Introduction

Les savoirs géométriques interviennent dans de nombreuses modélisations, celle des phénomènes spatiaux évidemment, mais aussi optiques, mécaniques, etc. Cet usage est quasi inexistant dans l'enseignement.

La transposition didactique actuelle en France minore ce rôle de modélisation, même s'il peut être évoqué à l'occasion comme celle de l'enseignement du théorème de Thalès.

Cependant de façon implicite, la géométrie enseignée fait appel à une modélisation géométrique du spatial en ayant recours aux dessins en géométrie. Les dessins fournissent une représentation spatiale des objets et des relations théoriques de la géométrie.

Cette recherche se propose d'étudier des liens entre spatial et géométrique chez des élèves ayant déjà une certaine familiarité avec la géométrie en tant que théorie, dans une activité de modélisation géométrique du fonctionnement d'un objet spatial.

Une telle activité présente un caractère de nouveauté pour les élèves et constitue un problème inhabituel pour ces derniers.

On analysera les processus en jeu chez les élèves dans la représentation en termes de géométrie d'un problème posé sous forme non mathématique.

On étudiera cette activité dans l'environnement logiciel Cabri-géomètre qui facilite le recueil d'observables, qui a un ensemble fini de primitives géométriques mais qui est très ouvert pour permettre un très grand nombre de solutions.

On proposera de faire une simulation dans Cabri-géomètre de systèmes articulés conçus et utilisés au XVIII et XIX$^{\text{èmes}}$ siècles à des élèves de Seconde. D'emblée l'objectif déclaré aux élèves est donc celui de modéliser le comportement spatial dynamique d'une machine à dessiner.

1. Cadre théorique

A partir des travaux sur la problématique *modélisation mathématique,* nous proposons un cadre théorique pour définir le processus de modélisation mathématique, en considérant des points de vue différents.

Ainsi, ce cadre théorique nous permet d'étudier la distinction entre spatio-graphique et géométrique.

Dans notre travail, nous nous limitons à la géométrie étant un outil de modélisation du spatial.

1.1 La modélisation mathématique

<u>Une définition de la modélisation par Chevallard (1989, p. 53):</u>

"Le modèle mathématique comprend deux registres d'entrée : un système (mathématique ou non mathématique) et un modèle mathématique de ce système.

Le processus de modélisation comprend schématiquement trois étapes :

1. On définit le système que l'on entend étudier en précisant les aspects " pertinents " par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système, soit l'ensemble des variables par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il apparaît.
2. On construit alors le modèle à proprement parler en établissant un certain nombre de relations…entre les variables prises en compte dans la première étape, le modèle du système à étudier étant l'ensemble de ces relations.
3. On travaille le "modèle" ainsi obtenu dans le but de produire des connaissances relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système. "

L'auteur souligne dans cette définition la présence de choix faits par l'expert dans la construction d'un modèle mathématique : il parle de préciser les aspects " pertinents " par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système.

Dans le schéma proposé par Chevallard, on voit bien qu'on modélise mathématiquement un système dans le but de répondre à des questions à propos de ce système. Ce sont ces questions qui guident les choix de l'auteur du modèle, des aspects du système à prendre en compte dans la modélisation.

Par contre, la troisième étape ne porte pas sur la construction du modèle, mais sur son utilisation, donc il n'y a pas de phase de validation du modèle mathématique construit.

Dans la suite on va présenter un autre point de vue sur la modélisation mathématique qui met en valeur le passage du système étudié à des modèles intermédiaires non mathématiques.

Coulange (1997, p. 7–8) schématise le processus mis en œuvre par l'expert pour construire un modèle mathématique de la manière suivante :

En entrée, un système et des questions associées.

1. Passage du système que l'on entend étudier à un modèle pseudo-concret de ce système.
2. Passage du modèle pseudo-concret au modèle mathématique
3. Phase de travail purement mathématique dans le modèle mathématique
4. Retour au système étudié.

Dans le schéma ci dessus, le premier passage se fait du domaine extra-mathématique au domaine “ pseudo-concret ” en réduisant le système concret à des aspects de ce système pertinents relativement aux questions auxquelles on souhaite répondre par l'intermédiaire de la modélisation mathématique, tout en restant dans un langage non strictement mathématique. En fait, ce modèle pseudo-concret peut être plus ou moins proche du modèle mathématique à construire ou inversement de la situation à modéliser.

Dans le passage au domaine mathématique, ce modèle pseudo-concret est traduit dans la symbolique mathématique. On découpe le système en variables mathématiques correspondant aux “ aspects pertinents ” du modèle pseudo-concret. Ainsi, on traduit les relations dégagées du modèle pseudo-concret en relations mathématiques entre les variables trouvées.

Une fois le modèle mathématique construit, on effectue ensuite un travail purement mathématique sur des relations entre les variables. Il s'agit de résoudre le problème mathématique posé à la suite de la deuxième étape.

Après avoir construit des nouvelles relations mathématiques, on passe à la dernière étape de cette démarche. On dégage des connaissances sur le système étudié qui doivent apporter des réponses aux questions de départ.

En effet, on peut poser la question de la validité du modèle, c'est-à-dire vérifier si celui-ci répond bien à l'étude que l'on entendait faire du système.

Le schéma de la modélisation élaboré par Martinand (Buty, 2000) repose sur la distinction de deux registres :

le registre

du référent empirique et du modèle qui le représente

la phénoménotechnique la phénoménographie la phénoménologie

Le registre du référent empirique est finement décrit par la phénoménotechnique, qui contient les objets utilisés et leurs conditions d'utilisations et par la phénoménographie, qui est la “ lecture première ” des phénomènes.

Une fois que le modèle du phénomène a été construit, on passe à la lecture “ seconde, par modèle interposé ”.

Les processus de modélisation sont en effet les aller-retours entre les deux registres.

Laborde (1992) attribue deux fonctions complémentaires au processus de modélisation, celle d'abstraction et celle de représentation :

“ Une modélisation met en jeu une certaine abstraction du domaine de réalité concerné en ne retenant de ce dernier qu'un certain ensemble d'objets et de relations qui sont représentés dans le modèle. Le modèle ne rend compte que d'une partie du domaine de réalité…A chaque modèle est donc attaché un domaine de fonctionnement dans le domaine de réalité dépendant des objets et relations retenus par la modélisation.

Un modèle fournit aussi une représentation du système d'objets et de relations retenues pour la modélisation ou encore, pour prendre une image plus parlante, une incarnation de ce système dans un support d'expression…Mais toute interprétation issue du support ne donne pas une information nécessairement valide dans le domaine de réalité. On peut ainsi délimiter un domaine d'interprétation à l'intérieur du support du modèle. ”

1.2 Le géométrique et le spatio-graphique

On distingue deux domaines :

- le domaine *géométrique*
- le domaine *spatial*

Le domaine géométrique est considéré comme théorique mettant en jeu des objets entretenant diverses relations. Les objets et relations de la géométrie sollicitent de la part de l'individu des connaissances et contrôles théoriques.

Les réalités spatio-graphiques (dessins produits par la trace du plomb sur le papier, d'un bâton sur le sable, d'électrons sur l'écran de l'ordinateur) représentent ces objets théoriques. Le domaine spatial relève du monde sensible et sollicite une appréhension et des contrôles de type perceptif. Ce n'est que lors d'un processus d'interprétation en termes de géométrie, qu'elles appellent des connaissances théoriques. (Laborde&Capponi, 1994)

La géométrie est un outil de modélisation du spatial.

La géométrie enseignée, de façon implicite, fait appel à une modélisation géométrique du spatial en ayant recours aux dessins en géométrie (ce que l'on appelle habituellement figures).

1.2.1 Les rapports entre dessin et objet géométrique

Les dessins fournissent une représentation spatiale des objets et relations théoriques de la géométrie.

Dans la triade classique signifiant, signifié, référent, en tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin est considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne, ou de la géométrie projective). Le signifié de la figure géométrique associé pour le sujet est constitué par les rapports entre un dessin et son référent construits par ce sujet, producteur du dessin.

On peut caractériser les rapports entre dessin et objet géométrique par le fait que des propriétés de l'objet géométrique se traduisent graphiquement par des relations spatiales.

La complexité des rapports entre dessin et objets géométrique provient :

a) d'une part, un dessin géométrique n'est pas nécessairement interprété par son lecteur comme renvoyant à un objet géométrique,

b) d’autre part les interprétations d’un même dessin en tant que signifiant d’un objet géométrique sont multiples et un particulier la perception intervient dans la construction d’une interprétation lorsque le lecteur ne dispose pas de fortes connaissances théoriques géométriques qui lui permettent de dépasser la première lecture perceptive.

Or, l’appréhension perceptive du dessin peut gêner ou au contraire favoriser la lecture géométrique par des élèves, en attirant l’attention sur des éléments du dessin non pertinents pour cette lecture. (Duval, 1988)

1.2.2 Domaine de fonctionnement et domaine d’interprétation attaché au dessin

On peut attacher un domaine de fonctionnement au dessin. Le dessin, en tant que signifiant d’un objet géométrique, rend compte de propriétés de cet objet mais ne le fait que partiellement. Ainsi, le dessin ne rend pas compte du domaine de variation des éléments de l’objet géométrique.

On peut aussi attacher au dessin un domaine d’interprétation. Toutes les propriétés spatiales du dessin ne peuvent être interprétées comme renvoyant à des propriétés de l’objet. Par exemple, la position du dessin dans la feuille de papier est en dehors du domaine d’interprétation des dessins en tant que signifiants d’objets de la géométrie euclidienne.

Or, certains des problèmes rencontrés par des élèves tiennent justement à ce qu’ils fonctionnent avec un domaine d’interprétation différent de celui de la géométrie euclidienne. (Laborde & Capponi, 1994)

1.2.3 Les rapports entre dessins et objet géométrique dans la résolution de problèmes géométriques

Les dessins fournissent une représentation spatiale des objets et relations théoriques de la géométrie. Ils servent d’appui aux démarches de raisonnement géométrique dans les problèmes de preuve. Des allers et retours entre dessin et théorie ont donc lieu en permanence dans la résolution de problèmes géométriques dans ce qui constitue la partie privée du travail de l’élève.

En effet, la solution que l'élève doit fournir au professeur ne doit pas faire référence au dessin et à son rôle dans la résolution mais doit se situer uniquement au niveau théorique.

1.3 Cabri-géomètre

Un micromonde comme Cabri-géomètre permet de créer des réalités spatio-graphiques d'objets géométriques à l'aide de commandes exprimées en termes de primitives géométriques. (Laborde, 1995)

1.3.1 Caractéristiques de l'environnement Cabri-géomètre

Une caractéristique importante de cet environnement informatique réside dans la coexistence de primitives de dessin pur et de primitives géométriques et une autre, dans la manipulation directe du dessin. (Laborde & Capponi, 1994)

Ces dessins à l'écran de l'ordinateur peuvent être saisis par l'un de leurs éléments que l'on déplace à l'aide de la souris. Le dessin se déforme alors en conservant les propriétés géométriques qui ont servi à le construire et celles qui en découlent dans une géométrie euclidienne. Si un dessin a été réalisé à l'aide de primitives de dessin pur c'est-à-dire au jugé, il perd ses propriétés spatiales apparentes dans son état original lors du déplacement d'un de ses éléments.

Le dessin attaché à un objet géométrique doit garder au cours du déplacement ses propriétés spatiales rendant compte des propriétés géométriques de cet objet.
Par conséquent, l'exigence de communiquer au logiciel un procédé géométrique de construction permet ainsi de caractériser l'objet géométrique.

L'environnement rend compte en particulier de la variabilité des éléments de l'objet géométrique et de leur domaine de variation (extension du domaine de fonctionnement) et permet de disqualifier des interprétations non pertinentes (mise en évidence des limites du domaine d'interprétation).

1.3.2 L'interprétation des rétroactions de l'environnement informatique

Une des composantes importantes de Cabri-géomètre offrant une rétroaction aux actions de l'élève est *le déplacement* par manipulation directe.

Laborde & Capponi (1994) distinguent les interprétations des rétroactions à différents niveaux par le sujet utilisateur du logiciel dans une tâche de construction d'un Cabri-dessin :

i) L'interprétation relève essentiellement de la perception : par le déplacement on place le Cabri-dessin dans une position particulière qui permet de reconnaître si l'apparence du dessin recherchée à été obtenue

ii) Le Cabri-dessin reste solidaire dans le déplacement : l'interprétation d'une absence de liaison entre constituants d'un Cabri-dessin peut elle-même être interprétée à deux niveaux différents :

- une absence de liaison de type physique ou mécanique au niveau du Cabri-dessin, l'interrogation du sujet ne porte pas sur l'objet géométrique mais sur le Cabri-dessin, la rectification se fera certes par l'usage de primitives géométriques du logiciel mais pour satisfaire une finalité liée à l'apparence du Cabri-dessin
- une absence de relation géométrique entre éléments de l'objet géométrique représenté par le Cabri-dessin ; la rectification se fera aussi par l'usage de primitives géométriques mais pour satisfaire à une finalité géométrique.

iii) On cherche à analyser géométriquement la trajectoire de certains éléments du Cabri-dessin dans le déplacement :

- soit pour valider ou invalider la construction par rapport à la satisfaction des conditions demandées
- soit pour chercher les erreurs dans les cas où la production serait reconnue comme invalide.

1.3.3 La répétition du problème dans les travaux d'ingénierie

Margolinas (1993) montre une importance de la répétition du problème dans les travaux d'ingénierie.

Il s’agit d’une conséquence d’une option constructiviste et non d’une conséquence d’une option béhavioriste dans laquelle la répétition de la confrontation à des stimuli permettrait un apprentissage par renforcement :

En effet, la répétition de la confrontation au même problème permet à l’élève de construire un sens au problème (processus de dévolution).

De plus, la répétition est intéressante quand les rétroactions ne sont pas simplement en juste ou faux mais sont de nature riche.

1.3.4 Caractère adidactique de situations de production de Cabri-dessins

Le caractère adidactique de production de Cabri-dessins :

- il s’agit de faire faire et non de faire un dessin ; les élèves doivent communiquer un procédé de tracé au dispositif et non faire le tracé eux-mêmes. Le dispositif oblige à la distinction entre tracé et procédé de tracé.
- un Cabri-dessin garde au cours du déplacement les propriétés spatiales rendant compte des propriétés géométriques attachées à l’objet géométrique qu’il représente. Les procédés de tracé au jugé sont disqualifiés par le dispositif même.

2. Méthodologie

Dans notre cadre théorique, nous avons distingué deux domaines, le domaine spatial qui relève du monde sensible et le domaine géométrique considéré comme théorique.

L’objectif du travail présent est l’étude des liens entre le spatial et le géométrique chez des élèves ayant déjà une certaine familiarité avec la géométrie en tant que théorie. Pour en quelque sorte révéler ou grossir (à la manière d’un microscope) ces liens, on a choisi de placer les élèves dans une situation qui démarre par la construction d’une simulation géométrique d’un objet spatial réel. D’emblée l’objectif déclaré aux élèves est donc celui de modéliser le comportement spatial dynamique d’une machine à dessiner.
Les questions que l’on se pose sont les suivantes :

- Quelles relations spatiales sont reconnues par les élèves comme modélisables par des relations géométriques ?
- Quels sont les allers et retours entre le réel et le géométrique qui se produisent dans la construction de la simulation géométrique ? On distinguera en particulier trois niveaux et on s'intéressera aux passages d'un niveau à l'autre :

Le niveau de " Machine à dessiner " $\xrightarrow{\text{Passage au niveau}}$ " Dessins dans Cabri "

Passage au niveau

" Géométrie théorique "

En effet, le niveau "Machine à dessiner" est considéré comme le domaine spatial de l'espace réel à trois dimensions.

