Introduction et problématique de la recherche

Le rôle du dessin dans l'enseignement de la géométrie n'est plus à souligner ; plusieurs recherches ont montré l'importance de ce rôle dans l'apprentissage du raisonnement déductif, puisque, comme le souligne Houdebine (1990) l'essentiel du travail sur la démonstration est fait au collège sur des problèmes de géométrie où le dessin et les figures géométriques jouent un rôle essentiel.

Depuis plus d'une dizaine d'années, le rôle du dessin dans la résolution de problèmes de géométrie a fait l'objet de plusieurs recherches. Citons deux de ces recherches :

- La réflexion théorique développée par Fishbein autour de la notion de « figural concept », illustrée en particulier par Marioti dans le cas de la résolution de problèmes de géométrie dans l'espace. Fishbein a montré la dualité des concepts géométriques associant de façon indissoluble les aspects figuraux et théoriques.
- Les travaux de Duval sur la fonction du dessin dans la résolution des problèmes de géométrie. Duval a en particulier distingué les différents types d'appréhension du dessin qui interviennent dans la phase heuristique de recherche : l'appréhension perceptive, l'appréhension discursive, l'appréhension séquentielle et l'appréhension opératoire. Il considère que l'appréhension opératoire a un rôle décisif dans la résolution de problèmes en géométrie.

Dans le cadre de notre travail nous chercherons à mettre en évidence l'interaction entre les appréhensions perceptive, discursive et opératoire lors de la phase heuristique de recherche d'un problème en faisant varier les conditions relatives au dessin attaché à un problème de géométrie plane.

Nous partons du fait que la présence du dessin dans les énoncés des problèmes de géométrie constitue l'une des caractéristiques mathématiques de ce type de problèmes par rapport aux problèmes d'arithmétique qui, comme le remarquent Laborde et Houdebine (1998) relèvent du style narratif. Nous nous appuyons sur les études de Duval (1994) concernant les variables rédactionnelles des énoncés de problèmes, définies comme étant des caractéristiques linguistiques des énoncés des problèmes susceptibles de prendre des valeurs différentes et telles qu'un changement de valeur risque de modifier le traitement de l'énoncé par le lecteur (Laborde, 1995). Nous adoptons également les résultats de Chaachoua (1997) concernant les fonctions du dessin dans les énoncés des problèmes de géométrie plane[1]. En s'appuyant sur ces travaux, nous avons sélectionné une caractéristique des énoncés des problèmes de géométrie incluant le dessin, que nous avons appelé "la forme des données" dans l'énoncé d'un problème de géométrie plane et nous avons cherché à vérifier si c'est une variable didactique à considérer comme une extension des variables rédactionnelles des énoncés des problèmes.

L'objectif de notre travail est d'étudier l'influence de la variation des valeurs qui peuvent être accordées à cette caractéristique sur les processus de résolutions des élèves de 1ère année de l'enseignement secondaire tunisien (3è en France) et sur le traitement du dessin lors de la phase heuristique de la recherche de la solution.

Dans notre travail nous commençons par préciser les termes et expressions: dessin, figure et objet géométrique et certains concepts didactiques comme celui de contrat didactique et de variables didactiques et en particulier les variables rédactionnelles. Puis, nous essayerons de répondre aux questions suivantes :

La caractéristique rédactionnelle "forme des données" dans l'énoncé d'un problème de géométrie plane est-elle une variable rédactionnelle[2] ?

---

[1] Chaachouaa (1997) attribue au dessin trois fonctions dans l'énoncé des problèmes de géométrie plane. Ces fonctions sont la prise en charge des hypothèses, l'illustration de l'énoncé et un moyen pour rendre visible une sous configuration pertinente pour la résolution.

[2] L'utilisation du terme "variable rédactionnelle" a pour objectif de montrer que l'idée de caractéristique de l'énoncé influant sur les solutions des élèves, est étendue au dessin.

Quelle sera l'influence de la variation de cette caractéristique sur la réussite du problème, sur les processus de résolutions qui seront adoptés par les élèves et sur le traitement du dessin lors de la phase heuristique ?

L'étude de ces questions est étendue sur trois parties :

La première partie de notre travail consiste en une étude de la place accordée au dessin dans l'enseignement secondaire tunisien et par suite à déterminer le statut qui lui est accordé et les règles du contrat didactique relatif à son utilisation dans la résolution des problèmes de géométrie plane. Partant de l'hypothèse que dans les programmes l'institution définit le savoir à enseigner et précise ses attentes en termes d'exigences et de recommandations et de l'hypothèse que les programmes ont une influence sur les représentations des enseignants sur les objets du savoir et sur le contrat didactique en classe, nous chercherons à étudier l'importance accordée à la notion du dessin dans les textes des programmes des différentes réformes qu'a connu l'enseignement secondaire tunisien en mathématiques et essentiellement la réforme actuelle appelée "la réforme de l'école de base". Mais, comme les programmes ne permettent pas de nous éclairer sur les pratiques à propos de l'utilisation du dessin dans la démonstration en géométrie plane puisque comme le signale Mensouri (1994), les programmes « *ne constituent pas un texte de savoir, mais, seulement un discours sur un hypothétique savoir* », nous considérons qu'une analyse des manuels est nécessaire pour compléter l'analyse des programmes. Sachant qu'en Tunisie il y a un seul manuel officiel des mathématiques pour chaque niveau et que ce manuel est utilisé par tous les enseignants et les élèves, nous avons choisi d'étudier le manuel scolaire tunisien des mathématiques de 1ère année de l'enseignement secondaire tunisien (3è en France.)

Le premier objectif de cette étude est de déterminer les différentes valeurs accordées par les auteurs du manuel à la caractéristique "forme des données" dans les énoncés des problèmes de géométrie. Le deuxième objectif est de déterminer à travers l'étude des problèmes corrigés dans le manuel, certaines règles du contrat didactique relatif à l'utilisation du dessin dans la résolution des problèmes de géométrie plane. L'étude de ce contrat didactique nous semble nécessaire puisque nous allons réaliser une expérimentation avec des élèves et le contrat didactique peut nous éclairer sur les règles de l'utilisation du dessin pour la résolution des problèmes et peut nous permettre de prévoir les comportements possibles des élèves, ce qui nous aidera dans le choix du problème et dans notre analyse a priori.

Dans la deuxième partie du travail et à partir des résultats de l'étude du manuel officiel des mathématiques, nous allons choisir un problème de géométrie plane dont l'énoncé est caractérisé par le fait que les données du problème peuvent prendre des valeurs différentes, nous procèderons alors, à une variation des valeurs accordées à la caractéristique "forme des données", et nous réaliserons l'expérimentation avec des groupes d'élèves de 1ère année secondaire de sorte que chaque groupe travaille dans une modalité différente. Cette expérimentation a pour objectif de vérifier si la caractéristique "forme des données" est une variable didactique et d'étudier l'effet de la variation des valeurs accordée à cette variable sur le travail des élèves. Nous chercherons alors, à répondre aux questions suivantes :

Q_1 : Y a t'il corrélation entre la réussite au problème et la valeur de la caractéristique "forme des données" ?

Q_2 : La variation de la modalité de travail, aura t'elle une incidence sur les stratégies adoptées par les élèves ?

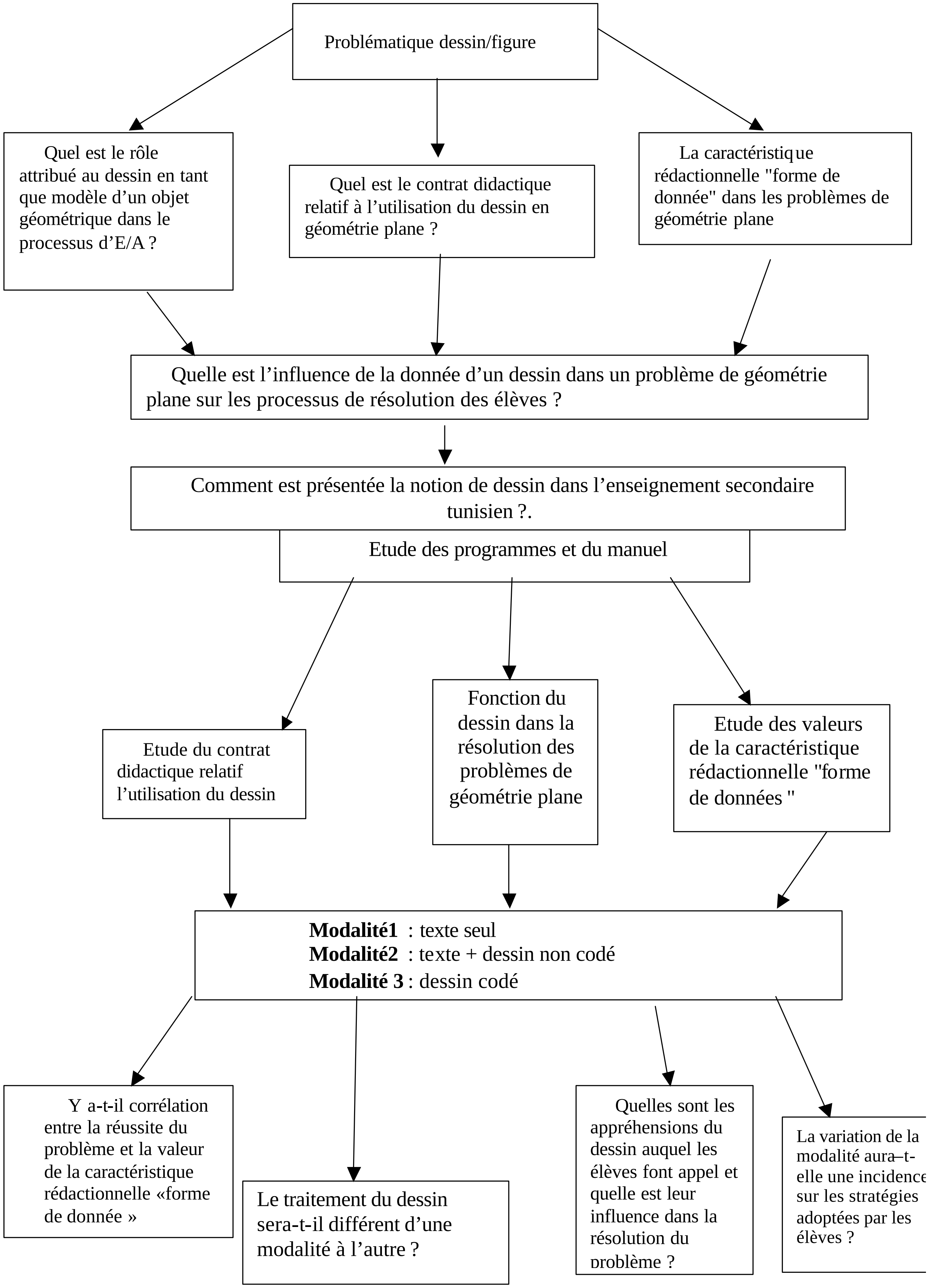
Q_3 : Le traitement du dessin sera-t-il différent d'une modalité à l'autre ?

Dans la troisième partie de notre travail et afin d'étudier l'influence de la variation des valeurs accordées à la caractéristique de l'énoncé "forme des données" sur les processus de résolution adoptés par les élèves et sur les traitements du dessin lors de la phase heuristique, nous réaliserons une deuxième expérimentation qui consiste en l'observation du travail des binômes formés par des élèves de 1ère année secondaire. Nous ferons travailler les binômes sur le même problème de la premi ère expérimentation et dans les modalités de travail.

L'objectif de cette deuxième expérimentation est donc d'approfondir la question Q_3 et répondre à la question Q_4 .

Q_4 : Quelles sont les appréhensions du dessin auxquelles les élèves font appel et quels sont leurs rôles dans la résolution du problème ?

Nous chercherons à étudier lors de la phase heuristique l'importance accordée au dessin et le statut qui lui est accordé par les élèves, ainsi que les différents types de modifications auxquelles les élèves font appel . Dans cette expérimentation nous avons choisi d'observer le travail de six binômes pendant la phase de recherche du problème. Notre objectif n'est pas de favoriser l'apparition de conflit socio-cognitif entre les élèves à propos de la résolution car nous supposons que même en absence de conflit, le débat entre élèves présente beaucoup d'intérêt. Notre objectif est d'étudier à travers les échanges entre élèves l'influence de la modalité de travail sur l'utilisation du dessin et sur les processus de résolutions adoptés pendant la phase heuristique. Dans ce choix de travail par binôme, nous supposons que c'est à travers les échanges entre les deux élèves que deviennent explicites leurs démarches et que nous pouvons mieux comprendre leurs différentes procédures.


Problématique dessin/figure
Quel est le rôle attribué au dessin en tant que modèle d'un objet géométrique dans le processus d'E/A ?
Quel est le contrat didactique relatif à l'utilisation du dessin en géométrie plane ?
La caractéristique rédactionnelle "forme de donnée" dans les problèmes de géométrie plane
Quelle est l'influence de la donnée d'un dessin dans un problème de géométrie plane sur les processus de résolution des élèves ?
Comment est présentée la notion de dessin dans l'enseignement secondaire tunisien ?.
Etude des programmes et du manuel
Etude du contrat didactique relatif l'utilisation du dessin
Fonction du dessin dans la résolution des problèmes de géométrie plane
Etude des valeurs de la caractéristique rédactionnelle "forme de données "
Modalité1 : texte seul
Modalité2 : texte + dessin non codé
Modalité 3 : dessin codé
Y a-t-il corrélation entre la réussite du problème et la valeur de la caractéristique rédactionnelle «forme de donnée »
Le traitement du dessin sera-t-il différent d'une modalité à l'autre ?
Quelles sont les appréhensions du dessin auquel les élèves font appel et quelle est leur influence dans la résolution du problème ?
La variation de la modalité aura–t-elle une incidence sur les stratégies adoptées par les élèves ?

Chapitre I : Cadre théorique de la recherche

I.1 Problématique dessin, figure, objet géométrique

Compte-tenu de l'importance de la terminologie utilisée dans la totalité de ce travail, nous commençons dès le départ par préciser la signification des expressions et des termes utilisés, tels que " *objet géométrique*", " *dessin*" ou " *figure*". Nous commencerons par présenter les définitions attribuées à ces objets dans la littérature, puis nous préciserons la définition adoptée dans notre travail.

L'objet géométrique a été défini par Platon dans *La République* comme étant « *un objet idéal dont tous les dessins concrets que l'on peut faire ne sont que des représentations imparfaites* » (cité dans Arsac, 1989).

Partant de cette distinction, Arsac lui-même distingue entre dessin et figure en opposant le monde sensible et le monde mathématique « *nous distinguerons dans la suite le dessin et la figure, désignant par dessin le dessin concrètement tracé sur une feuille de papier (ou dans le sable pour Archimède) et par figure l'objet mathématique dont le dessin n'est qu'une représentation … Ainsi la figure est un élément du monde mathématique et non du monde sensible. » (*Arsac 1989)

Parzysz a introduit une distinction également entre figure et dessin : «*la figure géométrique est l'objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée, une création de l'esprit, tandis que le dessin est une représentation*. » (Parzysz 1989)

Partant de la notion de modèle, Laborde et Capponi proposent une distinction entre figure et dessin en se plaçant dans la triade référent - signifiant - signifié : « *En tant* *qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne ou de la géométrie projective). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ces dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième terme étant pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. Le terme* figure géométrique *renvoie dans cette acceptation à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles. Dans cette approche, les rapports entre un dessin et son référent construit par un sujet lecteur ou producteur du dessin, constituent le signifié de la figure géométrique associée pour ce sujet. Ce signifié correspond à ce que Fishbein (1993) appelle figural concept*. »

Cette distinction s'inscrit dans une problématique autour de la notion de modèle[3].

