UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MESSINA
DOTTORATO DI RICERCA IN MATEMATICA
XX CICLO

ARITMETICA E SCALE MUSICALI
Problemi storici e ricadute in didattica della matematica

(S.S.D. Mat 04)

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA

COORDINATORE:
Chiar.mo Prof. **Domenico FUSCO**

CANDIDATO:
Dott. **Alessandro SARRITZU**

TUTOR:
Chiar.mo Prof. **Renato MIGLIORATO**

Indice generale

INTRODUZIONE

Il lavoro che qui viene presentato è frutto di un percorso di ricerca durato 4 anni, in cui si sono studiate le relazioni tra due scienze, musica e matematica, apparentemente così lontane e discordanti ma che vedono le loro origini provenire addirittura dalla stessa matrice culturale, ossia la civiltà greca. Il primo, ed inevitabile, momento di ricerca è stato quello storico, in cui si è cercato di mettere chiarezza su alcuni costrutti della teoria musicale, che pongono le loro basi su precise regole matematiche.

Mi preme sottolineare, per evitare fraintendimenti, che la nostra ricerca, dal punto di vista storico-epistemologico, prende in analisi un periodo ben preciso, cioè quello che va da Pitagora ad Aristosseno, ossia dal 500 a.C. al 300 a.C. circa. I motivi sono essenzialmente due, in ambito musicale si percepisce l'intenzione di costruire una teoria musicale su cui si possa fondare una nuova scienza musicale, in quello matematico si vive il grande passaggio dalla teoria pitagorica in cui "tutto è numero" alla grande innovazione del metodo ipotetico-deduttivo di Euclide. Così, un'attenta analisi delle opere di Filolao, Archita, Aristosseno fino ad arrivare a Platone, Aristotele ed Euclide ci ha dato lo spunto per poter avanzare delle ipotesi non solo sulla nascita della teoria musicale ma anche per quanto riguarda il concepimento della struttura ipotetico-deduttiva di cui il primo esempio scritto, pienamente compiuto, che sia giunto fino a noi è costituito dagli *Elementi* di Euclide. Crediamo infatti che, sia pure in misura più limitata e meno rigorosa, il metodo ipotetico deduttivo abbia trovato un proprio terreno di applicazione anche in musica, in particolare con Aristosseno. Si ritiene, con questa parte del nostro lavoro, di poter dare un piccolo contributo alla ricerca epistemologica, mettendo più chiarezza nel quadro cronologico degli eventi. L'ultima parte del nostro lavoro riguarda la ricerca specifica in *didattica della matematica*. Ricerca, quest'ultima che si avvale in maniera sostanziale delle premesse storiche ed epistemologiche sviluppate nelle parti precedenti.

Il problema a cui facciamo riferimento per la sperimentazione è quello di *numero irrazionale*, concetto che affonda le sue radici sia in ambito matematico che in quello musicale[1], trovandosi, così, a cavallo tra due concezioni diametralmente opposte ma che si incastrano e si sviluppano parallelamente facendo venir fuori significati diversi e rappresentazioni nuove.

Quanto all'articolazione del lavoro. la tesi si divide in quattro capitoli, ognuno dei quali ha un proprio carattere e una sua identità, ma tutti concorrenti alla stessa problematicità, ossia il legame fra musica e matematica nelle sue diverse forme e sempre con un unico filo conduttore: la didattica (sebbene alcune questioni presentino un interesse storico epistemologico per sé stesse).

Nel primo capitolo si propongono materiali di base per un'elaborazione didattica che abbia per oggetto la matematica come strumento di rappresentazione e di comprensione dei fenomeni musicali e vengono esplorati i fondamenti tecnico-scientifici relativi alle scale, all'armonia, all'espressione musicale e ai suoi rapporti con le strutture matematiche. In questa parte, l'esigenza di evidenziare chiaramente i problemi è prevalente rispetto all'effettivo sviluppo storico che viene qui in qualche misura, e in via provvisoria, ignorato.

---

[1] Dice in proposito Borzacchini, dopo aver trattato l'origine geometrica del concetto di incommensurabilità: «*Esiste una tesi diversa sull'origine della incommensurabilità, che è stata in passato da Paul Tannery e in tempi più recenti da Árpád Szabó, il quale tuttavia la ritiene niente più che un inizio, e che fa riferimento a un problema musicale come punto di partenza. Da sottolineare che anche Walter Burkert riconosce nella teoria musicale la più genuina teoria matematica ascrivibile agli antichi pitagorici*» (Borzacchini, 2005).