On appelle le niveau " Dessins dans Cabri " le domaine spatial de l'écran de Cabri.

Et le niveau "Géométrie théorique" concerne des objets et relations géométriques qui sont de nature théorique. C'est la théorie euclidienne de la géométrie qui sera mobilisée ici.

- Quels sont les contrôles effectués par les élèves ? Sont-ils spatiaux pour contrôler la modélisation géométrique et/ou géométriques pour contrôler la pertinence de la simulation construite ?

La situation expérimentale est composée de plusieurs tâches :

Première tâche (Exercice 1a)

Il s'agit de construire une simulation géométrique d'une machine à dessiner qui sera sous la forme d'un dessin dynamique de Cabri : la tâche demandée consiste donc à passer du domaine spatial de l'espace réel à trois dimensions au domaine spatial de l'écran de Cabri, en utilisant les primitives géométriques de Cabri.

La géométrie est un outil de modélisation du spatial. Il y a modélisation car il y a d'abord choix des éléments de la machine et des relations entre ces éléments qui vont être retenus pour être modélisées (choix du système au sens de Chevallard).

Deuxième tâche (Exercice 1b)

Elle se situe au sein du modèle géométrique, il s'agit de reconnaître et justifier la transformation géométrique qui fait passer d'un point à un autre.

C'est une tâche géométrique mais le dessin peut apporter une aide perceptive. Il s'agira justement de repérer chez les élèves si la reconnaissance de la transformation géométrique se fait uniquement dans le modèle géométrique ou à l'aide d'éléments spatiaux reconnus perceptivement (par exemple les trajectoires du point et de son transformé).

Troisième tâche (Exercice 2)

Il s'agit d'un problème formulé dans le domaine théorique mais représenté dans le domaine spatial et la réponse fournie doit aussi être dans le domaine spatial même si elle est fondée sur un raisonnement géométrique.

Quatre grands types de démarche sont possibles :

- Résolution spatiale par tâtonnement
- Résolution spatiale avec la machine à dessiner
- Résolution spatiale avec Cabri
- Résolution purement géométrique

On s'intéressera aux démarches de résolution des élèves et aux raisons qui les ont poussés à choisir leur type de résolution. Relèvent-elles du contrat ? Dans quelle mesure leurs connaissances de géométrie jouent-elles un rôle ?

Il est à noter que la situation expérimentale ne correspond pas à une situation usuelle et qu'elle présente un caractère de nouveauté pour les élèves (à part la deuxième tâche). On cherchera donc à repérer si les conduites des élèves diffèrent particulièrement dans cette deuxième tâche.

3. Expérimentation en classe de seconde

Nous allons commencer par présenter notre expérimentation et l'analyse a priori associée car cela permettra au lecteur de mieux comprendre l'objectif du questionnaire.

3.1 Considérations sur l'expérimentation

On présente le problème en classe à quatre binômes de seconde du lycée Pablo Neruda. Les élèves sont capables de bien utiliser Cabri-géomètre car ils l'ont utilisé régulièrement en classe au premier trimestre de l'année. Ils sont avertis que leur activité va être observée, que leurs dialogues vont être enregistrés, que mon but est d'observer la simulation dans Cabri-géomètre de systèmes articulés conçus et utilisés au XVIII et XIX$^{\text{èmes}}$ siècles pour le dessin.

Compte tenu du grand nombre de difficultés apparues lors de l'expérimentation de la version a) avec le premier binôme, cette version a) a été modifié.

Les versions différentes sont les suivantes :

version a) on demande de résoudre le premier exercice sans aucune consigne complémentaire

version b) on donne une consigne pour faciliter la résolution du premier exercice

On présente :

? la version a) à un premier binôme des élèves

? la version b) à trois autres binômes suivants des élèves

3.2 Scénario de l'expérimentation

A chacun des binômes, je distribue une feuille avec les énoncés de deux exercices suivants :

Version a)

Exercice 1

Voici une machine à dessiner conçue et utilisée, il y a un ou deux siècles.

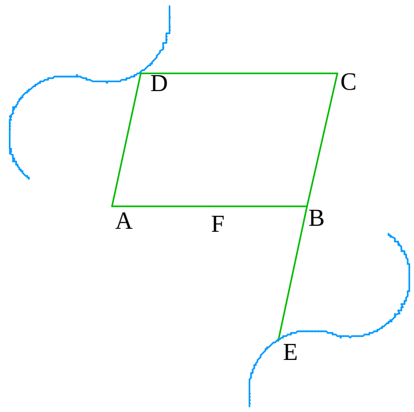
Dans cette machine, si on bouge l'extrémité de la barre en E, les autres articulations bougent aussi. La machine était utilisée pour dessiner la trajectoire décrite par D quand on déplace E sur une trajectoire donnée.

a) Faire un modèle de cette machine dans Cabri-géomètre qui reproduit le fonctionnement de la machine.

Les longueurs des barres de la machine à dessiner sont les suivantes :

AB = 20 cm

AD = 14 cm



la machine à dessiner

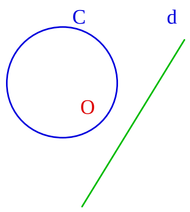
c) Quelle est la transformation géométrique qui transforme E en D ? Justifier.

Exercice 2

Tracer une droite *d*, un cercle *C*, et placer un point O.

On veut trouver un point A de *d* et un point A' de *C*, tels que O soit le milieu du segment AA' et connaître le nombre de solutions possibles.

Utiliser soit la machine à dessiner, soit le logiciel Cabri-géomètre, pour construire les points solutions.



a) Justifier pourquoi vous avez choisi Cabri-géomètre ou la machine à dessiner pour résoudre ce problème.

b) Ensuite expliquer comment vous avez résolu le problème et justifier votre réponse.

Version b)

Ajout de la consigne :

Les points E et F seront les points de départ de la construction de la machine dans Cabri.

Les élèves travaillent par binôme, j'assure personnellement l'observation de chaque binôme.

Ils ont à disposition un ordinateur avec Cabri-géomètre, la machine à dessiner (le symétriseur), une règle, un compas, un crayon et de copies sur lesquelles ils doivent écrire leurs réponses ; on demande une seule réponse par binôme sur la même feuille que l'énoncé. Je leur donne pour consigne de ne rien effacer et tout enregistrer dans Cabri.

Le temps maximum donné à chaque binôme est une heure. Il faut observer que la contrainte du temps n'est pas fixée par moi mais par l'établissement scolaire.

3.3 Analyse a priori de la situation expérimentale

Milieu de la situation

Le milieu pour l'élève est constitué des éléments avec lesquels il va interagir comme Cabri-géomètre, la machine à dessiner, par les consignes qui lui sont données, des outils à disposition (le crayon, la règle, le compas, les copies, etc.), mais aussi le partenaire dont une des fonctions est de favoriser l'explicitation des démarches.

Dans notre situation c'est la machine à dessiner et Cabri qui permettent, soit de contrôler la correction de la construction, soit l'avancement dans la résolution.
La simulation géométrique, de la machine à dessiner sous la forme d'un dessin dynamique de Cabri construite par les élèves, peut être saisi par l'un des éléments du dessin que l'on déplace à l'aide de la souris. Le dessin se déforme alors en conservant les propriétés géométriques qui ont servi à le construire et celles qui en découlent dans la géométrie euclidienne. Les élèves peuvent comparer ces réalités spatio-graphiques que sont les Cabri-dessins aux objets physiques du monde réel, donc dans notre cas aux comportements de la machine à dessiner qu'ils observent.
Le déplacement par manipulation directe est une des composantes importantes de Cabri-géomètre offrant une rétroaction aux actions de l'élève. (Laborde C., Capponi B., 1994)

Le déplacement est susceptible de valider ou d'invalider leur simulation géométrique, ce qui entraîne les élèves à analyser le dysfonctionnement du Cabri-dessin et à le modifier en conséquence.
D'autre part, les élèves produisent facilement des réponses erronées et ce sont les rétroactions du logiciel qui les guident pour modifier leur stratégie de résolution.

La machine à dessiner et Cabri-géomètre permettent une rétroaction aux actions de l'élève.
On veut observer :

1. Le problème de la modélisation, les diverses difficultés de cette dernière
   a) En particulier, les caractéristiques du comportement de la machine non perçues par les élèves : dans la situation où les élèves ne disposent pas de consigne supplémentaire concernant les points de départ, il est probablement plus difficile pour l'élève de faire la modélisation du point F fixe de la machine dans Cabri où il faut qu'il soit libre.
   b) Les contrôles mis en place par les élèves :

- en particulier à quel moment la rétroaction par déplacement devient systématique chez les élèves

Le déplacement comme moyen de validation de la figure peut devenir d'utilisation fréquente par les élèves. (Laborde C., Capponi B., 1994)

- les éléments de contrôle auxquels les élèves ont recours dans la construction de la simulation dans Cabri
- les stratégies de résolution des élèves
- les moments d'intervention de l'expérimentateur

2. Le passage d'un niveau à un autre
   Machine à dessiner → Dessin dans Cabri → Géométrie théorique

- le rôle de chacun des niveaux dans la résolution du problème, si c'est le rôle de la validation ou d'avancement dans la résolution
- la correspondance entre les différents niveaux et puis entre la 1ère et la 2e question.

3.4 Analyse a priori des exercices proposés dans l'expérimentation

i. Analyse a priori du premier exercice

Cet exercice est une tâche de modélisation mathématique où on demande de construire un modèle de la machine à dessiner dans Cabri-géomètre [notre question a) du premier exercice].

Tout d'abord l'observatrice montre aux élèves la machine à dessiner. De cette façon ils peuvent tout de suite regarder le fonctionnement de la machine.

C'est bien dans le choix des éléments de la machine et des relations entre ces éléments qui vont être retenus pour être modélisées dans un processus de modélisation mathématique au sens de Chevallard (1989) que réside la difficulté de cet exercice. Une telle difficulté concerne le point F qui est fixe sur la machine à dessiner pour assurer le fonctionnement de la machine alors qu'il devient libre dans Cabri.

Les élèves construisent d'abord le modèle pseudo-concret en réduisant le système à des aspects pertinents par rapport aux questions de départ d'après les quatre étapes de la modélisation mathématique proposée par Coulange (1997).

On pense que les élèves vont observer le fonctionnement de la machine à dessiner pour construire leur modèle pseudo-concret mais en même temps qu'ils seront très influencés par le dessin de la machine fourni dans l'énoncé.

La prégnance de l'appréhension perceptive du parallélogramme ABCD au sens du Duval (1988), très présente chez les élèves, peut jouer un rôle important dans le choix de la stratégie de leur construction de la simulation de la machine à dessiner dans Cabri. Les élèves auront du mal à repérer la sous configuration du triangle FBE comme base de construction du modèle du fonctionnement de la machine dans Cabri.

En effet, on s'attend à ce que les élèves choisissent, soit le dessin fourni dans l'énoncé, soit la machine à dessiner et l'énoncé (l'ensemble dessin machine) parmi les trois cas (la machine à dessiner, le dessin, et l'ensemble), comme des éléments de départ de la simulation. On voit que ce n'est plus le même exercice de modélisation. Ce choix des éléments de départ de la simulation serait privilégié par des élèves parce qu'après la tâche serait plus proche d'une tâche usuelle.

On pense que la machine à dessiner sera prise en compte comme un élément de départ par les élèves après avoir effectué une première validation par déplacement. A ce moment là, quand le déplacement invalidera leur simulation dans Cabri (parce que le

dessin fourni dans l'énoncé ne donne aucune indication sur le fonctionnement de la machine) en comparant perceptivement cette dernière avec la machine, les élèves vont avoir recours à la machine à dessiner.
On prévoit que le déplacement devient d'utilisation fréquente par les élèves pour valider ou invalider chaque simulation de la machine sous la forme “ Dessins dans Cabri ” en comparant ce dernier avec la machine alors que le passage au niveau “ Machine à dessiner ” s'effectuera afin de trouver des idées de construction en observant la machine en action, donc d'avancer dans la résolution.

En bref, les éléments de contrôle auxquels les élèves ont recours dans la construction de la simulation dans Cabri relèvent du domaine spatial. Le déplacement est susceptible d'invalider leur simulation en la comparant avec le fonctionnement de la machine.

En termes de variables didactiques

Nous avons choisi deux situations différentes, un énoncé sans indication de points de départ et l'autre avec l'indication que les points E et F sont les points de départ de la construction de la machine dans Cabri.
La formulation de l'énoncé, en particulier le fait d'ajouter la consigne ou non, est une variable didactique. Le choix des deux versions différentes permettent de confronter les différentes stratégies de résolution des élèves, observer les caractéristiques du comportement de la machine non perçues par les élèves ainsi que faire une hiérarchie de ces caractéristiques.

L'ordre des lettres utilisées pour nommer les points sur le dessin de la machine à dessiner est une autre variable didactique. L'ordre que nous avons choisi ne respecte pas l'ordre chronologique de construction correcte. Ceci est en rupture avec les règles de contrat didactique selon lesquelles, dans la plupart des exercices, la construction commence par le point designé par la lettre A.
Stratégies attendues :
On pense que les élèves qui n'ont pas de consigne concernant les points de départ, commenceront leur construction par les points A et B. La prégnance de l'appréhension

perceptive du parallélogramme ABCD jouera un rôle important dans le choix de la stratégie mettant en jeu l'activité perceptive.

Dans une telle construction, le point E peut être construit soit sur une demi-droite [CB) soit sur un cercle de centre B, de rayon BE.

La simulation construite ne reproduit pas dans ce cas le fonctionnement de la machine. Le point E n'est pas libre comme dans la machine à dessiner.

Le déplacement conduira probablement les élèves à disqualifier ces procédés en comparaison avec le fonctionnement de la machine et à modifier leur stratégie en conséquence.

Une autre stratégie peut apparaître de la part des élèves. Après avoir mis le point E, ils construisent, soit le point B, soit le point C. Le point F est construit à partir du point B.

Cette simulation ne reproduit pas le fonctionnement de la machine à dessiner. Par exemple, par le déplacement du point E, la distance des points E et F ne change pas.

Les élèves qui ont à leur disposition la consigne concernant les points de départ commenceront leur construction par les points E et F. Une question concernant le point F peut apparaître de la part des élèves: où le mettre puisqu'il est fixe dans la machine ?

Dans la suite, ils peuvent construire le point A sur un cercle de centre F et ensuite le point B. Ils finissent leur simulation par la construction du parallélogramme.

Une telle stratégie est disqualifiée par le déplacement en comparant cette simulation avec la machine en action.

Dans une telle simulation, les barres, par exemple EB, par le déplacement changent de longueur.

La lecture de la question b peut conduire les élèves à la stratégie utilisant une transformation géométrique. Ils commencent par les points de départ indiqués dans la consigne et ensuite ils construisent le point D comme symétrique de E par rapport à F. Leur construction est disqualifiée par le déplacement si, dans la suite, le point B est construit à partir du point A. Dans cette simulation, c'est la barre EB qui par le déplacement change de longueur.

