini è ripetuto tre volte nello spazio neutro. Che cos'è il classificatore? Nella LIS, il classificatore è un segno o un gesto che sostituisce o pronominalizza qualcuno o qualcosa in correlazione alle forme o alle dimensioni della categoria degli oggetti a cui si riferisce. Durante la conversazione in lingua dei segni spesso troviamo i segni classificatori: essi sono essenziali, e sarebbe impensabile usare la lingua dei segni senza farvi ricorso, poiché questa risulterebbe troppo povera d'informazioni; infatti sono moltissime le funzioni che i classificatori svolgono a livello semantico, morfologico e sintattico.

Lo studio dei classificatori è ancora in atto, per questo spesso nei testi specializzati s'incontrano definizioni con sfaccettature differenti: ebbene ricordare che lo studio della grammatica della Lingua dei segni è ancora giovane e per questo soggetta a continui cambiamenti e sfumature. Orazio Romeo ci dà la seguente definizione:

"Essi sono entità grammaticali che costituiscono parte integrante non solo del lessico, ma anche della struttura della lingua[24]".

Un'altra definizione di classificatori ci è fornita da Mary Brennan, una studiosa della lingua dei segni inglese; ella caratterizza i classificatori come unità linguistiche che indicano a quale gruppo, o categoria appartiene uno specifico referente che può essere un oggetto, un animale, una persona. I classificatori segnalano se un dato oggetto appartiene alla classe degli esseri animati, o degli esseri umani, oppure alla classe degli oggetti rotondi, o piatti, o alla classe dei veicoli e così via.

I classificatori vengono inseriti nella "categoria di segni non citazionali", vale a dire segni più flessibili che variano a seconda di ciò che devono rappresentare. Esistono diversi tipi di classificatori che servono per descrivere oggetti piccoli e grandi, persone, animali, spazi aperti o chiusi, ecc. La descrizione che segue rappresenta uno schema dell'utilizzo dei classificatori:

- per la forma (bottiglia, montagna);
- per l'afferramento (foglio, bicchiere, auto, cellulare, sms)
- per il movimento (cancello, squalo, delfino, serpente);
- per l'azione (nuoto, scimmia);

[24] Romeo O., *Osservazioni sui classificatori*, in Viaggio nella città invisibile, Atti del Convegno Nazionale sulla Lingua dei Segni, Genova, 25-27 Settembre 1998.

- per il comportamento (vanitoso, preciso).

Analizzare i classificatori non è cosa semplice, non solo perché variano in relazione alla lingua dei segni che si analizza, ma anche a seconda del contesto o dell'esecuzione personale, da individuo a individuo: ad esempio il segno classificatore relativo alla persona o ad un veicolo può variare nella configurazione, a seconda che il segnante usi i segni rispettando le regole grammaticali standard, oppure personalizzi i segni stessi. Anche nelle lingue parlate, il modo di utilizzare il linguaggio varia da persona a persona, da contesto a contesto: l'importante è che il codice linguistico che si utilizza possa essere decodificato e quindi compreso dal nostro interlocutore.
Per capire meglio i classificatori possiamo pensare al modo in cui viene quantificata la parola "zucchero" in italiano. Non diciamo "uno zucchero, due zuccheri", ma utilizziamo delle unità di misura quali 'un velo di zucchero, 'un cucchiaino di zucchero, 'una zolletta di zucchero, 'un chilo di zucchero. Questo avviene perché in italiano "zucchero" é una parola non numerabile e per la sua quantificazione richiede il ricorso a forme di quantificazione codificata o approssimativa. Concettualmente la codificazione di parole come 'zucchero' è molto vicina ai classificatori cinesi e della lingua dei segni, anche se in italiano si tratta di "costruzioni nominali che rappresentano l'elemento reggente in costruzioni genitive, mentre in cinese i composti numero-classificatore fungono da modificatori del nome quantificato" .
Comprendere un concetto grammaticale che non esiste nella nostra grammatica non è cosa semplice. Per riuscire a superare questa difficoltà e a non cadere nell'errore di semplicismi semantici è utile riportare osservazioni e studi riguardanti questo aspetto particolare di alcune grammatiche.

VIII. Confronto tra grammatica LIS e grammatica cinese

Un'osservazione superficiale delle lingua italiana dei segni, messa a confronto con le lingue vocali, dà l'impressione che questa sia sostanzialmente priva di una sua grammatica e di regole strutturali indispensabili per la comunicazione.
In realtà, la Lis, ha una sua grammatica, una sua morfologia anche se molto diversa dall'italiano o dalle lingue orali.

"Se si mettono a confronto lingue orali come l'italiano o il latino e lingue dei segni come la LIS si può osservare che le prime si avvalgono sostanzialmente di una morfologia flessiva cioè di processi grammaticali che riguardano la modulazione, la flessione degli elementi linguistici (le flessioni verbali per persona, il numero) [25] *".*

"Le lingue dei segni, invece, sono dette analitiche perché per le distinzioni di genere e numero, di singolare e plurale o ancora nella declinazione dei verbi, si avvalgono, non della flessione dei nomi, ma di strumenti particolari semantici, sintattici quali l'ordine degli elementi all'interno della frase ed infine di particolari indicatori morfologici, i classificatori, presenti solo in pochissime lingue orali, tra le quali il cinese [26] *".*

In base a due luoghi comuni molto diffusi, la lingua cinese viene spesso definita come monosillabica e, per quanto concerne la sua rappresentazione scritta, ideografica. Per sfatare questi due miti, il secondo dei quali sott'indente che il cinese, servendosi di ideogrammi, cioè di raffigurazioni grafiche di idee, quali unità di scrittura, si trovi in una fase di sviluppo più arretrata rispetto alle lingue alfabetiche, è sufficiente analizzare le principali caratteristiche dello sviluppo della scrittura cinese in opposizione a quelle delle lingue alfabetiche.
I caratteri, le unità del sistema di scrittura cinese, vengono tradizionalmente suddivise in sei classi: ideogrammi, pittogrammi, composti fonetici, ideogrammi composti, falsi sinonimi, prestiti fonetici.
I caratteri appartenenti alle prime due classi (i più antichi), dimostrano come inizialmente il processo di sviluppo del sistema di scrittura cinese sia stato sostanzialmente simile a quello registrato dei sistemi di scrittura delle altre antiche civiltà, ad esempio la civiltà egiziana: tutti i sistemi di scrittura alle loro origini hanno infatti probabilmente condiviso le caratteristiche comuni di essere sistemi di comunicazione direttamente collegati non ad unità

[25] Pizzuto E., *Aspetti morfo-sintattici*, in La lingua dei segni italiana. La comunicazione visivo-gestuale dei sordi, p. 179-209 Bologna, 2004.
[26] Scalise S., Ceccagno *A. Facile o difficile ? Alcune riflessioni tra italiano e cinese* in. Bosc F., Marello. C., Mosca S. (EDS.) Sapere insegnare. Formazione d'insegnanti d'italiano tra scuola ed università. Loesher ,Torino, 2000.

linguistiche, ma all'oggetto (persona, cosa, atto, evento, idea) della loro raffigurazione. I caratteri delle altre classi dimostrano come ad una certa fase dello sviluppo, nel sistema di scrittura cinese si sia verificato un cambiamento rivoluzionario, paragonabile a quello verificatosi nel sistema di scrittura egiziano nella sua fase più avanzata: entrambi i sistemi hanno, infatti, ad un certo punto cessato di raffigurare direttamente persone, cose, atti, eventi, idee, ed hanno cominciato a rappresentare unità della lingua mediante le unità della scrittura. La scrittura cinese, ideografica alle sue origini, ma al presente si sa che la grande maggioranza dei caratteri appartiene alla classe dei caratteri fonetici e dei composti fonetici, non può quindi essere considerata ad una fase di sviluppo più arretrata rispetto a quello delle lingue alfabetiche, ma piuttosto ad una fase di sviluppo diversa: non può essere considerata "inferiore", ma soltanto differente.

Se è, infatti, senz'altro vero che i sistemi di scrittura fonetici sono di gran lunga più facilmente apprendibili, dato il numero limitato di fonemi rispetto a quello dei morfemi, il sistema di scrittura cinese ha un suo lato positivo nel fatto di essere scritto, letto e compreso da tutti coloro che se ne servono, indipendentemente, entro certi limiti, dalla comunità linguistica di appartenenza.

Capitolo **II.** Schemi d’azione e strategie nella soluzione di problemi matematici

I. Campo educativo e soluzione di problemi

L'apprendimento per problemi, in ambito educativo, è un metodo pedagogico strutturato, che utilizza come stimolo all'apprendimento un problema, appunto, cioè una serie di fenomeni correlati tra loro che necessitano di una spiegazione.

“*Questo metodo presuppone che lo studente sia il protagonista del suo apprendimento: si è osservato, infatti, che chi apprende per problemi utilizza in modo autonomo conoscenze già acquisite per individuare possibili soluzioni a problemi concreti; modifica e rende più flessibili le proprie capacità; scopre conoscenze nuove; consolida in modo permanente le conoscenze che già possiede*[27] “.

Il metodo della didattica per problemi consente agli allievi di imparare a risolvere, con gradualità, problemi sempre più complessi che gli permettono di acquisire abilità cognitive di livello via via più elevato.
Un problema può essere una domanda che richiede una risposta precisa ed esauriente, oppure, un quesito che richiede l’individuazione o la costruzione di regole e di procedure che soddisfino condizioni predefinite e consentano di risolvere lo stesso.
L’attività di insegnamento-apprendimento per problemi deve consentire a ciascun allievo di:

- Ricercare dati ed informazioni;

[27] Quartapelle F., *Definire il progetto,* in AA.VV., Didattica per progetti (IRRSAE Lombardia) Franco Angeli, p. 27, 1999.

- Fare stime e calcoli;
- Formulare ipotesi risolutive;
- Proporre soluzioni;
- Prendere decisioni.

Durante la soluzione di un problema l'allievo deve essere messo dal docente in condizione di scoprire (e ri-scoprire) ed acquisire autonomamente conoscenze nuove.

I problemi non devono essere imposti, in modo direttivo, ma essere discussi e condivisi dal gruppo classe e/o in piccoli gruppi. I docenti assumono la funzione di guida metodologica, di tutor, di assistenza e di consulenza per ciascun allievo o per il gruppo di alunni impegnato nella soluzione.

Quando un allievo s'imbatte in un problema, inizialmente ne sa molto poco, ma potrà diventare esperto, formulando ipotesi risolutive, seppure inadeguate ed insoddisfacenti, criticando, rivedendo ed affinando le ipotesi stesse, dopo averle messe alla prova.

Comprendere un problema, quindi, significa capirne le difficoltà, tentare di risolverlo con un'applicazione tenace e responsabile, con perseveranza e gratificazione intellettiva. Con tale metodo si possono sviluppare alcuni aspetti fondamentali della personalità quali:

- La responsabilità;
- L'autonomia;
- La fiducia in sé;
- La stima di sé;
- La cooperazione con gli altri;
- La solidarietà;
- Le capacità decisionali.

Le ricerche sul "problem solving" possono avere molteplici riflessi sul piano dell'attività didattica. Bisogna, innanzitutto, tenere presente che già, quando il bambino fa il suo ingresso a scuola, ha una predisposizione naturale a porre agli adulti dei "perché", a cercare delle spiegazioni dei fenomeni che vive giorno per giorno.

La scuola dovrebbe alimentare e sviluppare ulteriormente questa tendenza naturale, sollecitando gli allievi a scoprire problemi nuovi, a formularli con chiarezza, a guardare sempre le cose e gli eventi con un atteggiamento di curiosità cognitiva, con un "occhio critico".
E' importante poi sviluppare via via la capacità di elaborare i problemi, e in pratica di affrontarli con la consapevolezza dei "trabocchetti" ai quali il pensiero è esposto nel suo lavoro di ricerca, utilizzando gli atteggiamenti e i procedimenti euristici adatti.
I singoli problemi sollevati, i "perché" posti, non possono certo essere liquidati con una risposta immediata e quasi meccanica, ma devono, invece, dare luogo ad un'attività d'elaborazione del problema, attraverso una discussione di gruppo nel corso della quale ogni allievo è invitato a formulare delle ipotesi, attraverso conversazioni che arricchiscono il quadro introducendo nuovi esempi e nuovi riferimenti, ed anche attraverso osservazioni e ricerche guidate individuali o collettive o, talvolta, veri e propri esperimenti.
Le attività di *problem posing*[28] e di problem solving non devono essere identificate con quella di risoluzione di esercizi applicativi; esse sono attività più complesse. Gli esercizi applicativi possono essere risolti utilizzando concetti e regole già apprese, mentre la soluzione di un problema nuovo richiede capacità decisionali e l'utilizzazione di procedure e di strategie da scoprire. La strategia di risoluzione di un problema comporta l'esplorazione di regole (esperienze, procedure, leggi, ecc), l'analisi della situazione da più punti di vista, l'utilizzazione di regole anche nuove e la capacità di valutare la risolvibilità del problema stesso.
Il problem solving potrebbe essere definito come un approccio didattico teso a sviluppare, sul piano psicologico, comportamentale ed operativo, l'abilità nella risoluzione di problemi.
Il problem solving, pur essendo associato allo sviluppo delle abilità logico-matematiche di risoluzione di problemi, non si rivela l'unica area didattica che può giovarsi di dette abilità: "problem solving" in un'ottica interdisciplinare, può voler dire uso corretto dell'abilità di classificazione

[28] L'attività di problem posing consiste nel concettualizzare un problema, mediante una riflessione sulla situazione problematica nella quale l'allievo s'imbatte.

di situazioni problematiche e capacità, quindi, di risolvere problemi-tipo analoghi, siano essi pertinenti all'area logico-matematica o meno.

Il metodo di soluzione dei problemi, del quale il problem solving è una sfaccettatura, pone, come nucleo operativo, la scoperta ed il dominio di situazioni problematiche in generale, che possono sviluppare le potenzialità euristiche dell'allievo, e le sue abilità di valutazione e di giudizio obiettivo.

II. Risoluzione di problemi

Stabilire rapporti, connessioni e corrispondenze significative sono riconosciute essere componenti fondamentali del pensiero matematico.

"C'è una generale concordanza di opinioni nel riconoscere come componente essenziale della cosiddetta abilità matematica la consapevolezza della connessione interna esistente nelle relazioni matematiche. Si parla anche di abilità come capacità di stabilire connessioni significative tra i concetti e si evidenzia che il fatto essenziale nel processo produttivo sta nel cogliere le relazioni strutturali in termini di principi di organizzazione che trascendono le proprietà specifiche individuali[29]".

Nell'ambito dell'educazione matematica le modalità di risoluzione di un problema possono essere molteplici poiché dipendono da una miriade di fattori non facilmente controllabili: età del ragazzo, cultura di appartenenza, deficit sensoriali, ecc.

In un suo libro del 1963, Polya scrive:

"In primo luogo voglio essere preciso su qual sia il primo e principale obiettivo dell'insegnamento della matematica: insegnar a pensare. Ciò significa che l'insegnante non deve solo fornire informazioni, ma anche fare in modo che gli allievi sviluppino l'abilità di utilizzare le

[29] Krutetskii A., *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*, The university Chicago Press, Chicago, 1976.

informazioni ricevute, insistendo sul saper fare, su atteggiamenti favorevoli, su abiti mentali desiderabili. Il pensiero di cui parlo non è un sognare a occhi aperti, ma un "pensare diretto ad uno scopo" o un "pensare volontario", un "pensiero produttivo. Questo pensiero può essere identificato con la soluzione di problemi. Comunque l'abilità nel risolvere problemi la considero la principale delle finalità scolastiche. Il pensiero matematico non è puramente"formale", non è preoccupato solo di assiomi, definizioni, prove rigorose; molte altre cose gli appartengono: generalizzare a partire da casi osservati; argomenti induttivi, argomenti per analogie, riconoscere un concetto matematico in una situazione concreta o saperlo estrarre da essa. L'insegnante ha molte opportunità per abituare i suoi alunni a questi processi informali di gran valore: insegniamo a provare con ogni mezzo, ma anche a congetturare.(...) Il saper fare in matematica è l'abilità a risolvere problemi, a trovare prove, a criticare argomenti a favore, ad usare il linguaggio matematico con una certa fluidità, a riconoscere concetti matematici in situazioni concrete[30] ".

Nell'ambito della disciplina matematica vengono individuate due importanti scuole di pensiero che si occupano di strategie risolutive: la risoluzione per intuizione improvvisa e la risoluzione di tipo routinario.

Varie ricerche, soprattutto quelle proposte dalla scuola di pensiero degli psicologi gestaltisti, hanno messo in luce che "il miglior pensiero" è quello creativo e produttivo, in cui vi è un allontanamento od una rottura con l'esperienza passata. La soluzione è possibile quando si guarda ad un nuovo problema nei suoi termini specifici senza tener conto della sua similarità con altri precedentemente incontrati.

Nella risoluzione di problemi si incontrano notevoli difficoltà dovute al fatto di fissare l'attenzione su una sola funzione di un elemento del problema. Spesso, infatti, il raggiungimento della soluzione dipende dalla capacità o meno di rappresentarsi gli oggetti in modo nuovo. Talvolta rimanere ancorati a elementi precedentemente appresi o fissare

[30] Polya G., *On learning, teaching, and learning teaching*, in NCYM, Teaching and learning: A problem-solving focus, 1963p. 37.

l'attenzione solo sulla rappresentazione usuale di un oggetto conduce ad una "*fissità funzionale*[31] *"* e quindi impedisce un pensiero creativo.
Lo psicologo Duncker, si chiede come, dato un problema, venga fuori la soluzione. Secondo Duncker, la soluzione "sorge" dall'esame dei dati iniziali, nell'ottica di ciò che viene richiesto, e da una serie di ricostruzioni della situazione, durante i quali si verificano anche momenti di improvvisa comprensione. D'altro canto, la persona "povera" da un punto di vista matematico non riesce ad effettuare facilmente le trasformazioni e ricostruzioni perché il contenuto che rileva è per lui fisso e rigido. In sintesi, più una persona è capace, più aspetti di una situazione riesce a vedere con uno sguardo, insieme con le loro somiglianze e differenze.
Altre ricerche, provenienti da scuole psicologiche differenti, mettono in luce l'importanza dell'esperienza passata anche nel caso di problemi d'insight. Nella risoluzione di un problema molto spesso si fa riferimento a problemi specifici precedentemente incontrati e si ricerca la soluzione sulla base di un processo di transfert trasferendo le conoscenze dei problemi passati a quello nuovo:

"Per processo di transfer s'intende l'applicazione di un principio di soluzione da un problema base di tipo familiare a uno nuovo[32] *".*

Oggi l'idea d'abilità innata e di trasferimento delle conoscenze viene integrata con il concetto di "performance", cioè di quello che un soggetto riesce a fare in determinati contesti.
Senza dubbio i processi cognitivi che fanno appello a trasformazioni, ricostruzioni e corrispondenze sono di grande importanza nell'apprendimento della matematica e in essi il pensare per analogia gioca un ruolo fondamentale.

"Sembra che la parola "analogia" originariamente non fosse un termine grammaticale o linguistico ma matematico, col significato di

[31] "[…] *"Potenzialmente ciascun oggetto può eseguire molteplici funzioni. Talvolta, però, ci capita di non essere in grado di renderci conto che uno specifico oggetto possa eseguire la funzione necessaria per risolvere il problema",* Duncker in AA. VV., Psicologia dei processi cognitivi, Il Mulino, Bologna, 1995.
[32] Reeves F., Weisberg M.,m*Psicologia dell'apprendimento matematico*, in Lucangeli D., Passalunghi M., Utet, Torino, 1995.

"proporzione", cioè uguaglianza di rapporti".