Nel secondo capitolo si affronta in modo specifico la dimensione storica della nostra questione, nei suoi diversi aspetti. Particolare attenzione viene posta all'opera di Aristosseno, su cui si sviluppano tra l'altro alcune tesi e conclusioni che costituiscono una parte dei risultati originali di questo lavoro. L' *Armonica* di Aristosseno è qui riletta, da una parte alla luce di un lavoro di F. Bellissima che ne evidenzia la struttura fondamentalmente deduttiva, anche se con limitazioni sul piano del rigore, dall'altra guardando ad alcuni problemi posti da recenti pubblicazioni di R. Migliorato, G. Gentile, L. Russo. L'analisi qui condotta rivela già in Aristosseno un tentativo di superamento sia del dogmatismo pitagorico sia della fondazione metafisica della scienza deduttiva aristotelica, senza tuttavia attuare in modo chiaro il salto epistemologico osservabile nell'opera di Euclide. Tale superamento può essere visto dunque come un parziale avvicinamento a quella che Migliorato ha chiamato *rivoluzione euclidea*.

Nel terzo capitolo si propone una breve panoramica degli elementi della didattica della matematica che rientrano con forza nella trattazione di questa tesi. In particolare, abbiamo esplicitato l'ottica nella quale ci porremo, che rientra nell'attuale panorama della ricerca in didattica della matematica di scuola francese che accentra l'attenzione sul fenomeno dell'apprendimento da un punto di vista fondazionale. In questo senso, faremo riferimento a ciò che s'intende oggi per *didattica fondamentale* (Henry, 1991; D'Amore, 1999), ossia a tutto quanto concerne gli elementi di base della ricerca in didattica della matematica che traggono spunto dalle molteplici e complesse analisi del cosiddetto "triangolo della didattica": insegnante, allievo e sapere. In particolare, mostreremo in dettaglio le chiavi di lettura fondamentali per affrontare l'analisi dei successivi capitoli.

Il quarto capitolo costituisce la parte conclusiva dell'intero lavoro, contenendo lo sviluppo teorico sperimentale della specifica ricerca nell'ambito proprio della didattica della matematica. Più precisamente sono formulate le ipotesi didattiche specifiche, la descrizione della fase sperimentale ed infine l'analisi dei risultati.

CAP. I - MODELLI MATEMATICI E ARMONIA MUSICALE

I.1 Premessa

Uno degli ostacoli specifici più sentiti nella didattica della matematica è quello derivante dalla difficoltà di attrarre l'interesse degli alunni su una disciplina che per sé stessa appare lontana dalle esperienze quotidiane. Da ciò deriva l'importanza di evidenziare l'estrema duttilità dello strumento matematico nella modellizzazione delle più diverse situazioni del mondo reale e delle attività umane.

In questo senso la modellizzazione delle strutture musicali può avere un ruolo significativo nell'attrarre e coinvolgere l'attenzione di ragazzi di varie età e ordini scolastici. Il presente lavoro si propone come un possibile materiale di base che, con gli opportuni adattamenti didattici può essere utilizzati per diversi ordini scolastici e fasce di età.

Il sistema musicale adottato in occidente fin dai tempi molto antichi (che la tradizione fa risalire a Pitagora) è fondato su una scala che ha come propria base il rapporto tra i suoni prodotti da una corda vibrante di una certa lunghezza e la stessa corda di lunghezza dimezzata. Oggi sappiamo che con il dimezzarsi della lunghezza della corda, a parità di altre condizioni, si ottiene un suono di frequenza doppia, per cui le due forme d'onda finiscono per fondersi perfettamente costituendo la base fisica dell'armonia musicale. E' per ciò che il rapporto 2:1 viene assunto come base della scala. Precisamente le note aventi tale rapporto, prendono lo stesso nome e vengono distinte tra loro da un indice (ad esempio do_1, do_2, oppure sol_1, sol_2, ecc.).

Il problema che si pone è di suddividere questo intervallo in parti tali che

1) l'intervallo sia vicino al minimo avvertibile dall'orecchio.

2) vi siano tra le note rapporti semplici e musicalmente armonici.

Ciò che si comprese fin dall'antichità, è che l'armonia musicale è strettamente legata ai rapporti numerici che sussistono tra certe grandezze misurabili sullo strumento che produce i suoni. Tale grandezza per gli strumenti a corda è la lunghezza della corda per uno strumento a fiato può essere la lunghezza della canna, ecc... Ciò che importa è comunque l'avere compreso come l'armonia tra i suoni si genera quando le grandezze in gioco hanno tra loro dei rapporti semplici, esprimibili cioè mediante una frazione m/n come m ed n numeri interi piccoli. La spiegazione fisica apparirà più avanti quando si affronterà appunto l'aspetto fisico del suono e delle sue caratteristiche, nonché delle relative rappresentazioni matematiche.