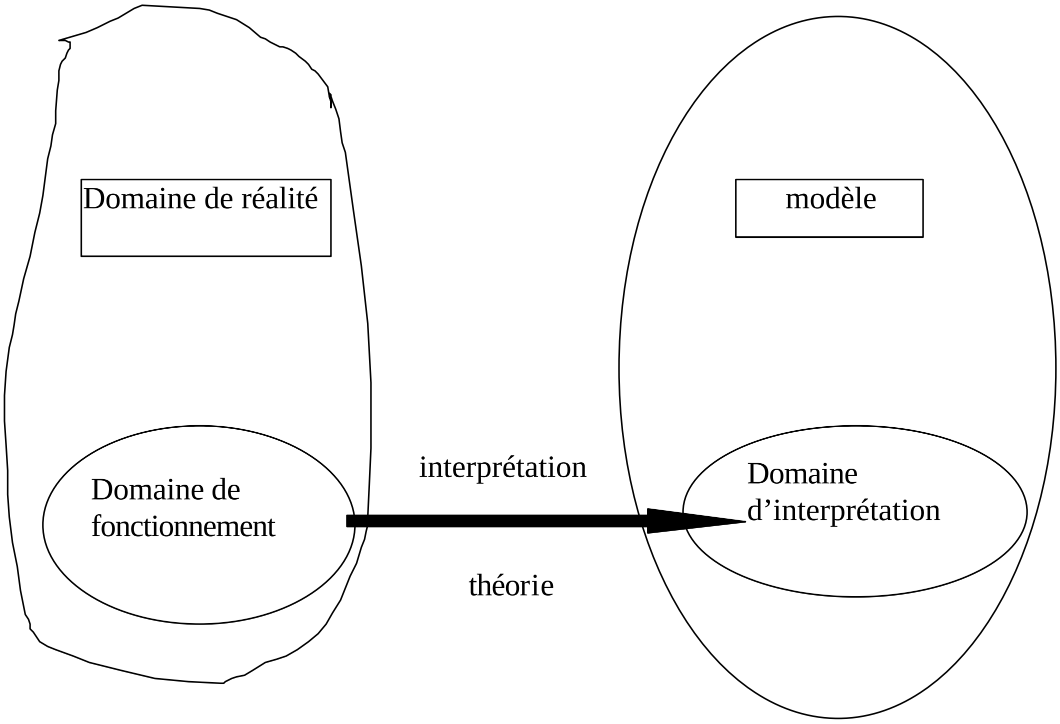
Elle considère le dessin comme un modèle de l'objet géométrique. Du point de vue de la modélisation, il est adéquat de distinguer figure et dessin : la figure est l'objet mathématique du modèle euclidien pris comme domaine de réalité, tandis que le dessin est une matérialisation de la figure sur le papier, le sable ou sur l'écran de l'ordinateur, un modèle de l'objet géométrique.(Laborde 1994.) Deux domaines sont alors associés au dessin : un domaine de fonctionnement et un domaine d'interprétation. Cette distinction soulève également le problème de la complexité des rapports dessin et objet géométrique :

- un dessin géométrique n'est pas nécessairement interprété par son lecteur comme renvoyant à un objet géométrique.
- Les interprétations d'un même dessin en tant que signifiant d'un objet géométrique sont multiples pour deux raisons ; la première est que les interprétations dépendent des connaissances du lecteur et la deuxième raison est que le dessin seul ne peut pas caractériser un objet géométrique.

"*En tant que signifiant d'un objet géométrique, le dessin rend compte des propriétés de cet objet; mais ne le fait que partiellement. On peut attacher un domaine de*

[3] : Voir la notion de modèle et modélisation dans Laborde 1992.

<u>*fonctionnement du dessin.*</u> *Inversement toutes les propriétés spatiales du dessin ne peuvent être interprétées comme renvoyant à des propriétés de l'objet, au dessin est attaché* <u>*un domaine d'interprétation*</u>." (Laborde et Capponi , 1992. P. 179/180)



Laborde, 1992, p.3

En effet, les propriétés spatiales du dessin ne peuvent pas toujours renvoyer à des propriétés géométriques; par exemple : la position du dessin dans la feuille de papier est en dehors du domaine d'interprétation du dessin en tant que signifiant d'objets géométriques. De plus certaines propriétés de l'objet spatio-graphique, qui renvoient à des propriétés géométriques, peuvent aussi être non pertinentes parce que le dessin n'est qu'une instanciation matérielle d'un objet géométrique. Ainsi il se peut que, dans le cadre d'un dessin donné, il y ait isométrie de deux segments alors que cette relation ne fait pas partie des données du problème à résoudre. Le dessin fournit alors un cas particulier du problème.

Dans la suite de notre travail, nous adoptons cette dernière définition de Laborde et Capponi pour distinguer entre dessin et figure, le dessin étant un signifiant d'un référent théorique, un modèle de la figure. Cette approche correspond à la définition utilisée dans l'enseignement de la géométrie plane au niveau de l'enseignement secondaire. Ceci surtout dès l'introduction du raisonnement déductif et de la démonstration. En effet, l'introduction de la démonstration correspond à un changement du statut du dessin , d'un objet physique (élément du monde sensible) à un modèle d'un objet géométrique. Il est alors inutile de prendre des mesures sur le dessin…etc. "*En géométrie, la démonstration est indissolublement liée à un changement du rapport à la figure, au statut des objets de la géométrie*." (Arsac 1987).

Le dessin a donc une grande importance dans l'enseignement de la géométrie plane. Nous cherchons alors à déterminer les rôles attribués au dessin en tant que modèle d'un objet géométrique dans l'enseignement de la géométrie.

I.2 Rôle du dessin en tant que modèle d'un objet géométrique

Le dessin a eu des rôles différents dans l'enseignement de la géométrie plane selon les époques. Il fut une époque, celle des mathématiques modernes où le dessin n'avait plus une place importante dans l'enseignement des mathématiques. Actuellement la figure est considérée au centre de l'apprentissage et fait l'objet de plusieurs recherches en didactique des mathématiques. Les résultats de ces travaux ont montré la place et le rôle du dessin en tant que modèle de la figure dans les problèmes de géométrie plane.

Les travaux de Bessot (1983) ont montré l'importance du dessin dans l'apprentissage, puisqu'il considère que le dessin « permet *à l'élève une prise de contact concrète, quasi physique avec la situation étudiée; il peut ainsi mettre en œuvre dès le début ses capacités par l'action (la construction, le dessin et la réflexion) qui doit guider* *cette action. L'usage et la pratique des figures offrent donc un moyen de donner à l'élève une part plus active dans son apprentissage.»* (Bessot 1983, page 35). Deux rôles sont attribués au dessin par Bessot : le premier est un rôle d'illustration de la situation, le second est un support à l'intuitio*n : «D'une part, elles illustrent les situations étudiées, d'autre part, elles servent de support à l'intuition au cours de la recherche en faisant apparaître sur un objet visible des relations ou des hypothèses de relations qui ne sont pas clairement évidentes dans un énoncé verbal.* » (Bessot1983, page 35)

Pour Larkin et Simon (1987), les dessins « *permettent de visualiser, pour chaque objet, toutes ses relations avec les autres objets de la situation représentée.* » (Larkin et Simon ,1987)

Duval (1994) a également étudié le fonctionnement du dessin dans la phase de recherche. Il considère que le dessin doit fonctionner comme un outil heuristique «*permettant ainsi de saisir d'un coup une situation dans son ensemble, les figures*[4] *sont le moyen le plus direct d'en explorer les différents aspects, d'anticiper les résultats d'une démarche, de sélectionner une solution* » (Duval, 1994). Mais ce n'est pas toujours le cas chez les élèves puisque *la simple vue d'un dessin semble exclure le regard mathématique sur ce dessin* (Duval, 1994). Il conclut qu'il y a un fossé entre l'appréhension perceptive et l'appréhension discursive. Pour étudier les raisons d'un tel fossé Duval a étudié les deux questions suivantes : « *Comment une figure peut-elle fonctionner d'une façon heuristique dans une phase de recherche et pourquoi une figure n'apporte-t-elle pas toujours une aide heuristique* » (Duval, 1994). Pour répondre à ces deux questions, il fait appel à quatre types d'appréhensions nécessaires pour développer « *la manière mathématique de regarder un dessin en géométrie* » (Duval, 1994)

---

[4] Duval désigne le dessin par le terme figure dans ces travaux. Pour lui « *une figure est une organisation d'éléments d'un champ perceptif non homogène, constituant un objet qui se détache du champ. Selon le nombre de leurs dimension, ces éléments peuvent être des points, des traits ou des zone*s » (Duval, 1988 p.51.)

- <u>L'appréhension perceptive</u> qui «permet *d'identifier ou de reconnaître immédiatement, une forme ou un objet soit dans un plan, soit dans l'espace* ».
- <u>L'appréhension discursive :</u> *un dessin est regardé par rapport à une dénomination (*soit un…*), une légende ou une hypothèse qui en fixe explicitement certaines propriétés… L'appréhension discursive d'un dessin correspond à une explicitation des autres propriétés mathématiques du dessin que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. Cette explicitation est de nature déductive. La fonction épistémologique de l'appréhension discursive est la démonstration.*
- <u>L'appréhension séquentielle :</u> *elle concerne l'ordre de construction d'un dessin. Cet ordre dépend non seulement des propriétés mathématiques du dessin à construire mais aussi des contraintes techniques des instruments utilisés (logiciel, règle et compas…)*
- <u>L'appréhension opératoire :</u> *c'est l'appréhension d'un dessin donné en ses différentes modifications possibles en d'autres dessins.* Ce type d'appréhension a une fonction heuristique.

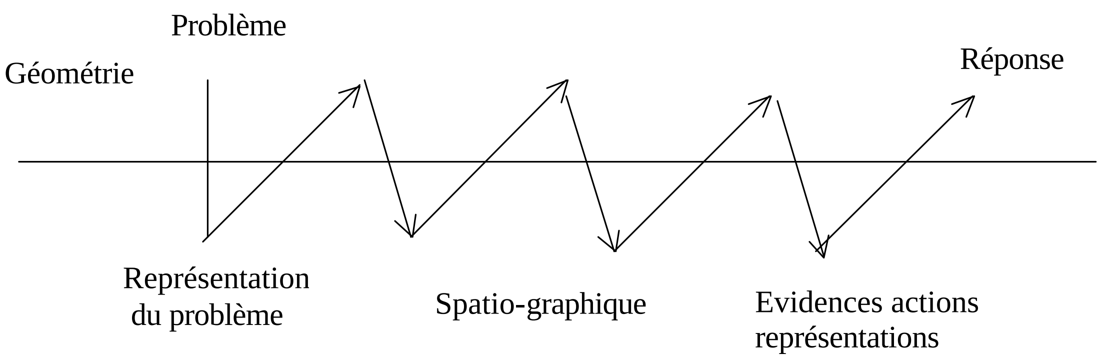
Duval distingue trois types de modifications :

- L*es modifications méréologiques consistent dans le partage d'un dessin en parties pour les recombiner en un autre dessin.*
- *Les modifications optiques consistent en l'agrandissement, la diminution ou la modification du dessin*.
- *Les modifications positionnelles consistent soit dans le déplacement du dessin dans le plan, soit dans le déplacement du plan du dessin par rapport au plan fronto-parallèle*.

Pour Duval, tout dessin réalisé dans le contexte d'une activité mathématique est susceptible des trois modifications (optique, méréologique et positionnelle). L'idée de la solution provient de l'une de ces trois modifications possibles : *Pour un problème déterminé et pour une figure de départ, celle-ci donnée avec l'énoncé du problème ou construite à partir de l'énoncé du problème, il y a généralement une des modifications* *figurales possibles qui montre l'idée de la solution ou de la démonstration. C'est la modification heuristiquement pertinente*." (Duval, 1994). Mais cette modification heuristiquement pertinente n'est pas toujours visible car pour chacune des modifications figurales possibles, il y a un ensemble de facteurs liés aux significations perceptives de la figure qui en font varier la visibilité dans le sens d'une facilitation ou dans celui d'une inhibition.

Laborde et Capponi (1995) considèrent le dessin comme une réalité spatio-graphique qui donne à voir les relations dépendant de l'individu qui utilise le dessin. « *un dessin renvoie aux objets théoriques de la géométrie dans la mesure où celui qui le lit décide de le faire, l'interprétation est évidemment dépendante de la théorie avec laquelle le lecteur choisit de lire le dessin ainsi que des connaissances de ce lecteur. Le contexte joue un rôle fondamental dans le choix du type d'interprétation* » (Laborde et Capponi, 1994).

L'importance de ces réalités spatio-graphiques dans la résolution des problèmes de géométrie plane est capitale puisque l'élaboration d'une solution à un problème de géométrie est faite d'une succession d'allers et retours entre théorie et spatio-graphique selon le schéma suivant



Laborde et Capponi 1995

Mais ce jeu de relais entre théorie et spatio-graphique ne va pas de soi car l'élève reste attaché à une vue très empiriste de la géométrie. (Laborde, 1995)

Pour le rôle du dessin, Laborde et Capponi considèrent qu' «*un problème de géométrie est donné à l'élève dont on attend une réponse de nature théorique. Les réalités spatio-graphiques sont des moyens considérés dans le système didactique comme auxiliaires, pourvoyeurs d'idées, mais les éléments de la solution ne peuvent y faire appel en disant en tirer des informations* ». Ils remarquent, cependant, que certaines informations utilisées dans les démonstrations sont tirées du dessin (considérées comme des évidences du dessin), telles celles relatives à l'ordre, à la position des points dans les différentes régions du dessin. D'où, se pose la question : devant un problème de géométrie plane qu'est-ce qui peut être considéré comme une évidence et qu'est-ce qui nécessite une justification théorique ?

Dans l'enseignement, la distinction entre les évidences que l'élève a le droit d'utiliser et celles pour lesquelles il faut donner une justification théorique, relève du contrat didactique. D'où se pose la question de savoir quelles sont les règles du contrat didactique relatif à l'utilisation du dessin en géométrie plane ?

I. 3 Le contrat didactique en géométrie plane

Dans notre cadre théorique, nous faisons appel à la notion de contrat didactique puisque nous nous plaçons dans le contexte de la classe dans lequel la majorité des comportements des acteurs est soumise aux règles d'un contrat didactique. En effet, le contrat fixe par définition ce que l'enseignant devrait faire et ce que l'élève devrait faire par rapport aux savoirs mathématiques.

En géométrie, le contrat didactique apparaît à travers un ensemble de règles explicites pour une petite part mais surtout implicites « *qui précisent ce qu'on a ou non le* *droit de lire sur le dessin ou admettre dans une démonstration de géométrie au collège ou lycée* » (Arsac 1998). Certaines règles du contrat didactique concernent la fonction du dessin dans la résolution des problèmes de géométrie et les évidences que les élèves ont le droit d'utiliser, elles sont en grande partie implicites pour au moins deux raisons.

- C'est une caractéristique du savoir enseigné : par exemple à un certain niveau de l'enseignement, l'enseignant précise explicitement que démontrer n'est pas lire le résultat sur le dessin, alors que plusieurs démonstrations utilisent des évidences du dessin. «*La rédaction d'une solution officielle nécessite parfois le recours à des évidences perceptives tirées du spatio-graphique. Le problème pour les élèves est dans la juste appréciation suivant les canons scolaires (variables suivant les niveaux) de ce parfois, c'est-à-dire de savoir distinguer les évidences qu'ils sont en droit d'utiliser pour une démonstration de celles dont l'enseignant attend une justification théorique.* » (Laborde et Capponi, 1995). Parmi les informations tirées du dessin et utilisés comme des évidences, celles relatives à l'ordre, à la position des points dans les différentes régions du dessin, celle relative à l'intersection (pour montrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes on utilise comme une évidence le fait que deux d'entre elles se coupent en un point, puis on cherche à démontrer que la troisième passe par ce point). Ce genre de règle ne peut être transmis que de façon implicite : en voyant la pratique de l'enseignant.