Nell'ambito della didattica della matematica è di particolare rilievo l'interesse mostrato ripetutamente da Polya nei suoi lavori. In particolare, Polya parla dei concetti di generalizzazione, specializzazione e analogia. Secondo Polya, la generalizzazione consiste nel passare dalla considerazione di un dato insieme di oggetti alla considerazione di un secondo insieme più vasto, contenente il primo. La specializzazione, invece, sta nel passare dalla considerazione di un insieme grande ad uno più piccolo in esso contenuto. Mentre, osserva Polya, non c'è nulla di vago in questi due concetti, lo stesso non si può dire per l'analogia. Egli definisce l'analogia come una specie di *similarità*. Oggetti simili concordano per qualche aspetto, ma se s'intende considerare l'aspetto che hanno in comune per definire un concetto, allora gli oggetti simili vengono visti come analoghi. Gli oggetti somiglianti concordano per qualche aspetto, mentre oggetti analoghi concordano per determinate relazioni che intercorrono tra parti corrispondenti.

Inoltre quando Polya tratta della risoluzione dei problemi il ricorso al ragionare per analogia è posto in rilievo come strumento di forte potenzialità generatrice.

È di indubbio interesse anche lo studio delle analogie e delle metafore come elementi del linguaggio matematico. A tal riguardo Pimm, combatte l'idea secondo cui l'analogia e la metafora siano parte di un metodo di lavoro incerto e mostra, attraverso esempi presi dall'aritmetica, dall'algebra e dall'analisi, come i procedimenti di tipo analogico siano importanti nell'esprimere significati matematici, così come lo sono nel linguaggio naturale. Il pensare per analogia costituisce dunque una componente importante nella costruzione della conoscenza in generale e del sapere matematico in particolare.

Occorre però essere consapevoli che, se da una parte l'analogia può essere una potente generatrice d'ipotesi, dall'altra può essere fonte di misconcetti, quando vengono assunte per valide delle corrispondenze non giustificate e non giustificabili. Tuttavia, la qualità dell'apprendimento basato sull'uso delle analogie dipende principalmente dall'abilità dell'allievo nell'eseguire correttamente il procedimento di mappaggio. Abbiamo osservato che alla

base del pensiero analogico sta il riconoscimento di una certa somiglianza parziale tra due oggetti o sistemi e da questo può derivare l'assunzione che le due entità siano analoghe anche per altri aspetti. L'essenza del pensiero analogico è il trasferimento di una conoscenza da una situazione ad un'altra per mezzo di un insieme di corrispondenze. Mediante un'operazione di mapping si fanno corrispondere due aree della conoscenza in modo che le informazioni sulle relazioni strutturali tra gli elementi di un campo meglio conosciuto (source) vengano proiettate su quello meno noto (target).
Nel target si permette così la formazione o la ristrutturazione, a volte anche radicale, dei concetti che vi sono implicati o, eventualmente, la possibilità di isolare un nuovo elemento, le cui caratteristiche e le cui relazioni causali con altri elementi sono analoghe al corrispondente nel modello base. Approcci sistematici allo studio del ragionamento analogico hanno portato all'elaborazione di modelli descrittivi ed interpretativi dei processi sottostanti il pensare per analogia.
In particolare l'analogia svolge una la duplice funzione, ossia quella relativa al recupero di informazioni archiviate in memoria e quella relativa alla codifica di nuove informazioni. Infatti, un'analogia favorisce un recupero di informazioni dalla memoria dando un suggerimento per iniziare il processo di riattivazione attraverso un'immagine significativa. Nell'ambito degli studi più recenti, un affascinante settore di indagini è quello relativo alla funzione del ragionamento analogico nel processo di ristrutturazione della conoscenza individuale e nel superamento di misconcetti. Il ragionamento per analogia viene considerato uno dei più significativi tipi di ragionamento informale, prodotto spontaneamente da soggetti esperti in un dominio quando devono risolvere un problema. Pensando ad una situazione problematica A, ad esempio, un soggetto può passare, senza alcuna sollecitazione esterna, a considerare una situazione B che differisce significativamente da A, ed applicare ad A ciò che trova in B. I due contesti messi in corrispondenza possono apparire diversi dal punto di vista percettivo, ma essere ritenuti funzionalmente o strutturalmente simili per alcuni aspetti. Ricerche recenti hanno mostrato come il ragionamento analogico consenta a soggetti esperti in un campo

di modificare la rappresentazione di un problema ed elaborare un nuovo modello mentale.

Come si vede, la psicologia cognitiva riconosce al ragionamento analogico una grande importanza. Questa attenzione crescente è anche da collegarsi alla presa di coscienza del fatto che il ragionare non sempre opera sulla base di regole di inferenza generali e indipendenti dai contenuti, ma piuttosto è legato a particolari settori di conoscenza ed è altamente influenzato dal contesto in cui avviene. Per questo, un apprendimento proficuo dipende spesso dall'abilità di identificare i settori di conoscenza più significativi già esistenti nella memoria, in modo che essi possano fungere da punti di ancoraggio per la nuova conoscenza. Abbiamo detto dell'importanza di una conoscenza funzionalmente flessibile ed accessibile ogniqualvolta si presenti la necessità di utilizzarla. Uno dei problemi principali non è, infatti, tanto quello di non possedere la conoscenza necessaria alla soluzione di un determinato problema, quanto di non saperla recuperare ed impiegare al momento opportuno, per uno specifico scopo. Il ragionare per analogia può di per sé rendere la base di conoscenza di uno studente più flessibile, facilitare l'apprendimento di regole generali e l'acquisizione di nuovi schemi. Si tratta di liberare la conoscenza "inerte", ossia far sì che l'insieme d'informazioni possedute sia utilizzato in situazioni nuove.

Il ricorso all'analogia si può presentare in momenti diversi nella posizione e risoluzione del problema. Può avvenire nel caso in cui si passi da una situazione ambientata in un contesto ad una situazione ambientata in un altro contesto e ivi se ne riproducano le procedure. Si ha ancora un ricorso all'analogia quando, di fronte a un problema di difficile soluzione, se ne cerchi un altro analogo ma più facile. Conformemente alle caratteristiche del pensiero matematico, si possono avere diverse forme di pensiero analogico, a seconda che vengano più interessati gli aspetti procedurali o relazionali: potremmo parlare di analogie di procedure e di analogie di concetti.

Tutti questi tipi di ragionamento analogico, se da una parte possono favorire la costruzione di conoscenze, dall'altra possono indurre a conclusioni erronee nel momento in cui vengano enfatizzati o di storti particolari aspetti a svantaggio di altri.

Succede spesso che, quando il soggetto si trova in presenza di un forte grado di incertezza di fronte a un problema, egli è portato a cercare un prototipo che permetta di trasportare un nucleo di informazioni da un campo ben conosciuto a un altro meno noto tramite un transfer analogico.
Può succedere allora che si assumano per valide corrispondenze che invece non rientrano nel "mappaggio" dei due sistemi presi in questione. Analogie tacite e non giustificate possono inserirsi nel processo cognitivo e perturbarlo. Queste analogie possono evidenziarsi con l'analisi delle procedure di soluzione dei problemi, ma non è sempre facile. Cogliendo aspetti strutturalmente simili, in un ambito di esperienza familiare, il bambino dovrebbe interiorizzare una "banca dati" a cui attingere al momento di attivare analogicamente, in un ambito sconosciuto, la stessa modalità di comportamento sperimentata nel dominio noto, e costruire un nuovo modello interpretativo.
Gli studi presentati fino a questo momento, fatti da differenti autori e scuole di pensiero si sono basati principalmente sullo studio di bambini udenti, ma molti risultati da loro ottenuti possono essere estesi anche ai bambini sordi, con le dovute differenziazioni. Una prima considerazione da fare è che nei vari studi riguardanti i sordi essi sono stati spesso definiti "rigidi", a proposito del loro pensiero.
Chiunque osservi l'educazione dei sordi non si sorprende di vedere i bambini, una volta appreso un algoritmo di calcolo come l'addizione, applicare la stessa regola anche in contesti non pertinenti perché essi imparano molto presto a ripetere e a rimanere nelle posizioni in cui si sentono maggiormente sicuri. Il dubbio che nasce osservando la rigidità dei sordi che restano attaccati ad un solo punto di vista, è che essi si comportino così perché non comprendono le svariate possibilità che hanno a disposizione.
Un altro elemento che non va trascurato è che i sordi sono deficitarii in molte esperienze ed in molte occasioni comuni che motivano gli altri bambini a porre domande, a ragionare e ad organizzarsi mentalmente.
Spesso una situazione simile può essere vissuta anche da bambini udenti: crescere in un contesto privo di stimoli cognitivi ed essere soggetti ad un'educazione scolastica che mette in atto una meccanica applicazione di regole danno luogo ad una fissità mentale che ostacola la formazione di

un pensiero divergente: vi è un grande rischio che vari metodi di insegnamento della matematica allenino soltanto gli alunni ad essere rigidi nel pensiero, quindi non flessibili ed adattabili ed insegnino ad usare procedure, ma non quando e perché.

Nei bambini sordi, è stata frequentemente osservata l'incapacità o la lentezza nel passare da un principio o da un punto di vista ad un altro. Tale lentezza è stata messa in rapporto con il deficit linguistico dei sordi e con il conseguente "atteggiamento concreto" che ne risulterebbe.

Naturalmente quando i sordi prelinguistici acquisiscono i contenuti matematici attraverso un addestramento formale, e non a seguito di un apprendimento spontaneo, questi risultano oggettivamente più poveri per quantità e qualità rispetto a quelli immagazzinati dagli udenti.

Né la carenza verbale, né l'insufficienza linguistica sono però fenomeni inevitabili: l'esposizione alle modalità visivo-gestuali del linguaggio nei primi anni di vita consente, infatti, al bambino di acquisire contenuti adeguati alla sua età cronologica e al suo grado di maturazione.

III. Schemi di soluzione e strategie di conteggio

"Esistono diverse tipologie di problemi e differenti modi di risolverli. Per esempio, accade spesso che chi ha risolto un problema complesso dichiari che, dopo aver invano cercato la soluzione, abbia poi accantonato il problema per poche ore o per alcune settimane, e sia stato poi in grado di trovare rapidamente la soluzione[33]".

Quando si spiegano passi di soluzione di un problema risolti per intuizione improvvisa, si cerca di ricostruire, dopo l'esecuzione, la logica seguita, ma difficilmente è esplicabile il processo avvenuto.

Nella normale attività didattica, l'iter generalmente seguito per insegnare la matematica parte dal calcolo scritto di semplici operazioni aritmetiche, per poi arrivare, in modo graduale, all'impostazione e alla risoluzione dei problemi: è soprattutto in quest'ambito che gli alunni, sia udenti sia sordi, incontrano le maggiori difficoltà.

[33] Antonietti A., Angelini C. Cerana P., *L'intuizione visiva*, Franco Angeli, Milano, 1995.

Si tratta di difficoltà connesse sia con il processo di costruzione di una rappresentazione mentale della situazione problematica adatta alla messa in atto di strategie risolutive, sia con il processo di pianificazione di una strategia risolutiva pertinente con la struttura matematica del problema.
Inoltre, le abilità riguardanti il calcolo scritto non hanno necessariamente una ricaduta positiva sulla capacità di risolvere i problemi. Se, infatti, è innegabile che i simboli aritmetici e gli algoritmi di calcolo sono strumenti di sintesi e di quantificazione nella risoluzione dei problemi, è altrettanto vero, però, che questo vale per gli alunni che sono capaci di utilizzare i numeri in relazione alla attività operative e progettuali connesse ai problemi stessi.
Gli schemi e le strategie adottate per la risoluzione di problemi sono molteplici e difficilmente categorizzabili in maniera ben definita. Questo dipende dalle differenti strutture di pensiero, dalle differenti modalità di organizzazione delle conoscenze, e da molti altri fattori riconducibili agli svariati meccanismi, consci ed inconsci, che concorrono nella soluzione di un problema. Prima dell'ingresso del bambino a scuola, esso mette in atto delle strategie di conteggio basate sull'uso delle dita o degli oggetti; sull'uso di sequenze di conteggio; sul recupero in memoria del risultato. Per quanto riguarda la prima strategia, le dita o gli oggetti a disposizione vengono usati per rappresentare gli operatori, ad esempio nel caso dell'addizione viene contata l'unione delle due serie iniziando dal primo oggetto appartenente alla prima serie.
Per quanto riguarda le strategie basate sull'uso di sequenze di conteggio, la più elementare è quella del conteggio totale: il conteggio comincia dal numero uno del primo addendo e continua con l'aggiunta della quantità corrispondente al secondo, sino ad ottenere il risultato. Vi è poi la terza strategia che consiste nel recuperare in memoria il risultato corretto: molti osservazioni sui bambini in età pre-scolare hanno dimostrato che essi conoscono a memoria i risultati di addizioni e sottrazioni semplici.
In una recente ricerca internazionale sulla risoluzione dei problemi matematici[34], emerge l'utilizzo di schemi e diagrammi per organizzare le

[34] Asha K., Jitendra K. H., Beck M., *L'uso degli schemi visivi per la risoluzione dei problemi matematici,* in Difficoltà di apprendimento Vol. 8, n. 1, Lehigh University, Bethlehem, pp. 9-20, 2002.

informazioni importanti connesse ad alcuni tipi di problemi matematici e per evidenziare le relazioni semantiche presenti nel problema al fine di facilitare la sua comprensione, traduzione in dati e la sua risoluzione.
Nella sperimentazione effettuata da Jitendra A. K., Hoff K., Beck, la strategia di schematizzazione si è dimostrata efficace per migliorare le prestazioni di risoluzione di problemi matematici di studenti di scuola elementare con difficoltà di linguaggio.

IV. Modelli di calcolo matematico

Le scienze cognitive vanno via via formulando ipotesi sempre più precise riguardo le abilità coinvolte nei processi di apprendimento della matematica e negli ultimi anni si è assistito ad un rilevante sviluppo dell'interesse rivolto allo studio dei processi collegati con l'acquisizione dei concetti matematici.
Non si può affermare a priori che un modello è nettamente superiore ad un altro anche perchè considerando la natura dei processi cognitivi connessi, è altamente improbabile che un unico modello teorico sia in grado di tener conto di tutti gli aspetti implicati nella soluzione di un'operazione aritmetica.
Agli inizi degli studi sperimentali sul calcolo mentale, due erano i tipi di modelli contrapposti: quello di conteggio e quello d'accesso diretto. Secondo il primo modello, per rispondere ad una semplice operazione il soggetto mette in atto un processo ricostruttivo in cui il risultato non è recuperato dalla memoria, ma viene individuato attraverso un procedimento di conteggio.
L'ipotesi del secondo, invece, è che il risultato corretto venga recuperato dalla memoria. Groen e Parkman presero in esame le operazioni d'addizione e moltiplicazione sia in compiti di produzione, in cui il soggetto doveva trovare il risultato dell'operazione, sia in compiti di verifica in cui doveva semplicemente valutare la correttezza del risultato dell'operazione a lui presentata.
Secondo gli autori, l'esecuzione di un'operazione di questo tipo "6+3=?" dovrebbe avvenire in questo modo: l'addendo maggiore è posto come contatore, ovvero come punto di partenza per il conteggio; a tale valore

viene aggiunto l'addendo minore, un'unità alla volta, sino al raggiungimento del risultato “6+1, +1, +1 =9”.

Gli Autori osservano che i bambini più piccoli eseguono una semplice addizione per mezzo di questo processo di conteggio. Quando, però, l'addendo minore è posto per primo aumenta il tempo d’esecuzione dell'operazione e quindi la difficoltà incontrata è maggiore: se, per esempio, è proposto di eseguire l'operazione “3+6”, questa richiede più tempo che eseguire l'operazione “6+3”. Questo modello, però, anche se valido, presenta delle carenze poiché non riesce a spiegare adeguatamente tutti i meccanismi attivati nei bambini per i processi di calcolo.

I modelli attuali relativi alla risoluzione di semplici compiti matematici, ipotizzano il verificarsi, anche nei bambini più piccoli, di una memorizzazione dei risultati delle operazioni più semplici, per cui l'esecuzione di un calcolo mentale dipende da un processo di recupero in memoria e non solo da un processo di conteggio.

Attualmente sono proposti tre modelli di calcolo matematico di tipo cognitivo. Quello di Ashcraft, quello di Siegler, e quello McCloskey.

Ashcraft, nel suo modello, afferma che la rappresentazione nella nostra mente della somma di due numeri è situata nell’intersezione delle righe e delle colonne, di un’ipotetica tabella mentale, memorizzata nel corso dell’apprendimento. Nelle righe e nelle colonne d’entrata sono posti gli addendi, e la distanza percorsa nella tabella durante la ricerca indica il tempo necessario al recupero. Inoltre, secondo l’Autore, la presentazione di un’operazione attiva mediante un processo di diffusione dell’attivazione, non solo il nodo corretto, ma anche una serie di nodi contigui. Se i livelli d’attivazione sono simili allora sarà probabile che si attivino nodi sbagliati; se, invece, i livelli di attivazione sono distanti tra loro e quindi i numeri sono molto diversi, sarà decisamente superiore l’attivazione di un nodo corretto.

Siegler parla di possibili strategie che il bambino mette in atto in base ad un processo pressoché automatico che si riferisce al livello di fiducia, che è precisamente una soglia al di sotto del quale no vi è la sicurezza di dare una risposta corretta. Quando il proprio livello di fiducia supera questa soglia si è nettamente propensi a credere che la risposta sia corretta e si recupera la risposta in memoria. In caso contrario il bambino si

rappresenta in memoria gli addendi o in modo visibile, muovendo le dita, o formando un'immagine mentale corrispondente agli oggetti presentati nel problema.
Secondo McCloskey il processamento delle informazioni numeriche è attuato da tre sistemi:

- il sistema di comprensione dei numeri;
- il sistema di calcolo;
- il sistema di produzione numerica.

Il *sistema di comprensione* trasforma la struttura superficiale dei numeri, per esempio 18, 12, 3, ecc nelle parole corrispondenti ai numeri: diciotto, dodici, tre, in un formato comune di tipo astratto.
Questa rappresentazione astratta di quantità fornisce le basi per le successive elaborazioni relative al calcolo numerico.
Il *sistema di calcolo* comprende la memorizzazione delle operazioni base (5x3, 4+7), e la memorizzazione delle principali regole (0 x N = 0); (0 + N = N).
Il *sistema di produzione* riceve le elaborazioni dai due sistemi precedenti e li traduce in una specifica struttura superficiale: i numeri complessi in cifre o in parole.
Un elemento molto importante da considerare è la modalità di presentazione dei numeri che influisce in modo considerevole sulla velocità e sul tipo di risposta che viene data: i risultati sono diversi a seconda che vengano presentate le cifre arabe o quelle in formato verbale.
Viene osservato che il tasso di errore è significativamente più alto nel caso della presenza del formato verbale, che viene sottolineato anche per le operazioni più difficili.
Anche nell'ambito del cognitivismo, l'interesse per il problem solving è presente sia come attenzione ai modi con cui il pensiero attinge al patrimonio delle conoscenze già acquisite e spesso strutturate nella forma di schemi corrispondenti ai vari tipi d'esperienza, sia come analisi assai più minuziosa dei singoli passaggi che, come nelle sequenze "problema-soluzione-nuovo problema", possono portare alla scoperta della soluzione.

Da un punto di vista cognitivista, il processo di soluzione di problemi coinvolge meccanismi riguardanti la memoria operativa, la memoria a breve e a lungo termine, procedure di pianificazione delle operazioni mentali e di rappresentazione delle informazioni.
Il problem solving è determinato da tre elementi principali:

- Il problema in sé;
- Lo spazio del problema;
- Le strategie utilizzate per la soluzione.

Ogni volta che ci si appresta a risolvere un problema, si utilizzano tre tipi d'informazioni:
• Informazioni riguardanti i dati del problema;
• Informazioni riguardanti le operazioni eseguibili sui dati;
• Informazioni riguardanti lo scopo che il problema definisce.