Cette analyse a priori nous amène ainsi à deux catégories de réponses correctes en classe de Seconde :

a) *Construction de la transformation géométrique :*

On pense que la lecture de la question b) aide les élèves à envisager une stratégie par la construction de la transformation géométrique.
Les points E et F sont libres dans Cabri-géomètre, on peut donc les placer n'importe où.
On obtient le point D comme symétrique du point E par rapport au point F.
Le point B est construit comme le point d'intersection de deux cercles, de centre E et de rayon AD et de centre F et de rayon 1/2 AB.
On trace une droite parallèle au segment [BE] passant par D et on trouve le point d'intersection A de la demi-droite [BF) et de cette droite.
On obtient le point C comme le point d'intersection de la demi-droite [EB) et la droite parallèle au segment [AB] passant par D.

b) *Construction d'un parallélogramme ABCD :*

On peut faire un modèle de la machine à dessiner dans Cabri à partir du parallélogramme ABCD, il suffit de bien construire le point B dépendant des points de départ, E et F. On obtient le point B de la même façon que dans la construction précédente.
Après avoir construit le point B du parallélogramme, on peut trouver les autres points :
On obtient le point A comme le point d'intersection du cercle de centre F et de rayon FB et de la demi-droite [BF).
On peut construire le point C comme l'intersection de la demi-droite [EB) et du cercle de centre B et de rayon BE.
On trace une droite parallèle au segment [BC] passant par le point A et une autre droite parallèle au segment [AB] passant par le point C et on trouve le point d'intersection D.

<u>Analyse a priori de la question b</u>

On pense que la reconnaissance de la transformation géométrique qui fait passer du point E au point D (la reconnaissance de la symétrie centrale) se fait à l'aide d'éléments spatiaux reconnus perceptivement. Par exemple dans Cabri, les élèves peuvent faire tracer les trajectoires d'un point et de son transformé, mais aussi dans la machine à dessiner, à l'aide des mines, ils peuvent observer les trajectoires décrites par D quand on déplace E.
De plus, notre dessin de l'énoncé peut aussi apporter une aide perceptive.
C'est aussi le caractère de nouveauté de notre situation expérimentale qui peut les conduire à ne pas travailler dans le modèle géométrique jusqu'à passer à la justification.

En revanche, la justification se fait au niveau “ Géométrie théorique ”. La réponse attendue de la part des élèves est que les trois points E, F et D sont alignés et que la distance EF est égale à FD.

ii. Analyse a priori du deuxième exercice

Ce problème est inspiré d'un énoncé de la série d'exercice du manuel *Mathématiques 3^e^, Collection Collèges* associé au chapitre Transformation de figures (exercice 32, p. 208).

Nous avons choisi cet exercice par rapport à notre problématique pour la raison suivante :

Il peut être résolu de diverses manières, en utilisant soit la machine à dessiner soit le logiciel. Cet exercice dans Cabri peut être résolu à partir du modèle de la machine à dessiner du premier exercice, ainsi qu'à partir des outils du logiciel Cabri-géomètre.

De plus, cet exercice permet le recours à des solutions non purement géométriques contrairement au contrat usuel.

Nous voulons donc voir à quel type d' “ instrument ” les élèves d'une classe de seconde vont avoir recours. Vont-ils utiliser la machine à dessiner et travailler sur le modèle concret pour résoudre ce problème ou plutôt vont-ils recourir au logiciel Cabri-géomètre et continuer dans la tâche de modélisation ?

En termes de variables didactiques

Le choix des instruments dont les élèves disposent pour résoudre le problème est une variable didactique.

En effet, par rapport à nos objectifs nous avons voulu laisser à la charge de l'élève le choix de l'outil qu'il utilisera pour résoudre ce problème. Ainsi, il peut utiliser soit la machine, soit le modèle de la machine construit dans Cabri lors de la résolution du premier exercice, ou encore le logiciel Cabri avec tous ses menus.

Une analyse a priori de cet exercice nous amène à trouver les réponses suivantes :

a) *La résolution du problème à l'aide de la machine à dessiner :*

Si on résout cet exercice à l'aide de la machine à dessiner, il suffit de bien placer le point O sur cette machine.

Comme le point O sera le milieu du segment [AA'], il sera donc aussi le centre de la symétrie centrale où le point A' est symétrique du point A par rapport à ce centre. Il faut donc mettre ce point O à la place du point F sur la machine à dessiner.

On remarque qu'un raisonnement géométrique est nécessaire de la part des élèves pour associer le point O à F.

Par conséquent, le point A va correspondre au point E sur la machine à dessiner et le point A' à celui de D.

Après avoir trouvé les bonnes correspondances des points sur la machine à dessiner, on peut continuer de résoudre l'exercice de deux façons suivantes :

? On trouve les deux points solutions par l'appréhension perceptive, c'est à dire, on déplace la vis, donc le point E de la machine à dessiner, sur la droite *d* et quand l'autre vis, le point D, est sur le cercle, on marque les points obtenus A et A'. La deuxième solution est obtenue de la même façon.

C'est une réponse où l'on trouve les points solutions mais cette résolution n'est pas géométriquement acceptable parce qu'elle est construite en partie d'après l'appréhension perceptive (fig. 1)

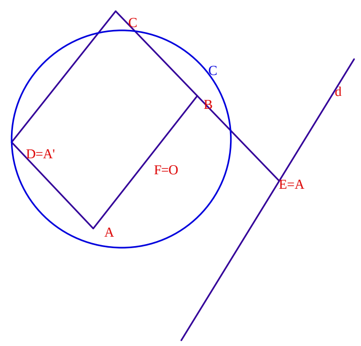


Figure 1

- La seconde méthode correspond au contrat usuel en classe qui consiste à résoudre le problème par la géométrie théorique (fig. 2):

On peut faire la symétrie centrale de la droite *d* par rapport au centre O (le point F de la machine à dessiner), on obtient la droite *d'*.

On trouve les points d'intersection du cercle *C* et de cette droite, A' et B'.

Pour trouver les points correspondants A et B, on va tracer les demi-droites [B'O) et [A'O) et les points d'intersections de la droite *d* et de ces demi-droites, seront les points cherchés.

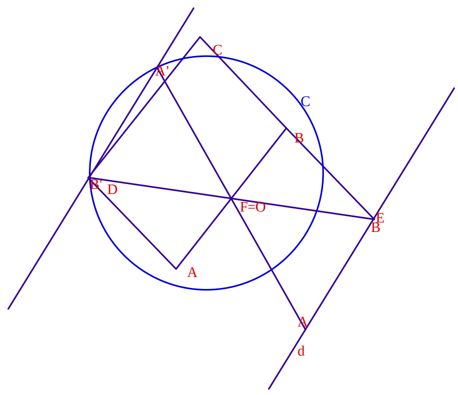


Figure 2

Nous faisons l'hypothèse que les élèves vont quand même préférer la solution par appréhension perceptive. Ils se contenteront du raisonnement qui fait correspondre O à F et comme ils atteindront la solution on peut imaginer qu'ils s'en satisferont d'autant plus que l'énoncé les incite à une telle solution.

b) La résolution du problème dans Cabri-géomètre à l'aide du modèle de la machine à dessiner du premier exercice

La résolution de cet exercice dans Cabri-géomètre à l'aide du modèle de la machine à dessiner, construite dans la première partie de l'expérimentation, est possible par les mêmes méthodes décrites plus haut.

c) La résolution du problème à partir des outils du logiciel Cabri

Cet exercice peut être aussi résolu indépendamment de la machine à dessiner et de son modèle dans Cabri, c'est à dire en n'utilisant que le menu du logiciel Cabri-géomètre.

La méthode pour trouver les points solutions est la même qu'on utilise dans l'environnement papier-crayon (fig. 3).

On peut faire le cercle *C'* symétrique du cercle *C* par rapport au centre O.

(On peut aussi construire le symétrique de *d* par rapport à O.)

On trouve les points d'intersection (A et B) de la droite *d* et du cercle *C'*.

Comme les points A' et B' sont les points du cercle *C* et des demi-droites [AO) et [BO), il suffit de prendre A' à l'intersection de ce cercle et de la demi-droite [AO) et B' à l'intersection du même cercle et de la demi-droite [BO).

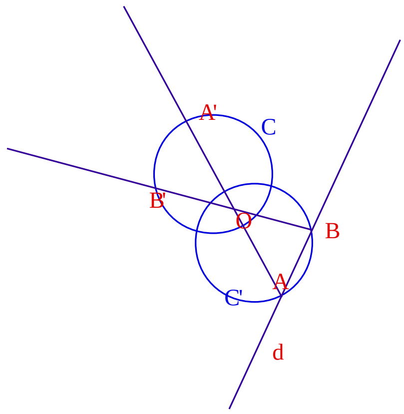


Figure 3

Une autre méthode de résolution du deuxième exercice, est la méthode qui utilise l'aspect dynamique du logiciel.

Comme le point A se trouve sur la droite *d*, on peut le construire sur cette droite dans Cabri-géomètre.

Après avoir construit le point A' symétrique du point A par rapport au centre O, on peut « par le déplacement » du point A sur la droite *d* trouver les deux solutions. En effet, par le déplacement du point A sur *d*, le point A' bouge aussi et il coupe le cercle en deux points. Il y a donc deux solutions.

On peut voir les points solutions et calculer le nombre de solutions, mais la résolution par cette méthode n'est pas acceptable d'un point de vue purement géométrique.

Cas particulier

- La droite *d* est placée loin du cercle *C*.

Les points d'intersection de la droite *d'* (symétrique de *d* par rapport à O) et du cercle n'existent pas, donc le nombre de solutions possibles est égal à zéro.

4. Analyse a posteriori

4.1. Le binôme : Olivier et Jérémie

C'est moi qui présente le problème au binôme : je leur montre la machine à dessiner. Les élèves ont une heure pour résoudre le problème. On demande de résoudre le premier exercice sans aucune consigne. Ils ont reçu la version a. Je tourne dans la classe, en intervenant quelque fois dans le dialogue du binôme.

La démarche de résolution des élèves est présentée ci-dessous.

L'historique de Cabri ne nous a pas toujours permis de reconstruire de façon précise la démarche des élèves. En effet, les élèves ont souvent eu recours à des redéfinitions de points sur la même figure.

Après avoir essayé le fonctionnement de la machine à dessiner, Olivier entreprend le premier modèle de la machine à dessiner dans Cabri. Il commence par A, B en utilisant le report de mesure. En effet, la construction ne se déroule qu'à partir du dessin.

2. O : Donc, on fait A, B on y va. Avec le report de mesure

Pour avancer dans la construction du modèle, Olivier retourne à la machine à dessiner.

Ils recommencent leur figure en faisant attention aux points A et B qui, d'après eux, ne bougent pas sur la machine à dessiner.

14. J : On recommence par A, B… comme ils bougent pas

L'appréhension perceptive du parallélogramme ABCD est très présente chez les élèves. Après avoir construit les points A et B, ils vont faire les parallèles pour obtenir le parallélogramme.

27. O : Si. On fait A, D, on fait la parallèle AB passant par D, on fait la parallèle AD passant par C.

Moi, j'interviens pour la première fois. Comme les vraies longueurs des barres de la machine à dessiner, indiquées dans l'énoncé, donnent une figure très grande dans Cabri, je leur explique la possibilité de changer des distances.

Pour finir leur figure dans Cabri, ils vont mettre le point E comme symétrique de C par rapport à B.

44. O : Ah ! Ouais ! J'ai pas pensé…Parallèle…, donc voilà, point sur deux objets. Donc E, il est…

45. J : Mais il est symétrique par rapport à B de C. On a report de mesure…

46. O : Symétrie, on peut voir.

Par le déplacement dans Cabri, ils contrôlent leur construction en comparant avec la machine réelle.

52. O : Voilà. Et maintenant si on fait bouger E.

Leur point E dans Cabri ne bouge pas, donc les élèves réessayent le fonctionnement de la machine à dessiner et recommencent la construction.

L'idée de se centrer sur les points du parallélogramme n'a pas marché, donc ils se concentrent sur les points E et F. Comme ce binôme maîtrise très bien le logiciel Cabri-géomètre, ils travaillent toujours dans le même fichier, sur la même figure.

73. J : Point F, ça veut dire quelque chose. C'est le centre entre les deux.

77. J : Point E, il est au milieu, point F aussi.

Par le déplacement, ils vont bouger le point D et voir si cette fois ci le point E va bouger. De cette manière les élèves essayent le fonctionnement de leur modèle au moins dans l'autre sens que celui indiqué dans l'énoncé.

82. O: Ah!

… (Silence)… Si on bouge D, E doit bouger ou quoi, au moins ça.

83. J : Ah !

84. O : Oui, ça marche, mais dans l'autre sens.

Leur figure marche dans l'autre sens, donc ils réessayent la construction du modèle à l'envers. Il faut rajouter qu'ils travaillent encore sur leur ancienne figure.

Ils mettent le point F comme milieu du segment AB qu'ils ont construit au début de la séance.

99. J : Il faut faire direct que F c'est le centre.

Ils continuent leur construction en utilisant la transformation géométrique du point E par rapport à F.

108. O: Attends…droite CE, non ça va être le nom, E, voilà, appeler le point F et la symétrie par rapport à ce centre, D.

Après avoir réalisé cette stratégie dans leur résolution, ils vont contrôler leur figure dans Cabri par le déplacement. Leur utilisation de cet outil est devenue systématique. Chaque nouvelle idée est validée par le déplacement.

Ils n'ont pas réussi, c'est la droite CE qui bouge et non le point E. Le point E est un point mobile de la droite CB. Ils cherchent à reconstruire une simulation en commençant par le point B, puis ils trouvent le point C comme symétrique de E par rapport à B. Le point D est construit comme le point d'intersection des droites parallèles à (AB) et à (BC). A la fin, ils marquent le point F.

117. O : Oui. Hm, mets B.

121. O : Alors, symétrie à B, ce point, donc c'est C, voilà.

123. O : Alors, …hm…voilà, avec une droite parallèle à ça, voilà et une droite parallèle à ça et ce passe par-là, voilà. Non.

125. O : Ah ! Parallèle, c'est une droite, voilà et ce point, voilà, donc, ça c'est A.

126. J : Non, c'est D.

130. J : Marque point F aussi.

Leur figure ne marche pas comme il faut, ils vont tout éliminer et annuler. Ils recommencent, mais d'abord ils essayent de répondre à la question b du premier exercice.

147. O : Mais, là c'est bon, on a réussi. (Il commence à lire la question b de cet exercice) C'est symétrie de centre F.

148. J : Mais non. Rotation, centre F, 180°.

149. O : Mais oui, c'est la même chose, c'est la symétrie centrale.

Les élèves vont refaire leur modèle de la machine à dessiner par la construction de la transformation géométrique. Jérémie est sûr de cette construction, c'est notre question b qui l'assure de cette direction. C'est un effet du contrat didactique souvent présent dans la résolution des exercices.

En fait, la lecture de la question b les conduit à refaire leur construction par la stratégie de la transformation géométrique.

166. J : C'est pas vrai, on y arrivera jamais. On va partir par cette droite, fais la même chose mais avec un exemple partant par celle là. Fais une symétrie centrale, si non ils nous demandaient pas. Faites là, c'est la même chose que là tu fais.

Ils arrivent à construire un modèle qui, d'après eux, fonctionne de la même façon que la machine à dessiner.

170. J : Recommence par AB.

175. O : Vas-y. Fais E.

176. J: Fais point F.

177. O : Alors, milieu.

182. J : Enlève-là. Fais la symétrie centrale du point F. On va avoir D.

183. O : Symétrie centrale de E par rapport à F.

C'est maintenant que j'interviens. Les élèves ont eu du mal à voir que leur modèle dans Cabri ne reproduit pas le fonctionnement de la machine à dessiner.

185. Obs. : Chez vous c'est la droite qui bouge alors que sur la machine ce soit

186. J : C'est le E.

Comme ce binôme n'a pas eu la consigne et comme j'ai vu les difficultés dans l'avancement de l'exercice, j'ai essayé de les pousser dans la bonne direction.

190. Obs. : Essayez de bien choisir les points de départ.

191. J : Ça peut-être que A, B ? Ça commence toujours par AB.

Comme on a prévu dans l'analyse a priori, les élèves sans consigne, ont des difficultés à se détacher du parallélogramme et de l'ordre des lettres qui les amènent à commencer leur construction par AB.