- une deuxième raison qui n'est pas liée au contenu du savoir et qui pourrait expliquer le caractère implicite du contrat didactique en géométrie est que ce dernier évolue sans cesse selon le niveau, selon l'enseignant, selon le type de problème parce que les élèves progressent dans le savoir. «*Ces modifications ne peuvent être toutes explicites, elles sont en partie montrées, en partie installées par l'évolution, mais en restant implicites.* » (Arsac, 1998)

Nous cherchons dans la suite à déterminer le contrat didactique relatif au dessin dans l'enseignement secondaire tunisien. L'importance du contrat didactique dans notre travail est qu'il pourrait permettre de prévoir en partie les comportements des élèves devant un problème de géométrie.

I.4 Les variables de l'énoncé : extension de la variable rédactionnelle

Dans une classe de mathématiques, les élèves sont invités à résoudre de nombreux problèmes, les énoncés de ces problèmes sont donnés sous plusieurs formes. La forme de l'énoncé et son influence sur la stratégie de résolution employée par les élèves ont fait l'objet de plusieurs recherches. Ces travaux ont dégagé des caractéristiques des énoncés susceptibles de jouer un rôle perturbateur ou facilitateur dans l'élaboration de la solution par les élèves. Parmi ces travaux nous citons à titre d'exemples

- Vergnaud (1976 et 1984) qui a montré l'influence de l'organisation rédactionnelle des problèmes additifs « sur la compréhension du texte »
- Decorte (1988) et Bachor (1987) qui ont mis en évidence le degré d'explicitation entre les quantités données et les quantités inconnues.
- Nesher et Tribal (1975), Fayol (1990) qui ont montré le degré d'attraction de quelques expressions ou mots inducteurs comme *plus* ou *moins* (cités dans Laborde 1995)

Duval (1991) a également étudié les caractéristiques des textes mathématiques et a remarqué que « *certaines caractéristiques propres du texte peuvent modifier la situation de lecture et la nature de la tâche de compréhension puisque certaines «présentations » peuvent être plus complètes que d'autres ou qu'elles peuvent être plus adéquates aux démarches requises pour accéder au contenu traité* » (Duval 1991, p.164). Duval a introduit la notion de "variable rédactionnelle" pour désigner les caractéristiques des énoncés dont la variation aboutit à un changement de stratégies de résolutions adoptées par les élèves. Ces variables rédactionnelles sont définies comme étant «*des caractéristiques linguistiques, des énoncés des problèmes susceptibles de prendre des valeurs différentes et telles qu'un changement de valeur risque de modifier le traitement de l'énoncé par le lecteur*.» (Laborde, 1995). En géométrie l'une des caractéristiques de l'énoncé d'un problème est "la forme des données". Mais, sachant que l'énoncé d'un problème est tout ce qui est donné à l'élève et que l'une des spécificités du la géométrie plane, la présence du dessin dans certains énoncés de problèmes, nous avons choisi d'étudier la caractéristique "forme des données" dans l'énoncé d'un problème de géométrie plane. Cette caractéristique incluant le dessin est une extension de la notion de variable rédactionnelle. Une part de notre travail consistera à vérifier si cette caractéristique de l'énoncé est une variable didactique que nous considèrerons comme variable rédactionnelle[5]

[5] Le terme "rédactionnel" est abusif pour parler d'un dessin, nous l'avons gardé cependant, pour montrer que l'idée de caractéristique de l'énoncé influant sur les solutions des élèves est étendue au dessin.

Chapitre II : Le dessin dans l'enseignement secondaire tunisien

II.1 Introduction

Pour étudier la place accordée au dessin dans l'enseignement secondaire tunisien, et par suite déterminer les règles du contrat didactique relatif à l'utilisation du dessin dans la résolution des problèmes de géométrie plane, nous pouvons analyser les programmes et les manuels et réaliser une expérimentation dans une classe tout en sachant que plusieurs variables liées au fonctionnement de la classe peuvent intervenir dans les résultas.

Dans les programmes, l'institution définit le savoir à enseigner et précise ses attentes en terme d'exigences et de recommandations. Ce qui explique que les programmes ont une influence sur les représentations des enseignants sur les objets de savoir et sur le contrat didactique en classe. Cette idée est soutenue par Bouvier qui considère que les programmes *« définis nationalement après de larges concertations, s'imposent à tous comme le cadre de référence nécessaire à l'action de chaque enseignant »* (Bouvier, 1996). Mais, concernant l'étude des règles du contrat didactique relatif à l'utilisation du dessin dans les problèmes de géométrie plane, nous ne pouvons pas extraire complètement les règles du contrat didactique à partir des seuls programmes puisque ces derniers *« ne constituent pas un texte de savoir, mais seulement un discours sur un hypothétique savoir »* (Mensouri 1994.)

D'autre part les programmes ne permettent pas de nous éclairer sur les pratiques à propos de l'utilisation du dessin dans la démonstration en géométrie plane. C'est pourquoi une analyse des manuels est nécessaire pour compléter l'analyse des programmes.

L'objectif de l'étude des programmes et du manuel tunisien est de :

- Déterminer le statut accordé au dessin.
- Déterminer les règles du contrat didactique relatif à l'utilisation du dessin dans les problèmes de géométrie plane au niveau de la 1ère année de l'enseignement secondaire.
- Etudier les valeurs accordées à la caractéristique rédactionnelle "forme des données" dans les problèmes de géométrie plane proposés dans le manuel.

Par notre étude nous chercherons à dégager quelques règles du contrat didactique relatif au dessin à travers l'analyse des programmes et des manuels utilisés par les enseignants pour préparer leur cours de géométrie en 1ère année de l'enseignement secondaire (3ème en France).

Nous commençons par étudier la place accordée au dessin par les programmes, puis nous analyserons le manuel secondaire officiel de 1ère année de l'enseignement secondaire tunisien.

II.2 Place du dessin et de la figure dans les programmes

II.2.1 Introduction

Pour étudier l'importance accordée au dessin et à la figure dans les programmes tunisiens de mathématiques, nous avons étudié la place du dessin en géométrie plane dans les différentes réformes qu'a connu l'enseignement secondaire tunisien. Nous avons cherché à repérer les changements qui ont affecté la place accordée au dessin d'une réforme à l'autre. Nous nous sommes attardé surtout sur la place du dessin dans la réforme actuelle.

II.2.2 Etude des programmes

L'enseignement tunisien a connu quatre réformes importantes mises en place respectivement en 1958, 1970, 1978 et 1991.

La réforme de 1958

Avant cette réforme ce sont les programmes français qui étaient utilisés dans les classes tunisiennes. La première réforme tunisienne est celle de 1958, c'est-à-dire deux années après l'Indépendance du pays. Elle avait pour objectif la scolarisation totale des enfants âgés de 6 ans (Ayachi 1986) et a donné une grande importance à l'enseignement des mathématiques en général et de la géométrie en particulier, considérée comme le stimulant par excellence de l'esprit de recherche et de l'intuition (Tunisie 1959) . Pour appliquer cette réforme, les enseignants de mathématiques ont continué à utiliser les manuels français.

La réforme de 1970

La réforme de 1970 est inspirée par le courant bourbakiste des mathématiciens (Bourbaki 1960). Elle est connus sous le nom de "mathématiques modernes". Dans les programmes de cette réforme le modèle géométrique est complètement abstrait et l'enseignement de la géométrie est basé sur l'utilisation de l'axiomatique *« à la fin de l'année scolaire, la géométrie née de l'expérience, devra apparaître aux élèves comme une* *véritable théorie mathématique, c'est à dire des faits ayant été admis (axiomes) d'autres en sont déduit (théorèmes)* »Tunisie 1970.

Concernant le rôle du dessin et de la figure, cette réforme minimise le rôle de la figure dans l'enseignement de la géométrie. Véritable tremblement de terre, remettant en question le savoir et le savoir-faire des enseignants en exercice, cette réforme, en Tunisie comme en France a été traumatisante. « *La réforme des mathématiques modernes autour des années soixante-dix, (fut) l'un des bouleversements les plus radicaux sans doute de l'histoire de l'enseignement des mathématiques* » (Chevallard, 1991)

L'application de la réforme des mathématiques modernes a été à l'origine de plusieurs dérives vers un formalisme privé de sens (Artigue, 1992) En effet, comme l'a remarqué Laborde, le mouvement des mathématiques modernes a chassé le géométrisme de l'enseignement de la géométrie (Laborde, 1994.)

La réforme de 1978

Suite aux difficultés nées de cette réforme, la commission nationale des programmes de mathématiques a écarté la démarche axiomatique et le formalisme : « *dans ses exposés, le professeur écartera toute présentation axiomatique d'une notion et proposera des activités susceptibles de consolider ses acquisitions antérieures* » (Tunisie, 1986), programme de 1ère année secondaire (équivalente à la 6ème française).

Cette nouvelle réforme a redonné de l'importance à la géométrie classique, l'étude des figures et de la géométrie dans l'espace retrouvant une place adéquate: « *les activités de géométrie amèneront l'élève à observer, à construire des figures géométriques, à les classifier selon un critère donné et à initier à des démonstrations simples* » (Programme 1986, 1ère année secondaire).

Nous remarquons que les programmes de géométrie ont renoncé à la géométrie axiomatique pour une géométrie basée sur l'observation et l'analyse des figures. *« En géométrie et pour les démonstrations, les élèves utiliseront les acquis antérieurs et le recours à la figure demeurera indispensable pour aider à établir les résultats.»* (Programme 1986, Commentaire général sur le second cycle).

La réforme de 1991

En 1991, une nouvelle réforme est mise en place, appelée "réforme de l'école de base" qui se caractérise par deux nouveautés :

- l'école de base dure 9 ans, elle correspond aux années de scolarité obligatoire, pendant lesquelles l'enseignement des mathématiques se fait en langue arabe.
- L'enseignement secondaire qui dure 4 années pendant lesquelles l'enseignement des mathématiques se fait en langue française et mène au baccalauréat.

Cette réforme a donné une grande place à l'enseignement de la géométrie classique qui est considérée comme indispensable à la formation de l'esprit scientifique. Un rôle important est alors accordé au dessin qui permet de développer chez l'élève le sens de l'observation, la capacité de conjecturer, d'argumenter et de communiquer les résultats.

Etude sommaire des programmes de mathématiques

Nous allons concentrer notre attention sur l’étude du statut accordé au dessin dans les savoirs géométriques. Nous avons cherché à dégager ce statut à travers les rédactions et les formulations des textes des programmes.

Comme le laisse prévoir le cadre théorique, deux statuts sont accordés au dessin dans les programmes de géométrie plane :

1) Le dessin comme objet matériel : élément du monde sensible sur lequel l’élève est amené à travailler (prendre des mesures, constater et utiliser une propriété par l’usage des instruments…etc.)
2) Le dessin comme modèle d’un objet géométrique :le dessin est une matérialisation de l’objet géométrique sur le papier, il est donc un modèle de l’objet géométrique.

Nous avons remarqué, dans la progression des programmes, l'évolution du statut du dessin dans l’enseignement de la géométrie plane selon les trois étapes de l’enseignement: l'école primaire (1er cycle de l’enseignement de base), le 2ème cycle de l’enseignement de base (l’enseignement au collège) et l’enseignement secondaire.

Le statut du dessin au Primaire

Durant les six premières années de l’enseignement de base l’objectif des programmes des mathématiques est l’initiation à la géométrie plane et aux solides à travers l’introduction des objets géométriques droite, cercle, rectangle, carré, sphère, parallélépipède, cube, …

A ce niveau le dessin est considéré comme un objet matériel sur lequel les élèves sont amenés à faire des mesures et à tirer des informations…etc.

Le statut du dessin dans le second cycle de l'enseignement de base

A partir de la 7ème année de base, le dessin commence à prendre, dans certaines situations, le statut de modèle d'un objet géométrique. Ceci est lié à l'objectif d'initiation des élèves au raisonnement déductif. Cependant les élèves peuvent prendre des mesures sur le dessin ou constater une propriété par l'usage des instruments.

Dans le texte du programme des mathématiques de 7ème année de base, l'un des objectifs de l'enseignement de la géométrie est d'apprendre aux élèves comment exploiter un dessin en géométrie :«*à la fin de la 7ème année l'élève sera capable d'exploiter quelques propriétés de figures géométriques planes, les construire et les mesurer (périmètre, surfaces, angles*) » (Article 232). De plus les figures retrouvent un rôle heuristique. En effet, l'un des objectifs du programme à ce niveau est d'amener les élèves à « … *reconnaître un parallélogramme, losange, rectangle, carré dans une figure donnée et construire ces figures selon des conditions données* » (Article 255) « *A la fin de la 9ème de l'enseignement de base l'élève sera capable de mettre en œuvre les propriétés des figures géométriques planes…* » (Article 232).

Le second cycle de l'enseignement de base se caractérise par un changement du statut du dessin qui correspond à un changement du rapport de l'élève au dessin par l'introduction du raisonnement déductif. Cette étape que nous désignons par l'"étape intermédiaire" se traduit par le changement du statut du dessin, ce statut comme le remarque Arsac 1992 est « *difficile à définir précisément par un discours accessible à l'élève, se traduit surtout, au début, par des interdictions, des complications de la tâche de l'élève : il ne s'agira plus de mesurer, que ce soit à la règle graduée ou au rapporteur, ni de constater, il faudra raisonner, déduire et en fin de compte plus tard ; démontrer* »

Le statut du dessin dans l'enseignement secondaire

A partir de la 1ère année secondaire (équivalent de la 3ème en France), le dessin acquiert définitivement le statut de modèle d'un objet géométrique. *« l'enseignement des mathématiques en 1ère et 2ème année de l'enseignement secondaire a pour objectif d'habituer l'élève à représenter les objets géométriques dans le plan et dans l'espace, à exercer son imagination et à analyser une configuration géométrique.* » (Article 238)

Le dessin joue un rôle important dans l'enseignement de la géométrie au secondaire en particulier dans la phase d'expérimentation « *à la fin de la 4ème année de l'enseignement secondaire (section mathématiques) ; l'élève sera capable de :*

- *conjecturer.*
- *effectuer des calculs.*
- *Pratiquer rigoureusement les raisonnement mathématiques.*
- *Rédiger correctement une solution*
- *Recourir à une figure géométrique et l'exploiter (dans le plan ou dans l'espace[6]).*

[6] C'est nous qui soulignons.

II.2.3 Conclusion

La réforme en vigueur, « *réforme de l'école de base* », accorde une place importante à l'enseignement de la géométrie classique dans le plan et dans l'espace; elle est considérée comme fondamentale dans la formation scientifique de l'élève puisqu'elle permet de développer chez lui le sens de l'observation, la capacité de conjecturer, d'argumenter et de démontrer. De ce fait un rôle important est accordé aux figures géométriques.

II.3 Etude du manuel officiel des mathématiques de 1ère année de l'enseignement secondaire tunisien

II.3.1 Introduction

Comme tous les enseignants utilisent le manuel officiel tunisien des mathématiques pour préparer les cours destinés aux élèves de 1ère année de l'enseignement secondaire, nous avons choisi d'étudier ce manuel afin de dégager le contrat didactique relatif à l'usage des dessins et des figures. Nous essayerons de déterminer l'influence de ce document de travail sur les enseignants tout en étant conscient que les professeurs ont des lectures différentes des documents officiels selon leur formation, leur expérience pédagogique et leur ouverture sur d'autres sources. Nous porterons une attention particulière à l'étude des différentes valeurs attribuées à la variable "forme de données" dans les problèmes de géométrie plane apparaissant dans le manuel officiel.