Queste informazioni, per essere adeguatamente manipolate dall'individuo, devono essere codificate in termini di simboli o strutture di simboli; è necessario, tuttavia, definire in maniera più precisa il significato degli elementi del problema. Le informazioni riguardanti i dati non si esauriscono ai soli oggetti o pezzi di materiale fisicamente presenti, ma consistono anche di assunzioni, definizioni e assiomi che possono essere fatti su quegli oggetti.
Le operazioni si riferiscono alle azioni che vengono eseguite su dati. Esse comprendono sia azioni di carattere manipolatorio (come le mosse nel gioco degli scacchi), sia operazioni di carattere strettamente cognitivo (come l'uso delle regole d'inferenza nei compiti di logica).
Lo scopo è il risultato che si deve ottenere attraverso le procedure di soluzione. Talvolta un problema è scomposto in sottoproblemi ognuno dei quali possiede uno scopo preciso, ossia un obiettivo parziale, consentendo di affrontare l'obiettivo finale con maggior facilità.
Nella memoria dei soggetti messi di fronte a problemi da risolvere si determina una rappresentazione dell'area del problema come uno spazio di possibili situazioni da esaminare, allo scopo di trovare quella situazione che corrisponde alla soluzione. Si deve perciò distinguere l'area del

compito (il modo di descrivere il problema vero, dall'esterno, da parte di un osservatore onnisciente), dallo spazio del problema (il modo in cui un determinato solutore si raffigura un compito per risolverlo).

Operativamente l'attività del problem-solving consiste nell'eseguire sequenze di operazioni ordinate strategicamente verso una meta. Newell e Simon hanno individuato delle strategie salienti nel comportamento del problem solving: *analisi mezzi-fini,* procedura mediante la quale un problema viene scomposto in tanti sottoproblemi la cui soluzione consente di raggiungere la meta finale; *metodo della pianificazione:* tende a semplificare lo spazio del problema attraverso l'eliminazione degli elementi di dettaglio, consentendo la riduzione del numero delle operazioni da compiere. Tale semplificazione comporta la determinazione di un nuovo problema, diverso da quello originario con una soluzione più facile che può essere utilizzata per risolvere il problema complesso originario; *ricerca a ritroso:* a differenza delle strategie che procedono per sequenze di operazioni che partono da uno stato iniziale del problema allo stato meta, cioè strategie che "guardano avanti", essa segue un procedimento inverso, "a ritroso" appunto, anche attraverso la scomposizione del problema in sottoproblemi con mete circoscritte. Tale strategia è normalmente utilizzata nei compiti di geometria e nelle prove matematiche.

V. Intuizione visiva e memoria

Oltre ad essere il canale di comunicazione privilegiato dai sordi, quello visivo, rappresenta una risorsa cognitiva di cui tutti i bambini spontaneamente sarebbero dotati all'inizio del proprio sviluppo intellettivo.

Nel mondo occidentale, l'abilità visiva viene soppiantata da un'istruzione prevalentemente centrata sul pensiero logico-astratto, infatti, quanto più giovani progrediscono con gli studi, tanto più tendono a perdere le capacità intuitive derivanti dai processi intellettivi di tipo figurale.

Secondo il parere di K. Lorenz:

[…]"la capacità di pensiero visivo-spaziale è il primo strumento di conoscenza sviluppato dall'umanità che è stata perduta, sopraffatta dall'enfasi attribuita al pensiero verbale-astratto[35]".

Quelle operazioni cognitive, che un tempo sarebbero state compiute attraverso un'elaborazione visivo-spaziale degli stimoli, sarebbero oggi eseguite per mezzo di processi logico-linguistici.
L'atrofia della capacità di pensiero visivo ha una matrice di tipo prevalentemente educativo. Infatti, ricerche psicologiche condotte in età evolutiva mostrano che l'immaginazione visiva è una risorsa cognitiva di cui tutti i bambini sarebbero dotati all'inizio del proprio sviluppo intellettivo e che, successivamente verrebbe soppiantata da un'istruzione prevalentemente centrata sul pensiero logico-astratto.
Da quello che si è detto emerge chiaramente che il pensiero a base visiva può risultare altamente efficace per la soluzione di importanti problemi.
Per risolvere un problema, infatti, può essere utile utilizzare gli oggetti mentali, cioè le immagini mentali che possediamo all'interno del nostro pensiero e della nostra memoria. Spesso queste possono essere ispezionate e manipolate per aiutarci nel compito che stiamo affrontando.

Secondo Antonietti A.:

"La visualizzazione mentale o l'impiego di sussidi grafici possono facilitare la soluzione di differenti problemi dato che le immagini possono ritrarre dettagli e relazioni che non riescono ad essere descritti dal codice verbale[36]".

Vygotskij si spinge oltre:

"La parola può essere sostituita, nella memoria, dalla sua rappresentazione o immagine, così come qualsiasi altro oggetto[37]".

---

[35] Secondo le opinioni dell'etologo K Lorenz, nel corso della storia evolutiva dell'uomo il primo passo decisivo verso il conseguimento di abilità cognitive superiori sarebbe stato costituito dalla comparsa delle capacità di rappresentarsi mentalmente in forma visiva lo spazio ambientale, conquista che portò alla percezione delle forme.
[36] Ibidem p. 44, nota 34.
[37] Vygotsky L. S., *Pensiero e linguaggio,* a cura di Costa A., Giunti, Firenze, 1966.

L'immagine permette poi di trascrivere gli elementi del problema in termini visivo-spaziali, mantenendo un rapporto di somiglianza con le situazioni reali restando, così, più aderente alla realtà. La più semplice procedura di visualizzazione utile per trovare la soluzione ai problemi consiste nel rappresentarsi mentalmente la situazione attraverso immagini.

"Ogni bambino acquisisce immagini della realtà liberamente osservata: l'immaginazione si sviluppa grazie all'attività d'immagazzinamento ed elaborazione dei dati percettivi memorizzati dall'individuo[38]".

Nel processo di risoluzione dei problemi per mezzo d'immagini mentali sapere utilizzare strategie di memorizzazione è fondamentale. Le abilità di memoria dei ragazzi sordi sono state investigate per molto tempo: i numerosi studi concernenti la memoria a breve termine (o memoria di lavoro) portano a ritenere che i sordi e gli udenti codifichino le informazioni in modi qualitativamente differenti: gli udenti tenderebbero a usare un codice verbale-sequenziale, i sordi invece un codice visuale-spaziale. A prima vista non sembrerebbe esserci una ragione a priori per la quale una modalità di linguaggio dovrebbe offrire vantaggi alla memoria rispetto a un'altra. Ricerche condotte oltre vent'anni fa, invece, hanno indicato che i codici basati sulla lingua sono un po' più efficienti degli altri codici per ricordare informazioni sequenziali.

Molti educatori e ricercatori hanno enfatizzato l'importanza della modalità visiva per i ragazzi sordi nei contesti di insegnamento-apprendimento. A parere di Marschark e Lukomski, tuttavia, sebbene si possa accettare tale assunzione, non esiste alcuna evidenza del corollario che spesso sembra accompagnarla: ossia che le persone sorde abbiano maggiori abilità nel dominio visivo rispetto a quelle udenti. Secondo le ricerche di Conlin, Paivio e Bonvillian per esempio, sembrerebbe che i sordi non siano più abili degli udenti quando usano, per memorizzare, il codice visivo al posto di quello verbale e che le differenze individuate siano dipendenti, soprattutto, dal tipo di compito affrontato. Anche se si confrontano ragazzi sordi che usano il linguaggio dei segni e ragazzi sordi

[38] Maragna S., Favia M., *Una scuola oltre le parole*, La Nuova Italia, Firenze, 1995.

che non lo usano, i risultati sono analoghi in determinati compiti e diversi in altri (i sordi segnanti sembrano fornire risultati migliori nell'abilità di identificare espressioni emotive facciali e nei compiti di immaginazione mentale che richiedono rotazioni, generazioni e trasformazioni di immagini). Al fine di ottimizzare il processo d'insegnamento-apprendimento degli allievi con disabilità uditiva, dovrebbero essere comprese meglio le interazioni tra il linguaggio utilizzato, l'informazione che deve essere acquisita e la conoscenza già posseduta. Sorgono, infatti, numerose domande, tra le quali, per esempio: è possibile che i ragazzi sordi impieghino strategie di memorizzazione basate sul codice visivo efficaci quanto le strategie di tipo verbale? L'uso spontaneo dei codici verbale o figurale per rappresentare determinate situazioni dipende dall'età, dal tipo di compito o è legato anche alle propensioni e abitudini evocative di ogni individuo, come afferma De La Garanderie. Per l'Autore, infatti, alcune persone sarebbero state educate e avrebbero la tendenza a evocare le immagini visive delle cose o delle parole, altre la tendenza a evocare in modo uditivo. Interessanti sono, in ogni caso, i risultati delle ricerche di Taylor e Turner secondo i quali, per un incremento di memoria e di apprendimento, è opportuno collocare i dati da acquisire in un contesto significativo e guidare gli allievi a mettere attivamente in relazione le informazioni. È "il significato" ciò che fa attivare i meccanismi di memorizzazione, da qui la necessità di proporre esperienze di apprendimento, supportate da media diversi, che si fondino su un reale interesse dell'allievo, evitando esercitazioni meccaniche e ripetitive, soprattutto se non integrate in un contesto organizzato, ricco di "senso" . Per concludere, è probabile che le difficoltà di memorizzazione dipendano da più fattori, tra i quali: il tipo di compito proposto, le motivazioni personali a svolgerlo, il padroneggiare o meno le abilità linguistiche e cognitive richieste, il contesto ambientale e affettivo in cui avviene la proposta di impegno e la capacità di compiere una "metariflessione" consapevole sulle proprie abilità e strategie mnemoniche.

VI. Pensiero senza linguaggio

Molti studi e ricerche sul mondo dei sordi sottolineano la loro particolare povertà verbale e il fatto che per comunicare con loro bisogna usare un *"linguaggio semplice"*.

Secondo altri studi, per un sordo sembra molto più facile apprendere il vocabolario delle cose e degli oggetti fisicamente osservabili, dei quali si possono dimostrare con l'azione gli attributi, che comprendere le sottigliezze verbali.

Alla base di queste ipotesi e teorie vi era l'assunto di fondo che il linguaggio rispecchiasse fedelmente il pensiero, che il linguaggio verbale fosse pressoché l'unico sistema simbolico importante e che linguaggio, simboli e pensiero fossero necessariamente, addirittura inseparabilmente, legati.

Il comportamento verbale veniva identificato con il comportamento astratto o concettuale, mentre il comportamento e il linguaggio visivo-spaziale veniva associato al comportamento concreto ad un livello percettivo.

I ragazzi sordi venivano spesso descritti come "pensatori" legati ai contesti concreti dell'esperienza, incapaci di raggiungere i concetti astratti necessari per il successo scolastico e non solo. In particolare, partendo dal presupposto errato che la capacità di usare la lingua verbale fosse la misura dell'intelligenza, i sordi sono stati a lungo considerati con limitate capacità di ragionare, di concettualizzare e di astrarre, tipiche attività del pensiero.

Vygotsky afferma che:

"All'inizio dello sviluppo non vi è alcuna interdipendenza tra pensiero e linguaggio, non c'è un legame aprioristicamente dato come una condizione necessaria di un comune sviluppo. Pensiero e parola non sono tra loro, originariamente collegati[39]*".*

---

[39] Ibidem p. 51, nota 38.

Quando il bambino sordo "inventa" gesti per comunicare, che sono dapprima solo convenzionali e che poi vengono utilizzati come dei veri e propri segni, diciamo pure che il bambino è riuscito a creare un proprio codice visivo e segnico per poter comunicare con il mondo circostante anche se è udente. Questo significa che le capacità di comunicare sono indipendenti dall'utilizzo del linguaggio verbale, anzi l'attività cognitiva precede lo sviluppo dell'attività linguistica: nel bambino sordo il pensiero crea il mezzo di comunicazione. Meadow e Feldman[40] (1977), si domandarono se il bambino per apprendere il linguaggio prima dovesse sperimentarlo su di sé, ossia viverlo con i propri sensi. I due ricercatori studiarono sei bambini sordi di un ambiente familiare udente ai quali, quindi mancava un input linguistico segnico. Questi bambini sordi esposti al solo oralismo svilupparono ugualmente un sistema lessicale di segni per riferirsi ad oggetti, persone, azioni; inoltre i bambini produssero anche "segni caratterizzanti", cioè specificando azione, oggetto ed attributo.

"*Per esempio: se volevano dire "banana" creavano la configurazione a forma di pugno seguita da un rapido movimento davanti la bocca. Il segno caratterizzante è meno dipendente dal contesto per essere interpretato a differenza di quello dimostrativo*[41]".

A questo punto sarebbe lecito chiedersi se il bambino sordo, esposto al linguaggio verbale che non può sentire, non crei un proprio linguaggio. Il bambino sordo è in grado di produrre codici utilitaristici di comunicazione anche quando non è immerso nella lingua dei segni.
Il problema principale è quello di sviluppare i processi linguistici di pari passo con le strutture cognitive.
È dimostrato, come abbiamo visto, che il bambino sordo, anche se non è esposto alla lingua dei segni, riesce ugualmente a produrli; è anche vero, però, che questo non basta per acquisire le competenze di una lingua.
Quando il bambino sordo inventa gesti per comunicare, abbiamo la dimostrazione che l'attività cognitiva si sviluppa prima rispetto all'attività

[40] Pigliacampo R., *Lingua e Linguaggio nel sordo, analisi e problemi di una lingua visivo-manuale*, Armando Editore, Roma, 1998.
[41] Volterra V. et All., Le prime parole: dagli schemi sensomotori agli schemi rappresentativi, relazione tenuta al convegno di Psicolinguistica organizzato dall'Istituto di Psicologia del C.N.R. di Roma, dicembre 1974.

linguistica ed in modo separato da essa perché è il pensiero a produrre ed ideare il mezzo di comunicazione.
La carenza dell'esposizione a segni significativi sin dalla prima infanzia priva il sordo dello sviluppo linguistico confacente alla sua percezione visiva, e dunque non si attivano i processi neuronali di un idoneo sviluppo cinesteticovisivo affinché i segni divengano veicolari dei processi cognitivi. La produzione rimane povera e non vi è scambio comunicativo nel linguaggio naturale; questo rappresenta un grave deficit, oltre che comunicativo, anche comprensivo del linguaggio stesso.

Capitolo III. La ricerca sperimentale

I. Premessa

Il campo di studio all'interno del quale s'inscrive la seguente ricerca sperimentale abbraccia discipline molto ampie, quali la *matematica, il linguaggio, la L.I.S, il pensiero logico,* di cui le correlazioni e le reciproche influenze sono state poco analizzate.

Gli studi e le ricerche che abbiamo in proposito, sia nazionali che internazionali, analizzano le caratteristiche di matematica e linguaggio; di pensiero logico e matematica; di linguaggio e sordità, ecc: pochissimi studi, però, mettono in relazione tutti e tre i campi fornendo utili informazioni relative al tipo di pensiero logico che i sordi mettono in atto per affrontare problemi matematici, alle differenze con le prestazioni degli udenti, allo studio del linguaggio utilizzato per la somministrazione degli stessi come fonte di errore principale per il buon rendimento. Bisogna dire, inoltre, che le ricerche effettuate in passato si riferiscono ad altre lingue dei segni, diverse da quella italiana e, come si sa, ogni lingua presuppone un diverso modo di concettualizzare e di rappresentare la realtà.

La ricerca che è stata condotta osserva e descrive le uguaglianze/differenze delle abilità logico-matematiche di bambini udenti e sordi con particolare riferimento ai registri linguistici con cui vengono costruite e somministrate le prove.

Si pensa che i bambini sordi siano abili, come i loro coetanei udenti, in compiti matematici che utilizzano quello visivo come canale comunicativo principale, mentre falliscono in compiti dove la comunicazione avviene solo attraverso la lingua orale.

Secondo lo psicolinguista Furth Hans,

"L'unica difficoltà che i sordi incontrano in matematica è il linguaggio con cui sono presentati i compiti[42]*".*

[42] Furth H. G., *"Thinking withaut language: psychological implication of deafness"*. Roma: A. Armando, 1971.

Durante la fase sperimentale, infatti, si è osservato che nonostante i bambini sordi di terza elementare avessero una conoscenza della lingua italiana assai limitata, riuscissero comunque a svolgere correttamente i problemi matematici somministrati. Dato ancora più interessante è che le stesse osservazioni sono state registrate anche per gli alunni udenti: questi avevano gravi carenze verbali simili ai loro compagni sordi, ma riuscivano abbastanza bene in compiti matematici.

Da questa osservazione, sembrerebbe che linguaggio matematico e lingua italiana non camminino sempre di pari passo, ma che in alcuni momenti dello sviluppo del bambino siano indipendenti l'uno dall'altra sia per gli udenti che per i sordi.

D'altronde, abbiamo testimonianze assai famose riguardanti l'indipendenza della matematica dal linguaggio verbale e dipendente invece, da altri registri semiotici.

"Albert Einstein, per esempio, diceva che l'idea di numero gli si presentava sotto forma di immagini più o meno chiare che poteva riprodurre o ricombinare come voleva[43]".

Sono, infatti, due e molto diverse tra loro le strategie che il cervello umano mette in atto ogni volta che ha a che fare con i numeri. Una è strettamente legata al pensiero verbale e simbolico, l'altra si serve di immagini.

Adesso è noto che molti imparano la matematica servendosi d'immagini e le tecniche di diagnostica hanno permesso di individuare le aree del cervello coinvolte nei problemi matematici che utilizzano diversi registri linguistici: i calcoli esatti dipendono dal lobo frontale sinistro (come il pensiero verbale), mentre una rete neurale bilaterale controlla, insieme, rappresentazioni visive e movimento delle dita. Non a caso, i bambini contano sulle dita nell'imparare la matematica.

---

[2] Antonietti A., Angelini C. Cerana P., *"L'intuizione visiva",* Milano: Franco Angeli, 1995.

II. L’importanza degli aspetti linguistici

Studi di semiotica ripropongono in ambito matematico una domanda fondamentale sul funzionamento del pensiero: il ruolo cioè del segno, del simbolo nella concettualizzazione. Secondo Raimond Duval, uno dei primi didatti ad occuparsi di semiotica matematica, l’attività mentale in matematica è un’attività cosciente, e quindi non può essere sviluppata ricorrendo alla ripetizione esasperata d’esercizi, procedimenti, algoritmi.
Duval propone piuttosto l’attività semiotica, quale strumento con cui controllare il pensiero. In altre parole anche nella matematica, potenziando l’attività semiotica, sviluppiamo parallelamente la padronanza delle nostre attività mentali.
Importantissime potenzialità dell’attività semiotica in matematica consistono nella pluralità dei registri rappresentativi e nella coordinazione tra questi registri.
In particolare evidenzia il ruolo del binomio simbolo scritto-figura visiva:

“Il funzionamento cognitivo è nello stesso tempo linguaggio e immagine e non semplicemente linguaggio o immagine[44]”.

Nella complementarità trova significato il coordinamento tra registri diversi, che permette allo studente di distinguere tra gli oggetti matematici e le loro rappresentazioni e lo rende in grado di utilizzare un oggetto matematico in situazioni differenti, effettuando una scelta consapevole del registro rappresentativo.
La rappresentazione semiotica gioca un ruolo talmente importante nell’attività matematica che un suo cattivo funzionamento è in grado di alterare profondamente l’immagine che l’allievo ha della matematica e di se stesso in quanto solutore di problemi matematici.
Lo sviluppo della coordinazione rivela un vero e proprio effetto a catena, che cattura l’iniziativa e l’interesse creativo dello studente.

[44] Dott.ssa Benedetti C., “*Probabilità a scuola: un percorso di condivisione dei registri semiotici*”. Tesi d’abilitazione all’Insegnamento nella Scuola Secondaria. SiSIS-Università di Bologna.