Les élèves, après mon intervention, se posent des questions sur leurs points de départ. Ils font une correspondance avec la machine réelle.

195. J : A, B bougent pas. Justement, ***il faut commencer par E****. E, il bouge pas et après tout le reste il bouge.*

196. O : Attends. Mais non, si tu veux le bouger, justement…On va mettre comme ça, allez-y. Voilà et E peut bouger. Voilà, c'est bon là.

Les élèves ont compris la nécessité de bien choisir les points de départ. Ils vont prendre les points E et B comme les points de départ. Mais Jérémie remarque que le point B ne peut pas être libre dans Cabri.

199. J : Il faut qu'il soit dépendant de E.

Pour que les élèves arrivent à avancer dans la résolution de ce problème, ils décident d'utiliser l'outil “ déplacement ” au fur et à mesure. En effet, les élèves veulent vérifier à chaque étape de la construction, qu'un point mobile reste bien mobile après la construction d'un nouvel élément.

202. O : En fait, on va faire au fur et à mesure, tu vas voir ce que toujours bougeait, il reste bouger. Voilà, donc c'est bon.

Ils continuent par la droite EC, puis ils construisent des droites parallèles pour obtenir le point D et enfin le point F.

201. J : T'as la droite EC.

204. O : Et maintenant on va faire la droite parallèle.

212. O : On peut pas bouger et C, non, on peut pas, parce que c'est une symétrie et dépendant de E, donc parallèle, tracer une droite passant par C… et voilà, alors.

213. J : Là, c'est un D…

219. J : C'est bon. Fais un point F.

220. O : Donc, là c'est bien E, voilà, donc F milieu de ce point et ce point…et voilà.

Ils vont faire “ trace ” (probablement de E et de D) et contrôler leur construction. Les élèves ne sont pas tout à fait d'accord.

227. J : Parfait ! Ca fait comme c'est pas bon.

Tu peux pas pouvoir bouger entre, là il faut qu'il y ait la distance fixe. Entre B et …E.

228. O : Oui, mais c'est pas grand chose.

229. J : Mais, s'il faut…

230. O : Trouver E…mais, non, c'est rien, regarde en arrière.

231. J : Tu vois bien qu'il fasse pas…E, il faut faire…on peut pas monter E.

Après avoir entendu cette hésitation des élèves, c'est moi qui leur confirme la constance de la longueur des barres de la machine à dessiner. En voyant les difficultés de la modélisation, j'explique la raison d'avoir fixé le point F sur la machine à dessiner. Par conséquent, je leur pose une question concernant le point F pour qu'ils comprennent que ce dernier doit être libre dans Cabri.

Les élèves travaillent sur la figure construite tout à l'heure en faisant une droite qui passe par ED. Olivier va chercher la construction d'une longueur qui ne change pas sa distance par déplacement.

242. O : Je sais pas comment on fait pour définir une longueur fixe.

243. J : Essaye de faire une droite qui passe par ED.

244. O : Ah ! Je sais. Attends. En fait, si on rentre dans le report de mesure, la mesure doive être toujours la même.

Olivier et Jérémie n'y arrivent pas. Ils retournent et réessayent le fonctionnement de la machine à dessiner pour trouver des nouvelles idées.

Moi, j'interviens encore une fois pour leur faire comprendre la modélisation du point F.

268. Obs. : Pourquoi le point F n'est-il pas libre sur cette machine ? Il est fixé pour que je puisse travailler avec cette machine. Mais dans le Cabri il doit être fixé ?

269. O : Non ou…oui. Donc, c'est bon là.

270. J : Non.

Ensuite, je leur montre l'utilisation de la machine à dessiner, les erreurs dans leur construction qu'ils voient difficilement, par exemple le point E qui n'est pas libre sur leur figure.

Finalement, je leur donne la même consigne que les trois autres binômes auront dès le début.

Après un petit désaccord entre Olivier et Jérémie sur le fait si les points E et F sont liés ou non (*296. J : Ils sont n'importe comment là, alors qu'ils sont liés.*), ils construisent la figure suivante :

301. O : Non, c'est E…Mets F, E.

302. J : Alors, là tu fais une droite EF.

304. J : Avec le report de mesure tu fais D.

305. O : Mais, ça sera pas forcément sur la droite.

306. J : Mais si. Avec le report de mesure, la symétrie centrale.

… Voilà. Après tu fais les parallèles. Tu fais une droite qui passe par F…AB.

308. J : Voilà. Là, tu mets un point A et quand tu fais avec le…symétrie tu fais un point B.

314. J : Fais le lier à D.

Ils finissent leur figure par la construction du point C. Leur modèle n'est pas encore correct, par déplacement il change ses mesures. Les élèves me demandent la façon d'obtenir une longueur fixe dans Cabri :

330. O : Mais on peut le fixer dans le Cabri, la distance ?

332. O : Je sais pas faire.

333. Obs. : Par exemple à l'aide d'un compas, d'un cercle on peut la fixer.

Ils vont utiliser pour la première fois le cercle et le compas et non plus seulement les droites parallèles.

337. O : Attends. On va prendre deux compas…ce point, ce point, voilà.

339. O : Donc on met…point sur deux objets, voilà, ça doit être A.

Ensuite ils construisent le point B comme symétrique de A par rapport à F et le point C aussi comme symétrique du E par rapport à AB.

Après c'est la rétroaction par le déplacement :

348. J : Fais trace. Non, mais ils peuvent pas s'éloigner.

Ils arrivent déjà à mieux voir les différences entre leur modèle dans Cabri et la machine à dessiner. Ils n'ont pas encore réussi, ils cherchent la bonne solution autrement :

352. J : Je trouvais, je crois. Tu fais un centre F, avec le compas tu fais D et E et A et B.

Ils finissent leur construction en utilisant les segments et les droites parallèles. Pour qu'ils puissent avancer dans leur résolution, j'interviens en disant :

367. Obs. : Les points E, F, D sont bien construits. Et maintenant choisissez bien le point suivant pour y arriver.

368. J : C'est par C.

369. O : Attends. Pourquoi ? C'est pas par B ou par A?

Ils vont continuer sur la même construction. Olivier pense qu'ils ont résolu ce problème alors que Jérémie n'est pas d'accord.

375. O : Et là maintenant la distance reste constante.

376. J : Mais, non !

381. O : B. C'est bon.

382. J : Mais non ! Ca marche pas encore.

383. O : Mais si ! Parce que B, A bougent. Regarde.

385. Obs. : A, B s'éloignent pas, comme E, non plus.

Les élèves ont oublié de bien utiliser tout le menu du Cabri. En effet, ça fait 4 ou 5 mois qu'ils ont travaillé avec le logiciel Cabri-géomètre.

Alors ils n'ont pas très bien compris comment il faut construire une distance qui par déplacement reste constante, donc je leur explique encore une fois.

Ils vont réessayer :

393. J : Tu fais un cercle sur …Non, pas là! Non, non, non ! Mais tu fais un cercle sur EB, là tu mets le centre ici et tu mets un cercle sur BC et un cercle sur BA.

Les élèves n’avancent pas, j’essaye de les aider dans la résolution :

418. Obs. : Dès que vous avez construit les points E, F, D, le point suivant à construire est celui de B.

Les élèves vont regarder la machine à dessiner pour trouver les propriétés du point B.

422. J : B est sur le cercle du centre F.

423. Obs. : Et…

424. O : Celui. (Il montre le point E comme le centre du deuxième cercle recherché)

Ils ont trouvé le bon chemin dans la résolution de cet exercice. Cependant il y a des choses qui leur posent des difficultés :

425. Obs. : Vous avez trouvé deux cercles et leur point d’intersection est donc le B.

426. O : Mais là, ils peuvent se rapprocher, de EF.

427. Obs. : Bien sûr. Ils s’approchent, regarde !

Ils vont donc construire cette nouvelle figure à partir des deux cercles.

Le point B est finalement bien construit. Ils ont oublié de construire les autres points, donc les points C et A. Ils finissent cet exercice sans les construire.

Leur modèle de la machine à dessiner n’est pas fini, mais ce qu’ils ont construit reproduit le fonctionnement de la machine à dessiner.

Ils ont encore 5 minutes avant la fin de notre séance. Ils répondent à la question b de cet exercice. Pour être sûrs de leur réponse, ils font les traces de E et D dans Cabri.

488. O : Attends, on va faire tracer…

490. O : Ah ! Ben, voilà, ça se voit que c’est une symétrie centrale.

Après une courte réflexion, Olivier justifie leur réponse :

497. O : Donc…car EF est égal à FD et que E, F et D sont alignés.

Les élèves finissent l’expérimentation. Ils n’ont pas eu le temps de traiter la deuxième question.

4.1.1. Analyse a posteriori

Ce protocole est très intéressant parce qu’il permet d’observer les difficultés du processus de modélisation pendant le traitement du premier exercice.

Les élèves commencent leur tâche au niveau “Machine à dessiner ”. Ils lisent l’énoncé sur la feuille, ils essayent la machine pour voir son fonctionnement, en utilisant tout de suite, l’appréhension perceptive de formes au sens du Duval. De plus, notre dessin de la machine à dessiner figurant dans l’énoncé conduit les élèves à “ copier ” cette forme.

Comme on a prévu dans l'analyse a priori, on observe le problème du choix des éléments de départ de la simulation.
Le premier passage se fait du niveau "Dessin fourni" au niveau "Dessin dans Cabri". Cabri conduit les élèves à considérer le problème dans un contexte géométrique, déjà au début de l'expérimentation.
En effet, tout de suite, les élèves construisent leur premier modèle de la machine à dessiner dans Cabri. Les segments dans Cabri correspondent aux barres de la machine à dessiner et les points donc aux vis de la machine. Ils arrivent à construire la forme de la machine à dessiner sans difficulté, probablement aussi en raison du dessin donné.
Par contre le dessin de l'énoncé ne fournit aucune indication sur le fonctionnement de la machine, or le problème est de reproduire le fonctionnement de la machine à dessiner.

On observe que le passage du niveau "Dessins dans Cabri " au niveau "Machine à dessiner " se fait quand les élèves sont bloqués, quand ils sont obligés de réessayer la machine à dessiner afin de mieux comprendre son fonctionnement. On peut en déduire le rôle de ce niveau " Machine à dessiner " qui donc permet aux élèves d'avancer dans la résolution du problème (voir int. 9, 64, 257, 396, 423).
Par contre on observe, comme on a prévu dans l'analyse a priori, que le déplacement comme moyen de validation de la figure devient d'utilisation fréquente par les élèves (int. 13, 52, 56, 70, 80, 82, 104, 109, 114, 139, 143, 160, 185, 196, 197, 203, 211, 217, 227, 246, 251, 263, 277, 284, 312, 348, 362, 377, 390, 441, 452, 470, 472).
Même les élèves se permettent de produire facilement des réponses erronées (int. 202) et ce sont les rétroactions du logiciel qui les guident pour accommoder leur stratégie choisie.
En effet, ce binôme explore le problème par essai-erreur. Et c'est le déplacement du logiciel Cabri-géomètre qui offre une rétroaction aux actions de l'élève.
En bref, le niveau "Dessins dans Cabri " permet aux élèves la validation ou l'invalidation de leurs simulations en les comparant avec la machine. Par conséquent, le rôle du niveau " Machine à dessiner " n'est pas seulement dans l'avancement mais aussi dans le contrôle de leur simulation.

On voit bien une correspondance entre les deux niveaux, " Machine à dessiner " et " Dessins dans Cabri " à chaque fois quand les élèves par déplacement valident ou invalident leur simulation de la machine dans Cabri en comparant avec la machine réelle en action.

On observe le passage du niveau " Dessin dans Cabri " au niveau " Géométrie théorique " dans la réponse à la deuxième question du premier exercice. Dans le dialogue entre Olivier et Jérémie (int. 147-149), on voit qu'ils ont trouvé la transformation géométrique qui transforme E en D. On pense qu'ici les élèves ont perçu le sens de la symétrie centrale.
En fait, des connaissances interviennent dans la phase quand les élèves doivent justifier cette transformation géométrique qui transforme E en D. Les connaissances émergées dans cette phase de justification par Olivier sont les suivantes : C'est la symétrie centrale car EF est égal à FD et E, F et D sont alignés (int. 497).

Pendant l'exploration du problème, les élèves n'arrivent pas tous seuls à comprendre que leurs modèles de la machine à dessiner construits dans Cabri ne reproduisent pas le réel fonctionnement de cette machine.

On observe les différentes difficultés chez les élèves pendant l'exploration de cette tâche de modélisation mathématique :

- Les élèves utilisent la fonction du déplacement pour le contrôle de leur figure, mais ils ne la comprennent pas. Ils n'ont pas vu que leur construction n'est pas valide. C'est moi qui interviens (voir dialogue 185 – 186) en leur expliquant que sur leur modèle dans Cabri le point E ne bouge pas mais ce n'est que la droite CE qui bouge par le déplacement. Les élèves ont du mal à voir le fonctionnement de la machine à dessiner, par exemple que l'on utilise la machine à dessiner en déplaçant E et non toute la barre CE.

- Une autre caractéristique du comportement de la machine à dessiner non perçue par Olivier est que les points A et B, ainsi que les autres articulations, bougent quand on déplace E sur une trajectoire donnée (int. 194, 218). (Un petit déplacement de E sur un cercle de centre B sur la machine ne semble pas provoquer de déplacement de A et B.)

- On peut observer dans le dialogue suivant que Jérémie est le seul à sentir la nécessité de " conserver " les distances des barres de la machine à dessiner :

227. J : Parfait ! Ca fait comme c'est pas bon.

Tu peux pas pouvoir bouger entre, là il faut qu'il est la distance fixe. Entre B et …E.

228. O : Oui, mais c'est pas grand chose.

229. J : Mais, s'il faut…

230. O : Trouver E…mais, non, c'est rien, regardes en arrière.

231. J : Tu voies bien qu'il fasse pas…E, il faut faire…on peut pas monter E.

La même difficulté apparaît un peu plus tard pendant l'exploration du problème (voir le dialogue entre Olivier et Jérémie, int. 375-383). Mais cette fois-ci c'est moi qui leur précise qu'aucune des barres de la machine à dessiner ne change de longueur.

- Comme il a été déjà dit dans l'analyse a priori, les élèves qui ne disposent pas d'une consigne pour faciliter leur résolution du problème, voient le point F qui ne peut pas bouger sur la machine à dessiner, donc ni dans Cabri. Par conséquent, je suis obligée d'intervenir plusieurs fois pendant l'expérimentation (int. 232, 268) pour leur faire comprendre la raison pour laquelle le point F est fixé sur la machine à dessiner. Je vois que les élèves n'avancent pas malgré mes interventions donc je leur donne la même consigne que les trois autres binômes auront à disposition dès le début, à savoir qu'il faut commencer la construction par les points E et F.

- On pense qu'ils n'ont pas compris la différence entre la machine à dessiner et son modèle dans Cabri. Jérémie dit :

312. J : Ils bougent pas encore, ils sont pas encore reliés.

En fait, les barres de la machine à dessiner permettent le fonctionnement de la machine, alors que dans Cabri, il suffit de bien construire les points de cette machine et son fonctionnement est reproduit. En effet, on peut reproduire le fonctionnement de la machine à dessiner sans avoir relié par des segments les points A, B, C, D, E, F dans Cabri.

Dans Cabri, des points sont d'abord construits et les segments ensuite et dans la machine, les articulations sont construites à partir des barres.