II.3.2 Méthodologie de l'étude du manuel et parties analysées

Le manuel scolaire de mathématiques comporte deux parties : une partie consacrée à l'"algèbre" et l'autre à la "géométrie" Nous nous intéressons à la partie "géométrie" et en particulier celle portant sur la géométrie plane, c'est à dire les cinq chapitres suivants :

Chapitre 1 : Droites parallèles coupées par une sécante.

Chapitre 2 : Angle inscrit et angle au centre.

Chapitre 3 : Vecteurs du plan.

Chapitre 4 : Enoncé de Thalès - Applications – Réciproque.

Chapitre 5 : Rapports trigonométriques d'un angle aigu.

Chaque chapitre du manuel comporte deux sections : une première section appelée "*cours*" qui présente les contenus mathématiques à enseigner et dans laquelle nous trouvons les activités d'approche, les théorèmes et les définitions, ainsi que des exercices d'applications et des exercices corrigés. La deuxième section, intitulée "*exercices*", contient un ensemble d'énoncés d'exercices non corrigés.

Notre étude du manuel est divisée en deux parties : dans la première partie nous chercherons à dégager certaines règles du contrat didactique relatif à l'utilisation du dessin dans la résolution d'un problème de géométrie plane. Cette étude sera faite à partir des problèmes résolus de la section "*cours*". Le choix des problèmes résolus est fondé sur l'hypothèse selon laquelle la solution proposée par le manuel reflète les règles d'utilisation du dessin dans la solution alors que dans les problèmes non résolus, les exigences des auteurs du manuel en ce qui concerne la réalisation du dessin sont inexistantes. Nous adoptons alors comme hypothèse de travail que *les solutions produites par les auteurs du manuel aux problèmes résolus, précisent leurs attentes, ce qui permet de préciser les règles* *du contrat didactique relatif à la réalisation et à l'utilisation du dessin pour la résolution d'un problème*.

La deuxième partie de notre étude cherchera à déterminer les différentes formes des énoncés proposés aux élèves dans le manuel, ce qui nous permettra de connaître les différentes valeurs accordées à la caractéristique "forme des données". Cette étude sera faite sur les problèmes proposés aux élèves dans la section "*exercices*".

II.3.3 Etude du manuel de 1ère année (équivalent à la 3ème en France)

II.3.3.1 Contrat didactique relatif à l'utilisation du dessin

Pour pouvoir dégager certaines règles du contrat didactique relatif à l'utilisation du dessin dans la résolution d'un problème de géométrie plane, nous avons choisi d'étudier les problèmes résolus dans la section "*cours*" qui représente le texte mathématique à enseigner. Pour cela nous avons étudié tous les problèmes résolus (*Activités d'approche, exercices d'application et exercices résolus*.)

Nous cherchons à déterminer le type de chaque problème résolu et ceci en nous référant à la typologie présentée par Laborde et Houdebine (1998) qui distinguent quatre types de problèmes suivant le rôle du dessin :

- Les problèmes de reproduction de dessins fournis avec parfois des données supplémentaires. Dans ce type de problèmes, un dessin est donné au début de la tâche et un autre est demandé à la fin.
- Les problèmes de construction qui consistent à demander la construction d'un dessin satisfaisant à un ensemble de conditions.

- Les problèmes de programmes de construction où le but est d'écrire un texte qui permet de construire le dessin demandé.
- Les problèmes de démonstration dont l'objectif est d'établir certaines propriétés géométriques à partir d'un ensemble donné de propriétés. Dans ce type de problèmes « *le dessin n'est qu'un élément auxiliaire du problème* » (Laborde et Houdebine 1998). Nous supposons que ce type de problème est le plus important à ce niveau scolaire (objectif du programme). Dans notre travail nous chercherons à préciser le type de chaque problème afin de déterminer les règles du contrat didactique relatif à chaque type. En effet, nous supposons que *les règles du contrat didactique relatif à l'utilisation du dessin et les attentes implicites et explicites de l'institution varient selon le type du problème.*

Afin de déterminer l'exigence de l'institution par rapport à la réalisation du dessin pour la résolution d'un problème, nous avons cherché dans chacun des problèmes étudiés, à vérifier si le dessin est donné dans l'énoncé ou non. Dans le cas où le dessin ne serait pas donné, nous avons cherché à savoir s'il est demandé aux élèves de le réaliser ou non. Nous avons, ensuite, étudié la réalisation du dessin dans la solution proposée par les auteurs du manuel pour pouvoir la confronter avec les exigences de l'énoncé.

Dans notre étude, nous avons également cherché à dégager certaines remarques concernant l'utilisation du dessin dans la démonstration et la fonction du dessin dans la solution proposée. Pour les problèmes de démonstration, nous avons essayé de déterminer le type d'appréhension du dessin utilisé pour aboutir à la solution. Les résultats de cette étude sont résumés dans le tableau suivant :

Chapitre et page	**Nature du problème**	**Type du problème**	**Exigence par rapport à la réalisation du dessin**	**Réalisation dans la solution**	**Utilisation du dessin dans la solution**
Chap. I p185	Exercice d'application	Problème de construction	Donné	Réalisé	Le dessin fourni représente la solution
ChapII p169	Activité	Démonstration	Donné	Réalisé	Appréhension opératoire du dessin. Utilisation d'une évidence du dessin (angles aigus)
ChapIII p184	Activité	Construction	Demandé	Réalisé	Le dessin est la solution du problème.
P185	Activité	Démonstration	Demandé	Réalisé	Appréhension discursive du dessin.
P195/196	Activité	Construction	Demandé	Réalisé	Utilisation d'un exemple générique pour dégager une propriété.
P196/197	Activité	Construction	Demandé	Réalisé	Utilisation d'un exemple générique pour dégager une propriété.
P198	Activité	Démonstration	Donné	Non refait dans la solution	Le dessin fourni dans l'énoncé illustre en même temps l'énoncé et la solution.
P209	Activité	Démonstration	Demandé	Réalisé	Utilisation d'une appréhension perceptive du dessin « *D'après la construction, on constate* »
P210	Activité	Démonstration	Demandé	Réalisé	Utilisation d'une appréhension perceptive du dessin « *D'après la construction, on constate* »
P211	Activité	Démonstration	Demandé	Réalisé	Utilisation d'une appréhension perceptive du dessin « *D'après la construction, on constate.* »
P211/212	Application	Démonstration	Non demandé	Non réalisé	Application de la relation de Chasles.
P214	Application	Construction; démonstration	Demandé	Réalisé	1ère tache : la réponse est donnée sous forme d'un dessin sans justification. 2ème tache : appréhension discursive du dessin.
P217	Activité		Non demandé	Réalisé	
P218	Activité		Demandé	Non réalisé	
P218	Activité		Demandé	Réalisé	Le dessin est un moyen pour valider la démonstration.
P222	Exercice résolu	Démonstration	Donné	Non Réalisé	Le dessin accompagne en même temps l'énoncé et la solution.

P223	Exercice résolu	Démonstration	Donné	Non réalisé	Le dessin est un moyen de contrôle.
P231/232	Activité	Démonstration	Donné	Réalisé	On commence la résolution par déterminer les données, la conclusion et la réalisation d'un dessin La démonstration est basée sur un dessin incorrect.
P232	Application	Démonstration	Donné	Non réalisé	L'énonce est donné sous forme de données, conclusion et dessin.
P233	Activité	Programme de construction	Demandé	Réalisé	Le dessin est la solution du problème.
P235	Activité	Programme de construction	Demandé	Non réalisé	La solution est donnée sous forme d'un texte qui n'est pas accompagné d'un dessin.
P235	Application	Programme de construction	Donné	Réalisé	Le dessin illustre le programme de construction proposé.
P236	Activité	Programme de construction	Demandé	Réalisé	Le dessin illustre le programme de construction proposé.
P237	Activité	Programme de construction	Demandé	Réalisé	La solution st donnée sous forme d'un dessin.
P254	Activité	Démonstration	Non demandé	Réalisé	Le dessin illustre les étapes de la démonstration.
P256	Activité	Démonstration	Non demandé	Non réalisé	
P257	Activité	Démonstration	Non demandé	Non réalisé	

A partir de ce tableau et concernant le nombre d'exercices résolus de chaque type, nous pouvons dégager les résultats suivants, que nous présentons sous forme d'un tableau :

Type de problème	**Reproduction**	**Construction**	**Programme de construction**	**Démonstration**
Nombre de problèmes résolus	0	5	5	18
Pourcentage	0	18%	18%	64%

Bilan de l'étude des types de problèmes résolus.

Les résultats obtenus montrent l'absence de problèmes de reproduction parmi les problèmes résolus proposés dans le manuel[7]. Nous supposons que cette absence est due au fait que ce type de problèmes est destiné à des niveaux élémentaires et qu'au niveau de la 1ère année secondaire les élèves sont supposés êtres capables de reproduire un dessin et de l'utiliser pour la résolution d'un exercice.

Les problèmes de construction apparaissent essentiellement dans le chapitre III intitulé "*les vecteurs*" : 4 parmi les 5 problèmes de construction résolus apparaissent dans ce chapitre. L'objectif de ces problèmes est l'utilisation de relations vectorielles pour la construction de points vérifiant une propriété vectorielle donnée. Un exemple de ces problèmes est celui de la page 195/196. L'énoncé est le suivant : « on se donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point O.Construire les points B, S et A sachant que $\overrightarrow{OB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BS} = \vec{v}$ et OBSA est un parallélogramme.

Parmi les 28 problèmes résolus proposés dans le manuel, 5 sont des problèmes de programmes de construction. Ces problèmes apparaissent dans le chapitre IV intitulé: "*Enoncé de Thales - Applications - Réciproque*" et ont pour objectif de donner un programme utilisant le théorème de Thalès et permettant de construire un point vérifiant une certaine propriété vectorielle (problème p.233) ou bien de partager un segment en parties isométriques (problème p.236).

Nous remarquons que les problèmes de construction et ceux de programmes de construction ont le même degré d'importance puisqu'il y a 5 problèmes résolus de chaque type. Mais le pourcentage d'apparition de ces deux types de problèmes est très faible par rapport à celui de problèmes de démonstration qui représentent le type de problèmes le plus important dans le manuel. Ceci s'explique par le fait que l'apprentissage de la démonstration et du raisonnement déductif constitue l'un des objectifs du programme des mathématiques à ce niveau scolaire. Une étude plus large aurait pu être menée sur tous les problèmes du manuel concernant l'importance de chaque type, mais ceci n'est pas l'objectif de notre travail qui se limite comme nous l'avons précisé, à dégager certaines règles du

[7] Ce type de problème est également absent des problèmes proposé aux élèves dans la partie "exercices"

contrat didactique relatif à l'utilisation du dessin en géométrie plane et sa fonction dans la résolution des problèmes.

Nous analysons, ci-dessous, l'exigence par rapport à la réalisation du dessin dans l'énoncé et sa présence dans les solutions proposées par les auteurs du manuel. Cette étude a été faite pour chaque type d'exercice.

Les problèmes de construction

CHAPITRE ET PAGE	**EXIGENCE PAR RAPPORT A LA REALISATION DU DESSIN**	**REALISATION DU DESSIN DANS LA SOLUTION**
ChapI p185	Donné	Refait dans la solution proposée.
ChapIII P184	Demandé	Réalisé
P195/196	Demandé	Réalisé
P196/197	Demandé	Réalisé
P214	Demandé	Réalisé

Dans les problèmes de construction, l'énoncé se présente sous forme d'un énoncé discursif seul ou sous forme d'un dessin non codé qu'on demande de compléter suivant les conditions données. La réalisation du dessin est demandée explicitement dans les énoncés. Dans les solutions proposées par les auteurs du manuel, c'est le dessin qui représente les solutions demandées. Les solutions se présentent alors sous forme d'un dessin seul comme pour le problème p.184 ou sous forme d'un dessin accompagné d'une justification de l'une des étapes de la construction.

Dans les problèmes de construction, les élèves doivent réaliser un dessin satisfaisant aux conditions du problème puisque c'est le dessin qui constitue la solution demandée.

Les problèmes de programmes de construction

CHAPITRE ET PAGE	EXIGENCE PAR RAPPORT A LA REALISATION DU DESSIN	REALISATION DU DESSIN DANS LA SOLUTION
P.233	Demandé	Réalisé
P.235	Demandé	Non réalisé
P.235	Donné (non codé)	Réalisé
P.236	Demandé	Réalisé
p.237	Demandé	Réalisé

Les problèmes de programmes de construction apparaissent dans le chapitre IV intitulé: "*Enoncé de Thales - Applications - Réciproque*" et ont pour objectif l'utilisation du théorème de Thalès pour partager un segment en parties isométriques (problème p.236) ou pour construire un point vérifiant une certaine propriété vectorielle ou algébrique (problème p.233). Comme pour les problèmes de construction, l'énoncé se présente sous forme d'un texte discursif (problèmes p.233 ; 235 ; 236 et 237) ou bien sous forme d'un dessin non codé qu'on demande de compléter (problème p.235). Dans les cinq problèmes de programmes de construction proposés, le dessin est demandé explicitement et les solutions proposées comportent un dessin qui illustre le programme de construction proposé sauf pour le problème de la page 235 où la solution est proposée sous forme du programme seul. La réalisation du dessin pour cet exercice est laissée aux élèves parce qu'elle ne présente pas de difficultés.

Bien que pour les problèmes de programmes de construction, l'objectif soit « *d'écrire un texte permettant de "construire la figure" …un texte est demandé à l'élève en sortie* » (Laborde et Houdebine 1998), la réalisation du dessin est indispensable dans la solution pour illustrer le programme de construction et constitue également un moyen de contrôle pour l'élève et un moyen pour valider son résultat. Nous considérons que la réalisation d'un dessin à main levée est indispensable même au début de travail, pendant la phase de recherche parce qu'il permet d'aboutir à l'idée de la solution.

Problèmes de démonstration

CHAPITRE ET PAGE	**EXIGENCE PAR RAPPORT A LA REALISATDU DESSIN**	**REALISATION DU DESSIN DANS LASOLUTI ON**
Chap.II P.169	Donné	Refait dans la solution
Chap.III P.185	Demandé	Réalisé
P.198	Donné	Non refait dans la solution
P.209	Demandé	Réalisé
P.210	Demandé	Réalisé
P.211	Demandé	Réalisé
P.211/212	Non demandé	Non réalisé
P.214	Demandé	Réalisé
P.217	Non demandé	Réalisé
P.218	Non demandé	Non réalisé
P.218	Non demandé	Réalisé
P.222	Donné	Non refait dans la solution
P.223	Donné	Non refait dans la solution
Chap.IV P.231/232	Donné	Refait dans la solution
P.232	Donné	Non refait dans la solution
Chap.V P.254	Non demandé	Réalisé (codé)
P.256	Non demandé	Non réalisé
P.256	Non demandé	Non réalisé

Dans les problèmes de démonstration résolus dans le manuel de 1ère année secondaire, l'énoncé se présente sous forme d'un énoncé discursif seul (12 parmi les 18 problèmes de démonstration résolus) ou bien sous forme d'un énoncé discursif accompagné d'un dessin (6 problèmes parmi les 18). Dans les 6 problèmes de démonstrations où l'énoncé comporte un dessin celui-ci n'est pas codé et dans 4 parmi ces problèmes, le dessin n'est pas refait dans la solution. Dans les deux problèmes où le dessin est donné dans l'énoncé puis refait dans la solution (problèmes p.169 et p.213) il y a utilisation d'une appréhension opératoire du dessin qui se traduit par l'ajout de droites ou la définition de nouveaux points…

Pour les problèmes de démonstrations où l'énoncé est sous forme d'un texte seul nous avons obtenu les résultats suivants :

	DEMANDE	**NON DEMANDE**
Réalisé	5	3
Non réalisé	0	4

Nous remarquons que dans les problèmes de démonstration, le dessin n'est pas toujours demandé explicitement. En effet, parmi les 12 problèmes de démonstrations proposées sous forme d'un énoncé discursif seul, dans 5 problèmes la réalisation du dessin est demandée explicitement alors que dans les 7 restant le dessin n'est pas demandé. Cependant dans ce dernier cas la solution de trois problèmes commence par un dessin. Dans les 4 problèmes où le dessin n'est pas réalisé dans la solution, l'absence du dessin est due aux propriétés de l'exercice : Par exemple pour le problème de la page211/212 et celui de la page 218, il s'agit de démontrer une relation vectorielle qui nécessite l'utilisation de la relation de Chasles. Pour les problèmes pages 256 et 257, il s'agit de démontrer une relation trigonométrique à travers l'utilisation d'une méthode algébrique, dans ces problèmes on n'a pas besoin d'un dessin pour résoudre le problème.