III. Prove per udenti applicate a sordi

Molte delle differenze cognitive tra ragazzi udenti e sordi, rilevate da ricerche svolte nel secolo scorso, sostenevano che i bambini sordi ottenevano risultati inferiori, rispetto ai loro coetanei udenti, nelle varie prove somministrate. Il fatto che ragazzi sordi e ragazzi udenti evidenziassero risultati differenti in alcuni compiti cognitivi significava "necessariamente" che i primi fossero svantaggiati intellettualmente: erano queste le conclusioni a cui si perveniva fino a poco tempo fa.

In realtà, i risultati ottenuti sono più apparenti che reali perché strettamente legati alle particolari condizioni di rilevamento: spesso, infatti, sono state usate prove che richiedevano di saper leggere, scrivere e parlare, cosa alquanto difficile per i bambini sordi, che utilizzano un diverso canale comunicativo.

Ma, dovrebbe essere immediatamente evidente ad un osservatore imparziale che risultati di questo genere non fanno che indicare la povertà di linguaggio del sordo, già ben nota, e non hanno nessun legame con il loro pensiero logico-matematico. Oggi, sappiamo che è stata attuata una profonda revisione dei metodi di valutazione e delle assunzioni teoriche che sottostavano alle interpretazioni dei risultati di ricerca.

La prima considerazione nell'esame dei sordi è molto evidente. È chiaro che non si può fare affidamento su compiti verbali per ottenere misurazioni accurate dell'intelligenza in soggetti deficitarii del linguaggio. Pur riconoscendo che entro certi limiti, quando sono usati ed interpretati correttamente, questi test possono fornire delle indicazioni sul livello di rendimento di una persona sorda, si ritiene che la maggior parte dei test standardizzati per la risoluzione dei compiti matematici, essendo fondati per la maggior parte sulle abilità verbali, siano degli indici molto imprecisi.

Si aggiunga che i metodi d'esame verbale possono fornire risultati imprecisi anche con soggetti non impediti da deficit uditivi. Uno dei motivi di ciò è la possibilità di dare la risposta giusta per una ragione sbagliata: per esempio, alla domanda "quanto fa due più due?" un bambino può rispondere quattro. La risposta è giusta, ma può dipendere

dall'abitudine linguistica di dare automaticamente la risposta corretta, invece che da una effettiva conoscenza dall'addizione.
E' probabile, altresì, che gli studenti sordi forniscano risposte equivalenti a quelle fornite dagli studenti udenti di fronte a compiti che richiedono attenzione a un'unica dimensione del problema (per es. il numero), mentre sono in difficoltà quando la risoluzione richiede di prestare attenzione a due o a più dimensioni (per es. alla lunghezza e al numero). Ciò accadrebbe, non tanto perché i sordi siano incapaci di formulare concetti coerenti o di categorizzare, quanto per il fatto che le dimensioni sulle quali devono lavorare non risultano così evidenti come lo possono essere per gli udenti. Questo "rivolgersi nella direzione sbagliata" potrebbe essere dovuto a molteplici motivi: la scarsa padronanza della lingua o dei termini tecnici utilizzati, la difficoltà nel rappresentarsi le situazioni problematiche proposte a causa di una mancanza di comprensione del quadro teorico di riferimento o di esperienza dei contesti nei quali tali concetti acquistano senso. Per ovviare a tali difficoltà, spesso il ragazzo tenta, come del resto fanno anche molti studenti udenti, di memorizzare e applicare in modo meccanico le regole, senza comprendere profondamente il motivo dell'uso di un determinato procedimento.

IV. Metodologia dell'osservazione sperimentale

Per la conduzione della ricerca sperimentale si è scelto di utilizzare l'osservazione sistematica partecipante.
L'osservazione sistematica non modifica la realtà, ma si limita ad osservarla cogliendo gli elementi significativi della realtà che ci si propone di osservare, senza provarne il ripetersi in circostanze volute come, invece, accade in una situazione sperimentale.
Nell'osservazione scientifica bisogna formulare l'ipotesi sperimentale, descrivere la situazione che si intende osservare e scegliere quali sono i fatti concreti di cui bisogna prendere nota per poter poi confermare o smentire l'attendibilità dell'ipotesi formulata. Per compiere osservazioni sistematiche s'impiegano strumenti diversi secondo il tipo di ricerca che si vuole effettuare, le ipotesi da verificare e cosi via. Verrà impiegato il

questionario e la riflessione comunicativa[45]: sono stati scelti questi strumenti perché si ritengono quelli migliori per poter ricavare le informazioni sulle abilità matematiche dei ragazzi. Il questionario consiste in una serie di domande che sono state scelte, formulate, ordinate e presentate in modo da consentire di rilevare esattamente quegli aspetti della realtà che sono importanti per verificare l'ipotesi.
L'osservazione è stata divisa in tre fasi: osservazione delle modalità di insegnamento-apprendimento; somministrazione delle prove; discussione di gruppo.
Quest'ultima, ha consentito agli alunni un confronto sulla prova: ciascuno di loro ha spiegato la propria risposta alle domande riportate nella consegna. Per riuscire ad inferire le abilità matematiche ed il tipo di schema mentale utilizzato, infatti, è stato necessario che ogni soggetto eseguisse individualmente la prova.

V. Ipotesi di ricerca

La premessa da cui si è partiti è che i processi di ragionamento per l'esecuzione di problemi matematici attivati dai bambini sia udenti che sordi siano sostanzialmente uguali. Le differenze che per molto tempo sono state riscontrate nell'esecuzione di compiti matematici sono dovute ad un erronea costruzione e somministrazione delle prove, improntate su un canale comunicativo esclusivamente verbale, che non permetterebbe una comprensione completa agli studenti sordi visto che utilizzano un canale di comunicazione visivo-spaziale. Inoltre vogliamo dimostrare che i test visivi favoriscono maggiormente anche gli studenti udenti.
Oltre ad un analisi dei registri linguistici maggiormente utilizzati e favoriti dai bambini, sono state osservate le differenti modalità di risoluzione di problemi logici tra bambini udenti e non.

L'ipotesi generale formulata è la seguente:

[45] Viste le due differenti lingue utilizzate, italiano e L.I.S, si è scelto di utilizzare questo termine anziché "riflessioni parlate" per comprendere anche le riflessioni segnate.

"Se agli alunni udenti e sordi sono presentati problemi matematici in un registro comunicativo visivo-spaziale, quindi diverso da quello che solitamente viene utilizzato a scuola, le loro prestazioni di risoluzione migliorano".

La sottoipotesi di ricerca:

"Il linguaggio visivo-spaziale utilizzato consente una maggiore comprensione e chiarezza del problema".

L'ipotesi nulla:

"Le strategie risolutorie dei bambini non sono assolutamente influenzate dai registri linguistici con cui sono presentati i problemi, anzi vi sarebbe una incomprensione della consegna che non consentirebbe, agli alunni, un regolare svolgimento dei loro processi di ragionamento".

L'obiettivo generale della sperimentazione è stato quello di indagare l'utilizzo e la comprensione del codice visivo-spaziale e delle abilità logico-matematiche per la risoluzione di una situazione problema negli alunni di terza e quarta elementare. Gli obiettivi specifici sono i seguenti:

- rilevare le differenti strategie risolutive di udenti e sordi rispetto alla risoluzione delle differenti situazioni problema proposte in due registri linguistici differenti;
- Verificare in che modo la proposta di una modalità di rappresentazione piuttosto che un'altra influenzi i risultati.

Si è voluto osservare, così, dove i bambini sordi e udenti incontrano maggiori difficoltà e se i diversi registri linguistici influenzino il tipo di risoluzione impiegato per risolvere i problemi.

VI. Fase d'osservazione

La somministrazione dei questionari in classe è stata preceduta, come già è stato detto, da una fase di osservazione delle modalità di insegnamento e di apprendimento degli studenti: si voleva, infatti, indagare e comprendere i processi cognitivi degli allievi, le strategie da loro messe in atto nella risoluzione di problemi, le convinzioni ed emozioni con le quali affrontano la matematica anche durante il normale svolgimento delle lezioni.

Le ore d'osservazione dell'attività dell'insegnante e della classe sono state collocate nella prospettiva della ricerca-azione: i tipi di prove che sono stati somministrati, non sono il frutto di uno studio prettamente manualistico, la riflessione sui tipi di metodi da mettere in campo per perseguire l'osservazione sistematica è in divenire, le metodologie da impiegare non sono state definite una volta per tutte, ma sono state progressivamente precisate e modificate in base alle esigenze degli alunni, al loro livello scolare, alle loro esigenze, al tipo di stile cognitivo che essi impiegano, ecc.

L'osservazione delle lezioni di matematica, è stata svolta nella classe III A, facente parte della "Direzione Didattica Borgo Nuovo II" scuola "Filippo Raciti"; la classe è composta da diciotto alunni udenti e un alunno con una sordità diagnosticata sin dalla nascita come grave[46]; nell' Istituto "Padre Annibale Maria di Francia", scuola speciale per sordi. Durante l'osservazione sono stati raccolti moltissimi spunti per la somministrazione delle prove e la creazione delle stesse. Durante la spiegazione dell'insegnante, agli studenti venivano spesso proposte domande ed erano subito invitati a cimentarsi con problemi relativi all'argomento affrontato: il professore era solito incitare continuamente gli allievi a non inseguire formule risolutive, ma a 'ragionare', ad apprezzare l'universalità dei linguaggi matematici e la non linearità del ragionamento. Durante la spiegazione il bambino sordo, veniva

[46] La classificazione dei gradi di sordità è basata sulla media dei livelli di percezione uditiva in decibel. Ci sono diversi tipi di sordità: lieve, media, grave e profonda. Nella sordità grave, quella che ci interessa, si ha una perdita di udito fino a 90 decibel (il massimo è 120), e consente solo la percezione delle parole a forte intensità. Per ulteriori approfondimenti è possibile consultate il sito dell'Ente Nazionale Sordomuti: www.ens.it

costantemente seguito dall'insegnante di sostegno per assicurarsi la comprensione della spiegazione.
Spesso, però, molti studenti affermavano di non aver capito che cosa chiedesse il problema, altri continuavano a domandare formule risolutive per arrivare velocemente alla risoluzione senza impegnarsi nel ragionamento.
Si è osservato che, in realtà, la vera difficoltà non era il formalismo dato dalla semplice formula matematica, un enunciato può sempre essere imparato e ripetuto a memoria, piuttosto l'articolazione di un pensiero fatto di concetti e relazioni astratte. Il senso di frustrazione e inadeguatezza che, in queste condizioni, inevitabilmente accompagna il fallimento, aumenta le difficoltà. Dunque le difficoltà ad apprendere concetti matematici astratti non sono "proprie" dei bambini sordi, ma riguardano allo stesso modo gli udenti.
Dall'osservazione della classe si evince subito che il problema principale che non permette di passare da una fase "*concreta del problema o dell'operazione matematica"* ad una fase di *"astrazione e di calcolo"* è principalmente linguistico e non riguarda i processi cognitivi utilizzati.
Bisogna premettere, innanzitutto, che quasi tutti i bambini sottoposti all'osservazione avevano lievi problemi linguistici: essi utilizzano un linguaggio che si può definire "semplice" , poco articolato, con un vocabolario abbastanza ridotto di termini. È interessante notare che gli udenti hanno le stesse difficoltà del bambino sordo nel comprendere i registri linguistici utilizzati dalla matematica. Il bambino, oltre ad utilizzare la Lingua dei Segni, ha una rieducazione logopedica che gli consente un uso discreto della lingua Italiana sia per la produzione che per la comprensione di suoni e significati.
Ci si è chiesti quali linguaggi e registri linguistici adottare per coinvolgere gli allievi che hanno più difficoltà ad entrare in sintonia con l'astrazione propria della matematica e quali processi di ragionamento mettono in atto gli studenti una volta che hanno colto perfettamente le richieste di un problema matematico. Questa è la domanda di base che ha ispirato la predisposizione dell'intervento.
R. Duval evidenzia come gli 'oggetti' matematici siano costruiti attraverso l'attività semiotica e non semplicemente attraverso la sola

attività linguistica, cioè attraverso rappresentazioni linguistiche molteplici e complementari che aiutano a distinguere l'oggetto dalla sua rappresentazione. Basandosi sull'uso dei mezzi linguistici che sono strumenti comunicativi, la conoscenza matematica, secondo Duval è un processo sociale che emerge da situazioni concrete condivise.

In quest'ottica si collocano le sue ricerche sui registri semiotici. Questi studi ripropongono in ambito matematico una domanda fondamentale sul funzionamento del pensiero: il ruolo cioè del segno, del simbolo nella concettualizzazione.

Secondo R. Duval, non c'è pensiero senza attività semiotica. Richiamando L.S.Vygotskij, per il quale:

"Il discorso non scompare affatto neanche nella sua forma interiore[47]".

l'Autore costruisce una teoria delle rappresentazioni in matematica che permette di interpretare in modo nuovo le difficoltà usualmente riscontrate nell'apprendimento della matematica.

A dire il vero sono in molti a ritenere che la matematica è difficile perchè richiede la concettualizzazione, passaggio dal pensiero concreto a quello astratto. Questa osservazione è da ricondurre ad tipo di pensiero che considera il registro verbale "il solo" mezzo per comunicare ed insegnare matematica attraverso ripetizioni continue di formule ed esercizi.

Per Vygotskij si tratta di una via infruttuosa dal punto di vista didattico:

"Anche l'esperienza dimostra che l'insegnamento diretto dei concetti è impossibile e sterile. Un insegnante che tenta di far questo, normalmente non raggiungerà nulla, se non un vuoto verbalismo[48]".

Duval parte dal presupposto che l'attività mentale in matematica è un'attività cosciente, e quindi non può essere sviluppata ricorrendo alla ripetizione esasperata di esercizi, procedimenti, algoritmi. Piuttosto, riprendendo sempre Vygotskij:

---

[47] Vygotskij in *"Pensiero e linguaggio"* distingue tra linguaggio pre-verbale, non simbolico, e linguaggio simbolico, così come tra pensiero fattuale e pensiero simbolico: l'interazione tra pensiero e linguaggio si esplicherebbe solo nel livello simbolico, proprio dell'essere umano e della sua cultura sociale.

[48] Ibidem p. 54, nota 35.

"L'elemento centrale di formazione dei concetti è l'uso funzionale del segno, o della parola come mezzo che permette all'adolescente di dominare il corso dei propri processi psichici."

propone il linguaggio, intendendolo più in generale come attività semiotica, quale strumento con cui controllare il pensiero. Anche nella matematica cioè, potenziando i linguaggi, sviluppiamo parallelamente la padronanza delle nostre attività mentali.
Un sistema simbolico, però, per essere un registro rappresentativo che interviene nella concettualizzazione, deve avere determinate caratteristiche; è chiaro infatti che il linguaggio a simboli del semaforo, ad esempio, non provoca in noi reazioni coscienti ne incrementa le nostre potenzialità espressive.
Le caratteristiche fondamentali dell'attività semiotica in matematica consistono:

- nella pluralità dei registri rappresentativi;
- nella coordinazione tra questi registri.

La pluralità dei registri rappresentativi è vista non in termini di autosufficienza, ma di complementarietà. In particolare è evidenziato il ruolo del binomio simbolo scritto-figura visiva:
"Il funzionamento cognitivo è nello stesso tempo linguaggio e immagine e non semplicemente linguaggio o immagine[49]".
Nella complementarietà trova significato il coordinamento tra registri diversi, che permette allo studente di distinguere tra gli oggetti matematici e le loro rappresentazione e lo rende in grado di utilizzare un oggetto matematico in situazioni differenti, effettuando una scelta consapevole del registro rappresentativo.
La rappresentazione semiotica gioca un ruolo talmente importante nell'attività matematica che un suo cattivo funzionamento è in grado di

[49] Duval R. citato da dott. Claudia Benedetti in *"Probabilità a scuola: un percorso di condivisione dei registri semiotici"*, Tesi di abilitazione all'Insegnamento nella Scuola Secondaria. SSIS-Universit`a di Bologna

alterare profondamente l'immagine che l'allievo ha della matematica e di se stesso come solutore di problemi matematici. Il fallimento non è solo cognitivo, quindi, ma anche e soprattutto emotivo: quest'incapacità conduce anche, di fronte a semplici questioni o problemi, alla sensazione d'impotenza rispetto al vedere, al produrre, anche la minima idea qualsiasi, anche solo per cominciare a provare.
Lo sviluppo della coordinazione rivela, invece, un vero e proprio effetto a catena, che cattura l'iniziativa e l'interesse creativo dello studente.

VII. I luoghi e gli strumenti della sperimentazione

La sperimentazione è stata svolta presso le seguenti scuole:

- Direzione didattica "Borgo Nuovo II, Istituto Filippo Raciti", classe "III A" composta da 20 bambini, 19 alunni udenti e 1 alunno sordo, nel periodo dicembre-gennaio 2007/08;
- Istituto "Padre Annibale Maria di Francia", scuola speciale per sordi, classi III e IV, composte da 7 bambini sordi, nel periodo ottobre-novembre 2007.

Le prove impiegate sono le seguenti:

1. <u>Prima Prova</u>
   Una batteria standard di 6 quesiti matematici che utilizza come registro linguistico il linguaggio verbale;
2. <u>Seconda Prova</u>
   Un problema matematico ricavato dal test inserito all'interno della batteria del punto 1, costruito, però, utilizzando un canale comunicativo visivo-spaziale;
3. <u>Terza Prova</u>
   Una batteria di prove costruita ad hoc per bambini sordi e udenti che utilizza principalmente il canale di comunicazione visivo-spaziale.

È prevista, inoltre, un'altra prova che verrà somministrata nel caso in cui i soggetti dovessero avere difficoltà con i compiti delle prove descritte. Infatti, le conoscenze dei soggetti potrebbero non essere congruenti con le tipologie di prove previste.

VIII. Prima Prova

La prima prova di matematica è stata selezionata ed opportunamente modificata da una batteria più ampia elaborata per gli alunni udenti dalla "Rilevazione degli Apprendimenti, anno scolastico 2004-2005[50]. Questa prova, è stata somministrata a 27alunni, di cui 19 udenti e 8 sordi, di età compresa tra gli 8 e i 10 anni. Come su detto, la prova è stata somministrata sia all'"Istituto Padre Annibale Maria di Francia", sia nella Direzione didattica "Borgo Nuovo II, Istituto Filippo Raciti", classe "III A". La batteria utilizzata è formata dalle seguenti tipologie di prove:

- **TIPOLOGIA A:** Test cognitivi;
- **TIPOLOGIA B:** Individuazione di semplici figure geometriche;
- **TIPOLOGIA C:** Problemi che prevedono l'utilizzo di algoritmi elementari di addizione e sottrazione.

Per quanto riguarda la **"Tipologia A",** è stato impiegato un test cognitivo per osservare l'abilità logica-numerica degli alunni. Sono stati utilizzati item a sequenza:

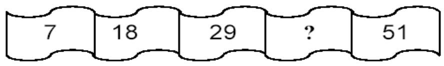
7 18 29 .. 51

Si tratta di un item che prevede una conoscenza matematica minima d'addizione: gli elementi della sequenza crescono di undici[51].
Riportiamo un esempio di esercizio riguardante la **Tipologia A** e di seguito la Tavola 1 di correzione dello stesso.

---

[50]-Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca- Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema Educativo d'Istruzione e di Formazione, R*ilevazione degli apprendimenti anno scolastico 2004-2005,* Prova di Matematica, Scuola Primaria**,** Classe Terza.
[51]Sono costruiti da una serie di numeri o figure o parole posti in un determinato ordine: al soggetto viene chiesto di inserire l'elemento mancante della serie. Ercolani A. P., Perugini M., *La misura in psicologia,* , LED, Milano., p. 47- 55,1997.