- Les élèves ont compris que les barres de la machine à dessiner ne peuvent pas changer de longueur en utilisant "le déplacement" dans Cabri. Par conséquent, on voit bien une autre caractéristique du comportement de la machine à dessiner non perçue par les élèves :

426. O : Mais là, ils peuvent se rapprocher, de EF.

427. Obs. : Bien sûr. Ils s'approchent, regarde !

On observe que les élèves ont eu beaucoup de difficultés dans la résolution de cette tâche de modélisation mathématique. Maintenant on va essayer de faire une hiérarchie de ces caractéristiques du comportement de la machine à dessiner non perçues par Olivier et Jérémie. On commence par des caractéristiques qui sont pour eux les plus difficiles à percevoir :

a) Le point F est fixé sur la machine à dessiner pour qu'on puisse travailler avec cette dernière. Tandis que dans Cabri, il faut qu'il soit libre afin de faire le modèle de la machine en reproduisant son fonctionnement.
b) Quand on valide la construction par le déplacement dans Cabri, la distance des segments AB, BE, BC, DC et AD doit rester constante. En utilisant la machine à dessiner, les longueurs des barres ne changent pas.
c) La machine à dessiner est utilisée en déplaçant E sur une trajectoire donnée, donc le point E dans Cabri doit être libre pour que le modèle de la machine fonctionne comme il faut. Si ce n'est que la droite CE que l'on peut bouger par le déplacement dans Cabri, on n'a pas reproduit le même fonctionnement de la machine.
d) Comme il est dit dans l'énoncé, dans la machine à dessiner si on bouge l'extrémité de la barre en E, les autres articulations bougent aussi, de même pour A et B. Même si les vis A et B bougent seulement sur un cercle de centre F qui est fixe.

e) Quand on déplace E sur la machine pour dessiner la trajectoire décrite par D, la distance des vis E et F de la machine à dessiner change en fonction de la trajectoire donnée.

f) Les barres de la machine à dessiner telles qu'elles sont, permettent le fonctionnement de la machine, sinon on ne l'a pas pu utiliser pour la même fonction. Dans Cabri, le modèle de la machine peut reproduire son fonctionnement dès que les vis de la machine sont bien construites, sans les avoir relié par des segments.

4.2. Le binôme : Eva et Violaine

Au début de notre séance, je présente le problème au binôme et je leur montre le fonctionnement de la machine à dessiner. Elles ont une heure pour résoudre les exercices de l'expérimentation, mais elles terminent après 50 minutes. Elles disposent d'une consigne disant que les points E et F seront les points de départ de la construction de la machine dans Cabri. C'est la version b du problème qui leur a été distribuée.

J'assure personnellement l'observation en intervenant quelque fois dans le dialogue des filles. A la fin de l'expérimentation, je retire les feuilles avec les réponses des élèves et j'enregistre les figures construites dans Cabri.

Les élèves ont une première idée de comment elles peuvent faire le modèle de la machine à dessiner.

4. V : Je pense que d'abord faire CE.

7. E : Et après construire le parallélogramme.

Elles remarquent qu'il y a une consigne dans l'énoncé.

Elles vont construire leur première figure dans Cabri.

10. V : Ah ! Oui, donc il faut qu'on fasse E et F.

22. V : Le chiffre E. Voilà. On fait un autre…on fait quoi ? On fait un point C maintenant ?

24. V : Comme ça, ça fait la droite CE.

33. E : Après il faudra faire un point là dessous, aussi.

37. E : Le chiffre de B, voilà. Tout de suite, un petit point A, peut être.

Elles se demandent comment il faut construire le point A. Elles se demandent si les points D, E, F sont alignés. Elles les regardent sur la machine à dessiner et sur les feuilles distribuées. Sur cette dernière, on a donné les longueurs des barres de la machine à dessiner, donc elles trouvent une solution pour construire le point A.

50. V : On va mettre A. Non ! Tu sais qu'est-ce qu'on va faire. Une demi-droite.

52. V : C'est point A, c'est point, après tu calcules 20, tu va trouver A.

Il y a longtemps qu'elles n'ont pas travaillé dans Cabri, donc elles vont chercher dans le menu quelque chose qui peut les aider à construire leur point A (voir le dialogue entre Eva et Violaine, int. (53 – 81).

Elles trouvent le report de mesure, mais les distances dans Cabri sont très grandes. Elles me demandent la possibilité de changer les longueurs des barres sur la figure dans Cabri.

Maintenant elles savent utiliser le report de mesure dans Cabri, donc elles vont refaire leur figure à partir des mesures.

105. V : Finir, c'est plutôt par-là. Aller. On fait quoi, E, enfin le point F…

On fait EC, puis la droite qui passe par E et par C.

109. V : Un point, puis, voilà. Après on prend le point C, donc il vaut mieux qu'on a là bas le point B, un prime comme ça qui prend le point C, tu fais 14, enfin tu fais 7, alors le point…sur un objet.

112. E : C'est B, BE, ils sont, enfin, B c' est le milieu de CE ou quoi.

117. V : Pour que EB ça reste constant, distance et longueur. On va faire le report de mesure, comme ça, ça bouge pas. Normalement, non. Et maintenant, ça c'est E. Puis on va faire ça. Alors. Je sais pas qu'on divise par 4, c'est trop grand.

134. V : Intersection de deux objets.

135. E : Tu mets B.

Dans ce qui précède, elles ont essayé de construire leur point B de plusieurs façons sur la même figure, d'où l'existence de B'. Eva dit :

140. E : Mais t'as pas pris le bon B, c'est pour ça.

Elles continuent sur la même figure en prenant le report de mesure pour reconstruire leur point B. Ensuite, elles finissent par :

147. V : Alors report de mesure, c'est là, ce point, 3 et demi.

152. E : C'est un chiffre de C. Ah ! Cacher/montrer. Oui, voilà. Et quoi faire

154. V : Après. On va passer une droite. Une demi-droite par BF.

158. V : Donc, nombre, par BF qui fasse 5.

166. V : Après, en fonction de B, on va faire D, normalement aussi.

176. V: On va faire une droite sur la demi-droite, et après le report, puis l'autre…le report de mesure…Ah ! Oui ! J'en ai…chiffre de F…un cercle…j'ai deux cercles superposés, hm, c'est pas grave.

190. V : Faire AD perpendiculaire, parallèle à BC.

Éva hésite sur le parallélisme des barres de la machine à dessiner (int. 201). Pour se convaincre, elle demande à Violaine de regarder sur la machine. Elle lui répond :

204. V : Il me semble…après…

Violaine contrôle par le déplacement dans Cabri, si leur figure reproduit le fonctionnement de la machine à dessiner. Les élèves n'arrivent pas à décider si leur construction reproduit la machine. Elles réessayent la machine à dessiner pour vérifier si leur figure est bonne ou non (voir le dialogue entre Éva et Violaine, int. 206 – 221).

Après avoir vu chez les élèves les difficultés de la modélisation dans l'exploration du problème, je suis intervenue en leur expliquant pourquoi le point F doit être fixé sur la machine à dessiner.

Dans la suite, elles essayent de faire quelques corrections sur leur figure (int. 230 – 257).

On peut penser que Violaine a perçu le sens de la bonne construction du point B.

261. V : Il faut juste B, qu'il ait la bonne taille.

Elles continuent les changements sur leur ancienne figure.

La figure finale est validée par le déplacement dans Cabri. Les élèves sont persuadées qu'elles ont résolu le problème.

289. Si. Ca y est, on a réussi…Ben, oui. Ca bouge comme, comme celui là. Voilà. On a réussi et maintenant on va faire le reste.

C'est moi qui dois intervenir et leur dire que leur modèle ne reproduit pas le fonctionnement de la machine à dessiner. En effet, leur point E n'est pas libre dans Cabri, il bouge sur un demi-cercle de centre B, de rayon BE.

D'abord elles répondent à la question b de cet exercice (int. 293), elles identifient la symétrie par rapport à F, sans justifier, et puis elles recommencent la question a.

Les élèves trouvent une nouvelle stratégie :

298. E : Alors. Ah ! Et si on construisait E et F dès départ et D par rapport à EF, on connaît pas la longueur par contre. Mais on peut peut-être le calculer, non ?

299. V : Hm. Calculer ? Non, je pense pas qu'on puisse le calculer. Mais si on fait la symétrie. Quand tu fais la symétrie, après tu peux t'arranger.

Elles vont continuer leur construction sur l'ancienne figure en essayant de mettre en œuvre la nouvelle stratégie.

Elles laissent le point F libre dans Cabri. Le point B est construit avec le report de mesure à partir du point F (le point obtenu est mobile sur un cercle de centre F), puis A comme symétrique de B par rapport à F. Ensuite elles tracent un segment AB et veulent construire le point E sur un cercle de centre B. Mais Violaine remarque :

349. V : Après on prend enfin le cercle, mais E, il va bouger, il va pas être libre, si on le fait sur un cercle.

Elle a compris que si elles construisent le point E sur un cercle de centre B, elles vont refaire le même fonctionnement incorrect de la machine à dessiner que dans la figure précédente.

Par conséquent, elles mettent le point E n'importe où pour qu'il soit libre (int. 354). Elles appliquent la symétrie centrale du point E par rapport à F pour obtenir le point D. Elles finissent leur figure par des droites parallèles.

Leur modèle ainsi obtenu, étant contrôlé par le déplacement dans Cabri, change les distances des segments AD, EB et CB.

Les élèves ont vu qu'elles n'ont pas reproduit le fonctionnement de la machine à dessiner, la constance des longueurs des barres.

Elles recommencent.

381. E : A mon avis, en fait, il faudrait déjà faire D, F, E dès le départ.

384. V : Après. Symétrique…et après le point B de deux distances, de ça et de ça. Mais je sais pas comment on fait. (Violaine renvoie aux points E et F.)

Violaine a perçu la bonne construction du point B. Cependant, le problème est comment la faire dans Cabri. C'est moi qui intervient en expliquant les possibilités d'obtenir un tel point à l'aide des cercles de rayons définis ou des compas.

Elles finissent leur construction (voir dialogue entre Eva et Violaine, int. 387 – 422).

Finalement elles ont réussi à faire le modèle de la machine à dessiner qui reproduit son fonctionnement.

Par suite, elles essayent de justifier la transformation géométrique qui transforme E en D, mais elles n'y arrivent pas.

Elles tournent la feuille, lisent le deuxième exercice et commencent à le résoudre :

438. E : Après la droite, un cercle C.

440. E : Après c'est un point O…On veut trouver un point A de d et un point A' de C tel que O sera le milieu du segment AA' et connaître le nombre de solutions possibles. A de d, oh, là. Sinon, j'ai compris. Ben, O est déterminé, nombre de solutions possibles, alors attends…d, C, A et après c'est la symétrie, voilà.

441. V : Non mais il faut contrôler seul le cercle en fait. Donc le A construit, il faut qu'il bouge…

451. V : J'ai dit qu'on prend un petit point qui bouge sur d.

453. V : Oui, voilà. On l'appelle A. Après.

454. E : On va faire symétrie.

455. V : Hm ! …Non, non, par rapport à O.

459. V : On va voir si est-ce que ça touche. C'est bon ?

460. E : Ah ! Oui…voilà, deux solutions.

C'est une solution très intéressante, en utilisant le côté dynamique du logiciel Cabri-géomètre.

Elles continuent de lire l'énoncé de cet exercice.

463. V: Normalement, utiliser soit la machine à dessiner soit le Cabri. Oui. Alors pourquoi on a pas…alors, voyons…

Elles vont écrire cette réponse :

488. E : Nous avons choisi Cabri-géomètre parce qu'on le sait utiliser. (Elles rient.) C'est un peu vrai quand même.

On remarque que la possibilité de résoudre le problème aussi sur la machine à dessiner leur donne l'idée de trouver une correspondance entre les points A, O, A' et les points de la machine à dessiner.

475. V : En fait, ça c'est un point E et ça un point F.

479. V: Oui. A, c'est en fait ça équivaut au point E et A' à F, regardes c'est la même chose, dans l'autre sens !

Violaine se corrige :

483. V : Oui. Ca se, non, ça correspond à D (il s'agit de A') *et là ça correspond à E.*

492. E : Non, O correspondra à F.

A la fin, elles réfléchissent sur la justification du premier exercice, mais elles renoncent.

4.2.1. Analyse a posteriori

Les élèves jettent un coup d'œil sur la machine à dessiner, elles prennent les feuilles distribuées et commencent à lire l'énoncé du premier exercice. Le dessin de la machine à dessiner fourni dans l'énoncé est considéré par les élèves comme un élément de départ de la simulation. Dans la stratégie des élèves on voit la tentative de construire le parallélogramme. Le dessin fourni n'aide pas les élèves à trouver une bonne construction du modèle de la machine à dessiner.

Les élèves remarquent la consigne donnée dans l'énoncé (int. 9). Elles vont la suivre, mais elles ne la comprennent pas. Par conséquent on observe que ma consigne est au dehors de la stratégie des élèves.

L'exploration initiale guidée par un contrôle perceptif conduit les élèves à " copier " dans Cabri-géomètre le dessin de l'énoncé. Il n'y a pas le passage du niveau " Machine à dessiner " au niveau " Dessins dans Cabri ". Les élèves travaillent tout de suite dans Cabri-géomètre (non prise en compte de l'objet réel).

On pense qu'elles ont compris dès le début de l'expérimentation qu'en déplaçant les éléments libres du dessin elles recevront des rétroactions du logiciel qui leur permettront de poursuivre le raisonnement :

30. V : Après on pourra faire bouger pour voir qu'est ce que ça donne.

En effet, elles connaissent cette fonction dynamique du logiciel, mais elles ne l'utilisent pas au début de l'expérimentation. Elles construisent leur figure dans Cabri sans faire des rétroactions par le déplacement. C'est dans le dialogue entre Eva et Violaine (int. 206 - 208) qu'on observe sa première utilisation.

Cependant dans le deuxième mi-temps de l'expérimentation, le déplacement comme moyen de validation de la figure devient d'utilisation plus fréquente par les élèves qu'au début (int. 269, 273, 279, 285, 373, 422).

Pendant l'exploration du problème, on observe que le rôle du déplacement réside essentiellement dans la validation ou invalidation de leur construction, par comparaison perceptive avec le fonctionnement de la machine.

Par contre, l'avancement dans la résolution du problème se fait grâce à l'observation du fonctionnement de la machine ; les élèves trouvent des idées de construction en observant la machine en action.

En effet, le passage du niveau " Dessins dans Cabri " au niveau " Machine à dessiner " se fait pour obtenir des informations concernant la machine.

Ce n'est donc que dans un deuxième temps après échec de leur simulation qu'elles prennent en compte de l'objet réel.

On observe une telle rétroaction dans le dialogue suivant, entre Eva et Violaine, afin de prouver l'alignement des points DFE :

41. E : Non, D, F, E. C'est pas aligné par-là ?

42. V : Quoi ? (Elle essaye la machine à dessiner) Si.

Ensuite, Eva cherche la construction du point A (int. 48). Pour voir quelle est la position du point A, elle demande à Violaine de regarder sur la machine à dessiner.

Dans le dialogue suivant entre Eva et Violaine on voit bien le rôle de la machine dans la validation de leur modèle construit. La machine joue un double rôle dans la démarche des élèves. Elle donne des idées pour l'avancement et elle sert à valider (invalider) les constructions faites.

201. E : A mon avis c'est ça, quoi, mais en fait, on a pas vraiment l'indication, on sait pas exactement s'ils sont parallèles ou pas.

202. V : Oui, mais bon.

203. E : Essaye de regarder à la machine.

204. V : Il me semble…après…

205. E : Chiffre de D.

206. V : On va voir ça si ça on fait bouger ça, ça fait bouger là bas.

207. E : Mais c'est pareil, j'ai l'impression.

208. V : Attends. Là c'est E (le point dans Cabri) *qu'on bouge et là c'est la droite* (la barre de la machine à dessiner).