Come già accennato sopra, la tradizione attribuisce a Pitagora[2] la formulazione della prima scala musicale. In realtà della figura reale di questo grande filosofo si sa ben poco, a causa anche della segretezza che veniva imposta ai membri della sua scuola. E' difficile quindi separare ciò che realmente è stato da lui prodotto da quanto è stato elaborato dai suoi seguaci anche in

[2] Pitagora di Samo, fondò a Crotone la sua scuola filosofica (ma anche religiosa e politica) quando vi si trasferì dalla Grecia, verso il 530 a.C. Tale scuola, strutturata come una setta esoterica, prosperò per una trentina d'anni, fino a che, in seguito ad una rivolta antiaristocratica, i pitagorici, che sostenevano una visione rigidamente aristocratica del governo cittadino furono perseguitati e cacciati; la scuola fu bruciata, e Pitagora fuggì a Metaponto, dove morì poco dopo.

tempi successivi. Noi tuttavia riferiamo qui ciò che gli viene attribuito dalla tradizione, rifacendoci in particolare al racconto di Giamblico[3]. Sarebbe stata una intuizione musicale che avrebbe permesso a Pitagora di formulare quel legame fra matematica e natura che costituisce, probabilmente, la scoperta più feconda della storia dell'intero pensiero umano.

Secondo Giamblico, dunque, la storia è la seguente. Un giorno Pitagora passando di fronte all'officina di un fabbro, si accorse che il suono dei martelli sulle incudini era a volte consonante, e a volte dissonante. Incuriosito, entrò nell'officina, si fece mostrare i martelli, e scoprì che quelli che risuonavano in consonanza avevano un preciso rapporto di peso. Ad esempio, se uno dei martelli pesava il doppio dell'altro, essi producevano suoni distanti un'ottava. Se invece uno dei martelli pesava una volta e mezza l'altro, essi producevano suoni distanti una quinta.

Tornato a casa, Pitagora avrebbe fatto alcuni esperimenti con nervi di bue in tensione, per vedere se qualche regola analoga valesse per i suoni generati da strumenti a corda, quali la lira. Sorprendentemente, la regola era addirittura la stessa. Ad esempio, se una delle corde aveva lunghezza doppia dell'altra, esse producevano suoni distanti un'ottava. Se invece una delle corde era lunga una volta e mezza l'altra, esse producevano suoni distanti una quinta.

In "*perfetto stile scientifi*co", dall'osservazione e dall'esperimento Pitagora avrebbe indotto una teoria: la coincidenza di musica, matematica e natura. Più precisamente, avrebbe supposto che ci fossero tre tipi di musica: quella strumentale propriamente detta, quella umana suonata dall'organismo, e quella mondana suonata dal cosmo. La sostanziale coincidenza delle tre musiche era responsabile da un lato dell'effetto emotivo prodotto, per letterale risonanza, dalla melodia sull'uomo, e dall'altro della possibilità di dedurre le leggi matematiche dell'universo da quelle musicali[4].

Poiché nelle leggi dell'armonia scoperte da Pitagora intervenivano soltanto i numeri frazionari, detti anche numeri razionali, ed i rapporti armonici corrispondevano perfettamente a rapporti numerici, Pitagora avrebbe riassunto la sua scoperta nella famosa massima: *tutto è numero* (intero).

I.2 Sistemi di accordatura

Prima di affrontare più dettagliatamente il sistema musicale pitagorico è opportuno introdurre la questione in maniera leggermente più generale, al fine di comprenderne meglio il significato e i limiti. Il problema della determinazione della scala è strettamente legato alla questione dell'accordatura, ossia dell'individuazione e della fissazione degli intervalli costituiti da una scala.

Partiamo dunque dal fatto ormai accettato di considerare come fondamentale l'intervallo espresso dal rapporto 2/1. Chiamiamo dunque con lo stesso nome due note che si ottengono dimezzando la lunghezza di una corda (o, anticipando quanto si dirà più avanti, raddoppiando la frequenza del suono), distinguendole mediante un indice. Così ad es: chiamiamo Do_1 la nota che ha una certa frequenza f e Do_2 quella di frequenza $2f$. Il problema è allora quello di dividere

[3] Giamblico visse tra il terzo e la fine del quarto sec. D.C. Scrisse varie opere sul pitagorismo ed in particolare una Vita di Pitagora. Anche se possiamo ritenere che egli potesse disporre di scritti che oggi sono scomparsi, non c'è dubbio che la gran parte delle notizie riportate sono di origine incerta e leggendaria.