Les résultats précédents montrent que dans les problèmes de démonstration, où le dessin est donné dans l'énoncé, si on se réfère aux seuls termes de l'énoncé, l'élève peut donner une justification théorique de la propriété à établir sans fournir de dessin. Dans les problèmes de démonstration où l'énoncé est sous forme d'un texte seul, même si l'énoncé ne demande pas la réalisation d'un dessin, il est implicitement demandé de le réaliser puisque le dessin constitue *« un élément d'appui de l'élaboration de la preuve»* (Laborde et Houdebine 1998).

Ceci apparaît à travers les solutions proposées dans le manuel et à partir des règles explicites qui apparaissent dans le manuel sous le titre "*point méthode*" ou "*savoir-faire*". Par exemple à la page 222, sous le titre "*savoir-faire*", les auteurs du manuel précisent aux élèves que pour résoudre un problème de géométrie à l'aide des vecteurs, il faut commencer par un dessin qui traduit les données du problème, puis transformer les propriétés géométriques du dessin par des relations vectorielles et réciproquement. Les auteurs du manuel donnent alors les propriétés de la figure et les relations vectorielles correspondantes.

Savoir-faire

Comment résoudre un problème de géométrie à l'aide des **vecteurs ? <u>On part d'une figure</u>**[8]

Propriétés de la figure	Relations vectorielles
$S_O(I) = J$	$\overrightarrow{JO} = \overrightarrow{OI}$
I milieu de [AB]	$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$
ABCD est un parallélogramme	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
A, B et C sont alignés ou A (BC) ou AB et AC ont la même direction ou AB et AC sont colinéaires.	$\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$
G centre de gravité de ABC A' milieu de[BC]	$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$ il y a d'autres formules.

Manuel scolaire des mathématiques de 1ère année secondaire p.222

Pour étudier les règles du contrat didactique relatif à l'utilisation du dessin dans la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane et la fonction du dessin dans les solutions proposées dans le manuel, nous avons choisi de faire une étude qualitative de sept problèmes résolus. Le choix de chacun de ces problèmes obéit à certaines critères :

- C'est un problème de démonstration.

[8] c'est nous qui soulignons.

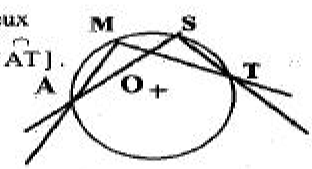
- Dans la solution proposée, le texte de la démonstration est accompagné d'un dessin.
- La solution proposée permet de dégager une nouvelle règle du contrat didactique relatif à la réalisation et à l'utilisation du dessin dans la démonstration.

Pour chaque problème nous commençons par donner l'énoncé et la solution tels qu'ils se présentent dans le manuel, puis nous présentons notre analyse.

Problème page 169 : angle inscrit et angle au centre

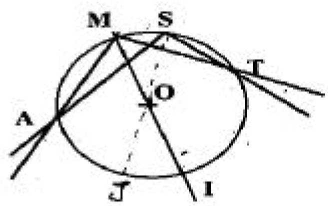
Question 2'

Dans la figure ci-contre $\widehat{AST}$ et $\widehat{AMT}$ sont deux angles obtus inscrits interceptant le même arc $[\overset{\frown}{AT}]$. Mesurez ces angles. Que remarquez-vous ?



Démonstration du cas général :

1) La droite (MO) coupe le cercle (C) en un deuxième point I.
$\widehat{AMI}$ et $\widehat{IMT}$ sont deux angles aigus
D'après la propriété 1, on a :
$\widehat{AMI} = \frac{1}{2}\widehat{AOI}$ et $\widehat{IMT} = \frac{1}{2}\widehat{IOT}$.
Si on additionne ces deux égalités membre à membre, on trouve :
$\widehat{AMT} = \frac{1}{2}\widehat{AOT}$



2). La droite (SO) recoupe le cercle (C) en un deuxième point J.
a). Comparez les angles $\widehat{TSJ}$ et $\widehat{TOJ}$ puis les angles $\widehat{ASJ}$ et $\widehat{AOJ}$.
b). Comparez alors les angles $\widehat{AST}$ et $\widehat{AOT}$.

3). Que pouvez-vous dire des angles $\widehat{AMT}$ et $\widehat{AST}$.

Ainsi vous venez de démontrer la propriété suivante :

Ce problème est une activité qui vise à dégager puis à démontrer une propriété des angles inscrits :

<u>Deux angles tous les deux obtus inscrits dans un même cercle et interceptant le même arc sont égaux.</u>

L'énoncé du problème se présente sous forme d'un énoncé verbal accompagné d'un dessin non codé. On peut faire l'hypothèse que la fonction de ce dessin est l'illustration de l'énoncé (Chachouaa, 1998.).

Dans l'énoncé, on commence par demander aux élèves de mesurer les angles puis de faire des remarques. Les élèves sont donc amenés à utiliser le dessin comme une partie du monde sensible, c'est un objet physique sur lequel on peut faire des mesures. Mais dans la suite nous remarquons que ceci n'est pas l'objectif du problème, il s'agit uniquement de la première étape de la résolution du problème. En effet les auteurs du manuel commencent par demander aux élèves de faire des mesures pour pouvoir énoncer une conjecture, mais le travail n'est pas fini car il faut donner une justification théorique au résultat obtenu, c'est à dire une démonstration.

Ce problème comporte deux dessins : le premier est fourni dans l'énoncé et définit les objets géométriques "angles obtus AST et AMT inscrits et interceptant le même arc [AT]". Le même dessin est repris dans la solution proposée avec le tracé d'une demi-droite [MO) qui recoupe le cercle au point I. Ce point I n'a pas été défini dans l'énoncé, il est défini dans la solution pour rendre visible une sous-figure pertinente pour la résolution du problème, constituée des angles aigus AMI et IMT inscrits dans le cercle et qui permet l'application du résultat établi dans l'activité précédente.

Nous supposons qu'il y a dans la solution utilisation d'une appréhension opératoire du dessin qui se traduit par le tracé d'une demi-droite et la définition d'un nouveau point.

*Sur un dessin, même fourni dans l'énoncé, on peut ajouter des points, définir de nouvelles droites ou demi-droites… et les utiliser pour la résolution, si cela permet d'aboutir à la solution du problème.

*Sur un dessin fourni dans l'énoncé d'un problème, on peut faire des mesures, lire certains résultats pour pouvoir avancer une conjecture. Mais la justification théorique est indispensable pour tous les résultats dégagés à partir du dessin et qui ne sont pas des données du problème : *« le dessin n'est qu'un pourvoyeur d'impressions visuelles susceptibles de donner des idées de propriétés géométriques* » Laborde et Houdebine 1998.

Problème page 185 : les vecteurs

Question 2’ :

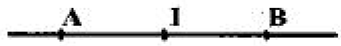
Soient A et B deux points distincts et I le milieu de [AB] .

a). Faites une figure .

b). Comparez la direction , le sens et les longueurs des vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{IB}$. Qu’en déduisez - vous ? .

Réponse 2’ :

a) .



b). * A,I et B sont alignés donc $\vec{AI}$ et $\vec{IB}$ ont la même direction .

* Réfléchissez sur le sens (vous pouvez considérer les demi - droites [AI) , [IB) et [AB)) .

• I est le milieu de [AB] donc AI = IB .

Conclusion 2’ :

Soient deux points distincts A et B et un point I .
Si I est le milieu de [AB] alors $\vec{AI} = \vec{IB}$.

$P_{2'}$

Ce problème est une activité dont l’objectif est de démontrer la propriété suivante :

Soient deux points distincts A et B et un point I

Si I est le milieu de [AB] alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

Le problème se présente sous forme d’un énoncé discursif sans aucun dessin. Les auteurs du manuel commencent par présenter les données du problème puis demandent explicitement de faire un dessin.

Dans la solution, le dessin est fourni comme réponse à la 1ère question et représente les objets géométriques "segment [AB]" et son "milieu I". A partir de la démonstration donnée par les auteurs du manuel, nous constatons l'utilisation d'une appréhension discursive du dessin qui consiste en la traduction de la propriété "I est le milieu de [AB]" par :

" - les points A, I et B sont alignés.

- AI = IB".

Cependant nous supposons qu'il y a une utilisation d'une évidence perceptive tirée du spatio-graphique concernant le sens des demi-droites [AI) et [IB) et [AB) pour comparer le sens des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$. « *La rédaction d'une solution officielle nécessite parfois le recours à des évidences perceptives tirées du spatio-graphique.* » (Laborde et Capponi, 1995)

Problèmes page 217 et 218 : Multiplication d'un vecteur par un réel

Question 1

Soient A et B deux points et I le milieu de [AB].

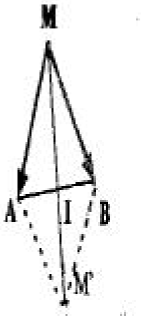
Montrez que pour tout point M, on a $(\vec{MA}+\vec{MB}) = 2\vec{MI}$

Réponse 1

$\vec{MA}+\vec{MB} = (\vec{MI}+\vec{IA})+(\vec{MI}+\vec{IB}) = 2\vec{MI}+\vec{IA}+\vec{IB}$.

Or I est le milieu de [AB] donc $\vec{IA}+\vec{IB} = \vec{0}$

d'où $\vec{MA}+\vec{MB} = 2\vec{MI}$.



page 217

218 Multiplication d'un vecteur par un réel

Question 2

Soient A, B et I trois points du plan tels que pour tout point M du plan P on a $(\vec{MA}+\vec{MB}) = 2\vec{MI}$.

Montrez que I est le milieu de [AB].

Réponse 2

On a $\vec{MA}+\vec{MB} = (\vec{MI}+\vec{IA})+(\vec{MI}+\vec{IB}) = 2\vec{MI}+\vec{IA}+\vec{IB}$.

et comme $(\vec{MA}+\vec{MB}) = 2\vec{MI}$ donc $2\vec{MI}+\vec{IA}+\vec{IB} = 2\vec{MI}$ d'où

$\vec{IA}+\vec{IB} = \vec{0}$ et par suite I est le milieu de [AB].

On vient de démontrer la propriété suivante :

$\boxed{\text{(I le milieu de [AB]) équivaut à (pour tout point M on a } \vec{MA}+\vec{MB} = 2\vec{MI}\text{)}}$

Ces deux problèmes sont deux activités dont l'objet est de démontrer une propriété vectorielle : la caractérisation vectorielle du milieu d'un segment:

(I le milieu de [AB]) équivaut à (pour tout point M on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$)

* pour le premier problème page 217, il s'agit de démontrer le sens direct de cette propriété. La solution proposée ne fait aucune mention du dessin, elle consiste en l'utilisation de la relation de Chasles et en la traduction de la propriété du milieu en une relation vectorielle.

Bien que l'énoncé ne demande pas la réalisation du dessin, un dessin est donné dans la solution. Sur ce dessin, un point M' est construit à partir de la relation vectorielle

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$; ce qui permet de vérifier que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$. La fonction du dessin dans la solution est de valider la démonstration proposée. Le dessin est réalisé pour un certain point M choisi et constitue un cas particulier du problème.

*Pour le problème de la page 218, il s'agit de démontrer la réciproque de cette propriété. La réalisation du dessin n'est pas demandée dans l'énoncé et la solution n'est pas accompagnée d'un dessin, la solution se limitant à l'utilisation de la relation de Chasles.

➡ Pour la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane, même si la réalisation du dessin n'est pas demandée explicitement dans l'énoncé, il est implicitement demandé de le réaliser parce qu'il constitue un « *élément d'appui pour la démonstration* » et peut être un moyen pour valider ou pour vérifier la démonstration proposée. Le dessin peut être donc un moyen de contrôle. Cependant, d'après le problème de la page 218, l'élève a le droit de fournir une justification théorique de la propriété à démontrer sans l'accompagner d'un dessin lorsque celui-ci n'est pas demandé explicitement dans l'énoncé.

Problème page 218 : Multiplication d'un vecteur par un réel

Activité 3 :Médianes d'un triangle

Soit un triangle ABC et A' le milieu de [BC]. Démontrez que

($\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$) équivaut à (G est le centre de gravité du triangle ABC)

Réponse

Voici la démonstration , expliquez ses étapes :

($\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$) équivaut à ($\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{0}$)

($\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{0}$) équivaut à ($3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$)

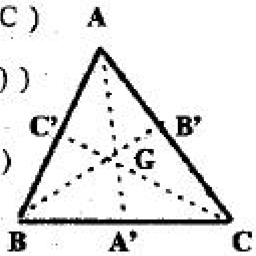
($3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$) équivaut à ($3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$)

($3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$) équivaut à ($\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$)

($\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$) équivaut à ($\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AA'})$)

($\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AA'})$) équivaut à ($\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$)

($\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$) équivaut à (G est le centre de gravité de ABC).



Ce problème est une activité intitulée : "*Médianes d'un triangle*". Elle a pour objectif de donner la caractéristique vectorielle du centre de gravité d'un triangle.

La preuve se présente sous forme de pas de démonstration et à chaque pas, il y a utilisation de la relation de Chasles. Bien que dans l'énoncé, il ne soit pas demandé de réaliser un dessin, la solution proposée est accompagnée d'un dessin qui a pour fonction l'illustration de la démonstration. Nous constatons que ce dessin est réalisé à partir de la conclusion de la propriété directe (G est le centre de gravité du triangle ABC) et non à partir des données du problème.

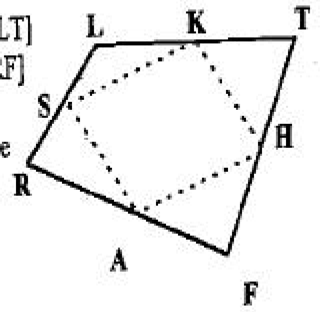
La réalisation du dessin peut être attendue même sans demande explicite dans les problèmes de démonstration.

Problème page 222 : Multiplication d’un vecteur par un réel

EXERCICES RESOLUS

Exercice 1

Dans la figure ci-contre, K est le milieu de [LT]
H est le milieu de [FT], A est le milieu de [RF]
et S est le milieu de [RL].
Montrez que KHAS est un parallélogramme



Ce problème est un exercice résolu qui apparaît à la fin du chapitre. L’énoncé se présente sous forme d’un énoncé discursif accompagné d’un dessin non codé qui représente l’objet géométrique quadrilatère ayant pour sommets les milieux des cotés d’un quadrilatère.