D'abord, c'est le parallélisme validé par la machine à dessiner, puis c'est le fonctionnement du modèle dans Cabri.

En plus, dans le dialogue ci-dessus, on observe la correspondance entre les deux niveaux, donc entre "Machine à dessiner " et " Dessins dans Cabri ". C'est la correspondance entre la rétroaction par le déplacement dans Cabri et la rétroaction par la machine à dessiner faite par les élèves afin de valider le fonctionnement du modèle dans Cabri.

Il n'y a pas de passage au niveau " Géométrie théorique ".

Les élèves savent répondre à la question b posée dans le premier exercice, mais elles n'arrivent pas à justifier leur réponse (int. 430 – 433, 520). On pense que les élèves ont perçu le sens de la symétrie centrale. Par contre, cette question les a aidées dans l'avancement dans la résolution du problème. Elles ont trouvé une nouvelle stratégie pour refaire leur construction à partir de la transformation géométrique.

Le traitement du deuxième exercice se déroule au niveau "Dessins dans Cabri ". On observe chez les élèves, pendant l'exploration de ce problème, la tentative de faire une correspondance entre les deux exercices.

En effet, c'est l'énoncé (la possibilité de résoudre cet exercice soit en utilisant le logiciel soit sur la machine à dessiner) qui les a conduit de chercher une correspondance entre les points A, A', O du deuxième exercice et les vis (des points E, F, D) de la machine à dessiner (voir le dialogue entre Eva et Violaine, int. 475 – 492).

Pendant l'exploration du premier exercice, on observe plusieurs difficultés de modélisation :

- Même si les élèves ont une consigne dès le début, elles n'arrivent pas à comprendre pourquoi le point F sera libre dans Cabri, alors qu'il est fixé dans la machine à dessiner (int. 10 – 13 ; 114). On observe la même difficulté dans le dialogue suivant :
216. V : Mais, il peut pas bouger quand même.
217. E : C'est trop bizarre.
218. V : Oui, c'est trop bizarre.
219. E : Là, F, il est fixe ou quoi.

- Une autre difficulté concerne le point E :
208. V : Attends. Là c'est E qu'on bouge (le point dans Cabri) *et là c'est la droite* (la barre de la machine à dessiner).
209. E : Ah! Oui. F, il est fixe. Et c'est pour ça qu'il fait les mêmes…
210. V : Non, c'est E qui est fixe (sur la machine). *Donc là, E, il bouge.*
Violaine voit le point E comme le point fixé dans la machine à dessiner, malgré l'utilisation de la machine décrite dans l'énoncé. Pour elle, le point E (vis de la machine à dessiner) fait partie de la barre EC (on a vu la même difficulté chez Olivier et Jérémie). Par conséquent, E il ne bouge pas, ce n'est que la barre (droite EC) qu'on bouge quand on utilise la machine. Elle me dit :
223. V: Vous savez pas…donc E, il bouge pas, il reste sur place, en fait. On peut bouger la droite, mais on peut pas faire bouger E. Donc c'est

- Les élèves n'ont pas perçu en validant leur figure par le déplacement que leur modèle ne reproduit pas le fonctionnement de la machine à dessiner. J'étais obligée d'intervenir (296) pour leur montrer que leur point E n'est pas libre dans Cabri, mais qu'il bouge sur le cercle de centre B.

- Les points A et B sont perçus par les élèves comme les points fixes sur la machine à dessiner :

306. E : Oui, mais…attends. Non, c'est parce que A et B, en fait, ils sont fixes.

Et

378. V : Sur votre, E, il bouge, mais après A et F, non, A et B ils bougent plus.

- Une dernière difficulté de cette tâche de modélisation mathématique, présente également chez le premier binôme, est la suivante :

318. V : Je suis pas sure que ça va marcher ce que tu veux construire. On a pas des segments qui passent par ce point.

365. V : Mais là, c'est eux qui bougent pas. Mais sûrement si on met un parallélogramme, ils vont bouger…

C'est à dire, le modèle construit dans Cabri va reproduire le fonctionnement de la machine à dessiner s'il copie aussi sa forme.

On pense qu'il est difficile pour les élèves de comprendre la raison de la forme de la machine à dessiner qui permet son fonctionnement. Les élèves ne comprennent pas que le modèle dans Cabri peut reproduire le même fonctionnement en ne construisant que les points (les vis) de la machine à dessiner.

4.3. Le binôme : Marion et Julien

C'est moi qui présente le problème au binôme. Ils ont à disposition la consigne dans le premier exercice, concernant les points de départ. Ils travaillent pendant une heure.

Dans la suite, on présente les stratégies de résolution des élèves.

Les élèves, à l'aide de mines aux articulations E et D, essayent la machine à dessiner pour voir son fonctionnement.

Ils discutent sur la stratégie, ensuite ils construisent la première figure dans Cabri.

Ils mettent le point F, puis ils cherchent dans le menu du logiciel quelque chose qui peut les aider à construire le point A (int. 14 – 39). Ils ne trouvent pas, donc Julien va me demander et ils vont construire leur point A en utilisant le report de mesure.

Ils veulent faire le point B comme symétrique de A par rapport à F, mais ils ne savent pas comment. Il y a longtemps que les élèves ont travaillé dans Cabri-géomètre. C'est moi qui leur montre la symétrie centrale dans le menu du logiciel.

Ils font le report de mesure avec le point initial au point A pour trouver le point D.

Ils obtiennent le point C comme l'intersection des droites parallèles passant par B et D.
Ils finissent par le point E. Il est le symétrique de C par rapport à B. (voir le dialogue entre Julien et Marion, int. 11 – 78).
Ils contrôlent par le déplacement dans Cabri si leur construction est bonne. Ils n'ont pas réussi (E n'est pas déplaçable directement), ils recommencent.
Je vois les erreurs dans la construction, donc j'interviens et je leur répète la consigne donnée dans l'énoncé.

Ils recommencent par une nouvelle stratégie :
87. Bon…en fait…il faut qu'on fasse la droite qui passe par E direct, bon, alors, on met tout, comment on fait pour tout effacer ?
Ils mettent le point E, puis ils font le report de mesure avec le point initial au point E pour construire le point B.
Pour trouver le point C, ils vont faire la symétrie centrale de E par rapport à B. Ils tracent la droite EC.
Ils font le report de mesure avec le point initial B pour obtenir le point F.
Le point A est le symétrique de B par rapport à F. Ils tracent la droite BF.
Ils finissent leur construction par le point D comme le point d'intersection des droites parallèles passant par C et A. (voir le dialogue entre Marion et Julien, int. 87 – 122).
Par le déplacement dans Cabri, ils valident leur figure. Ils n'y arrivent pas. En effet, ils ont mis un seul point libre ce qui est le point E. Or, le point F n'est pas libre. Une telle figure ne reproduit pas le fonctionnement de la machine à dessiner.
Par conséquent, je souligne encore une fois l'importance de la consigne mise dans l'énoncé.

Les élèves vont chercher une autre stratégie pour arriver à la résolution.
Cette fois-ci, leur point de départ sera F.
Ils tracent une droite passant par F. Ils construisent un cercle de centre F, de rayon FB, et les points d'intersection de la droite et de ce cercle seront les points cherchés, A et B.
Pour trouver le point E, ils vont faire le report de mesure avec le point initial au point B.
Le point C est construit comme le symétrique de E par rapport à B.
Ils construisent des droites parallèles passant par C et par A pour obtenir le point D.

Ils finissent leur figure en traçant des segments DC, CE, BA et DA.

Ils utilisent la fonction dynamique de Cabri-géomètre, le déplacement, pour valider leur construction, mais ils n'y arrivent pas. (E n'est pas libre, il bouge sur le cercle de centre B, de rayon BE)

C'est moi qui interviens :

138. Obs. : Votre point E, il n'est pas encore libre. Il est dépendant…

139. J : De B, donc il faut inverser. Fichier nouveau. C'est la même chose, mais il faut commencer par FE.

Ils recommencent leur construction.

Les points de départ sont les points E et F, comme c'était indiqué dans l'énoncé.

Ils trouvent le point B comme l'intersection des deux cercles de centres F et E et de rayons bien définis.

Ils font la symétrie centrale de B par rapport à F pour obtenir le point A.

Les points C et D sont construits de la même façon que dans la construction précédente.

En reliant les points construits, ils finissent leur figure. (int. 140 – 158)

Par le déplacement, ils valident leur modèle de la machine à dessiner pour voir s'il reproduit son fonctionnement. Ils ne sont pas sûrs d'eux-mêmes, ils me le montrent. Ils ont réussi, mais c'est moi qui les assure. (int. 158 – 164)

Ils essayent de faire “ trace ” dans Cabri pour se convaincre que leur figure est la bonne. (int. 165 – 175)

Dans la suite, ils répondent à la question b du premier exercice sans mettre de justification :

177. M : C'est pas qui passe par E et D ? C'est symétrie centrale de F… Mais si, regardes ! Ou qu'il soit…c'est à ça ? C'est la symétrie centrale ? Ben, oui, tu mets.

Ils continuent par le traitement du deuxième exercice. Ils lisent l'énoncé et choisissent la machine à dessiner pour résoudre le problème. Donc, ils se déplacent devant la machine.

D'abord, ils essayent la machine à dessiner pour revoir son fonctionnement, mais Julien ne voit ni l'utilisation de la machine ni la résolution sur cette dernière (int. 208).

Par conséquent, ils essayent de résoudre le problème séparément. Julien travaille dans Cabri et Marion sur la machine à dessiner.

Marion construit une droite et un cercle sur le tableau de la machine à dessiner.

Elle met, pour la première fois, le cercle et la droite indépendamment des vis de la machine à dessiner, à côté des barres de la machine à dessiner (fig. 4).

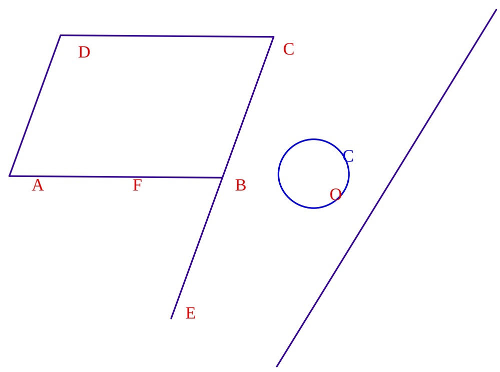


Figure 4

Pendant ce temps là, Julien travaille dans l'ancien fichier dans lequel ils ont construit le bon modèle de la machine à dessiner.

Il a une idée, il me dit :

210. J : On peut tricher ? Je sais pas mais on met O sur F et puis ça c'est A et ça c'est A'…

Marion l'a aussi entendu. Elle voit que son premier essai de la résolution sur la machine n'est pas le bon :

214. M : Moi, je peux pas déplacer F.

215. J : Le cercle, je veux bien.

Donc, elle met le centre du cercle au point F de la machine à dessiner et reconstruit le cercle (fig. 5).

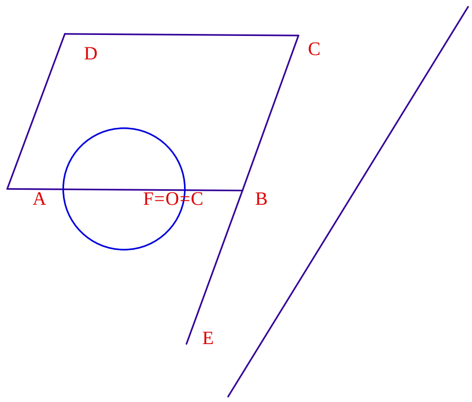


Figure 5

Elle n’arrive pas à trouver les points solutions. Elle pense que c’est dû au rayon, donc elle agrandit le rayon du cercle (fig. 6).

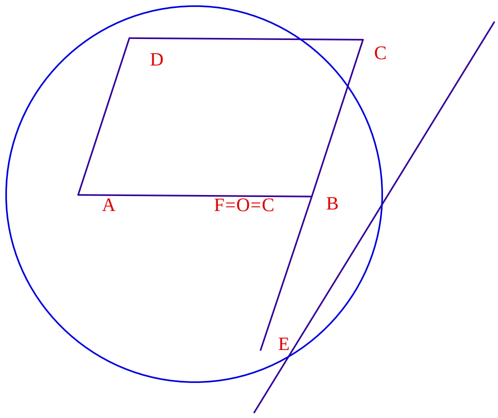


Figure 6

Elle s’aperçoit que la position de la droite et du cercle n’est pas la même que celle sur le dessin dans l’énoncé. Elle va gommer la droite et elle la reconstruit pour qu’il n’y ait pas d’intersection.
Elle essaye de trouver les points solutions, mais elle n’y arrive pas. Elle demande à Julien :

230. M : C’est obligatoirement que O, il sera dans le cercle ?

231. J : Normalement oui.

J’ai vu les difficultés de la résolution sur la machine à dessiner, donc j’interviens en disant que le point O se trouve dans le cercle mais il n’est pas le centre du cercle.

Marion reconstruit le cercle de la façon suivante :

Elle met la vis (E) de la machine à dessiner sur la droite et ensuite elle construit le cercle passant par la vis (D) de la machine à dessiner.

Elle a fini en trouvant cette seule solution (int. 245).

Julien a aussi trouvé une résolution dans Cabri :

246. J : Parfois j’ai triché. J’ai fait une droite d, un cercle, j’ai placé un point ici (sur la droite d)*, un autre ici* (sur le cercle) *parce que si point, ça va pas marcher et après j’ai fait trouver le milieu et puis j’accroissais mon troisième cercle…le reste, je sais pas…c’est pas comme ça, en fait.* (Il a construit O en fin de processus comme milieu de A et A’)

247. M : Non mais des solutions, on a une infinité.

Pour répondre aux questions posées, ils vont écrire :

a) *On a choisi la machine à dessiner car grâce au point précédent D et E, on a pu résoudre le problème.*
b) *On a tracé une droite d. Puis grâce à la machine à dessiner on a choisi le point A puis on a reporter le point A’ avec la symétrie de centre O qui est l’ancien point F. Ensuite on a tracé un cercle passant par A’ où O est à l’intérieur du cercle C.*

4.3.1. Analyse a posteriori

Marion et Julien, tout au long de l’expérimentation, n’arrivent pas tous seuls à comprendre l’utilisation de la machine à dessiner. Leur but est la résolution du problème.

Ils commencent à travailler au niveau “Machine à dessiner”. Ils l’essayent pour voir son fonctionnement.

Ils vont passer au niveau “ Dessins dans Cabri ” pour faire leur première construction.

C’est la machine à dessiner et le dessin fourni dans l’énoncé qui sont pris en compte par les élèves comme les éléments de départ de leur simulation.

La prégnance de l'appréhension perceptive du parallélogramme conduit Julien à la stratégie de la construction du parallélogramme.

La fonction dynamique du logiciel, le déplacement, permet de valider leur construction mais il faut expliciter " le déplacement " pour trouver les raisons qui soutiennent le modèle construit.

L'outil de validation constitué par le déplacement dans Cabri devient d'utilisation fréquente par les élèves. On observe cependant que, même si les élèves utilisent cette fonction (int. 80, 123, 136, 160), ils ne la comprennent pas.

C'est à ces moments là que j'interviens. En effet, ce sont les élèves qui me montrent les modèles construits dans Cabri. Ce sont mes indications qui conduisent les élèves à produire une nouvelle construction.

Même pour la dernière construction, quand ils ont réussi de faire le modèle de la machine à dessiner qui reproduit son fonctionnement, ils n'arrivent pas à valider leur figure.

Par conséquent, on observe que cette tâche de modélisation mathématique pose plusieurs difficultés au niveau du fonctionnement de la machine à dessiner.