[4] L'idea di un'armonia cosmica analoga all'armonia musicale, è fatta proprio da Platone, che nel *Timeo*, descrivendo la genesi dell'universo per opera di un demiurgo, suppone che l'intero cosmo venga suddiviso secondo intervalli che corrispondono alla scala musicale pitagorica. La stessa idea è all'origine dell'*armonia delle sfere*, così presente nel paradiso di Dante, ma che si trova già alla base dello stesso sistema tolemaico.

l'intervallo 2/1 in 7 intervalli, in modo che il Do_2 sia l'ottava nota a partire dal Do_1. E' per ciò che l'intervallo così determinato si dice intervallo di ottava.

Tale ripartizione può effettuarsi secondo due sistemi diversi: 1. Sistema partitivo; 2. Sistema divisivo.

I.2.1 Sistema partitivo.

Per maggiore generalità, supponiamo dapprima che l'intervallo 2/1 si debba dividere in un numero n qualsiasi di intervalli, per poi considerare il caso particolare in cui $n = 7$. Si decide a priori il numero n di intervalli (tutti rappresentati dalla stessa proporzione x, (o, come si dice, equalizzati) in cui ripartire l'intervallo originario 2/1. In altri termini, stabilito il numero n di note aventi nomi diversi, vogliamo che il rapporto tra due note successive sia x. Se indichiamo con

$$a^0 = Do_1, \quad a^1, \quad a^2, \quad \cdots \quad , \quad a^n = Do_2$$

le n note dell'intervallo più la prima nota Do_2 dell'intervallo superore (l'ottava se le note sono sette), e supposto che siano

$$f_0, \quad f_1, \quad f_2, \quad \cdots \quad , \quad f_n$$

le rispettive frequenze, si deve avere che

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \cdots = \frac{f_n}{f_{n-1}} = x$$

e quindi

$$x^n = \frac{f_n}{f_0} = \frac{2}{1} = 2,$$

e cioè $x = \sqrt[n]{2}$, in particolare $x = \sqrt[7]{2}$ se, come realmente avviene, si decide di dividere l'intervallo in 7 note. In questo modo però il rapporto tra due note successive sarebbe un numero irrazionale, mentre secondo l'intuizione pitagorica (ma anche per ragioni fisiche su cui si dirà più avanti), l'armonia musicale si ha quando il rapporto tra due note è una frazione con termini piccoli.

Sebbene il sistema partitivo non sia idoneo a produrre suoni armonici, conviene considerare ancora la scala partitiva perché rende più comprensibile la soluzione pitagorica e gli stessi limiti di una qualunque scala musicale. Consideriamo allora una scala partitiva di sette note. I rispettivi rapporti rispetto alla prima nota sono allora:

$$1 = x^0, x^1, x^2, \ldots, x^7, x^{7+1}, \ldots$$

Ma a partire dalla ottava, le note si ripetono con gli stessi nomi e quindi possiamo porre $x^0 = x^7$, $x^1 = x^8$, … , $x^n = x^{7+n}$, ottenendo così un *gruppo ciclico* rispetto alla moltiplicazione. In una scala così fatta, il rapporto tra due note successive è costante, ed inoltre dopo sette note il ciclo si chiude e si ritrova esattamente la nota di frequenza doppia. Tuttavia, musicalmente questa scala non è funzionale perché non dà luogo ad accostamenti armonici tra suoni che non siano quelli che differiscono di un'ottava.

I.2.2 Sistema divisivo

I valori dei singoli intervalli (cioè il rapporto tra una nota e la successiva) costituenti la scala vengono ottenuti sulla base di criteri stabiliti a priori, anche se non risultano equalizzati.

L'applicazione del sistema partitivo e di quello divisivo possono dar luogo ad un numero ipoteticamente infinito di scale, perché indefinitamente si possono variare sia il numero di intervalli equalizzati in cui dividere l'intervallo di 2:1, sia la tipologia degli intervalli costituenti la scala; possono quindi essere in teoria in numero infinito i sistemi di accordatura.

Nella pratica e soprattutto nella teoria musicale tale numero, per quanto ampio in relazione alla diversità delle culture musicali nel tempo, viene fortemente limitato da un lato dalla capacità dell'orecchio umano di percepire differenze intervallari inferiori ad una certa soglia, dall'altro dalla tendenza "normalizzatrice" della teoria musicale.