4. Osserva la striscia di numeri. Quale numero manca?



A. ☒ 11
B. ☒ 40
C. ☒ 6

Tavola 1

Tipologia A				Risultato righe	
Alunni	**Esercizio 4**				
	4.a	**4.b**	**4.c**	**C**	**E**
A1s	0				1
A2u		1		1	
A3u		1		1	
A4u		1		1	
A5u		1		1	
A6u					
A7u		1		1	
A8u		1		1	
A9u			0		1
A10u		1		1	
A11u		1		1	
A12u		1		1	
A13u					
A14u		1		1	
A15u		1		1	
A16u		1		1	
A17u					
A18u		1		1	
A19u		1		1	
A20u					
A21s		1		1	
A22s		1		1	
A23s		1		1	
A24s		1		1	
A25s		1		1	
A26s		1		1	
A27s		1		1	
Risultato	1	21	1	21	2

Nella Tavola 1, vengono riportati i risultati dell'esercizio n. 4 della Prima Prova, facente parte della **Tipologia A**. Nella prima colonna a sinistra vengono riportati gli alunni: *"A1s", "A2u"... ...."A27s"*. Quelli indicati in neretto fanno parte della III A, Scuola elementare F. Raciti,; quelli in rosso fanno parte dell'Istituto P. Annibale. Le lettere "s" e "u" indicano se l'alunno è sordo o udente. Le righe colorate di grigio indicano gli alunni che non hanno sostenuto la prova perché assenti.

Per la **Tipologia A**, i punteggi sono assegnati come segue:

- Risposta corretta vengono indicate con il numero 1;
- Risposta errata viene indicata con il numero 0.

I risultati marginali delle righe, indicano il punteggio individuale di ogni singolo alunno, per esempio: A1s, sbaglia, per cui la sua risposta sarà contrassegnata dal numero zero, ecc. I risultati delle colonne, rappresentano il totale complessivo delle risposte corrette e di quelle errate ottenute dall'intera classe. In questo caso, avremo 21 risposte esatte, due errate. Di seguito viene riportato il grafico.

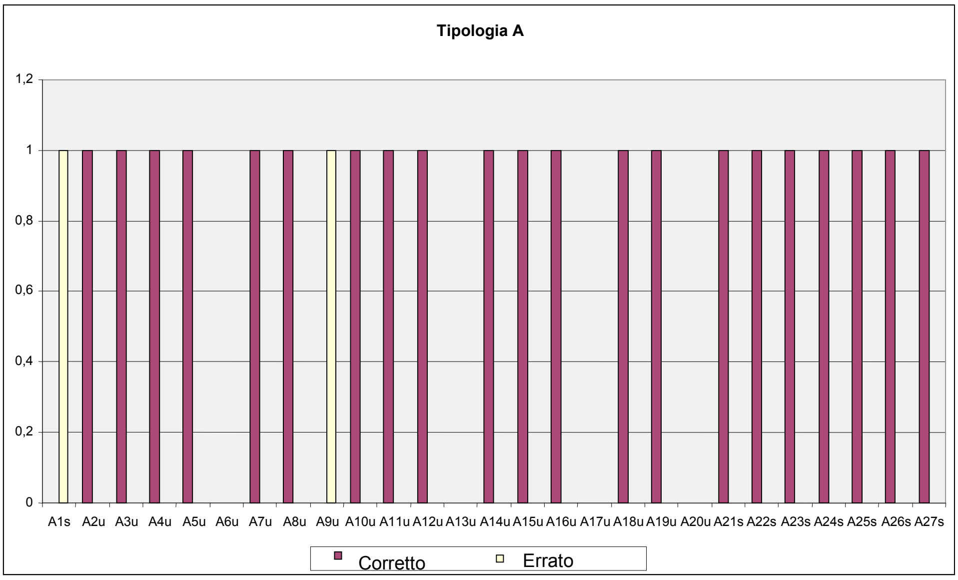
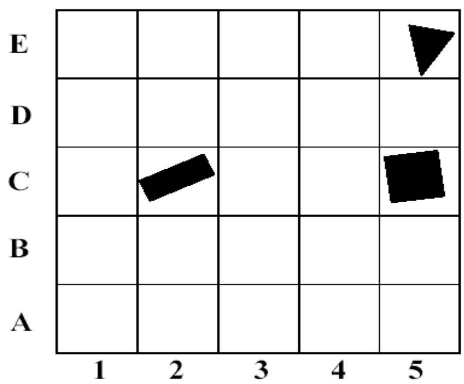


Grafico 1

Nella **Tipologia A**- test cognitivi- sia gli alunni sordi che quelli udenti ottengono ottimi risultati. Ciò significa ce nei compiti che riguardano le abilità cognitive e di individuazione di regole non si evidenziano differenze significative. Tutti gli alunni capiscono abbastanza facilmente l'item mancante nella serie, ritenendo l'esercizio molto accessibile. Questa tipologia di esercizio non dava agli alunni difficoltà di comprensione verbale: vi era una stringa di numeri e in questa una casella vuota con un punto interrogativo che indicava il numero mancante. La figura ha aiutato notevolmente la risoluzione del problema.

La **"Tipologia B"** prevede l'impiego d'immagini composte di figure geometriche. I soggetti, gli stessi a cui è stata sottoposta la **Tipologia A**, devono individuare alcune figure discriminandole dalle altre forme.
Riportiamo un esempio di esercizio riguardante la **Tipologia B** e di seguito la Tavola 2 di correzione dello stesso.

1. Quale figura si trova nella casella 5, C ?



A.☒ Triangolo.
B. ☒ Quadrato.
C. ☒ Rettangolo.

Tavola 1

Alunni	Tipologia B			Risultato
	Esercizio 1	Esercizio 3	Esercizio 6	

	1.a	1.b	1.c	3.a	3.b	3.c	6.a	6.b	6.c	**C**	**E**
A1s		1				0			1	2	1
A2u		1				0			1	2	1
A3u		1				0		0		1	2
A4u		1		1				0		2	1
A5u		1				0			1	2	1
A6u											
A7u		1		1			0			2	1
A8u		1			0				1	2	1
A9u			0			0	0				3
A10u		1				0	0			1	2
A11u		1			0			0		1	2
A12u		1				0		0		1	2
A13u											
A14u		1				0	0			1	2
A15u		1				0			1	2	1
A16u		1				0	0			1	2
A17u											
A18u		1				0	0			1	2
A19u		1			0		0			1	2
A20u											
A21s		1		1			0			2	1
A22s		1		1			0			2	1
A23s		1			0		0			1	2
A24s		1			0		0			1	2
A25s		1			0			0		1	2
A26s		1				0		0		1	2
A27s		1				0		0		1	2
Risultato		**22**	1	**4**	6	13	11	7	**5**		

La Tavola 2 indica i risultati che gli alunni hanno ottenuto nella **Tipologia B** della Prima Prova. La prima colonna a sinistra indica gli alunni "A", la "s" quelli sordi, la "u" quelli udenti. Nelle tre colonne centrali sono indicati i tre esercizi con le tre possibili risposte; nell'ultima colonna a destra vengono indicati i risultati ottenuti da ogni singolo alunno nei tre esercizi, quindi il punteggio individuale di ogni soggetto. Nell'ultima riga viene indicato il risultato di tutti gli alunni in ogni singolo esercizio. Di seguito viene riportato il grafico.

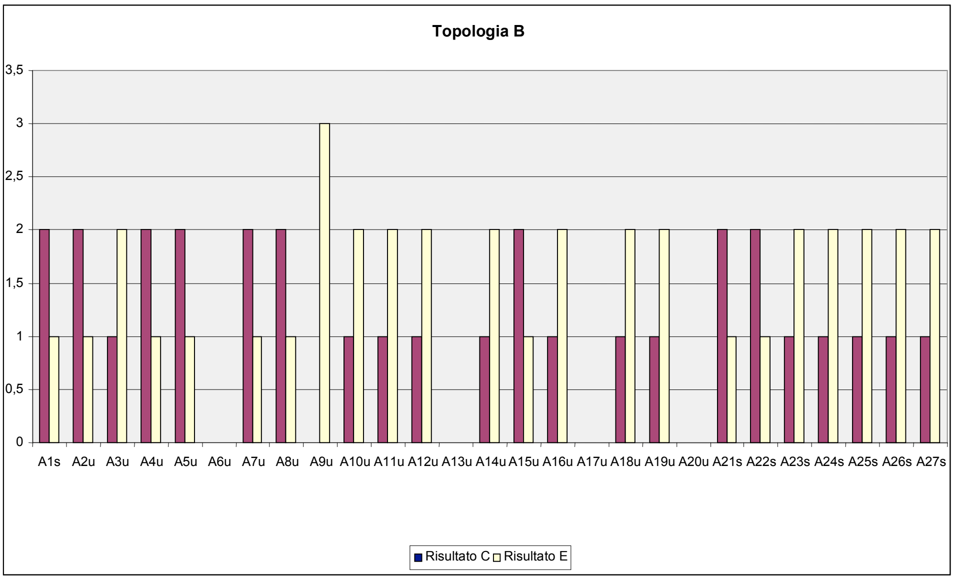


Grafico 2

Nella **Tipologia B -**individuazione di figure geometriche- le prestazioni ottenute sia dai bambini udenti che da quelli sordi continuano ad essere omogenee, anche se i risultati ottenuti non sono ottimi. Si nota, infatti, che in questo tipo di quesito gli studenti hanno incontrato qualche difficoltà. Lo scopo dell'esercizio era quello di verificare le abilità di individuazione della casella in cui si trovava una determinata figura geometrica. Si è notato che la difficoltà era quella di riconoscere una la figura geometrica e non il posizionamento della stessa. I bambini sanno distinguere un quadrato da un rettangolo, ma le figure, all'interno della griglia, erano difficili da riconoscere perché esse avevano ricevuto una piccola rotazione che ha indotta sia udenti che sordi a sbagliare.

Per la **Tipologia C** è stato impiegato un problema che prevede l'utilizzo di semplici algoritmi matematici; il testo viene presentato con un registro linguistico prettamente verbale.

Riportiamo un esempio di esercizio riguardante la **Tipologia C** e di seguito la Tavola 3 di correzione dello stesso.

La mamma ha comprato 8 panini. Uno lo mangia la mamma, 1 lo mangia sua figlia. Quanti panini rimangono?

A □ 7

B □ 8

B □ 6

Tavola 3

Alunno	Tipologia C						Risultato	
	Esercizio 2			Esercizio 5				
	2.a	2.b	2.c	5.a	5.b	5.c	C	E
A1s		0				0		2
A2u			1		1		2	
A3u			1			0	1	1
A4u			1		1		2	
A5u			1		1		2	
A6u								
A7u			1		1		2	
A8u			1		1		2	
A9u			1		1		2	
A10u			1		1		2	
A11u			1			0	1	1
A12u			1			0	1	1
A13u								
A14u			1		1		2	
A15u			1		1		2	
A16u			1	0			1	1
A17u								
A18u			1		1		2	
A19u			1		1		2	
A20u								
A21s		0				0		2
A22s		0				0		2
A23s		0				0		2
A24s		0				0		2
A25s		0				0		2
A26s			1			0	1	1
A27s		0				0		2
Risultato		5	**18**	1	**14**	8		

Lo stesso problema verrà poi impiegato nella Seconda Prova utilizzando, però, un registro linguistico differente. Il grafico è riportato di seguito.

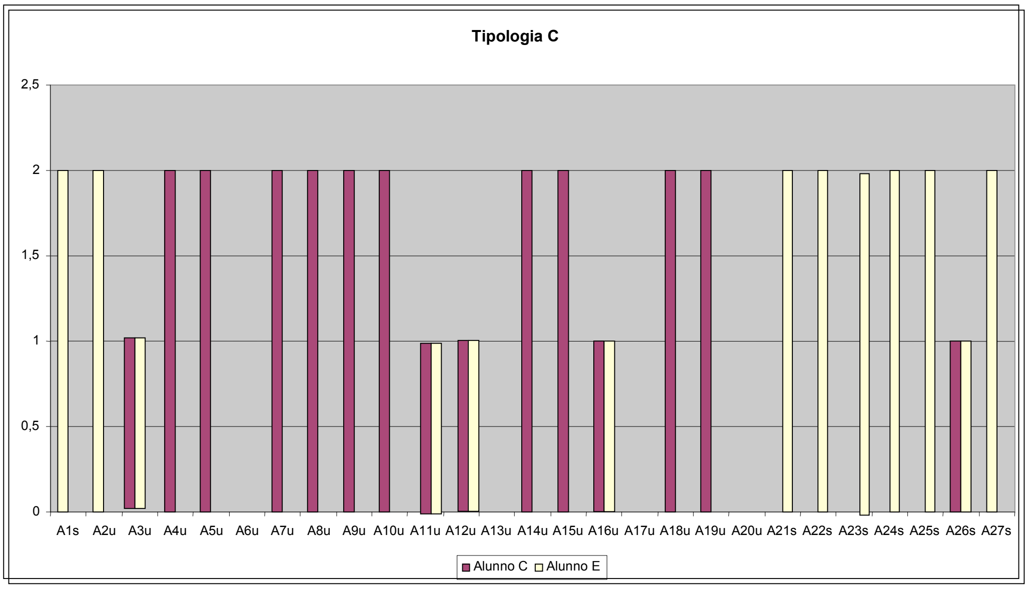


Grafico 3

Nella **Tipologia C** –problemi- vi è una notevole differenze tra i risultati ottenuti dagli alunni sordi e da quelli udenti. Come ci si aspettava, la risoluzione di problemi, somministrati attraverso una modalità prettamente verbale, mette maggiormente in difficoltà i sordi piuttosto che gli udenti. I risultati ne danno conferma.

Di seguito vengono riportate le griglie di correzione integrali relative alla Prima Prova.

Tavola 4

Alunni	Esercizio 1			Esercizio 2			Esercizio 3			Esercizio 4			Esercizio 5			Esercizio 6			Risultato righe	
	1.a	1.b	1.c	2.a	2.b	2.c	3.a	3.b	3.c	4.a	4.b	4.c	5.a	5.b	5.c	6.a	6.b	6.c	C	E
A1s		1				1			0	0				1				1	4	**2**
A2u		1				1			0		1			1				1	5	1
A3u		1				1			0		1				0		0		3	3
A4u		1				1	1				1			1			0		5	1
A5u		1				1			0		1			1				1	5	1
A6u																				
A7u		1				1	1				1			1		0			5	1
A8u		1				1		0			1			1				1	5	1
A9u			0			1			0			0		1		0			2	4
A10u		1				1			0		1			1		0			4	2
A11u		1				1		0			1				0		0		3	3
A12u		1				1			0		1				0		0		3	3
A13u																				
A14u		1				1			0		1			1		0			4	2
A15u		1				1			0		1			1				1	5	1
A16u		1				1			0		1		0			0			3	3
A17u																				
A18u		1				1			0		1			1		0			4	2
A19u		1				1		0			1			1		0			4	2
A20u																				
A21s		1			0		1				1				0	0			3	3
A22s		1			0		1				1				0	0			3	3
A23s		1			0			0			1			1		0			3	3
A24s		1			0			0			1				0	0			2	4
A25s		1			0			0			1				0		0		2	4
A26s		1				1			0		1				0		0		3	3
A27s		1				1			0		1			1			0		4	2
Risultato		22	1		5	18	4	6	13	1	21	1	1	14	8	11	7	5		

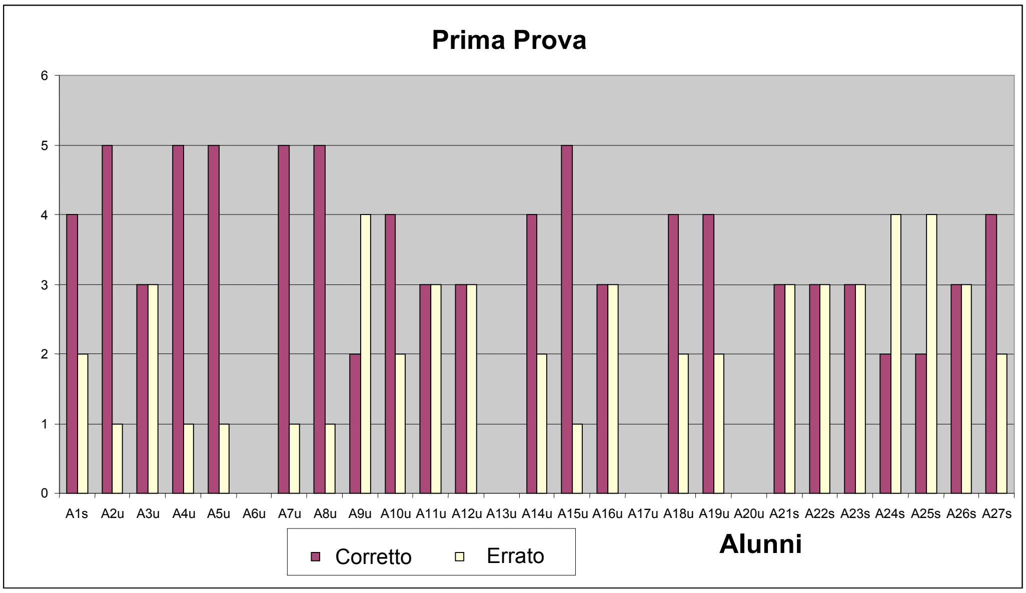
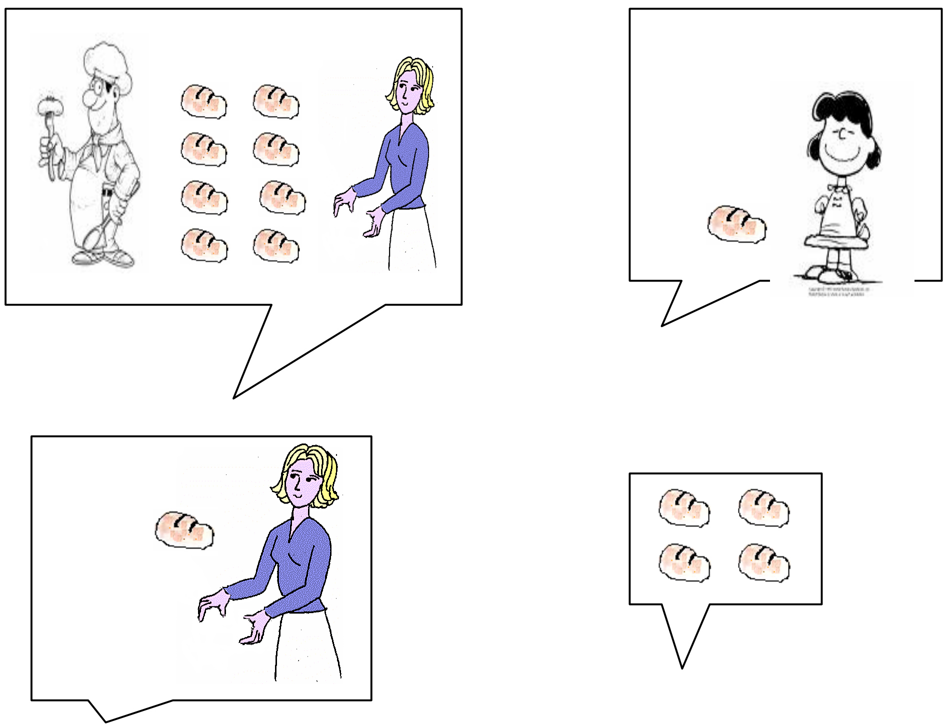

Prima Prova
6
5
4
3
2
1
0
A1s A2u A3u A4u A5u A6u A7u A8u A9u A10u A11u A12u A13u A14u A15u A16u A17u A18u A19u A20u A21s A22s A23s A24s A25s A26s A27s
Corretto
Errato
Alunni

Grafico 4

IX. Seconda Prova

La seguente prova è stata somministrata ai 20 alunni frequentanti la III A dell'"Istituto Borgo Nuovo II", plesso "Filippo Raciti"; ai 7 ragazzi di terza e quarta elementare frequentanti la scuola speciale "Padre Annibale Maria di Francia.