On va examiner les caractéristiques du comportement de la machine à dessiner non perçues par les élèves :

- On peut observer que plusieurs fois pendant l'exploration du premier exercice on dit " le point F, il ne peut pas bouger " (int. 11, 125, 161). Ils ne comprennent pas pourquoi donc le point F peut bouger dans Cabri.

- Le point A n'est pas fixé dans la machine à dessiner, même s'il appartient à la barre de la machine à dessiner. Pourtant, les élèves le perçoivent comme un point qu'ils ne peuvent pas faire bouger par déplacement (int. 80).

- On observe la même difficulté pour le point E. Ils pensent que s'ils mettent le point E comme le point de départ dans Cabri, ils arriveraient à le bouger alors que dans la machine à dessiner c'est la barre EC qu'on déplace et non seulement la vis E de la machine. Ils ne comprennent pas si le point E bouge ou non (int. 123 ; 130 – 131).

- Sur la troisième construction, le point E n'est pas encore libre, il bouge sur un cercle du centre B. Pourtant les élèves considèrent que le point E est libre dans cette construction (int. 136). (On a observé la même difficulté chez Eva et Violaine.)

- La dernière difficulté est l'importance de mettre des distances des barres de la machine à dessiner dans la construction dans Cabri. Les élèves les mettent parce qu'on les a mis dans l'énoncé, c'est un contrat. En fait, les longueurs des barres peuvent être modifiées dans Cabri, mais il faut les mettre. Sinon, dans la construction finale par le déplacement, les barres de la machine changeront de longueurs (voir le dialogue entre Julien et Marion, int. 96 – 98).

Le traitement de la question b du premier exercice, se déroule au niveau “ Dessins dans Cabri ”.

En effet, ils essayent de répondre à la question en cherchant la réponse sur leur modèle de la machine à dessiner construit dans Cabri (int. 176 – 177). Le rôle du “ Dessins dans Cabri ” est maintenant celui d'avancement dans la résolution.

Or, la reconnaissance de la transformation géométrique se fait uniquement à l'aide d'éléments spatiaux reconnus perceptivement.

Dans cette phase de l'expérimentation, on n'observe pas le passage du niveau “ Dessins dans Cabri ” au niveau “ Géométrie théorique ”.

Ce binôme est le seul qui a traité le deuxième exercice à deux niveaux, Marion l'a traité au niveau “ Machine à dessiner ” et Julien au niveau “ Dessins dans Cabri ”.

On observe que Julien a perçu la relation entre le premier et le deuxième exercice :

210. J : On peut tricher ? Je sais pas mais on met O sur F et puis ça c'est A et ça c'est A'…

Par contre, il ne sait pas l'utiliser. En effet, il fait sa construction, dans le même fichier où se trouve leur modèle de la machine, mais à côté.

Marion n'a pas vu la correspondance malgré son traitement du problème dans la machine à dessiner. Après avoir entendu l'idée de Julien, elle essaye de faire une telle correspondance. Après trois essais de bien placer la droite et le cercle sur le tableau de la machine à dessiner sans succès, elle change l'énoncé. En fait, elle trouve d'abord une solution et puis elle trace le cercle passant par le point solution. Par contre, les correspondances sont bien faites.

4.4. Le binôme : Lussiana et David

Je présente le problème au binôme et je dis qu'ils peuvent essayer le fonctionnement de la machine à dessiner en utilisant des mines. Ils travaillent pendant une heure.

Moi, j'assure personnellement l'observation. Ci-dessous est présenté le déroulement du travail du binôme.

Les élèves commencent par une première construction dans Cabri.

Ils construisent le parallélogramme ABCD, en partant du point D. Ils tracent une droite passant par D et mettent le point C sur cette droite. En utilisant “distance et longueur ” dans le menu du logiciel, ils définissent la distance DC.

Ainsi, à partir de la droite passant par C et de l'outil “ distance et longueur ”, ils trouvent le point B.

Pour finir la construction du parallélogramme, ils tracent des droites parallèles et mettent un point sur deux objets (c'est le point A).

Il leur reste à faire le point E. Ils le mettent sur la droite BC, ensuite ils définissent la distance BE et trouvent ainsi le point E (int. 5 – 37).

Ils valident leur construction par déplacement dans Cabri. Leur figure ne reproduit pas le fonctionnement de la machine à dessiner (le point E n'est pas libre et les distances des barres changent), mais ils ne comprennent pas pourquoi.

A ce moment là, Lussiana va relire plus attentivement l'énoncé et surtout la consigne donnée dès le départ (int. 39). Elle comprend qu'il faut recommencer la construction dans Cabri, à partir des points E et F.

Dans le nouveau fichier, ils reproduisent leur première construction en mettant les points E et F dès le départ.

Ils tracent une droite passant par E et une autre passant par F.

Ils trouvent le point B comme intersection de deux droites passant par E et par F.

Ensuite ils mettent les points A et C sur les droites FB et BE, sans report de mesure.

L'intersection des droites parallèles, l'une à BC passant par A et l'autre à AB passant par C, donne le point D (int.70 – 92).

Par le déplacement dans Cabri, ils contrôlent leur figure. Cette fois, ils arrivent à invalider leur construction.

Leur modèle ne reproduit pas le fonctionnement de la machine à dessiner (les distances des barres changent), donc ils essayent de trouver une autre stratégie de résolution.

107. L : Bon, on recommence…Aller ! …Moi, j'en sais rien. J'en sais rien…Regardes ! Ca fait une courbe, on ne l'a pas, on ne l'a pas ?

108. D : Moi, je pense que c'est le…cercle, non ?

Les élèves essayent d'interpréter les trajectoires dessinées dans l'énoncé, c'est à dire la trajectoire décrite par D quand on déplace E sur une trajectoire donnée. Même, ils regardent dans la machine à dessiner.

Mais avant une nouvelle construction, ils répondent à la question b du premier exercice :

147. L : Quelle est la transformation géométrique qui transforme E en D ? …Moi, je dit que c'est une symétrie par rapport à F.

148. D : C'est une relation ?

149. L : Ils sont alignés.

David n'est pas sûr de l'alignement des points EFD, donc ils le vérifient dans la machine à dessiner afin d'écrire la réponse sur les feuilles distribuées.

Les élèves retournent au problème précédent. Ils cherchent dans le menu Cabri quelque chose qui peut les aider, mais ils n'y arrivent pas.

David me demande :

184. D : En fait, il faut utiliser macro ou pas ?

185. Obs. : Non.

Les élèves ne comprennent pas pourquoi leur deuxième construction n'est pas la bonne, cependant ils ont suivi la consigne de l'énoncé (int. 188 – 189).

Ils vont refaire leur figure. Par contre, ils marquent aussi les trajectoires, symbolisant le fonctionnement de la machine à dessiner (fig. 7) :

193. D : Donc ça doit être un cercle, c'est ce qu'il fallait faire des cercles, c'est ça ? Pour qu'il puisse bouger sur le cercle ou quoi ? OK.

Par conséquent, ils mettent le point F, puis un cercle (au hasard) et le point E sur ce cercle.

Les points B et C sont construits de la même façon que dans la deuxième construction.

Ensuite, ils placent un autre cercle et une droite parallèle à FB passant par C et le point d'intersection du cercle et de la droite est le point D.

Ils finissent par le point A comme intersection de deux objets, l'un étant la droite FB et l'autre la droite parallèle à BC passant par D (int. 196 – 263).

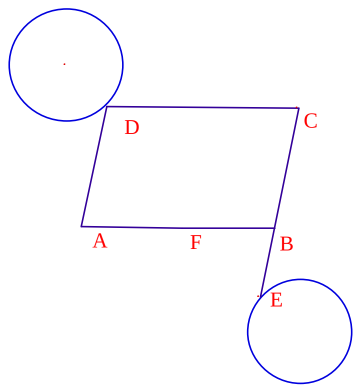


Figure 7

Par le déplacement dans Cabri, ils contrôlent leur figure. Ils voient que leur modèle ne reproduit pas le fonctionnement de la machine :

265. L : Oui, ça, mais non, ça marche pas, mais qu'est-ce que t'as mis là ? Mais non, ça marche pas, parce qu'il faut que la mesure d'aire reste toujours la même.

266. D : Bien vue ! Attends. Oui.

267. L : T'as, ça change pas de la longueur, mais…non, mais là ça va bouger la mesure, mais ça va pas. Ca marche pas.

Dans la suite, ils vont modifier leur dernière construction. En effet, ils reconstruisent les cercles mais ils mettent les segments afin d'éviter le changement des longueurs des barres de la machine (int. 284– 307). Ils n'ont pas réussi, ils vont me montrer leur construction. Je leur explique que le but de la tâche est de faire un modèle de la machine à dessiner qui reproduit le fonctionnement de cette machine sans avoir à dessiner les trajectoires de l'énoncé. En effet, on a mis dans l'énoncé le dessin de la machine avec un exemple de trajectoires pour que les élèves puissent comprendre le fonctionnement de cette machine.

Lussiana et David réessayent de résoudre l'exercice.

Les points E et F seront les points de départ.

Le point suivant, D, est construit comme le symétrique de E par rapport à F.

Puis, ils tracent une droite passant par D et une droite parallèle à cette droite passant par F.

Ils placent une droite par E et une parallèle à celle-ci passant par D. Les points d'intersection des droites sont les points cherchés, donc B et A.

Pour obtenir le dernier point C, ils effectuent la symétrie centrale de E par rapport à B (int. 312 – 358).

La validation est faite par le déplacement sur la figure construite dans Cabri mais aussi par la machine à dessiner. En effet, ce n'est pas encore le modèle attendu. Les élèves remarquent que par le déplacement dans Cabri les longueurs des barres changent alors que dans la machine à dessiner, elles sont constantes.

Les élèves examinent des corrections possibles pour que leur modèle reproduise le fonctionnement de la machine à dessiner mais ils n'y arrivent pas.

Ils vont continuer par le traitement du deuxième exercice.

Ils lisent l'énoncé mais ils vont résoudre ce problème en le changeant. Ensuite ils me montrent leur solution :

452. D : Lilla ? C'est bon maintenant ? O, il est toujours au milieu…

453. L : Parce qu'en fait, O, on l'a laissé tombé au début et on a fait la suite, mais après ils disent, connaître le nombre de solutions possibles, mais il y en a une infinité.

Les réponses écrites aux questions de cet exercice, expriment bien leur solution.

Ils ont écrit :

Nous avons utilisé Cabri-géomètre.

Nous avons construit la droite d, puis le cercle C. On a construit les points A et A' puis on a utilisé le paramètre " milieu " entre les points A et A'. Et nous avons obtenu O. Lorsqu'on bouge A sur la droite et A' sur le cercle O reste le centre de [A ; A']. Une droite est infinie donc il y a une infinité de solutions.

<u>4.4.1. Analyse a posteriori</u>

Les élèves ne ressentent pas la nécessité de regarder le fonctionnement de la machine à dessiner au début de l'expérimentation. Tout d'abord pour la construction du modèle de la machine, notre dessin dans l'énoncé représente pour eux un exemple " à copier ".

Les élèves travaillent dès le début au niveau “Dessins dans Cabri ”. Cabri les conduit à considérer le problème dans contexte géométrique.

En effet, tout de suite, ils vont faire une construction erronée de la machine à dessiner : l’appréhension perceptive au sens de Duval les conduit à reproduire le parallélogramme ABCD. Les élèves connaissent la fonction “ déplacement ” du logiciel comme élément de validation. Après avoir construit le parallélogramme, ils vont l’utiliser pour valider leur construction. Ils n’arrivent pas à valider le parallélogramme construit (non prise en compte de l’objet réel), donc ils vont mettre le point E pour finir leur dessin.

Or, les élèves revalident leur construction par le déplacement :

43. L : Non mais il faut pas le mettre, mais non, E, il faut le mettre au départ. (Notre consigne donnée dans l’énoncé est devenue indispensable pour Lussiana)

44. D : Je comprends pas.

45. L : Mais ça marche pas comme ça. E, il déplace sur la…(la droite BC)

46. D : Tu peux bouger là ?

47. L : Mais si.

48. D : Et alors ?

49. L : Mais regardes ! Parce que normalement c’est le premier point et quand tu bouges ça fait bouger tout ça (dans la machine à dessiner) *et là quand tu prends le point, il bouge comme ça, le point.*

50. D : C’est dommage.

51. L : Parce qu’il fait pas comme il faut.

52. D : Mais non.

On observe chez David certaines difficultés dans cette tâche de modélisation mathématique. Il n’aperçoit pas que le point E sur l’écran ne bouge que sur la droite alors que dans la machine à dessiner il est libre.

Par conséquent, on remarque le passage au niveau “Machine à dessiner ” de la part de Lussiana pour montrer à David la non-équivalence des fonctionnements du modèle dans Cabri et de la machine à dessiner.

On peut en déduire que le déplacement dans Cabri et la machine à dessiner sont considérés comme des outils de validation de leur première construction.

Pendant l’exploration du premier exercice, on observe que l’outil de validation constitué par le déplacement devient d’utilisation fréquente par les élèves (int. 92, 260, 263, 358, 370).

Par contre, le passage au niveau de “Machine à dessiner ” se fait plutôt pour trouver une nouvelle stratégie de la résolution du problème donc le but associé est d’avancer dans la solution (int. 115, 328, 358, 382).

Le passage au niveau “Géométrie théorique ” est effectué dans les réponses à la question b du premier exercice qui se basent sur les connaissances suivantes : la symétrie centrale par rapport à F, c’est la transformation géométrique qui transforme E en D, parce que les trois points sont alignés (voir dialogue entre Lussiana et David, int. 147 – 149).
En outre, la connaissance implicite utilisée dans cette phase est la suivante : si les trois points E, F, D sont alignées et F est le milieu du segment ED, F est le centre de la symétrie centrale et D est symétrique de E par rapport à ce centre. [Ces connaissances sur la symétrie centrale ont émergé plus tard. (int. 329 – 334)]
Ils regardent dans la machine à dessiner pour vérifier leur justification donnée à la réponse. On peut en déduire le rôle du passage au niveau “ Machine à dessiner ” qui est cette fois-ci du côté de la validation.

Dans ce protocole, on n’observe pas la caractéristique du comportement de la machine à dessiner non perçue par les autres binômes concernant des barres qui ne changent pas de longueurs. Lussiana et David arrivent à valider leur construction :
267. L : T’as, ça change pas de la longueur, mais…non, mais là ça va bouger la mesure, mais ça va pas. Ca marche pas.
Ils remarquent que leur modèle dans Cabri change ses mesures par le déplacement alors que dans la machine à dessiner les longueurs des barres restent constantes (int. 101, 265 – 267, 374). On voit qu’ils arrivent à valider leur simulation, par contre ils n’arrivent pas à reproduire des longueurs constantes.

5. Résultats de l’analyse des protocoles

L’objectif de notre travail est l’étude des liens entre le spatial et le géométrique chez des élèves ayant déjà une certaine familiarité avec la géométrie en tant que théorie.
C’est pourquoi on a distingué dans le cadre théorique deux domaines, le domaine spatial qui relève du monde sensible et le domaine géométrique considéré comme théorique.

Notre analyse se développe sur trois niveaux différents :
“ Machine à dessiner ”, “ Dessins dans Cabri ”, “ Géométrie théorique ”.
Notre travail s’appuie sur le processus de modélisation, les passages d’un niveau à un autre, les relations spatiales reconnues par les élèves comme modélisables et sur les contrôles effectués par les élèves.

L’analyse des protocoles a mis en évidence le problème du choix des éléments de départ de la simulation géométrique. Parmi les trois cas (la machine à dessiner, le dessin fourni dans l’énoncé, et l’ensemble dessin machine), c’est le dessin fourni qui est privilégié par les élèves.