I.3 Accordatura pitagorica

In questo tipo di accordature, dominante nella musica occidentale fino al XV secolo, la misura degli intervalli costituenti la scala eptafonica viene stabilita sulla base delle proporzioni. Il principio base per ottenere tali intervalli si fonda oggi sulla legge fisica di proporzionalità indiretta fra la lunghezza *l* della corda vibrante e la frequenza *f* del suono ottenuto. Se dunque da una corda vibrante li lunghezza *l* si ottiene il suono *a* di frequenza *f*, dalla metà della stessa corda (l/2) si ottiene, a parità di altre condizioni (stessa tensione, stessa pressione dell'aria, stesso procedimento di eccitazione delle corde, ecc.), il suono *b* di frequenza *2f*; dalla terza parte delle corde (l/3) si ottiene il suono *c* di frequenza *3f*, e così via. Poiché lungo la scala eptafonica gli intervalli si susseguono ripetendosi nello stesso ordine di ottava in ottava, per delineare le caratteristiche di tale scala è sufficiente identificare gli intervalli all'interno di una sola ottava tipo. Chiameremo quindi con lo stesso nome le note che differiscono di un intervallo 2/1 (intervallo di ottava). Si può dunque, fissando la frequenza di una nota interna a questo intervallo, provare a procedere individuando le frequenze delle altre note come si è fatto per il sistema partitivo, cioè come se si trattasse di un gruppo ciclico di ordine 7, dove due note sono fra loro congrue *mod* 7 se una ha frequenza doppia dell'altra. Sappiamo già che in realtà questo ciclo non si può chiudere, tuttavia è una buona idea di riferimento.

La seguente tabella ci indica chiaramente la procedura dove con 0 si indica l'elemento identità del gruppo, mentre gli altri elementi sono 1, 2, 3, 4, 5, 6, ed in particolare l'elemento 4 corrisponde all'intervallo di quinta.

Gruppo ciclico di Ordine 7	**Nome della Nota**	**Valore dell'intervallo a partire dal Do$_1$**	**Osservazioni**
0 = identità	Do	1	
$0+4=4$	Sol	$\frac{3}{2}$	Intervallo di quinta
$4+4=8\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7)$	Re	$\frac{3}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}=\frac{9}{8}$	Intervallo di un tono
$1+4=5$	La	$\frac{3}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}=\frac{27}{16}$	
$5+4=8\equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7)$	Mi	$\left(\frac{3}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{81}{64}$	
$2+4=6$	Si	$\left(\frac{3}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{243}{128}$	
$6+4=10\equiv 3 (\mathrm{mod}\, 7)$	Fa**?**	$\left(\frac{3}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{729}{512}$	Questo valore è insoddisfacente

Nell'ultima riga si ha già un valore troppo alto e quindi troppo vicino alla nota successiva che è il sol e corrisponde all'intervallo di 3/2 (intervallo di quinta). Ed infatti si ha l'intervallo

$$\frac{3}{2} : \frac{729}{512} = \frac{256}{243} = 1,053$$

intervallo troppo piccolo rispetto al valore dell'intervallo di un tono, pari a $\frac{9}{8}$=1,125.

Per ottenere il Fa si preferisce allora partire dal Do superiore (ottava) scendendo di un intervallo di quinta, cioè di quattro toni. L'ultima riga della tabella diventa allora

$0 \equiv 7 \pmod 7$ $7-4=3$	Fa	$\frac{2}{1} : \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$	

Anche così ovviamente il ciclo non si chiude, e si vedrà più avanti in che modo il problema viene risolto (o aggirato) in epoca moderna, ma prima vogliamo dare un ulteriore sguardo storico alla scala pitagorica.

Platone, che certamente aveva appreso queste cose da Archita di Taranto (considerato l'ultimo dei pitagorici propriamente detti), procede in un modo leggermente diverso[5]. Nell'intervallo di ottava (cioè tra di 2/1) considera prima i due punti che si ottengono rispettivamente come media armonica e come media aritmetica. Precisamente:

$$\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{4}{3}$$

corrispondente alla nota Fa

$\frac{a_2 + a_1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ corrispondente alla nota Sol

L'intervallo tra il Fa e il Sol è allora: $\frac{3}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$ corrispondente all'intervallo di un tono, quello cioè tra il primo Do e il Re immediatamente seguente. I due intervalli di quinta, rispettivamente tra il primo Do e il successivo Sol e tra il Fa e il Do superiore (ottava), sono ora en-