Dans ce problème, le dessin n’a pas été refait dans la solution proposée. Nous supposons que le dessin fourni dans l’énoncé accompagne en même temps l’énoncé et la solution. En effet, en plus des données du problème, la conclusion qu’on doit démontrer, consistant à montrer que KHAS est un parallélogramme, est dessinée en pointillé dans le dessin.

La solution proposée montre l’utilisation d’une appréhension discursive du dessin qui consiste en la traduction des propriétés de la figure en des relations vectorielles. Les élèves peuvent utiliser ce dessin sans être obligés de le reproduire dans leurs solutions.

Problème page 231 : Enoncé de Thalès - Applications – Réciproques

DECOUVRIR - RECONNAITRE

bien regarder
Pour découvrir

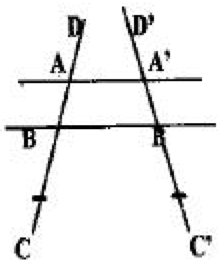
On donne trois points A , B et M sur une droite graduée Δ et trois autres points A' , B' et M' sur une autre droite graduée Δ' sécante à Δ tels que : $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A'}{M'B'}$ et (MM') , (AA') soient parallèles.

1. Faites une figure (envisagez tous les cas possibles).
2. Que constatez-vous ?
3. Que faut-il ajouter aux hypothèses pour avoir la seule figure où les droites (BB') ,(AA') et (MM') parallèles .

La réciproque de l'énoncé de Thalès :

une amitié réciproque

Si on a trois points A , B , C d'une droite graduée D et trois points A' B' et C' d'une droite graduée D' tels que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ et (AA') est parallèle à (BB') alors (CC') est parallèle à (AA') et à (BB') .

Données	Conclusion	Figure
A∈D,B∈D , C ∈D A'∈D' ,B'∈D',C'∈D' (AA')//(BB') $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$	(CC') est parallèle à (AA') et à (BB')	

Dans ce problème, l'énoncé n'a pas la forme d'un énoncé classique (données et questions) Le problème se présente sous forme d'une propriété : la réciproque de Thalès. Cette propriété est ensuite divisée en trois parties :

1. Données : les données du problème qui représentent les hypothèses de la propriété.
2. Conclusion : ce qu'on veut démontrer.
3. "figure" : qui désigne le dessin qui traduit les données du problème.

Dans la démonstration proposée, les auteurs du manuel construisent un nouveau point C" intersection de la droite D' et de la parallèle à (AA'). Le dessin fourni dans la solution est volontairement incorrect puisque C" est différent de C', alors que les deux points doivent être prouvés confondus. La démonstration est donc, basée sur un dessin faux permettant l'application du théorème de Thalès pour aboutir au résultat qui est le fait que C' et C" soient confondus et conclure par la suite que (CC') est parallèle à (AA') et à (BB').

La solution proposée est le résultat d'une interaction entre une appréhension discursive (qui se traduit par l'utilisation du théorème de Thalès) et une appréhension opératoire du dessin (qui se traduit par le tracé d'une droite et du point C".)

Dans la solution de ce problème les auteurs du manuel, proposent les étapes qu'il faut suivre pour la résolution d'un problème de géométrie plane. La première étape consiste à dégager les données du problème, la seconde consiste à identifier la conclusion qui est à démontrer et enfin la troisième consiste à faire un dessin qui traduit les données du problème, même lorsque l'énoncé de ce dernier ne demande pas explicitement la réalisation du dessin.

Problème page 254 : Rapports trigonométriques d'un angle aigu

Remarque

A la place de $(\cos x)^2$ vous pouvez écrire $\cos^2 x$ et lire cosinus carré x.

2. Choisissez un angle aigu x.

En utilisant la calculatrice, déterminez cos x, sin x puis $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$.

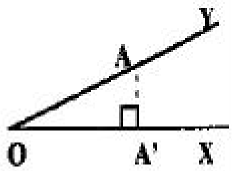
Calculez $\cos^2 x + \sin^2 x$. Que pouvez-vous conclure ?

Un élève essaie de faire la démonstration du résultat précédent.

Il construit un angle aigu $\widehat{XOY}$.

Il place un point A sur [OY) et il construit son projeté orthogonal A' sur [OX).

Il écrit $\cos(\widehat{XOY}) = \frac{OA'}{OA}$ et $\sin(\widehat{XOY}) = \frac{AA'}{OA}$



L'objectif de ce problème est de démontrer une propriété qui a été remarquée par les élèves suite à l'utilisation d'une calculatrice. La propriété est :

Pour tout angle aigu X, on a $\cos^2 X + \sin^2 X = 1$

Le problème se présente sous forme d'une démonstration proposée par un élève à qui l'on demande de recopier la dernière ligne de la démonstration (page 255) :

" puis il écrit $\cos^2(XOY) + \sin^2(XOY) = \ldots + \ldots = 1$

Recopier cette dernière ligne en remplaçant les pointillés par ce qui convient".

en remplaçant les pointillés par ce qui convient. La solution proposée est accompagnée d'un dessin codé. Le codage traduit par une marque analogique la relation spatiale, la propriété géométrique "*A' est le projeté orthogonal de A sur [Ox)* ".

L'utilisation du codage permet l'interaction entre une appréhension opératoire du dessin et une appréhension discursive, ce qui permet d'obtenir le résultat.

Sur un dessin, l'utilisation du codage peut aider les élèves puisqu'il leur permet d'avoir une seule source d'information, à la fois la relation spatiale et la marque renvoyant à la propriété géométrique.

Conclusion de l'étude des problèmes résolus dans le manuel

L'étude des problèmes résolus figurant dans le manuel de mathématique de 1ère année de l'enseignement secondaire tunisien montre l'importance accordée au dessin dans l'enseignement de la géométrie plane. Nous avons pu dégager certaines règles du contrat didactique relatif à la réalisation et à l'utilisation du dessin dans la résolution d'un problème de géométrie plane. Nous avons également déterminé les fonctions attribuées au dessin dans la solution d'un problème de géométrie plane. Les résultats sont présentés selon le type du problème.

1- Problèmes de construction :

**Contrat didactique* : L'élève doit réaliser le dessin puisque c'est le but du problème. C'est le dessin qui constitue la solution.

**Fonction du dessin dans la solution* : Le dessin est la solution. Le dessin fait à main levée réalisé sous l'hypothèse que le problème était résolu, permet par son analyse de trouver des conditions nécessaires (analyse et synthèse)

2- problèmes de programmes de construction :

**Contrat didactique* : Dans ce type de problèmes, le but est de donner un texte qui permet de construire le dessin, mais la construction de ce dernier est indispensable pour illustrer le programme proposé. La réalisation du dessin est indispensable dans la solution pour illustrer le programme de construction.

**Fonction du dessin* : La fonction du dessin est l'illustration du programme de construction et il constitue également un moyen de contrôle pour l'élève et un moyen pour valider son résultat.

3- Problèmes de démonstration :

**Contrat didactique relatif à la réalisation du dessin pour la résolution d'un problème de démonstration* :

- Les auteurs du manuel demandent souvent la réalisation du dessin pour la résolution d'un problème de démonstration (dans 5 problèmes parmi les 12 proposés sous forme d'un énoncé discursif seul). Ceci montre l'importance accordée au dessin, puisque les auteurs du manuel considèrent que l'élève doit savoir réaliser un dessin qui traduit les données du problème afin de pouvoir l'exploiter dans la résolution.
- Lorsque la réalisation du dessin n'est pas demandée, il est implicitement demandé de réaliser un dessin parce que les auteurs du manuel considèrent qu'il est important de commencer la résolution d'un problème par la réalisation d'un dessin qui traduit les données du problème. Ceci apparaît surtout dans le problème résolu p.231 et sous la rubrique « savoir-faire » de la p.222 où il est précisé que pour résoudre un problème de géométrie à l'aide des vecteurs « *on part d'une figure* ».

**Contrat didactique relatif à l'utilisation du dessin* :

- pour la résolution d'un problème de géométrie plane, le dessin peut servir pour avancer une conjecture ou vérifier un résultat, mais les informations tirées du dessin nécessitent une justification théorique. « *Les réalités spatio-graphiques sont des moyens considérés dans le système didactique comme auxiliaires pourvoyeurs d'idées mais les éléments de la solution ne peuvent y faire appel en disant en tirer des informations* » Laborde et Capponi 1995. Cependant, nous remarquons que certaines informations utilisées dans les démonstrations sont tirées du dessin, c'est le cas pour la position des points et le sens des demi-droites dans le problème page 185 ainsi que l'existence de points d'intersection dans le problème page 169.
- sur un dessin donné dans l'énoncé ou réalisé à partir des données du problème on peut ajouter des points, tracer des segments, des droites ou des demi-droites; cela revient à dire que l'élève a le droit de faire les modifications possibles du dessin (Duval 1994) si ceci lui permet d'aboutir au résultat.
- pour la résolution d'un problème de géométrie, l'élève peut utiliser un dessin codé qui traduit les données du problème. L'utilisation du codage permet à l'élève d'avoir une seule source d'information qui est le dessin et il n'est plus obligé de revenir au texte de l'énoncé (dans le cas où toutes les hypothèses peuvent être codées.)

II.3.3.2 Etude de la caractéristique "forme des données" dans les énoncés des problèmes de géométrie plane

L'étude des problèmes résolus de la section "*cours*" nous a montré que les données de l'énoncé d'un problème de géométrie plane peuvent se présenter sous forme d'un texte discursif seul ou accompagné d'un dessin. La fonction de ce dessin varie d'un problème à l'autre. D'après la catégorisation de Chachouaa (1997), le dessin peut jouer trois fonctions dans l'énoncé d'un problème de géométrie. Ces fonctions sont :

- ***Illustration de l'énoncé*** : « *une des fonctions principales du dessin est d'illustrer l'énoncé, en particulier dans le cas où le problème présente une certaine complexité dans les hypothèses ou lorsque l'énoncé comporte plusieurs hypothèses* » (Chachouaa, 1997).
- ***Prise en charge des hypothèses*** : « *une autre fonction du dessin est la prise en charge de certaines hypothèses non explicitées dans l'énoncé… nous pensons que la prise en charge d'une hypothèse par le dessin, sans que celle-ci soit explicitée dans l'énoncé ne peut pas se faire seulement sous forme d'une relation spatiale. Mais il est nécessaire de faire appel à des marques typographiques, puisque l'élève ne peut pas considérer les relations lues sur le dessin comme hypothèses.* » p.25
- ***Moyen pour rendre visible la figure ou une sous-figure pertinente pour la résolution*** : « *Un dessin est donné de façon à ce que l'appréhension perceptive ne soit pas un obstacle pour la résolution du problème. Et plus précisément, le dessin est supposé faciliter, chez l'élève, l'extraction de sous-figures pertinentes pour la résolution du problème.* » p.25

D'après cette catégorisation, la présence d'un dessin codé dans l'énoncé d'un problème de géométrie plane, lui attribue la fonction de prise en charge des hypothèses non explicitées. Nous supposons alors, la présence de quatre formes différentes pour les données d'un problème de géométrie plane, selon la fonction du dessin dans l'énoncé :

1. Enoncé discursif seul sans dessin.
2. Enoncé discursif + dessin non codé : dans ce cas, la fonction du dessin est l’illustration de l’énoncé ou la mise en place de moyens pour rendre visible une figure ou une sous-figure pertinente pour la résolution.
3. Enoncé discursif + dessin codé : dans cette forme, nous supposons la présence de deux cas, le premier est lorsque les marques typographiques représentent des hypothèses non explicitées dans l’énoncé, dans ce cas la fonction du dessin est la prise en charge de ces hypothèses. Le deuxième cas est lorsque les marques typographiques représentent des hypothèses déjà explicitées dans l’énoncé, la fonction du dessin sera donc, de rendre visible une figure ou une sous figure pertinente pour la résolution du problème ou d’illustrer l’énoncé.
4. Dessin codé : la fonction du dessin dans ce cas est la prise en charge des hypothèses du problème. Nous désignons par dessin codé les cas où toutes les hypothèses sont codées (dans ce cas l’énoncé est sous forme d’un dessin codé accompagné des questions) et le cas où une hypothèse est donnée sous forme verbale si elle est difficile à coder, l’énoncé est alors sous forme d’un dessin codé accompagné d’une donnée verbale et des questions.

Nous chercherons, par la suite, à étudier la présence de chacune de ces valeurs de la "forme des données", dans les énoncés des problèmes proposés dans le manuel de 1ère année secondaire. Ceci nous permettra de déterminer les valeurs accordées par le manuel à la caractéristique "forme des données" dans les énoncés des problèmes de géométrie plane. Dans cette étude, nous nous sommes intéressés uniquement aux problèmes de démonstration proposés dans la partie "*exercices*" des cinq chapitres étudiés dans le manuel. Nous avons évité les problèmes de la partie "*cours*" parce que dans certains problèmes le dessin accompagne en même temps l’énoncé du problème et la solution proposée par les auteurs du manuel ; ce qui attribue au dessin une double fonction. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

	TEXTE SEUL	**TEXTE + D.N.C**	**TEXTE + D.C**	**DESSIN CODE**
Chap.I : droites parallèles coupées par une sécante.	7	3	0	0
Chap.II : Angle inscrit et angle au centre	6	3	1	1
Chap.III : vecteurs du plan	31	3	0	0
Chap.IV: énoncé de Thalès	10	9	0	2
Chap.V: trigonométrie	5	4	0	1
Total	59	22	1	4
Pourcentage	68%	26%	1%	5%

Bilan de l'étude des valeurs accordées à la caractéristique "forme des données" dans les énoncés des problèmes de géométrie plane.

D.N.C = dessin non codé.

D.C = dessin codé.

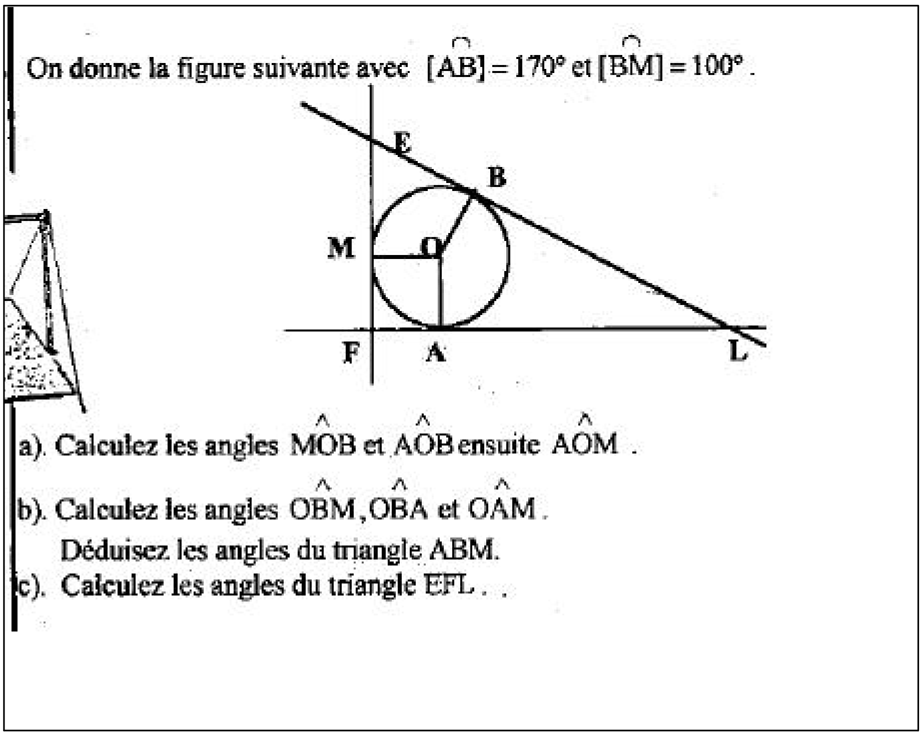
% désigne le pourcentage de chaque valeur par rapport à tous les problèmes de la partie "exercices" des cinq chapitres étudiés.