Al panificio



" La mamma ha comprato otto panini. Un panino lo mangia sua figlia; un panino lo mangia la mamma. Quanti panini rimangono?"

Per il problema precedente viene creata l'analisi a priori che comprende l'insieme di tutti quei comportamenti ipotizzabili dagli allievi nei confronti della "situazione-problema", cioè tutte le possibili strategie risolutive corrette e non. Si tratta dunque di una classificazione di comportamenti attesi da parte degli allievi. Oltre ad offrire l'opportunità di tabulare al meglio i dati ottenuti in seguito alla sperimentazione, consente d'individuare lo "spazio degli eventi", cioè l'insieme delle possibili strategie risolutive, che è possibile ipotizzare in quel contesto d'azione. Lo strumento dell'analisi a priori inoltre consente di poter focalizzare l'attenzione del ricercatore su una serie di aspetti interessanti, il primo dei quali può essere considerato lo "spazio degli eventi", ovvero l'insieme delle possibili risposte che si possono ipotizzare in uno specifico contesto.

"Sulla base dello spazio degli eventi è possibile inoltre individuare sia il "buon problema", cioè quello che permette la migliore formulazione in termini ergonomici della conoscenza, sia le variabili didattiche che permettono di favorire un cambiamento nel comportamento degli allievi[52]*".*

Di seguito sono riportate le analisi a priori svolte in relazione alla seconda prova: con le diciture I1, I2… I3, si intendono le possibili strategie risolutive corrette del problema; con le diciture E1,…E2,…E3, si intendono le strategie risolutive errate.

Ipotesi risolutive corrette:

I1 Svolge l'operazione attraverso una semplice stringa di numeri e indica attraverso la scrittura una spiegazione.

I2 Svolge l'operazione attraverso una semplice stringa di numeri e indica il risultato attraverso un disegno.

I3 Mette i numeri in colonna e riporta il risultato nella stringa dei numeri.

I4 L'alunno risolve il problema utilizzando solo una macchina d'operazioni.

I5 L'alunno procede senza scrivere nessun algoritmo di calcolo.

I6 I ragazzi utilizzano un linguaggio verbale per risolvere il problema.

I7 L'alunno utilizza due operazioni successive per risolvere il problema.

I8 L'alunno mette in colonna tutti i dati del problema indicando alla fine il risultato corretto.

Ipotesi risolutive errate:

E1 Il soggetto interpreta erroneamente i dati numerici.

52 Spagnolo F. "*Ricerca in didattica",* Collana Saperi e Curricoli, Applicazione della Ricerca in Didattica ai Laboratori Didattici Sperimentali, Atti del Seminario di studi tenuto a Isola delle femmine dal 15 al 19 Dicembre 1997, a cura dell'IRRSAE Sicilia..

E2 L'alunno applica l'algoritmo di calcolo errato, mettendo in colonna i dati; sbaglia anche la procedura di calcolo.

E3 Lascia incompleta la risoluzione del problema.

E4 Scelta errata dell'algoritmo di calcolo.

In seguito alla somministrazione della Seconda Prova, al campione di 27 alunni di cui 19 udenti e 8 sordi, sono stati raccolti i protocolli di ciascun alunno e sono stati classificati in base all'analisi a-priori precedentemente effettuata. Inoltre per ogni analisi a-priori scelta viene riportato un esempio. Eccole di seguito:

I.1 Svolge l'operazione attraverso una semplice stringa di numeri e indica attraverso la scrittura una spiegazione.

Il 4,35% degli alunni trascrive il processo mentale che lo porta ad utilizzare quell'operazione e non un'altra. Applica la macchina d'operazioni corrette ed indica anche qual è l'operazione che ha utilizzato.

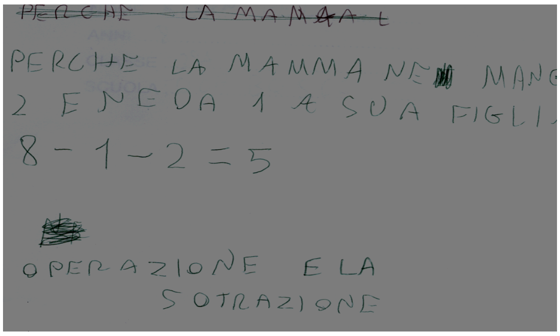


Figura 2

I.2 Svolge l'operazione attraverso una semplice stringa di numeri e indica il risultato attraverso un disegno.

Il 17,40% degli alunni indica l'algoritmo di calcolo che intende applicare; senza mettere i numeri in colonna risolve il problema utilizzando una semplice macchina d'operazioni. Infine l'alunno la soluzione disegnando il numero di panini corretti.

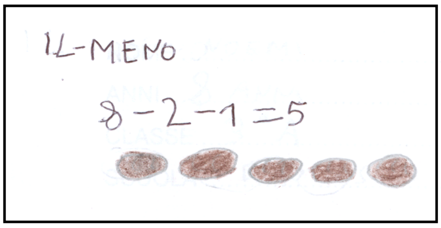


Figura 3

I.3 Mette i numeri in colonna e riporta il risultato nella stringa dei numeri.

L'13,05% degli alunni procede alla risoluzione del problema come è abituato a fare solitamente: utilizza lo spazio a disposizione per scrivere le operazioni in colonna indicando decine con la penna rossa ed unità con la blu; infine riporta la risposta corretta nella stringa dei numeri.

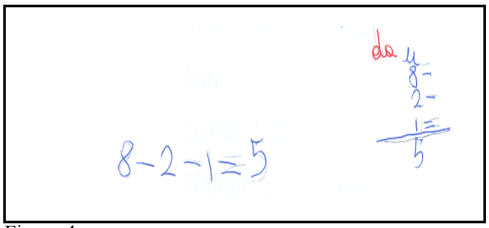


Figura 4

I.4 L'alunno risolve il problema utilizzando solo una macchina d'operazioni.

Questa strategia è stata utilizzata dal 17,40% degli alunni.

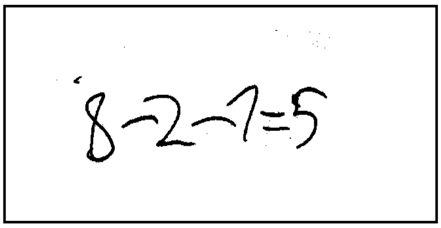


Figura 5

I.5 L'alunno procede senza scrivere nessun algoritmo di calcolo.

Il 4,35% degli alunni indica direttamente il risultato formulando verbalmente la risposta corretta.

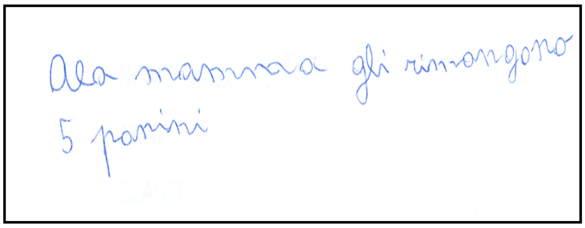


Figura 6

I.6 I ragazzi utilizzano un linguaggio verbale per risolvere il problema.

L’8,70% degli alunni “riscrive” la traccia del problema in un linguaggio più semplice e poi scrive direttamente il risultato.

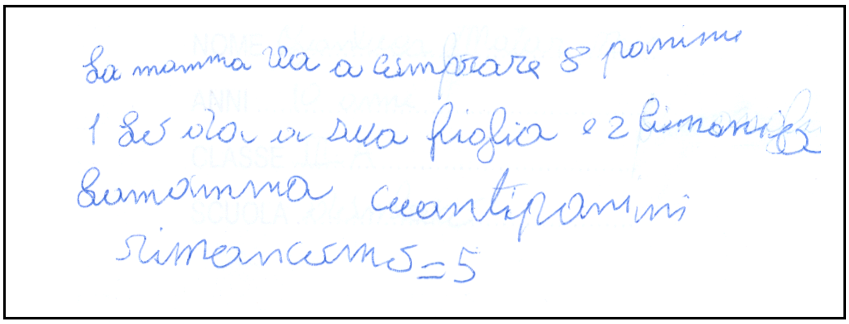


Figura 7

I.7 L’alunno utilizza due operazioni successive per risolvere il problema.

Il 13,05% degli alunni (questa strategie viene scelta solo da sordi),scrive parzialmente i dati, anzi indica le informazioni che per lui sono rilevanti per la risoluzione del problema. Procede effettuando due operazioni: prima sottrae i panini che vengono mangiati dalla mamma, poi dal risultato ottenuto sottrae quelli mangiati dalla figlia, avendo così il risultato corretto(fig.1). L’alunno indica il numero totale dei panini che la mamma possiede in partenza; successivamente svolge correttamente la sottrazione. Infine, l’alunno spiega numericamente come ha fatto ad ottenere il numero 3 (fig.2).

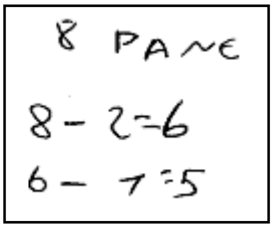


Figura 8

I.8 L'alunno mette in colonna tutti i dati del problema indicando alla fine il risultato corretto.

Questa strategia viene scelta dal 4,35% degli alunni.

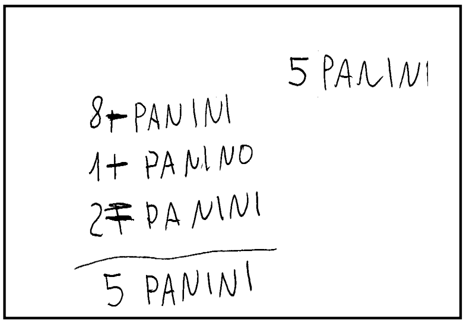


Figura 9

Ipotesi risolutive errate:

E.1 Il soggetto interpreta erroneamente i dati numerici.

Il 4,35% degli alunni procede alla risoluzione del problema interpretando scorrettamente i dati alfanumerici del problema e mettendo erroneamente i numeri in colonna. Utilizza i dati apparentemente in modo casuale ed effettua anche errori di calcolo.

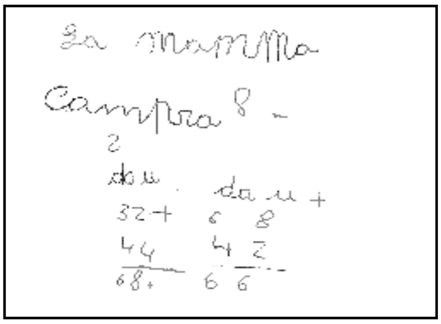


Figura 10

E.2 **L'alunno applica l'algoritmo di calcolo errato, mettendo in colonna i dati; sbaglia anche la procedura di calcolo.**

Il 4,35% degli alunni ha scelto questa strategia.

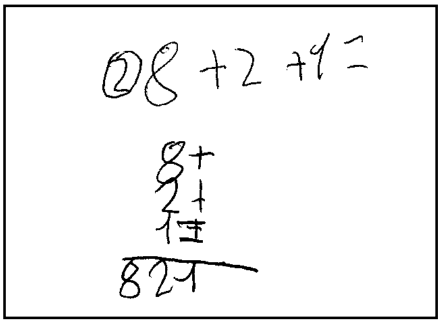


Figura 11

E.3 Lascia incompleta la risoluzione del problema.

Il 4,35% degli alunni prima somma i panini che sono stati mangiati, ma poi non li sottrae al numero totale di essi. Questo procedimento viene fatto incolonnando i numeri in modo errato.

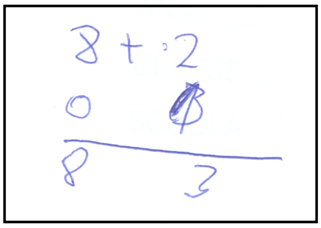


Figura 12

E.4 Scelta errata dell'algoritmo di calcolo.

Il 4,35% degli alunni scrive in successione i dati del problema incolonnando i dati numerici come se volesse eseguire un'operazione. Alla fine scrive 6 dimostrando che voleva eseguire una sottrazione, ma sbaglia il risultato.

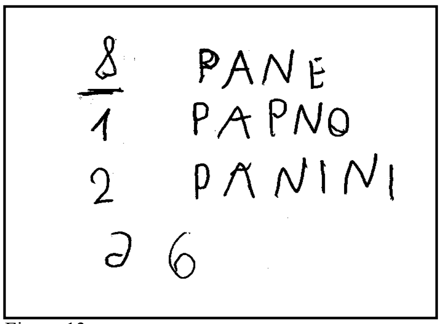


Figura 13

L'analisi dei dati è stata condotta utilizzando la Statistica Descrittiva. È stata costruita la **Tavola 5** a doppia entrata indicando: nella prima colonna a sinistra, tutte le ipotesi risolutive corrette e non; proseguendo, nella seconda e terza colonna troviamo la frequenza di alunni udenti e sordi con la quale venivano scelte le strategie; nelle ultime due colonne vengono indicate le percentuali.

Tavola 5

	Strategie Scelte		Percentuale	
Strategia	Udenti	Sordi	Udenti	Sordi
I1	1		4,35%	
I2	2	2	8,70%	8,70%
I3	2	1	8,70%	4,35%
I4	2	2	8,70%	8,70%
I5	1		4,35%	
I6	2		17,40%	
I7		3		13,04%
I8		1		4,35%
E1	1		4,35%	
E2	1		4,35%	
E3		1		4,35%
E4		1		4,35%

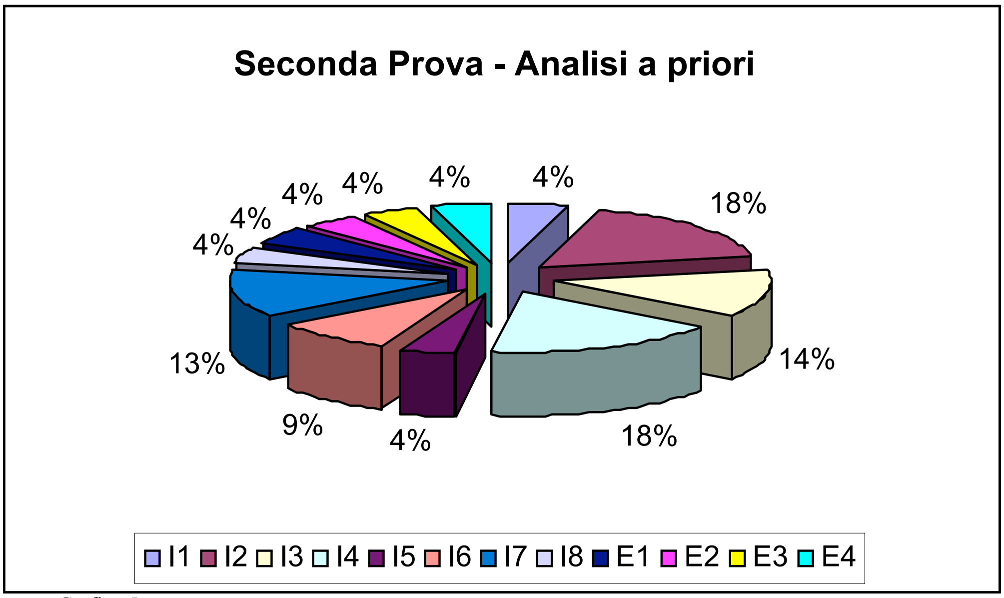


Grafico 5

La Tavola 5 e il Grafico 4 su riportati, rappresentano le 8 Strategie corrette e le 4 errate che sono state utilizzate dai 23 alunni; accanto ad ognuna di esse viene presentata la percentuale di alunni che scelgono detta strategia.

Molti dati interessanti si possono evincere dalla Tavola 5. Intanto molte strategie scelte dagli udenti sono state scelte anche dagli alunni sordi: questo indica che gli stili cognitivi impiegati per la risoluzione del problema sono sostanzialmente simili. Si nota che gli alunni udenti tendono generalmente ad indicare direttamente la soluzione del problema inserendo una semplice stringa numerica; i bambini sordi, invece, alcune volte "disegnano" il risultato corretto oltre ad indicarlo numericamente. Per esempio, la strategia "I2" che prevede l'utilizzo di un'immagine viene scelta da 4 studenti, due udenti e due sordi: questo dimostra che l'utilizzo di immagini non è proprio dei sordi, ma anche gli udenti riescono ad esprimersi bene con esso.
Le immagini visive contenute nelle prove, servivano da punto di partenza, d'aiuto nell'attività di simbolizzazione e astrazione. Si è osservato che i bambini, durante lo svolgimento del compito, si servivano continuamente dei disegni per riuscire a risolvere il problema, mentre la traccia di esso è stata poco considerata. Attraverso "la lettura" delle vignette sono riusciti a capire perfettamente cosa chiedesse il problema. Per la maggiore facilità di accesso le immagini sono risultate molto più comprensibili del testo scritto e di più facile accesso. I simboli matematici, anche se per loro natura sono astratti, attraverso i disegni venivano "concretizzati": proprio le immagini visive sono la chiave di volta di questa concretizzazione.

X. Terza Prova

Per rendere il compito adatto al nostro lavoro di ricerca abbiamo costruito item che utilizzano contemporaneamente numeri e figure. Ci siamo basati sui test di soluzione di problemi matematici " SPM" di Lucangeli D, Tressoldi P., Cendron M.
La terza prova utilizzata è un problema matematico formato da cinque componenti:

1. **Comprensione** delle informazioni presenti nel problema attraverso l'individuazione dell'immagine che lo rappresenta;
2. **Rappresentazione** delle informazioni mediante uno schema visivo in grado di strutturarle e integrarle;

3. **Motivazione** personale delle risposte date;
4. **Svolgimento**, rappresenta le modalità individuali di risoluzione del problema;
5. **Autovalutazione** della correttezza della procedura.

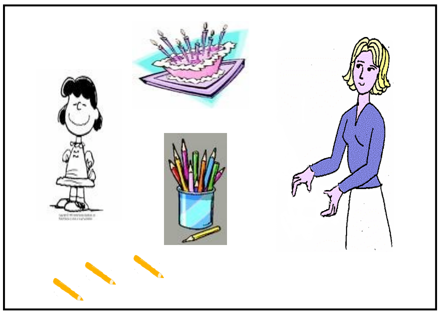
Sono state predisposte delle griglie di correzione dalle quali si può immediatamente desumere se le risposte che riguardano le componenti **comprensione e rappresentazione**, sono corrette:

1 PUNTO per la scelta corretta;
0 PUNTI per la scelta errata.

Di seguito riportiamo un esempio della Prova, la Tavola dei risultati e il grafico rappresentativo.

Comprensione

In quale disegno ci sono tutte le informazioni del problema?