[5] «[Il demiurgo] *Cominciò a dividere così: prima tolse dal tutto una parte, dopo di questa tolse una doppia della prima, quindi una terza, una volta e mezzo più grande della seconda e il triplo della prima, poi una quarta doppia della seconda, una quinta tripla della terza, una sesta che era otto volte la prima, una settima ventisette volte più grande della prima. Dopo di ciò, riempì gli intervalli doppi e tripli, tagliando ancora dal tutto altre parti e ponendole in mezzo a questi intervalli, sicché in ciascun intervallo vi fossero due medi, ed uno superasse gli estremi e fosse superato della stessa frazione di ciascuno di essi, mentre l'altro superasse e fosse superato dallo stesso numero. Originandosi da questi legami nei precedenti intervalli nuovi intervalli di uno e mezzo, di uno e un terzo, e di uno e un ottavo, riempì tutti gli intervalli di uno e un terzo con l'intervallo di uno e un ottavo, lasciando una piccola parte di ciascuno di essi, in modo che l'intervallo lasciato di questa piccola parte fosse definito dai valori di un rapporto numerico, come duecentocinquantasei sta a duecentoquarantatré*». PLATONE: *Timeo*,VII, 35b-36b. Il brano sopra riportato, è un passo di una più ampia descrizione che Platone, ponendola in bocca a Timeo, fa in forma mitica, della generazione del mondo da parte di Dio. L'universo è qui visto come un immenso essere vivente di cui gli esseri terrestri, tra cui l'uomo, non sono che una parte. L'Universo stesso dunque è unione di un corpo corruttibile con un'anima incorruttibile indivisibile e immutabile. In particolare, nel brano citato, dopo avere unito l'anima e il corpo dell'Universo, facendone un'entità unica, Dio lo ripartisce secondo intervalli che corrispondono all'armonia musicale. A ciò fa riferimento Dante, per citare solo un esempio, tutte le volte che, particolarmente nel Paradiso, allude alla cosiddetta *Armonia delle sfere*. (Purg XXX, 91-93; Par I, 73-84 ; Par I, 103-105; Par VI, 124-126; Par X, 73-75 ; Par XIV, Par XV, 4-6; 118-129; Par XXXIII, v.124-126 ; Par XXIII, 103-111 ; Convivio, Tratt. 2, 13; Convivio, canzone 1) V. anche CHIARA RICHELMI (2001).

trambi di $\frac{3}{2}$ e Platone li riempie entrambi con intervalli di $\frac{9}{8}$ (cioè di un tono). Precisamente nel primo intervallo:

$$\frac{9}{8}\frac{9}{8}=\frac{81}{64} \text{ corrispondente al Mi,}$$

e nel secondo intervallo:

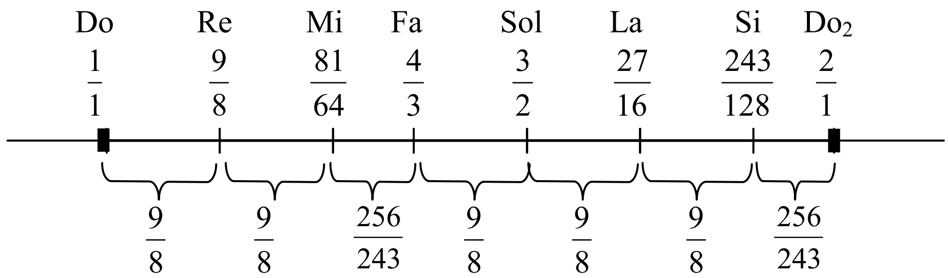
$$\frac{3}{2}\frac{9}{8}=\frac{27}{16} \text{ corrispondente al La,}$$

$$\frac{27}{16}\frac{9}{8}=\frac{243}{128} \text{ corrispondente al Si.}$$

Ora però ci si trova di fronte a due intervalli, il primo tra il Mi e il Fa, il secondo tra il Si e il Do superiore (ottava), che non corrispondono ad un tono (cioè a 9/8), infatti:

$$\frac{4}{3}:\frac{81}{64}=\frac{2}{1}:\frac{243}{128}=\frac{256}{243}\ .$$

Nel grafico seguente, che illustra la scala pitagorica così come è descritta da Platone, sono indicati chiaramente gli intervalli di $\frac{9}{8}$ e quelli di $\frac{243}{128}$. Come si vede la scala risultante coincide con quella già precedentemente trovata.



L'impossibilità di far chiudere il circolo delle quinte mediante intervalli razionali semplici, è rimasto nell'antichità un problema irrisolto e irrisolvibile.

Vedremo ora invece, come si procede nella scala musicale moderna.