Cette étude montre la présence, avec des pourcentages différents, de toutes les valeurs que nous avons distinguées : texte seul, texte + dessin non codé, texte + dessin codé et dessin codé.

Nous remarquons que dans la plupart des problèmes de démonstration (68%des problèmes de démonstration présentés dans la partie "exercices") l'énoncé se présente sous forme d'un texte seul sans la présence du dessin.

Pour la valeur texte + dessin codé, elle représente 1% donc cette valeur est non significative et elle ne sera pas prise en compte dans le reste de notre analyse.

Dans environ ¼ de ces problèmes le dessin est donné dans l'énoncé et pour la plupart il est non codé, sa fonction dans les énoncés de ces problèmes est soit l'illustration de l'énoncé, soit un moyen pour rendre visible une figure ou une sous-figure pertinente pour la résolution du problème ceci apparaît surtout dans le chapitre IV "Enoncé de Thalès-Application-Réciproque". Mais nous avons trouvé des problèmes où l'énoncé est sous forme d'un texte + un dessin non codé alors que la fonction du dessin fourni est la prise en charge des hypothèses. Par exemple le problème 7 page 176:


On donne la figure suivante avec $[\overset{\frown}{AB}] = 170°$ et $[\overset{\frown}{BM}] = 100°$.

a). Calculez les angles $\widehat{MOB}$ et $\widehat{AOB}$ ensuite $\widehat{AOM}$.

b). Calculez les angles $\widehat{OBM}$, $\widehat{OBA}$ et $\widehat{OAM}$.

Déduisez les angles du triangle ABM.

c). Calculez les angles du triangle EFL .

Dans ce problème, la fonction du dessin dans l'énoncé est la prise en charge des hypothèses. En effet, c'est à partir du dessin qu'on peut lire que le cercle est inscrit dans le triangle FEL et que les points A, M et B sont les points d'intersection du cercle avec les côtés du triangle.

Signalons que lorsque deux angles sont supposés isométriques par hypothèse et que la figure accompagne l'énoncé, alors l'égalité des angles est marquée : angles alternes-internes, pages 155 , 156 , 157 , 160 et 161; angles inscrits, problèmes 1 et 2 page 175 ; angles droits, page 244.

Problème 2 page 175 :

MAE est un angle inscrit. Sa bissectrice [AZ) coupe le cercle en I.

Montrez que les petit arcs [MI] et [IE] sont isométriques.

Dans œ problème 2 page 175, le dessin codé traduit les données déjà explicitées dans l'énoncé verbal. La fonction du dessin dans cet énoncé est de rendre visible une sous-figure pertinente pour la résolution, en effet, l'utilisation du codage dans ce dessin permet de rendre visible la sous-figure formée par les deux angles inscrits isométriques MAI et IAE qui permet de trouver le résultat.

La valeur dessin codé constitue 5% des problèmes de démonstration de la partie "*exercices*". Nous remarquons que l'utilisation du codage du dessin dans l'énoncé des problèmes de géométrie plane est faible voir très faible puisque les formes les plus utilisées sont le texte seul avec un pourcentage de 68% ce qui constitue les $\frac{2}{3}$ des exercices et la forme texte + un dessin non codé qui constitue le ¼ des exercices.

II.3.3.3 Conclusion

D'après l'étude des problèmes proposés aux élèves dans la partie"*exercices*" du manuel de 1ère année secondaire, la caractéristique "forme des données" dans les énoncés des problèmes de géométrie plane prend, a priori quatre valeurs différentes selon la présence du dessin dans l'énoncé. Ces valeurs sont :

- Texte seul sans dessin.
- Texte + dessin non codé.
- Texte + dessin codé.
- Dessin codé.

(Comme la valeur texte + dessin codé est non significative, nous ne considérons dans la suite de notre travail que les trois valeurs restantes.)

Comme nous avons constaté que les trois formes d'énoncés sont présentes dans le manuel, on peut donc se poser la question de leur incidence sur la résolution d'un problème par les élèves.

Quelle sera l'influence de la variation de la "forme des données" dans l'énoncé d'un problème de géométrie plane sur la réussite du problème et sur les processus de résolution adoptés par les élèves ?

Chapitre III : Partie expérimentale

III. 1 Méthodologie générale

L'objet de notre recherche est l'étude de l'influence de la donnée du dessin sur les processus de résolution et sur les démonstrations produites par des élèves de 1ère année de l'enseignement secondaire tunisien pour résoudre un problème de géométrie plane. Pour mener à bien notre recherche, nous avons repris un problème de géométrie plane utilisé par Duval et Egret pour étudier la phase de rédaction de la démonstration (Duval et Egret1989) tout en nous intéressant à une phase différente celle de recherche de la solution.

III.1.1 Enoncé du problème

A, B et **C** sont trois points non alignés et **M** le milieu de **[BC]**. Soit **D** le point tel que **ABCD** soit un parallélogramme.

Soit **E** l'image de **A** par la symétrie centrale de centre **M**.

Montrer que **C** est le milieu de **[DE]**.

III.1.2 Le choix du problème

Le choix du problème n'est pas arbitraire: il répond à certaines contraintes que nous avons souhaité introduire :

•cet exercice exige une justification théorique d'un résultat (une démonstration)

• Sa résolution permet de mobiliser des connaissances sur lesquelles les élèves avaient travaillé auparavant.

• Dans son énoncé "la forme des données" peut prendre les trois valeurs : "texte seul", "texte + dessin non codé" et "dessin codé" .

• De plus nous avons vu qu'il était intéressant de reprendre un problème déjà utilisé dans une autre recherche (Duval et Egret 1989) car nous disposons ainsi de quelques solutions des élèves qui peuvent nous aider dans l'élaboration de l'analyse a priori.

Le problème précédent est donc transformé en trois formes différentes selon la valeur accordée à la caractéristique "la forme des données", chaque forme donne lieu à une modalité de travail :

Modalité I :

A, B et **C** sont trois points non alignés et **M** le milieu de **[BC]**. Soit **D** le point tel que **ABCD** soit un parallélogramme.
Soit **E** l'image de **A** par la symétrie centrale de centre **M**.
Montrer que **C** est le milieu de **[DE]**.

Le problème comporte quatre données :

$\mathbf{D_1}$: A, B et C trois points non alignés.

$\mathbf{D_2}$: M milieu de [BC].

$\mathbf{D_3}$: ABCD est un parallélogramme.

D_4 : $E = S_M(A)$.

La conclusion consiste à démontrer que C est le milieu de [DE].

Il s'agit d'un problème de démonstration d'après la catégorisation de Laborde et Houdebine 1998. Dans cette modalité, le dessin n'est pas fourni avec l'énoncé mais, il est à la charge de l'élève. Dans l'énoncé nous ne demandons pas la réalisation du dessin pour connaître le comportement des élèves devant une telle situation "étude de l'effet du contrat didactique relatif à ce type de problème".

Modalité II

A, B et **C** sont trois points non alignés et **M** le milieu de **[BC]**. Soit **D** le point tel que **ABCD** soit un parallélogramme.

Soit **E** l'image de **A** par la symétrie centrale de centre **M**.

Montrer que **C** est le milieu de **[DE]**

Dans cette modalité l'énoncé se présente sous forme d'un texte + un dessin non codé. La fonction du dessin dans cette modalité est l'illustration de l'énoncé.

Nous avons à choisir entre plusieurs positions du dessin pour contrôler l'effet de l'appréhension perceptive. Dans le dessin fourni aux élèves, nous avons tracé en pointillé le segment [CE]. Cette stratégie est connue par les élèves puisqu'elle est utilisée par les auteurs du manuel au problème p.212 et dans les problèmes résolus problèmes résolus p.218 et p.223. Cette stratégie permet aux élèves de se rendre compte que la propriété "les points C, D et E sont alignés".n'est pas une donnée du problème, ni une évidence du dessin mais, que c'est une propriété qu'il doivent démontrer.

Le dessin choisi vérifie plusieurs critères :

- Eviter les cas particuliers (points confondus, ABCD un carré …)
- Le dessin fourni traduit les données du problème.
- Le dessin est mis dans une position pour laquelle l'appréhension perceptive fait de sorte que l'attention se focalise sur la sous configuration droite des milieux dans le triangle AED, cette sous-configuration est pertinente pour la résolution du problème. Nous avons fait ce choix pour étudier l'influence de cette position sur les stratégies de démonstrations adoptées par les élèves et l'impact de l'appréhension perceptive sur l'appréhension opératoire et l'appréhension discursive de ce dessin.

Modalité III

Dans cette modalité nous avons choisi le même dessin que celui de la modalité 2 pour annuler tout effet de la variable "position" du dessin fourni, puisque notre objectif est d'étudier l'influence du codage du dessin sur les processus de résolution de ce problème.

Nous avons utilisé des marques typographiques que les élèves ont l'habitude d'utiliser dans les classes de mathématiques et qui figurent dans les manuels scolaires des mathématiques. Le codage est réalisé de la façon suivante :

Donnée D_1 : elle est à lire sur le dessin puisque les trois points sont définis sur le dessin fourni.

Donnée D_2 : la propriété géométrique M milieu de [BC] se traduit sur le dessin par l'égalité des longueurs des segments [BM] et [MC] et l'appartenance de M à [BC]. Des marques typographiques sont placés sur chacun des deux segments [BM] et [MC] pour désigner l'égalité des longueurs.

Donnée D_3 : la donnée ABCD est un parallélogramme n'a pas été codée , elle est fournie sous forme d'une donnée verbale à coté du dessin.

Donnée D_4 : E image de A par S_M est équivalente à la propriété géométrique M milieu de [AE] qui se traduit sur le dessin par l'égalité des longueurs des segments [AM] et [ME] et par les marques typographiques placés sur chacun de ces deux segments ainsi que par l'appartenance de M à [AE].

III.1.3 Le choix du niveau

L'un de nos objectifs étant de déterminer les catégories possibles de démonstration, nous avons choisi un niveau où les élèves ont une certaine maîtrise des connaissances mathématiques. Notre objectif n'est pas de tester leurs connaissances, ni leur degré de maîtrise de la notion de démonstration. C'est pourquoi nous avons choisi le niveau de 1ère année de l'enseignement secondaire tunisien. Les élèves sont habitués aux problèmes de démonstration puisque, dans les programmes tunisiens de mathématiques, l'initiation à la démonstration est introduite officiellement en 8ème année de l'enseignement de Base). D'autre part nous supposons que les connaissances mathématiques nécessaires à la résolution de l'exercice sont disponibles car ce sont des connaissances qui ont eu le temps d'être assimilées(théorème de Thalès, propriétés du parallélogramme, opérations sur les vecteurs...)

Nous avons évité la classe de 9ème pour plusieurs raisons :

- c'est une classe d'examen.
- le théorème de Thalès est introduit en deuxième trimestre et il est source de problèmes.
- les vecteurs ne sont pas encore introduits.

III.1.4 Le choix des élèves

Nous avons choisi trois classes de 1ère année secondaire du Lycée Hédi Chaker à Bizerte ayant un même professeur de mathématiques pour diminuer l'effet de la variation du contrat didactique et les exigences du professeur (Abrougui, 1998).

III.1.5 Déroulement de l'expérience

L'expérience se divise en deux étapes : travail individuel avec les trois classes et travail par binômes.

<u>Première expérimentation</u>

L'expérience a eu lieu le 10-03-2000. Chacune des trois classes a eu un test relatif à l'une des trois modalités. Nous avons choisi cette date qui correspond à une période où les élèves viennent juste de passer les devoirs de synthèse de la deuxième trimestre parce que nous supposons qu'ils sont suffisamment préparés sur le plan cognitif et psychologique. En effet les élèves ont révisé pour passer leurs devoirs et donc les connaissances devraient être disponibles d'autre part il ne sont pas préoccupés part le passage d'un examen.

Avant de distribuer la feuille où figure l'énoncé de l'exercice, nous avons commencé par préciser certains points :

- le test n'est pas noté mais fait partie d'une recherche scientifique.

- les élèves ne sont autorisés à n'utiliser qu'un stylo bleu même pour le dessin (s'il s'avère nécessaire d'en esquisser un).
- les élèves n'ont pas le droit d'utiliser une gomme ou un correcteur.
- dans la cas d'une faute écrire à coté le mot "faux".
- le travail est individuel.

Après la distribution du test le temps de recherche individuel est de 30 mn.

Deuxième expérimentation

La deuxième partie de l'expérience a eu lieu à la fin du troisième trimestre et elle consiste à choisir des binômes suivant des critères que nous préciserons après l'analyse de la première expérimentation et à observer leur travail lors de la résolution du même problème choisi dans l’expérimentation précédente.

III.2 Analyse a priori

Dans cette partie, nous nous livrons à une analyse a priori concernant l'influence de chacune des modalités de travail (texte, texte + dessin non codé et dessin codé) sur les processus de résolution des élèves et concernant le traitement du dessin dans chacune de ces modalités. Nous cherchons également à prévoir les stratégies de démonstration ayant une grande possibilité d'apparaître dans le travail des élèves en tenant compte des connaissances mathématiques disponibles à ce niveau.

Nous émettons alors a priori des hypothèses générales, des hypothèses relatives aux stratégies de démonstrations susceptibles d'apparaître chez les élèves et des hypothèses relatives à chacune des trois modalités (et concernant le traitement du dessin)

III.2.1-Hypothèse générale

A propos des trois modalités nous émettons à priori les hypothèses suivantes :

HG : Nous supposons que la caractéristique rédactionnelle "forme des données" de l'exercice géométrique est une variable didactique qui constitue une extension de la notion de variable rédactionnelle (Duval 1991) c'est à dire nous supposons que la variation des modalités de travail aura une influence sur le traitement du problème par les élèves.

Nous supposons que cette influence apparaîtra :

a) au niveau de la réussite du problème.

b) au niveau du traitement du dessin (nous cherchons à prévoir les traitements possibles du dessin relativement à chaque modalité et le rôle facilitateur ou inhibiteur de l'appréhension du dessin (Duval, 1994.)

c) au niveau des stratégies de résolution adoptées par les élèves (nous supposons que la fréquence d'apparition de certaines stratégies dépend de la modalité de travail)

III.2.2 hypothèses relatives à la réussite du problème et au traitement du dessin

Ces hypothèses sont classés selon chacune des modalités

a) Modalité 1 : énoncé discursif seul

Dans cette modalité nous donnons à l'élève un énoncé discursif seul.

H_1 Nous supposons que les élèves vont commencer par faire un dessin : ce « réflexe » est une réponse aux exigences du contrat didactique « *si l'on se réfère aux seuls termes d'un énoncé de problème de démonstration qui ne fait pas mention de dessin, l'élève serait tout à fait en droit de fournir une justification de la propriété à établir sans fournir de dessin. Mais parce que le dessin est élément d'appui de l'élaboration de la preuve, il est implicitement demandé aux élèves d'accompagner d'un dessin la rédaction de la preuve* » (Houdebine et Laborde, 1998)

Le dessin est donc à la charge de l'élève nous supposons alors :

H_2 la possibilité d'apparition de dessins qui ne traduisent pas les données du problèmes comme le tracé d'un parallélogramme ABDC au lieu de ABCD.