1.B □

1.C □

Tavola 6

Alunni	Comprensione			Rappresentazione			Scelta	
	A	B	C	A	B	C	Corretta	Errata
A1s	1			0			1	1
A2u								
A3u		0				0		2
A4u			0			0		2
A5u								
A6u	1			0			1	1
A7u	1				1		2	
A8u	1				1		2	
A9u	1				1		2	
A10u	1				1		2	
A11u	1				1		2	
A12u	1				1		2	
A13u								
A14u	1			0			1	1
A15u	1					0	1	1
A16u	1				1		2	
A17u								
A18u	1				1		2	
A19u	1				1		2	
A20u		0			1		1	1
A21s	1				1		2	
A22s	1				1		2	
A23s	1				1		2	
A24s	1				1		2	
A25s	1				1		2	
A26s	1				1		2	
A27s	1				1		2	
Risultato							37	9

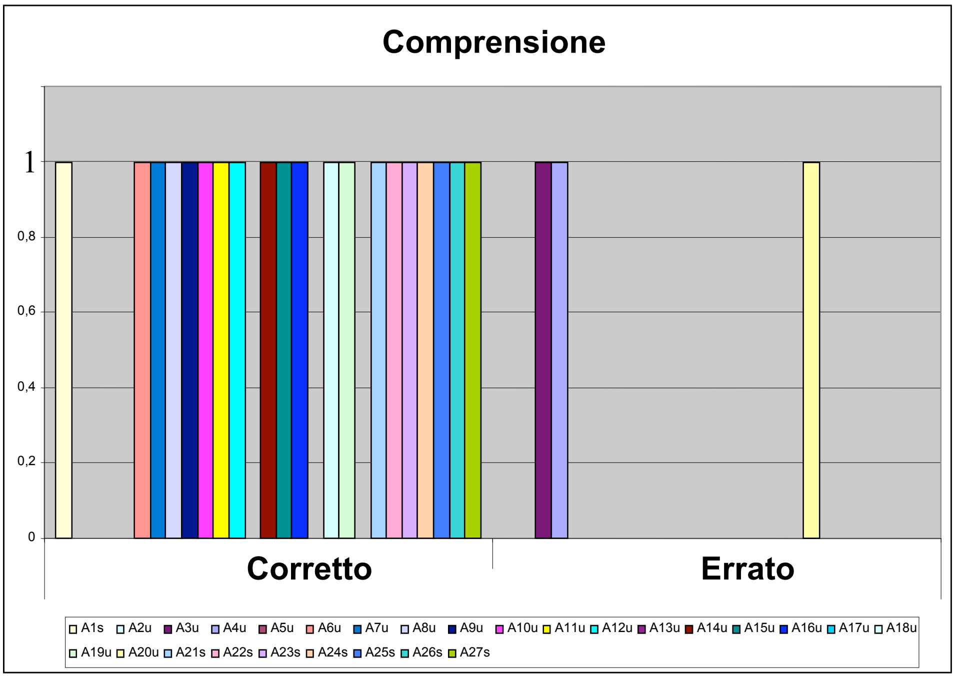


Grafico 6

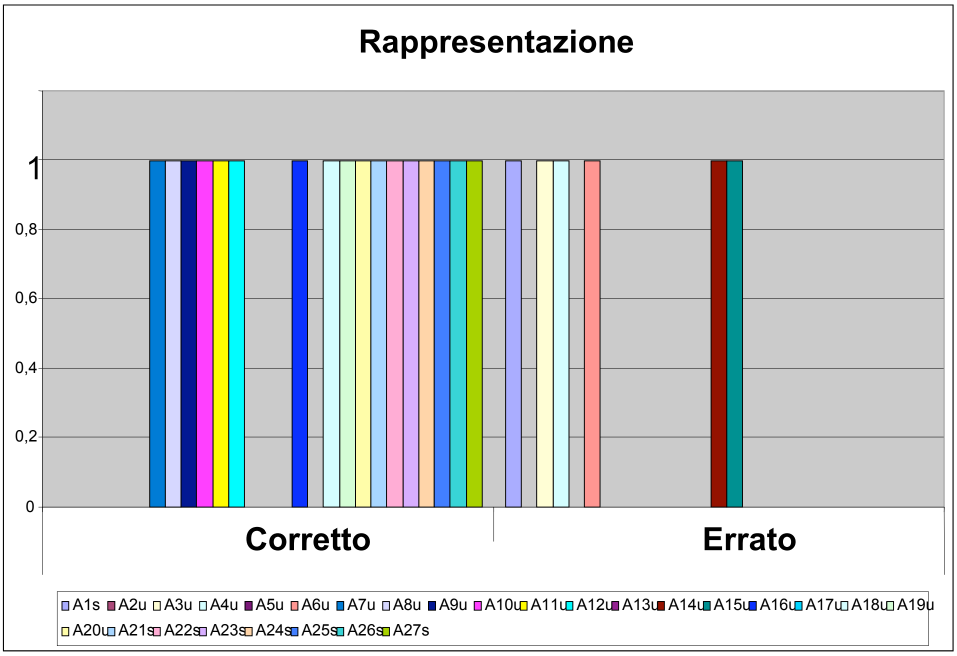


Grafico 7

La Tavola che riguarda la componente **Autovalutazione**, sotto riportata**,** indica con una crocetta le domande somministrate e le risposte che sono state date dagli alunni.

Tavola 7

Terza Domanda		
Ho fatto bene il problema	**Probabilmente ho sbagliato**	**Sono certo di aver sbagliato**
×		
	×	
×		
	×	
×		
×		
×		
×		
	×	
×		
×		
	×	
×		
	×	
	×	
	×	
	×	
	×	
	×	
×		
×		
×		
	×	

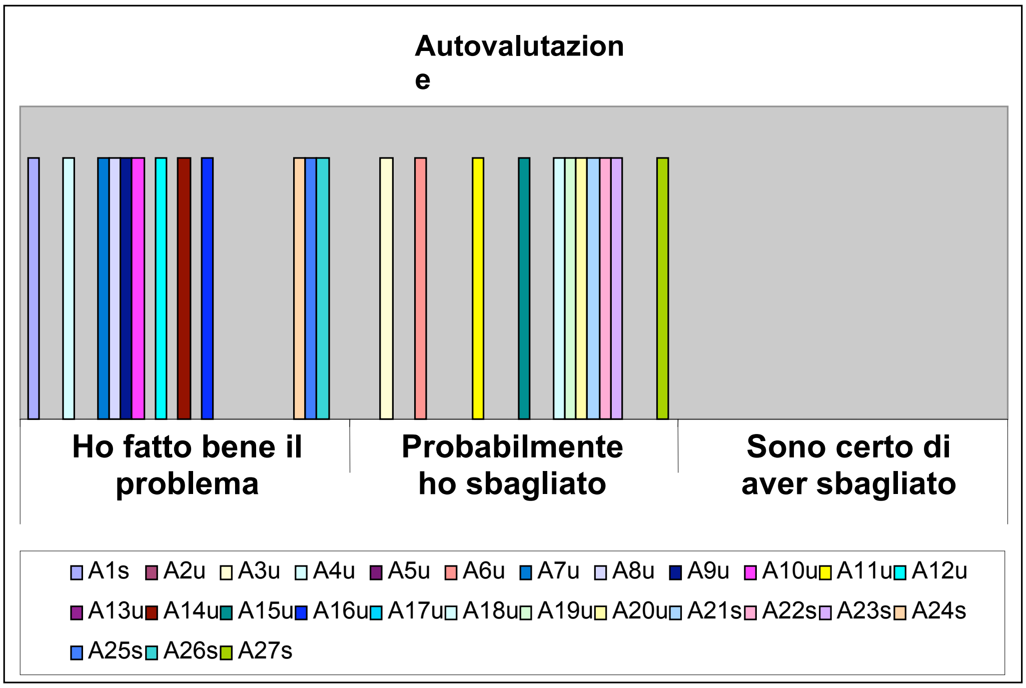


Grafico 8

Per quanto riguarda la componente "**Svolgimento del problema**"
Viene sotto riportata l'analisi a priori effettuata.

Ipotesi risolutive corrette:

S.1 Svolge l'operazione mettendo in colonna i numeri e riportando il risultato corretto nella stringa.

S.2 L'alunno risolve il problema utilizzando solo una stringa di numeri.

S.3 L'alunno risolve l'operazione mettendo i numeri in colonna.

S.4 Svolge l'operazione attraverso una semplice stringa di numeri e indica il risultato attraverso un disegno.

S.5 L'alunno disegna tutti i dati del problema e poi applica l'algoritmo di calcolo.

S.6 L'alunno mette in colonna tutti i dati del problema indicando alla fine il risultato corretto.

Ipotesi risolutive errate:

S.e 1 Il soggetto interpreta erroneamente i dati numerici.

S.e 2 L'alunno applica l'algoritmo di calcolo errato, mettendo in colonna i dati; sbaglia anche la procedura di calcolo.

S.e 3 Sceglie l'algoritmo di calcolo esatto, ma sbaglia il conteggio.

In seguito alla somministrazione della Terza Prova, al campione di 27 alunni di cui 19 udenti e 8 sordi, sono stati raccolti i protocolli di ciascun alunno e sono stati classificati in base all'analisi a-priori precedentemente effettuata. Inoltre per ogni analisi a-priori scelta viene riportato un esempio. Eccole di seguito:

S.1. Svolge l'operazione mettendo in colonna i numeri e riportando il risultato corretto nella stringa.

L'8,70% di studenti ha scelto la prima strategia; gli alunni procedono con una risoluzione di tipo classico: numeri in colonna e risultato riportato nella stringa. È da notare che solo alunni udenti hanno scelto questa strategia.

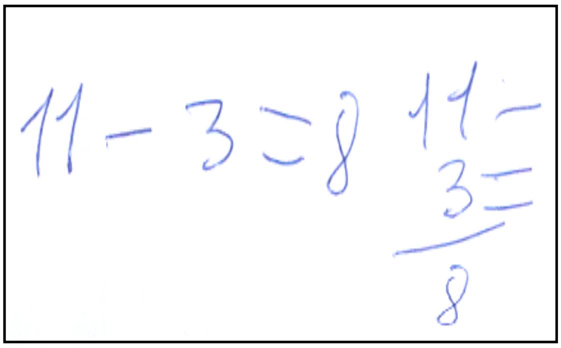


Figura 14

S.2. **L'alunno risolve il problema utilizzando solo una stringa di numeri**.

Questa strategia è stata scelta dal 21,74%, solo di studenti udenti. Gli alunni risolvono il problema utilizzando una semplice stringa di numeri.

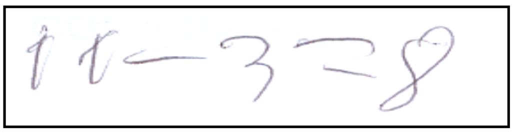


Figura 15

S.3. L'alunno risolve l'operazione mettendo i numeri in colonna.

Il 13,04% di soli alunni udenti sceglie di utilizzare l'incolonnamento per risolvere il problema.

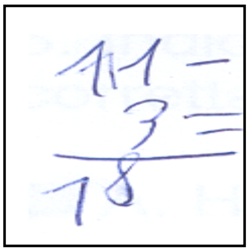


Figura 16

S.4. Svolge l'operazione attraverso una semplice stringa di numeri e indica il risultato attraverso un disegno.

Il 13,04% di soli alunni sordi sceglie di risolvere il problema utilizzando numeri ed immagini.

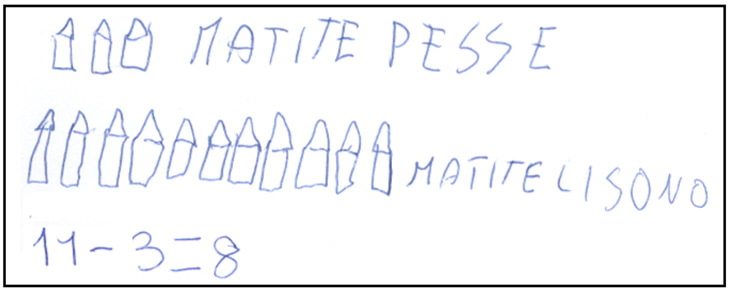


Figura 17

S.5. L'alunno disegna tutti i dati del problema e poi applica l'algoritmo di calcolo.

Il 21,74% di soli alunni sordi risolve il problema disegnando tutti i dati fondamentali del problema e risolve il problema grazie alle immagini.

S.6. L'alunno mette in colonna tutti i dati del problema indicando alla fine il risultato corretto.

Questa strategia non viene utilizzata.

Ipotesi risolutive errate:

S.e.1. Il soggetto interpreta erroneamente i dati numerici.

Questa strategia non viene utilizzata.

S.e.2. L'alunno applica l'algoritmo di calcolo errato, mettendo in colonna i dati; sbaglia anche la procedura di calcolo.

L'8,70% di alunni udenti ha scelto questa strategia.

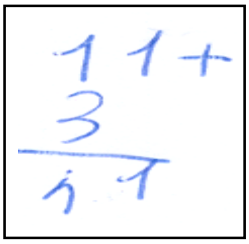


Figura 18

S.e.3. Sceglie l'algoritmo di calcolo esatto, ma sbaglia il conteggio.

Il 13,04% di alunni udenti applica la giusta operazione, ma fa errori di calcolo.

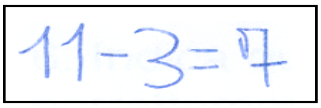


Figura 19

Di seguito viene riportata la Tavola 8, con la descrizione statistica delle strategie e della frequenza con cui esse sono state scelte. Nella prima colonna a destra, sono indicare con "S.1", "S.2", ecc, le strategie corrette e con "S.e.1", le strategie errate. Nelle due colonne seguenti, viene indicata la frequenza con la quale gli studenti, sordi e udenti, hanno scelto le stesse. Infine, nell'ultima colonna vengono indicate le percentuali di scelta di ogni strategia. Successivamente è riportato il Grafico 9 dell'analisi a priori della terza prova.

Tavola 8

	Strategie Scelte		Percentuale	
Strategia	**Udenti**	**Sordi**	**Udenti**	**Sordi**
S. 1	**2**		**8,70%**	
S. 2	**5**		**21,74%**	
S. 3	**3**		**13,04%**	
S. 4		**3**		**13,04%**
S. 5		**5**		**21,74%**
S. 6				
S.e. 1				
S.e. 2	**2**		**8,70%**	
S.e. 3	**3**		**13,04%**	

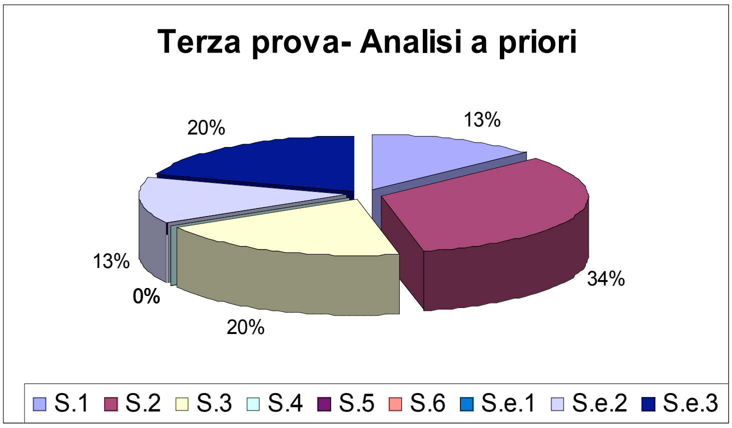


Grafico 9

La somministrazione di questa prova è stata accolta dagli alunni con grande entusiasmo: il modo con cui la prova è stata presentata ha favorito, nei bambini, un clima di attenzione e di grande partecipazione. Le figure e i disegni presenti in essa, hanno attivato una grande curiosità e, allo stesso tempo, un po' di stupore nello scoprire che, in realtà, quei disegni rappresentavano un problema matematico. Questa prova non è stata spiegata ai bambini: è stato chiesto loro di leggere sia il testo che le "immagini" e poi di dare una spiegazione personale di quello che avevano compreso. Gli alunni hanno manifestato la volontà di andare alla lavagna, uno per volta, e spiegare ai compagni la prova. In un clima di grande armonia, ogni bambino, udente e sordo, ha spiegato il problema portando molti esempi della vita quotidiana. È stato interessante notare la partecipazione e il coinvolgimento di ognuno di essi: in quel momento si svolgeva in classe quella che viene definita ricerca–azione con la partecipazione di tutti i componenti della classe.

I risultati delle prove sono stati molto vari: ci sono notevoli differenze di scelte di strategie tra udenti e sordi. I primi, hanno scelto prevalentemente strategie che prevedono l'utilizzo di stringhe numeriche e l'incolonnamento. I bambini sordi, al contrario, risolvono spesso il problema disegnando i dati principali e scrivendo a fianco cosa essi rappresentavano, non tanto per la loro comprensione, quanto per quella del lettore.

Appendice 1

L’esperimento che verrà descritto di seguito è stato condotto da due psicomotricisti e un insegnante di matematica presso la Scuola di Compiano, creata e diretta dalle suore canossiane di Brescia nell’anno 1998. Si è deciso di applicare lo stesso esperimento presso l’Istituto Padre Annibale Maria di Francia a Palermo. I 10 bambini a cui è stato sottoposto hanno un’età compresa tra gli otto e dieci anni ed hanno deficit uditivi di differente livello (3 sordi profondi, 3 sordi gravi, 4 sordi lievi).
Il problema è stato somministrato oralmente in un momento di relax per i bambini. Lo scopo, infatti, era quello di far percepire il problema come un gioco in modo che i bambini fossero più spontanei possibile.
Il testo del problema è il seguente:

“Gino si trova sul quinto gradino di una scala, sale di altri tre gradini, su quale gradino si troverà?”

Lo scopo della somministrazione di un semplice problema è quello di osservare il passaggio del bambino sordo da un pensiero prettamente legato all’esperienza, ad uno di tipo simbolico-astratto.

Descrizione delle fasi

I Fase

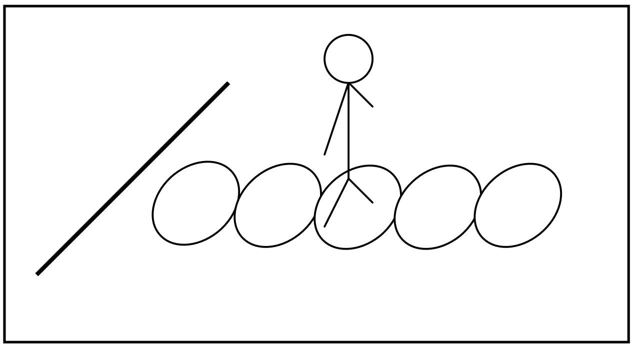


Figura 14

Per risolvere il problema è consigliabile avere una scala nelle vicinanze; se questo non è possibile, o se considerando la vivacità della classe questo risulti pericoloso, è possibile simulare i gradini con materiale strutturato opportunamente sistemato. È un primo approccio linguistico perché il bastone ed i cerchi sono i significanti del pianerottolo (inizio della scala) e dei gradini e l'azione dell'avanzare nei cerchi è il significante del'azione di salire i gradini. La scala è stata "scritta" (bastone e cerchi non sono una scala), ma la soluzione del problema è ancora ottenibile con l'agire dell'intero corpo.

II Fase

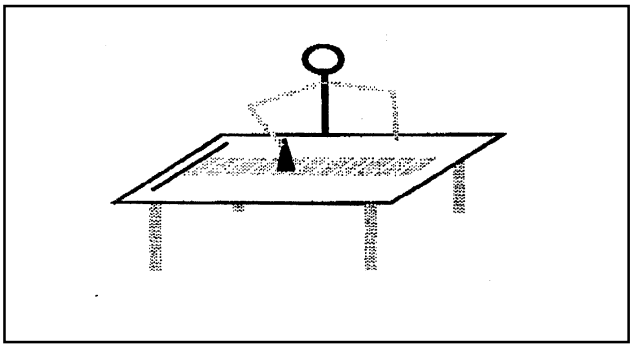


Figura 15

Con il materiale strutturato si simula la scala sul tavolato di un banco e il bambino opera a livello manipolatorio su un oggetto che è il significante di "Gino". Spostare l'oggetto è l'equivalente di salire la scala. Il problema è risolto sempre con l'azione sulle cose: l'agire manipolatorio diventa il significante dell'agire con l'intero corpo.