La tâche à réaliser par les élèves n’est donc plus celle de modélisation, c’est-à-dire le passage de l’objet réel à sa représentation dans Cabri, mais celle de reproduction dans Cabri d’un dessin donné.

Dans le processus de modélisation mathématique proposé par Coulange (1997), le premier passage se fait du domaine extra-mathématique au domaine “ pseudo-concret ” en réduisant le système concret à des aspects de ce système pertinents par rapport aux questions de départ. Après avoir construit le modèle intermédiaire, on passe au domaine mathématique, à la traduction du modèle pseudo-concret dans la symbolique mathématique.

En général, les résultats de l’analyse des protocoles montrent qu’au début de l’expérimentation les élèves commencent dans le domaine mathématique en considérant le dessin fourni dans l’énoncé comme un élément de départ et ne prennent pas en compte le fonctionnement réel de la machine.

La prégnance de l’appréhension perceptive du parallélogramme sur le dessin donné conduit les élèves à une stratégie de reproduction de la forme apparente du parallélogramme sans réfléchir à l’importance des points de départ de la construction. Le problème de la reproduction du fonctionnement dynamique de la machine et donc de la modélisation n’est pas dévolu.

En bref, la première stratégie des élèves relève d’un schéma visuel.

Une fois la première simulation géométrique construite sous la forme d’un dessin dans Cabri, les élèves passent à la dernière étape de la démarche de modélisation mathématique au sens de Coulange. C’est-à-dire les élèves vérifient si leur modèle répond bien à l’étude que l’on entendait faire du système.

En effet, les élèves se posent la question sur la validité du modèle.

Leur simulation est invalidée par le déplacement dans Cabri, par comparaison perceptive avec le fonctionnement de la machine à dessiner.

En fait, le dessin fourni dans l’énoncé ne donne aucune indication sur le fonctionnement de la machine. Ce dessin ne rend pas compte du domaine de variation des éléments de

l’objet réel, donc les élèves dans la recherche de la validité de la simulation sont conduits à revenir à la machine même.
Par conséquent, l’environnement Cabri-géomètre disqualifie une telle interprétation non pertinente du dessin, mettant en évidence des limites du domaine d’interprétation de ce dernier.

Ce n’est donc que dans un deuxième temps, après échec de leur simulation, que les élèves prennent en compte l’objet réel.
On observe alors le premier passage du domaine extra-mathématique au domaine “ pseudo-concret ”. C’est-à-dire le passage du système concret (la machine à dessiner) à un modèle pseudo concret de ce système en réduisant le système concret à des aspects pertinents (les articulations de la machine, les barres de la machine et des relations entre ces éléments). Ce modèle pseudo-concret est encore très proche de la situation à modéliser.

Le modèle pseudo-concret ainsi construit est traduit en termes d’objets géométriques (les barres de la machine correspondent aux segments dans Cabri et les articulations aux points). Cette traduction ne pose pas de difficultés pour les élèves, probablement en raison du dessin fourni dans l’énoncé. Le problème se pose au niveau de la traduction des relations dégagées du modèle pseudo-concret en relations mathématiques entre les variables trouvées (il s’agit des relations entre des articulations et des barres de la machine).

La démarche suivante du processus de modélisation est celle de la construction du modèle mathématique, simulant la machine dans Cabri.
Dans ce processus, le déplacement comme moyen de validation devient d’utilisation fréquente par les élèves. Il permet de valider ou invalider leur simulation par rapport à la satisfaction des conditions demandées, par rapport au comportement spatial dynamique de la machine réelle.
Remarquons que les rétroactions du logiciel ne sont pas interprétées de façon correcte par les élèves. En particulier lorsque les élèves déplaçaient un élément du dessin Cabri,

ils ne remarquaient pas la différence de comportement entre la machine et la simulation : par exemple la différence de trajectoire.

Dans ce qui suit, nous présentons une hiérarchie des caractéristiques du comportement de la machine à dessiner non perçues par les élèves (dans un ordre décroissant), qui montrent bien les diverses difficultés de cette tâche de modélisation:

a) La machine à dessiner est utilisée en déplaçant E sur une trajectoire donnée, donc le point E dans Cabri doit être libre pour que le modèle de la machine fonctionne de façon pertinente. Si ce n'est que la droite CE qu'on peut bouger par déplacement dans Cabri, on n'a pas reproduit un fonctionnement identique de la machine. (Cette difficulté est observée chez les quatre binômes.)
b) Les barres de la machine à dessiner telles qu'elles sont, permettent le fonctionnement de la machine réelle. Dans Cabri, le modèle de la machine peut reproduire son fonctionnement dès que les vis de la machine sont bien construites (points dans Cabri), sans les avoir reliées par des segments. Dans Cabri, des points sont d'abord construits et les segments ensuite, tandis que dans la machine, les articulations sont construites à partir des barres. Il y a inversion dans le processus de construction de la simulation de l'ordre barres puis articulations. Cette inversion a posé explicitement des problèmes à deux binômes (Olivier et Jérémie, Eva et Violaine).
c) Le point F est fixé sur la machine à dessiner pour qu'on puisse travailler avec cette dernière. Tandis que dans Cabri, il faut qu'il soit libre afin de faire le modèle de la machine en reproduisant son fonctionnement.
d) Comme il est dit dans l'énoncé, dans la machine à dessiner si on bouge l'extrémité de la barre en E, les autres articulations bougent aussi, de même pour A et B. Le déplacement de A et de B n'a pas été vu par tous. Trois binômes ont explicité que A et B ont été fixes. La raison de cette absence de perception du mouvement de A et B est due à la faible ampleur du déplacement qu'effectuaient les élèves. (En fait, un petit déplacement de E sur un cercle de centre B sur la machine ne semble pas provoquer de déplacement de A et B.) On peut relier ce phénomène au fait que les élèves ne sont pas vraiment entrés dans une phase d'exploration de la machine pour en reproduire le fonctionnement. On peut penser que la nouveauté de la tâche de modélisation pour ces élèves est à l'origine de la faiblesse de l'exploration de la machine.
e) Dans une simulation construite par les deux binômes (Eva et Violaine, Julien et Marion), le point E n'est pas libre, il bouge sur un cercle du centre B. Pourtant pour les élèves, le point E paraît libre dans cette construction.
f) Quand on valide la construction par le déplacement dans Cabri, la distance des segments AB, BE, BC, DC et AD doit rester constante. En utilisant la machine à dessiner, les longueurs des barres ne changent pas. Le plus souvent les longueurs de ces segments dans les premiers modèles varient lorsque E est déplacé.
g) Quand on déplace E sur la machine pour dessiner la trajectoire décrite par D, la distance des vis E et F de la machine à dessiner change en fonction de la trajectoire donnée.

Les différentes caractéristiques du comportement de la machine à dessiner non perçues par les élèves, décrites ci-dessus, sont observées lors des allers et retours entre les niveaux " Machine à dessiner " et " Dessins dans Cabri " qui se produisent dans la construction de la simulation géométrique.
Or, les allers et retours entre deux registres, référent empirique et du modèle qui le représente, renvoient au processus de modélisation élaboré par Martinand (Buty, 2000). En fait, dans notre situation, ce sont des allers et retours entre la phénoménographie (" Machine à dessiner ") et la phénoménologie (" Dessins dans Cabri ").

Les éléments de contrôle, auxquels les élèves ont recours dans la construction de la simulation dans Cabri, relèvent du domaine spatial.
En général, à partir de l'analyse des protocoles, nous constatons que le rôle essentiel du déplacement est dans la validation ou l'invalidation des simulations construites, par comparaison perceptive avec le fonctionnement de la machine (correspondance entre deux niveaux, " Dessins dans Cabri " et " Machine à dessiner ").
Par conséquent, la machine joue un double rôle dans la démarche des élèves. Elle sert à valider (invalider) les constructions faites et elle donne des idées pour l'avancement dans la résolution.

Il est à souligner que les stratégies des élèves mettent en jeu une activité perceptive, une stratégie combinatoire des items existant dans les menus du logiciel et dans une moindre mesure l'usage de connaissances de géométrie.

L'analyse des protocoles a mis aussi en évidence que la reconnaissance de la transformation géométrique qui fait passer du point E à D dans la deuxième tâche (question b du premier exercice) semble être reconnue à l'aide d'éléments spatiaux reconnus perceptivement, principalement sur la simulation (le déplacement ou l'usage de trajections).
Remarquons que le caractère de nouveauté de la situation expérimentale conduit les élèves, pour reconnaître la transformation géométrique, à se placer dans le domaine

spatial de l’écran dans Cabri, par exemple en considérant les trajectoires du point et de son transformé.

Par contre, les connaissances de géométrie interviennent dans la phase de justification de la symétrie centrale, très probablement par effet du contrat habituel en géométrie.

Nous n’avons pas remarqué lors de l’analyse des protocoles de résolution du deuxième exercice purement géométrique.

La situation expérimentale ne correspondant pas à une situation usuelle permet en effet le recours à des solutions non purement géométriques contrairement au contrat usuel.

Les résolutions effectuées par les élèves sont des résolutions spatiales soit avec Cabri soit avec la machine à dessiner, plus précisément des solutions par appréhension perceptive fondée sur un raisonnement géométrique.

Remarquons que dans les résolutions il y a un raisonnement géométrique qui fait correspondre O à F, A à E et A’ à D, d’où une correspondance faite par les élèves entre les 1er et 2e exercices.

Cet exercice s’est avéré difficile pour les élèves. Ces derniers voulant en forte force produire une solution n’ont pas respecté la contrainte du point O fixe, et ont construit un point O ad hoc à partir des solutions trouvées sans contrainte.

En conclusion, le travail des élèves a eu lieu essentiellement au niveau du dessin Cabri. Certes des passages ont eu lieu entre “ Machine à dessiner ” et “ Dessins dans Cabri ” mais ils se sont essentiellement effectués dans les phases de validation. Il y a très peu de travail au niveau purement géométrique (seule véritable apparition chez Jérémie et Olivier).

6. Conclusion

Nous avons choisi d’étudier des liens entre le spatial et le géométrique chez des élèves en train de construire une simulation géométrique d’un objet spatial réel sous la forme d’un dessin dynamique de Cabri. Jusqu’à présent, peu de travaux ont abordé l’étude de ces liens si l’on fait exception des travaux qui ont porté sur l’école primaire (Salin et Berthelot, 1994). Les liens déjà étudiés concernent généralement le spatio-graphique et le géométrique.

Au sein de notre cadre théorique, nous avons distingué deux domaines :
Le domaine spatial qui relève du monde sensible et sollicite une appréhension et des contrôles de type perceptif et *le domaine géométrique* considéré comme théorique mettant en jeu des objets entretenant diverses relations.
Pour développer notre étude nous avons distingué trois niveaux, “ Machine à dessiner ”, “ Dessins dans Cabri ” et “ Géométrie théorique ”, en nous intéressant aux passages d'un niveau à un autre.

Un premier résultat issu de notre expérimentation concerne la modélisation. Les élèves se sont placés d'abord dans le contrat usuel de la géométrie en cherchant à reproduire un dessin papier crayon par un dessin Cabri et ont donc échappé à la tâche : la donnée du dessin sur parier d'une modélisation de la machine dans un état statique, donnée due à notre souci d'empêcher un blocage des élèves sur des questions de modélisation des barres et des articulations. La donnée du dessin fournissait indirectement la modélisation des barres en segments et des articulations en points.

La nécessité de modéliser une machine dynamique a conduit les élèves dans un second temps, celui de la validation de leur simulation, à prendre en compte la machine réelle. Donc les élèves ont bien été confrontés à une tâche de modélisation mais seulement après une première phase de travail. La question se pose pour une nouvelle expérimentation du changement de modalité : faut-il ne plus donner de dessin sur papier pour éviter que l'entrée dans la tâche de modélisation se fasse tardivement ? Que faire s'il y a blocage important ou si les élèves se lancent dans une modélisation des barres par des quadrilatères ?

Une fois entrés dans la tâche de modélisation, les élèves ont cependant le plus souvent été guidés par la validation de leur simulation dans Cabri et ne se sont pas lancés dans une exploration systématique du fonctionnement de la machine. Comme cela se produirait dans un processus de modélisation qui partirait du réel dès le début du travail.

Nous avons observé les difficultés des élèves à mettre en œuvre une mobilité entre le géométrique et le spatial, ainsi que la difficulté à établir des relations entre les deux domaines. Nous avons ainsi mis en évidence une tendance de la part des élèves à éviter les passages au niveau “ Géométrie théorique ”. Même dans des tâches données en termes géométriques (question b du premier exercice et deuxième exercice), les élèves ne se placent pas entièrement au niveau “ Géométrie théorique ”. Dès qu’ils ont une possibilité d’aide perceptive, les élèves ont recours aux éléments spatio-graphiques et spatiaux reconnus perceptivement pour la résolution.

L’analyse a permis de repérer les contrôles effectués par les élèves, pour contrôler la modélisation géométrique, qui sont essentiellement de nature spatiale.

Par cette tâche inhabituelle de modélisation, nous avons donc pu constater que les connaissances géométriques des élèves sont peu voire très peu disponibles en tant qu’outil de résolution de problèmes qui ne se présentent pas sous la forme classique d’énoncés géométriques.

De telles conduites n’ont rien de surprenant, même si elles sont contraires au contrat usuel où dans la résolution l’élève doit se situer uniquement au niveau théorique. Ce contrat devrait être bien installé en fin d’année de Seconde. Notre expérimentation montre que dès que la tâche devient inhabituelle et favorise le recours à la perception, les élèves retournent à un contrat laissant une plus grande place à l’usage d’informations spatio-graphiques au dépend de justifications purement déductives.

Bibliographie

Buty Ch. (2000) *Étude d’un apprentissage dans une séquence d’enseignement en optique géométrique à l’aide d’une modélisation informatique*. Thèse de l’Université Lumière, Lyon II.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l’arithmétique à l’algèbre dans l’enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, n° 19, pp. 45-75.

Coulange L. (1997) *Une étude sur la modélisation dans la classe de mathématiques en Seconde. Un double point de vue à partir de l’écologie et du contrat didactique*. Mémoire de DEA de Didactique des Disciplines Scientifiques. Grenoble I / Lyon I.

Duval R. (1988) Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives,* 1, pp. 57-74.

Laborde C. (1992) Enseigner la géométrie : permanences et révolutions, Conférence plénière au *7ème congrès international sur l'enseignement des mathématiques, ICME 7,* Québec, Canada, août 1992.

Laborde C., Capponi B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. In *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* Vol. 14, n°12, pp. 165-210.

Laborde J.-M. (1995) Des connaissances abstraites aux réalités artificielles, le concept de micromonde Cabri. In *Environnements interactifs d'apprentissage avec ordinateur,* Baron M., Guin D., Nicaud J.-F. (eds) (pp. 29-40). Paris : Eyrolles.

Laborde C., Capponi B. (1996) " Modélisation à double sens ", *Actes de la VIIIe école et université d'été de didactique des mathématiques,* Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (eds) (pp. 265-278). IREM de Clermont-Ferrand.

Margolinas C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* La pensée Sauvage éditions, pp. 256.

Salin M.-H., Berthelot R. (1994) Phénomènes liés à l'insertion de situations a-didactiques dans l'enseignement élémentaire de la géométrie. In *Vingt ans de didactiques des Mathématiques en France,* Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (eds) (pp. 275-282). La pensée Sauvage éditions.

Bibliographie : Manuel

Mollet-Petit F. (1989) Mathématiques 3e, Collections Collèges, IREM-Strasbourg. Paris : Casteilla.

Sommaire