H_3 des cas particuliers de dessins qui pourront fausser les réponses des élèves si ces derniers utilisent les informations supplémentaires provenant de la particularité du dessin. *« ainsi, un tracé répondant aux données du problèmes et présentent un cas particulier peut induire chez l'élève des informations supplémentaire qu'il va utiliser alors qu'elles ne sont pas des propriétés de la figures* » (Abrougui, 1998).

D'autre part, nous supposons que selon la caractéristique du dessin produit, l'appréhension perceptive peut gêner ou faciliter l'appréhension opératoire.

Exemples :

-1- la reconnaissance de la sous-configuration parallélogramme ABEC peut être gênée s'il n'est pas dans une position prototypique ou si le parallélogramme ABCD est trop prégnant et empêche de voir ABEC comme un parallélogramme dont par ailleurs il se peut fort bien que deux côtes ne soient pas tracées, ce qui gêne encore l'appréhension perceptive. La superposition partielle de deux parallélogrammes rend difficile leur prise en compte simultanée.

-2- la reconnaissance de la sous-configuration droite des milieux dans le triangle ADE qui n'est pas forcement dans une position prototypique.

H_4 Puisque la réalisation du dessin est à la charge des élèves, nous supposons que plusieurs d'entre eux seront induits en erreur essentiellement pour l'alignement des points C, D et E. En effet, nous supposons que suite à la réalisation du dessin les élèves vont tracer le segment [CE] et par la suite utiliser l'alignement des points comme une évidence du dessin.

H_5 Dans cette modalité nous supposons que toutes les stratégies de démonstration sont susceptibles d'apparaître selon les dessin qui seront réalisés par les élèves.

b) Modalité 2 : énoncé discursif +dessin non codé

Dans cette modalité, deux sources d'information sont présentes : le texte et le dessin. Mais dans de telles situations, les élèves ont des difficultés à mettre en œuvre la mobilité entre ces deux sources d'information et, en général, se concentrent sur le dessin sans revenir à l'énoncé (Duval,1988)

H_6 Pour cette modalité nous envisageons deux attitudes possibles :

1. les élèves s'en tiennent à l'appréhension perceptive, alors ils se concentrent sur le dessin fourni et abandonnent le texte alors que la résolution de l'exercice nécessite une appréhension discursive ce qui pourra les induire en erreur s'ils utilisent le dessin comme la seule source d'information.
2. les élèves vont essayer d'utiliser les deux sources d'informations disponibles et font le retour au texte dans le cas d'un problème au niveau du dessin, par exemple pour la vérification des données ou pour la vérification des conclusions intermédiaires
3. les élèves utilisent un codage du dessin et dans ce cas nous assistons à un changement du statut du dessin et nous nous retrouvons dans la troisième modalité.

H_7 Concernant l'utilisation du dessin dans la "phase d'expérimentation" (Chevallard, 1990) puisque le segment [CE] est tracé en pointillé sur le dessin fourni dans l'énoncé du problème, nous supposons que les élèves ne vont pas utiliser l'alignement des points C, D et E comme une évidence du dessin parce que le fait que le segment soit tracé en pointillé donne à la proposition "C, D et E sont alignés" le statut d'une propriété à démontrer ce qui pourra augmenter le pourcentage de réussite dans cette modalité.

C) Modalité3 : dessin codé

Dans cette modalité, nous avons donné aux élèves un dessin identique à celui de la modalité 2 et nous avons porté sur lui des marques typographiques qui traduisent les données D_2 et D_4 du problème.

Donnée D_1 : elle est à lire sur le dessin puisque les trois points sont définis sur le dessin fourni.

Donnée D_2 : la propriété géométrique M milieu de [BC] se traduit sur le dessin par l'égalité des longueurs des segments [BM] et [MC] et l'alignement des points B, M et C. Des marques typographiques sont placés sur chacun de ces deux segments pour désigner l'égalité des longueurs.

Donnée D_3 : la donnée ABCD est un parallélogramme n'a pas été codée , elle est fournie sous forme d'une donnée verbale à côté du dessin.

Donnée D_4 : E image de A par S_M est équivalente à la propriété géométrique M milieu de [AE] qui se traduit sur le dessin par l'égalité des longueurs des segments [AM] et [ME] et par les marques typographiques placés sur chacun de ces deux segments et par le fait que M appartient à [EA].

Le dessin est codé donc il prend en charge les hypothèses de l'exercice sauf une difficile à coder à savoir « ABCD est un parallélogramme » Il y a donc, un changement de statut du dessin par rapport à celui de la modalité 2.

Le dessin codé peut donc être utilisé comme le seul outil de travail sur lequel les élèves vont effectuer des modifications qui leur permettent d'aboutir à la configuration heuristiquement pertinente (Duval, 1994) ceci pour les élèves qui vont utiliser la stratégie parallélogramme ou la stratégie isométrie des triangles.

Partant de l'idée de Souvignet (1993) qui considère qu'un dessin fourni par l'enseignant ou le manuel est difficilement remis en cause par l'élève. $\mathbf{H_8}$ Nous supposons que l'effet de l'appréhension perceptive risque d'être important, mais le fait que le segment [CE] soit tracé en pointillé permettra aux élèves de se rendre compte que l'alignement des points est une proposition qui n'est pas donnée et qu'elle nécessite une justification théorique.

Nous supposons que dans cette modalité nous trouverons le taux de réussite le plus élevé puisque les élèves ont une seule source d'information qui est le dessin codé.

Dans cette modalité, nous supposons que la reconnaissance de la sous configuration de la droite des milieux est facilitée par le codage des données.

III.2.3-Hypothèses relatives aux stratégies de démonstration susceptibles d'apparaître chez les élèves

III.2.3.1 les stratégies de démonstration

Pour la résolution mathématique de l'exercice donné, nous avons envisagé 6 stratégies possibles de démonstration. Le choix de ces stratégies est basé sur les connaissances mathématiques disponibles chez des élèves de 1ère année de l'enseignement secondaire tunisien. Ces connaissances proviennent des classes antérieures et sont revues en 1ère année secondaire (symétrie centrale, propriétés du parallélogramme, isométrie des triangles, théorème de Thalès, droite des milieux) D'autres connaissances sont vues cette année (les vecteurs, les angles alternes-internes)

Nous commençons par citer les règles de substitution (Duval et Egret 1989) utilisées dans chaque stratégie de démonstration.

S_1 : la stratégie « parallélogramme »

Elle consiste à montrer que ABEC est parallélogramme puis appliquer les propriétés des côtes d'un parallélogramme à ABCD et ABEC, enfin à utiliser la transitivité de l'égalité et du parallélisme pour déduire que C est le milieu de [DE]

S_2 : la stratégie « symétrie centrale »

Il s'agit d'appliquer la propriété de la symétrie centrale S_M sur le segment [AB]

« l'image d'un segment par une symétrie centrale est un segment qui lui est isométrique »

« l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle » en suite, d'utiliser les propriétés des côtés d'un parallélogramme et la transitivité de l'égalité et du parallélisme pour déduire le résultat.

S_3 : la stratégie « vecteur »

Elle consiste à utiliser la propriété vectorielle du parallélogramme ABCD (ABCD est un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$) et à déduire des égalités vectorielles à partir des relations (M=B*C) et (S_M(A)=E) puis à partir de la relation de Chasles à déduire que C=D*E

S_4 : la stratégie « isométrie des triangles »

Il s'agit d'utiliser le deuxième cas d'isométrie de deux triangles pour montrer que MAB et MCE sont isométriques. Puis à partir des conséquences (AB=CE) et en utilisant la propriété réciproque de deux droites parallèles coupées par une sécante (les droites (AB) et (CE) forment avec la sécante (AE), deux angles alternes-internes isométriques, donc, ils sont parallèles), on en déduit l'alignement des points C, E et D puis le résultat C est le milieu de [DE]

S_5 la stratégie « droite des milieux »

Elle consiste à appliquer le théorème de la droite des milieux dans le triangle ADE. Mais il faut montrer que (MC) coupe [DE] en C. pour cela il faut montrer que ABEC est un parallélogramme et utiliser les propriétés des côtes d'un parallélogramme pour déduire que (MC) et (DE) se coupent en C.

S_6 : la stratégie « théorème de Thalès »

Il s'agit d'appliquer le théorème de Thalès dans le triangle ADE après avoir monté que (MC) et (AD) sont parallèles.

Pour résumer, nous donnons le tableau récapitulatif suivant

STRATEGIE DE DEMONSTRATION	REGLES DE SUBSTITUTION UTILISEES
S_1 **"Parallélogramme"**	• Propriété des côtés d'un parallélogramme et propreté des diagonales. • Transitivité de l'égalité et du parallélisme. • Définition du milieu.
S_2 **"Symétrie centrale"**	• Propriétés de la symétrie centrale (l'image d'un segment, d'une droite). • Propriété des côtés d'un parallélogramme. • Définition du milieu.
S_3 **"Vecteurs"**	• Traduction des propriétés géométriques par des relations vectorielles. • Relation de Chasles. • Définition du milieu d'un segment.
S_4 **"Isométrie des triangles"**	• Deuxième cas d'isométrie de deux triangles. • Propriété de deux droites parallèles coupées par une sécante. • Définition du milieu d'un segment.
S_5 **"Droite des milieux"**	• Théorème de la droite des milieux. • Propriétés du parallélogramme. • Définition du milieu d'un segment.
S_6 **"Thalès"**	• Théorème de Thalès. • Propriétés du parallélogramme.

III.2.3.2-Hypothèses relatives aux stratégies de démonstration

Pour la stratégie S_1, l'idée de la solution provient de la reconnaissance de la sous configuration parallélogramme ABEC.

Nous supposons qu'une modification méréologique peut aider à trouver la solution à savoir la modification heuristiquement pertinente (Duval, 1994). Elle consiste à tracer les côtés du parallélogramme ABEC.

Nous supposons que la stratégie S_2 sera utilisée par certains d'élèves car dans l'énoncé on évoque la symétrie centrale « on pose E l'image de A par la symétrie centrale de centre M » mais, son utilisation n'apparaîtra que dans les modalités 1 et 2, où la symétrie centrale est évoquée dans l'énoncé.

Nous supposons que les stratégie S_3 et S_4 apparaîtront moins que les autres stratégies parce qu'elles utilisent des connaissances nouvelles (vues pour la première fois en 1ère année.) D'autre part pour la stratégie S_3 le passage des propriétés géométriques d'un dessin aux relations vectorielles ne va pas de soi chez les élèves car il nécessite une interprétation théorique de l'objet spatio-graphique en termes de vecteurs alors que l'appréhension perceptive d'un dessin ne facilite pas une telle interprétation. De plus, nous supposons que cette stratégie peut apparaître dans des modalités 1 et 2 mais n'apparaîtra pas dans la modalité 3 car dans cette modalité le dessin codé induit chez les élèves un raisonnement sur les distances et non sur les vecteurs à cause de l'utilisation du codage qui évoque des segments isométriques.

Pour la stratégie S_4 le problème de l'utilisation de cette stratégie consiste en la difficulté de reconnaître les sous configurations nécessaires pour la résolution qui sont la sous configuration triangles isométriques MAB et MCE et la sous configuration droites parallèles coupées par une sécante. Dans le cas de l'utilisation de cette stratégie nous supposons que les élèves se limiteront à l'isométrie des triangles MAB et MCE pour déduire l'isométrie des segments [CE] et [AB] parce que l'une des conceptions des élèves, est que le milieu est un point caractérisé par sa seule équidistance donc pour eux la définition du milieu se limite à l'isométrie des segments. Cette stratégie S_4 peut apparaître dans la modalité 3 parce que le codage peut rappeler l'isométrie des triangles.

La stratégie S_5 apparaîtra surtout dans les modalités 2 et 3 parce que la position du dessin fourni favorise la reconnaissance de la sous configuration droite des milieux dans le triangle AED. Cependant nous supposons que la réussite dans cette stratégie sera faible, en effet, les élèves sous l'influence de l'appréhension perceptive utiliseront comme évident le fait que (MC) coupe [DE] au point C surtout dans la modalité 1 au cas où les élèves tracent le segment [CE] avec le même style de trait que le reste du dessin.

L'utilisation de la stratégie S_6 sera grande à cause de la variable « dernier chapitre » mais nous supposons que les élèves sous l'influence de l'appréhension perceptive vont appliquer le théorème de Thalès, sans montrer l'alignement des points C , D et E.

Pour les stratégies S_1, S_2 et S_4 la démonstration fait appel à la définition du milieu d'un segment nous supposons que les élèves ne vont pas utiliser correctement l'énoncé de la définition du milieu, en effet, nous supposons que les élèves ont une conception de la notion du milieu qui se caractérise pour eux uniquement par l'équidistance ainsi leurs démonstrations seront erronées.

	REUSSITE **DU PROBLEME**	**TRAITEMENT DU DESSIN**	**STRATEGIE DE DEMONSTRATION**
Modalité 1	H4Suite à des problèmes dans la réalisation du dessin plusieurs élèves seront induits en erreur à cause de l'utilisation de l'alignement des points C, D et E comme une évidence du dessin ou à cause de la définition du milieu.	H1Tous les élèves vont commencer la résolution par la réalisation d'un dessin. H_2Possibilité de dessins qui ne traduisent pas les données du problème ex : le parallélogramme ABDC au lieu de ABCD H_3Possibilité de l'apparition de cas particuliers..	H Toutes les stratégies sont susceptibles d'apparaître dans cette modalité selon les dessins qui seront réalisés par les élèves.
Modalité 2	H_7 Augmentation du taux de réussite par rapport à la modalité 1 puisque l'utilisation des pointillés dans le dessin donné permet aux élèves de se rendre compte que l'alignement des points C, D et E nécessite une justification théorique.	H_6 Deux sources d'informations, donc problème dans la mobilité entre le texte et le dessin donné. Alors : 1ère possibilité : abandon du texte et utilisation du dessin comme la seule source d'information (appréhension perceptive ou/et opératoire du dessin) 2ème possibilité :utilisation des deux sources d'informations qui pourra se traduire par l'utilisation du dessin et le retour au texte pour la vérification des données par exemple. 3ème possibilité : codage du dessin (modalité 3)	H_{10} Sous l'effet du dessin donné, les stratégies S_5 et S_6 sont les plus probables à cause de la caractéristique du dessin choisi qui rend visible la sous-configuratuion formée par le triangle AED et la droite des milieux de ce triangle. Les autres stratégies sont susceptibles d'apparaître mais avec une fréquence faible.
Modalité 3	H_8 Le taux de réussite le plus important car l'élève a une seule source d'information	H_9Interaction entre l'appréhension perceptive, discursive et opératoire.	H_{11} Comme pour la modalité 2 les stratégies les plus probables sont S_5 et S_6 H_{12} De plus le codage du dessin augmentera l'apparition de la stratégie S_4

Résumé des hypothèses relatives aux stratégies de démonstration

S_1 : nécessité d'une modification méréologique exemple le tracé des cotés du parallélogramme ABEC

Possibilité d'apparition dans toutes les modalités puisque l'énoncé fait appel au parallélogramme

S_2 : possibilité d'être utilisée par plusieurs élèves car l'énoncé évoque la symétrie centrale.

Possibilité d'apparition dans les modalités 1 et2.

S_3 : Possibilité d'apparition dans les modalités 1 et 2 mais avec des pourcentages faibles car le passage des propriétés géométriques aux relations vectorielles ne va pas de soi chez les élèves.

S_4 : problème au niveau de la définition du milieu.

Possibilité d'apparition surtout dans la modalité 3.

S_5 : Possibilité d'apparition essentiellement dans les modalités 2 et 3 sous l'influence du dessin donné.

S_6 : Possibilité d'apparition dans toutes les modalités à cause de la variable dernier chapitre et l'influence du dessin donné dans les modalités 2 et 3

.