I.4 La scala cromatica moderna

Senza soffermarci sui vari passaggi che a partire dal Rinascimento hanno portato all'adozione della moderna scala cromatica, vediamo quale risposta viene data al problema precedentemente incontrato. Come si è visto, l'intervallo di un tono è troppo elevato per consentire una chiusura del ciclo. D'altra parte la scelta di un intervallo tonale in grado di chiudere il ciclo delle quinte, contrasterebbe con la legge dell'armonia che vuole gli intervalli costituiti da rapporti razionali semplici.

Vedremo tra poco la soluzione adottata. Osserviamo intanto che nella scala pitagorica illustrata nella precedente sezione, vi sono cinque intervalli di $\frac{9}{8}$, valore che viene assunto come misura di *un tono*, e due intervalli $s = \frac{256}{243}$. Ma si può facilmente constatare che se da una nota qualsiasi, si cresce per due volte consecutive di un intervallo pari ad s, l'intervallo complessivamente ottenuto è molto vicino ad un tono, infatti

$$\frac{9}{8} : \left(\frac{256}{243}\right)^2 = \frac{531441}{524288} < 1 + \frac{14}{1000}$$

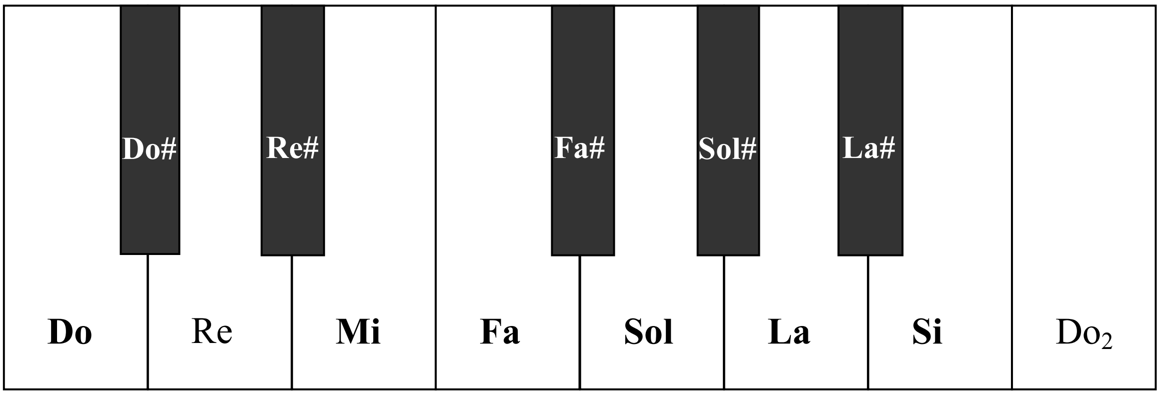
Si può quindi decidere di assumere l'intervallo *s* come misura di un semitono.

Tornando ora al modo in cui si è costruita la prima tabella delle note, si ricorderà che arrivati al Fa, si era scartato il valore di $\frac{729}{512}$ perché troppo vicino a quello del successivo Sol. Con questo infatti rimarrebbe un intervallo di

$$\frac{3}{2} : \frac{729}{512} = \frac{256}{243}$$

cioè esattamente di un semitono. Si decide allora di chiamare Fa-diesis la nota corrispondente a $\frac{729}{512}$.

Partendo da qui e incrementando ogni volta di un tono (ed ovviamente scendendo, quando occorre, di un'ottava, per rientrare nell'intervallo di riferimento) si ottengono infine altre quattro note che verranno a riempire con semitoni, tutti gli intervalli di un tono. Si ha quindi la *scala cromatica* di dodici note, separate tra loro da un intervallo di un semitono, che formano, come nella figura che segue, la tipica tastiera a tutti nota.



Le note indicate con il simbolo # (*diesis*) sono dette anche note alterate e differiscono di un semitono da quelle che le precedono. Le *Alterazioni,* dunque, sono segni grafici che posti davanti ad una nota servono a modificare verso l'alto o verso il basso l'intonazione della nota stessa. Sono in tutto cinque e vengono chiamate: diesis, bemolle, doppio diesis, doppio bemolle e bequadro. Di queste si è già visto il significato del diesis; per semplicità tralasciamo i particolari delle altre alterazioni e diciamo solo che il *bemolle* (*b*) abbassa la nota di un semitono ed ha quindi un effetto opposto al diesis. Per il resto si può vedere un qualunque manuale di teoria musicale.

I.5 Perché l'armonia richiede rapporti semplici?