III Fase

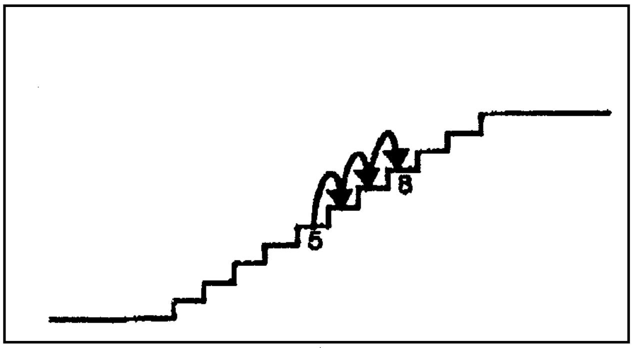


Figura 16

Su di una scala preparata dagli sperimentatori, il bambino comincia ad affrontare i problemi di un iconografia di una esperienza. Questo non rappresenta un approccio molto facile perché, mentre per scrivere la posizione sul disegno della scala basta un po' di conoscenza spaziale, per disegnare le azioni fatte è necessaria l'ideografia della freccia (che normalmente è utilizzata come il significante del cambiamento di posizione). Dopo aver contato le posizioni sull'iconografia della scala il bambino scrive i numeri nella posizione corrispondente. Ci si avvicina al linguaggio simbolico: il disegno delle frecce, che è ancora agire, è diventato il significante dell'agire corporeo.

IV Fase

Gradini	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Dall' iconografia della scala all'ideografia della linea dei numeri. Ogni quadratino è il significante di un gradino e i numeri sono le posizioni. Le frecce rappresentano le azioni e, per un ulteriore avvicinamento al linguaggio simbolico, le tre azioni vengono scritte anche come se fossero un'unica azione: l'addizione, infatti, è un'unica operazione e non tre operazioni.

V Fase

Gradino 5 su di uno → su di uno → su di uno → Gradino 8

Questa forma di scrittura toglie l'informazione della scala e sistema i dati principali del problema in modo che essi si avvicini sempre di più alla formalità delle operazioni.

VI Fase

Gradino 5 su di tre → Gradino 8
(+3)

Questa scrittura si stacca nettamente dall'immagine e dal vissuto e si eliminano anche le azioni che portano al risultato,(nella fase precedente esisteva ancora la possibilità di fare delle azioni grafiche, cioè di tracciare le frecce che rappresentavano il conteggio per salire i gradini).

VII Fase

5+3=8

È l'ultima fase, del linguaggio simbolico. Siccome in questo linguaggio la quantità d'azioni che risolve il problema non viene rappresentata e visto che il bambino ha ancora bisogno di agire e di operare, la scrittura "5+3" per dare origine al risultato somma richiede che il bambino la traduca ancora in un linguaggio fatto di azioni fisiche, come l'agire sulle dita (le dita come i significanti dei gradini). Solo con l'esperienza ripetuta l'agire fisico diventerà un operare mentale e la scrittura simbolica aiuterà a far diventare l'operazione aritmetica un "agire" sui numeri e no più l'agire sulle cose. In altre parole, a tante realtà diverse e apparentemente lontane tra loro si associa una formalizzazione unificante, semplice e facilmente elaborabile.

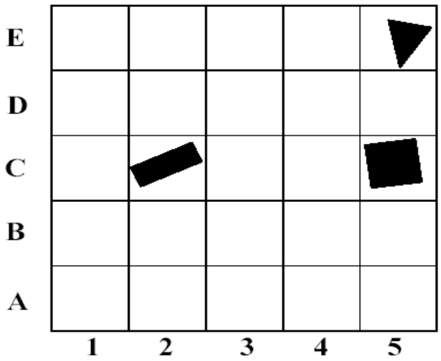
Appendice 2

Prima Prova

PROVA DI MATEMATICA

NOME……………….
CLASSE……………..
SCUOLA…………….

1. Quale figura si trova nella casella 5, C ?

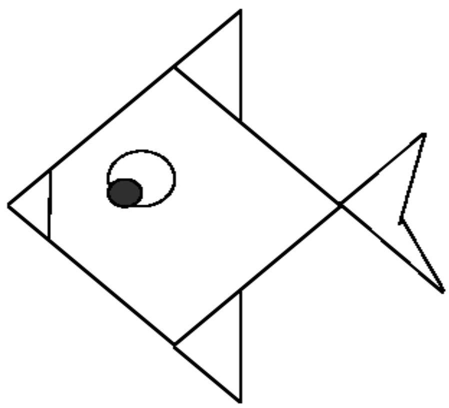


A. ☐ Triangolo.
B. ☐ Quadrato.
C. ☐. Rettangolo.

2. La mamma ha comprato 8 panini. Uno lo mangia la mamma, 1 lo mangia sua figlia. Quanti panini rimangono?

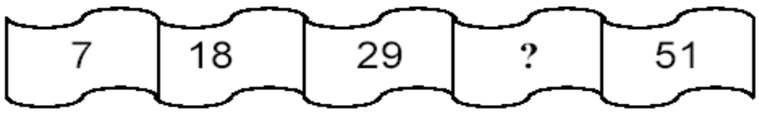
A ☐ 7
B ☐ 8
B ☐ 6

3. Quanti triangoli vedi nel pesce?



A ☐ 3
B ☐ 4
C ☐ 5

4. Osserva la striscia di numeri. Quale numero manca?

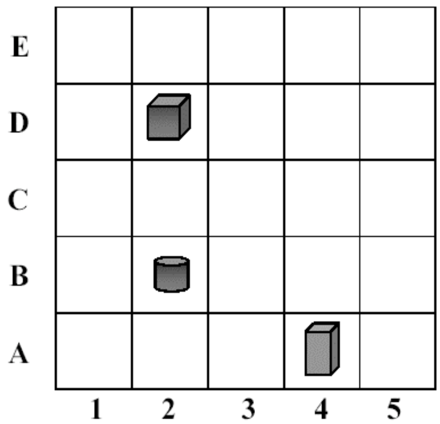


A □ 11
B □ 40
C □ 60

5. Quale tra le operazioni seguenti ha come risultato 28 ?

A □ 15 + 11
B □ 30 – 2
C □ 18 + 12

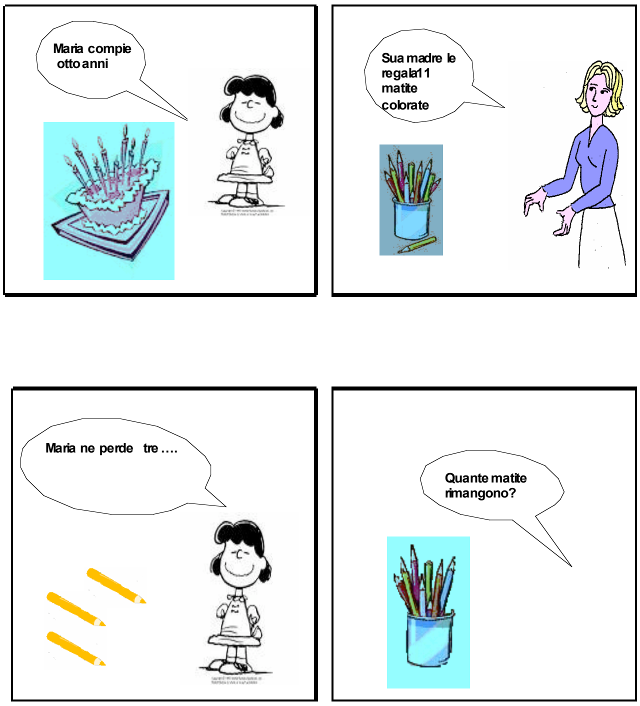
6. In quale casella si trova il cubo?



A □ 2, B
B □ 4, A
C □ 2, D

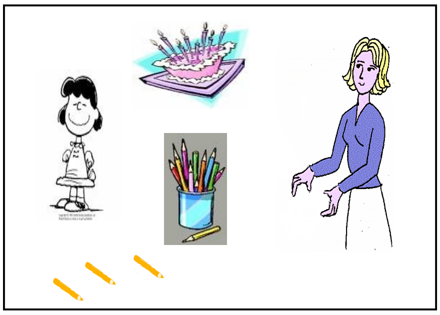
Seconda prova

Problema



Comprensione

In quale disegno ci sono tutte le informazioni del problema?



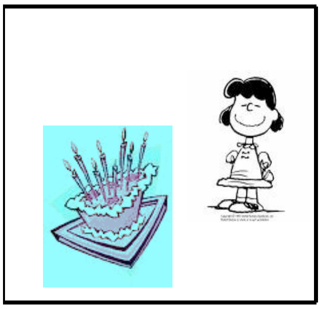
1.B ☐

1.C ☐

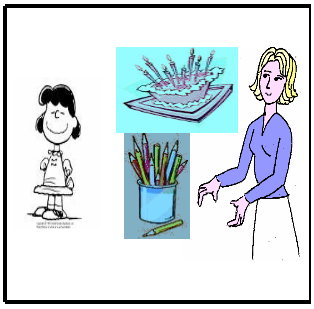
Rappresentazione

1. Scegli il disegno con le informazioni più importanti per la soluzione del problema:

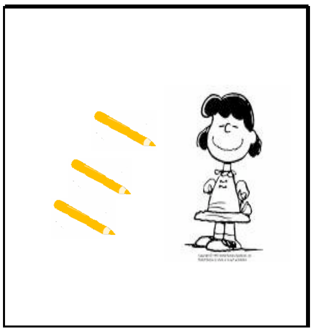
1.a _



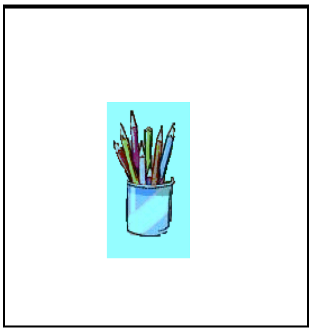
1.b _



1.c _



1.d _



Motiva la risposta

Fai i calcoli e risolvi il problema

Autovalutazione

Indica quanto sei sicuro di aver eseguito correttamente tutti i compiti:

❑ A. Ho fatto bene il problema.
❑ B. Probabilmente ho sbagliato.

Conclusioni

Studiare e mettere insieme campi di ricerca così ampi e così *apparentemente* distanti tra loro, non è cosa semplice. Gli studi sperimentali presenti in questa direzione riguardano per lo più casi americani, in particolar modo quelli svolti dalla Gallaudet University, unica università di sordi al mondo. La scelta di non utilizzare, se non nei limiti del possibile, materiale estero è dovuta al fatto che lo studio che si è svolto riguarda sordi che segnano in L.I.S. e non in A.S.L. (lingua dei segni americana) o in L.S.F. (lingua dei segni francese). Sappiamo bene che ogni lingua presuppone, oltre a differenti canali comunicativi, una forma di pensiero, una organizzazione delle conoscenze che varia a seconda della lingua del parlante. Coloro che parlano più di una lingua correttamente ed hanno esperienza di questa, affermano che cambiando lingua, quindi modalità comunicativa, bisogna cambiare anche la strutturazione del pensiero e riorganizzare lo stesso: altrimenti si rischia di cambiare il senso stesso del pensiero che deve essere tradotto. La ricerca effettuata ha voluto tenere ben salde, come linea di lavoro, le ricerche svolte da molti psicologi e psicolinguisti italiani che hanno avuto il grande merito di cominciare oltre 30 anni fa le prime ricerche sul pensiero e sul linguaggio dei sordi.

La mia scelta di unire questi campi di ricerca è nata dall'osservazione diretta di classi miste, udenti e sordi, durante le ore di matematica. Succedeva spesso che i ragazzi sordi avessero prestazioni inferiori rispetto agli udenti, ma nello stesso tempo, e con grande curiosità, osservavo che i bambini sordi, in alcuni problemi matematici aiutassero i loro coetanei udenti nella risoluzione. Il lavoro sperimentale che si è svolto successivamente ha messo in luce che l'ostacolo maggiore dei sordi è il linguaggio verbale e la poca attenzione da parte dei docenti ad utilizzare canali comunicativi comprensibili a tutti. Anche le prestazioni degli udenti sono risultate superiori nei compiti per immagini piuttosto che in quelli verbali. Spesso a scuola la lingua orale è l'unica utilizzata: questo è il retaggio della nostra cultura secolare che *c'impone* l'uso del "logos" sopra ogni altra cosa. In realtà, i mezzi di comunicazione che l'uomo ha a disposizione sono innumerevoli e bisognerebbe sviluppare e garantare ai bambini l'utilizza di essi.

Alla fine del mio lavoro, teorico e sperimentale assieme, è evidente che più di conclusioni, si potrebbe parlare di riflessioni e problemi aperti. La fase sperimentale, infatti, ha dato delle risposte, ma ha anche aperto innumerevoli dubbi e punti di domanda. Si è visto come i bambini sordi prediligano, nella scelta delle strategie da adottare per risolvere i problemi, quelle che utilizzano canali comunicativi visivo-spaziali, ed in questo modo arrivando alla risoluzione e comprensione del problema.

Bibliografia

AA. VV.,“Le competenze dei bambini di prima elementare: un approccio all’aritmetica”, in La matematica e la sua didattica, n. 1, p. 47-95, 2004.

AA. VV., “Psicologia dei processi cognitivi”, il Mulino, Bologna, p. 165, 1995.

Abbiati M., “Corso introduttivo di lingua cinese moderna”, ed. Cafoscarina, Venezia, 1990.

Alleton V., “L’ecriture chinoise”, Presses universitaires de France, 1997.

Alongi F., “Influenza dei registri linguistici nell’enunciato di un problema sui processi di risoluzione adottati dagli alunni del secondo biennio”, Tesi di Laurea, Università degli studi di Palermo, Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria, relatore Prof. Filippo Spagnolo.

Antonietti A., Angelini C. Cerana P., “L’intuizione visiva”, Franco Angeli, Milano, 1995.

Asha K., Jitendra K. H., Beck M., “L’uso degli schemi visivi per la risoluzione dei problemi matematici” in Difficoltà di apprendimento vol. 8, n. 1, Lehigh University, Bethlehem, pp. 9-20, 2002.

Bagni G. T., D’Amore B., ”Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale”, in La matematica e la sua didattica n.1, Dipartimento di Matematica e Informatica Università di Udine, p. 73-89, 2002.

Bartolomei A.,”Linguaggio dei segni e Matematica” in I Care, anno 23, n. 3 p. 96-102, 1998.

Baruk S., “Dizionario di Matematica Elementare”, a cura di Speranza F., Grugne L., Bologna, p.34, 1998.

Bazzini L., Colombi E., Sacconi P., Zampieri L., “Contesti e linguaggi in matematica, proposte per l’educazione di base”, IRRSAE Lombardia, Milano, 2001.

Benedetti C., “Probabilità a scuola: un percorso di condivisione dei registri semiotici”, Tesi d’abilitazione all’Insegnamento nella Scuola Secondaria, SISSIS, Università di Bologna, 2000.

Benigno G., “Problem solving: analisi comparativa di diversi registri linguistici”, Tesi di Laurea in Scienze della Formazione Primaria, Università degli Studi di Palermo, Facoltà di Scienze della Formazione, relatori prof.ssa La Marca A., prof. Spagnolo F., 2005.

Brousseau G., “Les obstacles épistémologique et les problèmes en mathématiques”, Recherches en Didactique des Mathématiques, n. 4, pp.165-198, 1983,

Caccaro A., “Apprendimento della matematica”, in Educazione dei Sordi, n. 2, p. 87-96, 1999.

Cacciari C., “Psicologia del linguaggio”, Il Mulino Bologna, 2001.

Cardona Russo T., Volterra V., “Le lingue dei segni, storia e semiotica”, Carocci, Roma, 2007.

Chesi C., “Alcune osservazioni sulle produzioni verbali non-standard dei bambini sordi: i sintagmi nominali”, in L’educazione dei sordi, n.2, p. 93 - 110, 2006.

Dal Secco L., “Grammatica cinese”, ed. Patron, Bologna, 1988.

De Mauro T., “Vocalità, gestualità, lingue segnate e non segnate” in Atti del II Convegno Nazionale “Viaggio nella Città Invisibile” a cura di Bagnara C., Chiappini G., Conte M., Ott M., ed. Del Cerro, Pisa, 2000.

De Saussure F. “Corso di linguistica generale” in Adorno F., Gregory T., Verra V. “ Storia della Filosofia” ed. La Terza, p.120, 1990.

Ercolani A. P., Perugini M. “La misura in psicologia”, p. 47- 55, LED, Milano, 1997.

Facenda A.M., Fulgenti P., Nardi J., Paternoster F., “Rapporto tra disegno e modello dinamico nella costruzione di immagini mentali” Sez. Mathesis Pesaro, NRD Università di Parma, 2001.

Finnegan M., Favorire l’integrazione degli studenti sordi: errori da evitare e strategie utili”, in Difficoltà di Apprendimento, n. 4, pp. 589-598, 2005.

Fontana D., Celi F., (Università degli Studi di Parma e Azienda USL di Massa e Carrara), “L’insegnamento positivo: ricerche psicoeducative in situazione reale sui comportamenti problematici”, in Difficoltà di apprendimento, n. 2, pp. 215-228, 2001.

Frege G. “Logica e aritmetica” in Adorno F., Gregory T., Verra V. “ Storia della filosofia”, ed. La Terza, p. 127, 1990.

Furth H. G., “Thinking withaut language: psychological implication of deafness”. Roma, A. Armando, 1971.

Gouthier D., “Termini e linguaggio per comunicare matematica”, in International Journal on Science Communication, n. 2, giugno, 2002.
Krutetskii A., “The Psychology of Mathematical Abilities in School Children”, The University Chicago Press, Chicago, 1976.
Maragna S., Favia M., “Una scuola oltre le parole”, La Nuova Italia, Firenze, 1995.
Mellone M., Pezzia M., “Un progetto di ricerca-azione sulle strutture aritmetiche nelle scuole di base”, Università degli Studi di Parma e Azienda USL di Massa e Carrara, 1999.
Mousley K., Kelly R., “Problem solving Strategies for teaching mathematics to deaf students”, in American Annals to Deaf, , n. 4, p. 143, 1998.
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica dell’Università degli Studi di Udine, “Forme del pensiero nella didattica della matematica: riflessioni e ricadute didattiche”, Quaderni di Ricerca in Didattica, n. 17, G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy), 2007.
Passalunghi M., “Psicologia dell’apprendimento matematico”, Utet, Torino, 1995.
Pietrandrea P., “Complessità dell’interazione di iconicità ed arbitrarietà nel lessico della LIS” in Atti del Convegno Nazionale “Viaggio nella Città Invisibile” a cura di Bagnara C., Chiappini G., Conte M., Ott M. ed. Del Cerro, Pisa, 2000.
Pigliacampo R., “Lingua e Linguaggio nel sordo, analisi e problemi di una lingua visivo-manuale”, Armando Editore, Roma, 1998.
Pizzuto E., “Aspetti morfo-sintattici, in La lingua dei segni italiana. La comunicazione visivo-gestuale dei sordi”, Volterra V. (a cura di) Bologna, p. 179-209, 2004.
Radford L., “La generalizzazione matematica come processo semiotico”, Bollettino dei docenti di matematica-Istituto Pedagogico, n. 49, p. 15, 2004.
Ragusa F. “Ritmo, struttura e corpo logico-matematico: considerazioni sperimentali per lo sviluppo del linguaggio matematico e delle strutture logiche nel bambino della scuola dell’infanzia”, Tesi di Laurea, anno 2003-2004, relatore, Prof. Filippo Spagnolo.
Russo M., “Linguaggio e percezione: le basi sensoriali della comunicazione linguistica”, Carocci, Roma, p. 246-254, 2002.

Sandri P., “Osservare, valutare, orientare gli alunni con deficit”, in Longo B., Davoli A., (a cura di), Osservare, valutare, orientare gli alunni in difficoltà, Pitagora, Bologna, 2003.

Scalise S., Ceccagno A. “Facile o difficile? Alcune riflessioni tra italiano e cinese” in. Bosc F., Marello. C., Mosca S. (EDS.) Sapere insegnare. Formazione d’insegnanti d’italiano tra scuola ed università, Loesher ,Torino, 2000.

Volterra V. et All., “Le prime parole: dagli schemi sensomotori agli schemi rappresentativi”, relazione tenuta al convegno di Psicolinguistica organizzato dall’Istituto di Psicologia del C.N.R. di Roma, dicembre 1974.

Vygotsky L. S., “Pensiero e linguaggio”, a cura di Costa A., Giunti, Firenze, 1966.