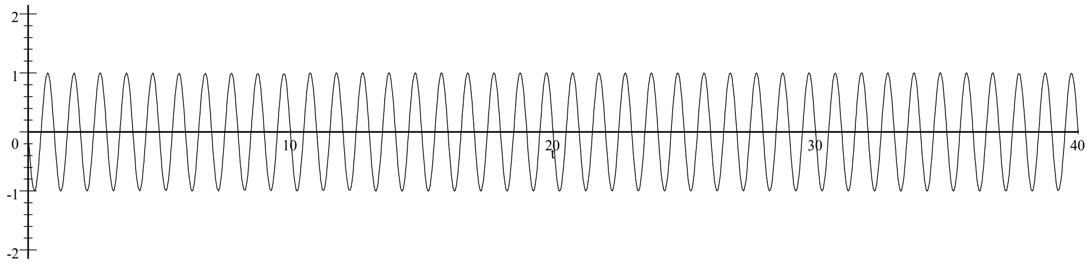
Sebbene la spiegazione completa di tutti i possibili accostamenti che all'orecchio risultano armonici può essere notevolmente complessa, il principio fondamentale dell'armonia si può spiegare con molta semplicità. Basta infatti considerare le equazione di due onde le cui frequenze stiano in un determinato rapporto, costruirne il grafico mediante uno dei tanti prodotti software in commercio, ed infine costruire con lo stesso sistema il grafico dell'onda risultante dalla loro sovrapposizione.

Siano rispettivamente f ed $\frac{m}{n}f$, le frequenze delle due onde componenti. I rispettivi periodi staranno allora nel rapporto inverso, cioè se p è il periodo della prima onda, quello della seconda è $\frac{n}{m}p$. Ne segue che se ad un certo istante t le due onde sono in fase, esse torneranno ad esserlo dopo che la prima ha compiuto n periodi e conseguentemente la seconda ne avrà compiuto m. La frequenza dell'onda risultante sarà allora pari a nf. Già da qui si evince che se il rapporto delle frequenze è irrazionale, il suono risultante non avrà più una periodicità esatta, ma anche nel caso di rapporti razionali i cui termini siano molto alti non darà luogo ad una periodicità facilmente percepibile dall'orecchio. Naturalmente le cose si complicano se si analizza cosa avviene all'interno di ciascun periodo dell'onda risultante. Se infatti supponiamo che le due componenti siano sinusoidali, all'interno di ciascun periodo si avranno punti in cui le onde componenti, avendo lo stesso segno si sommano, altri in cui avendo segni contrari si elidono, dando luogo complessivamente ad una serie di oscillazioni con andamento più o meno irregolare, ma il cui inviluppo può presentare delle regolarità evidenti. Non è difficile, a questo punto, mettere in relazione la percezione altamente gradevole dei suoni armonici, con la regolarità delle onde risultanti. Naturalmente la sovrapposizione di suoni ha luogo fisicamente solo quando i suoni sono contemporanei, mentre nel caso di note che si succedono, è la mente ad elaborare il confronto di un suono in atto con la memoria di uno ascoltato immediatamente prima.

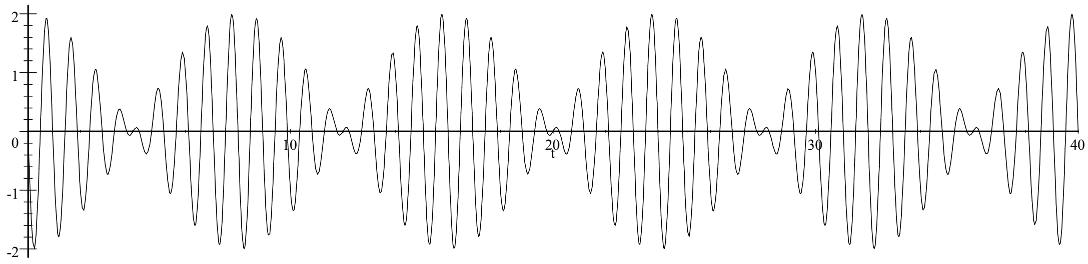
Qui di seguito sono rappresentati i grafici di alcune funzioni d'onda particolarmente significativi.

Il primo illustra l'onda di equazione $f(t) = sen(-2\pi t)$, che assumeremo come onda di riferimento. I tre grafici successivi illustrano le funzioni $f(t) = sen(-2\pi t) + sen\left(-2\frac{m}{n}\pi t\right)$ ottenute sovrapponendo all'onda di riferimento quella che si ottiene incrementando la frequenza secondo un rapporto razionale pari a $\frac{m}{n}$. L'ultimo grafico, visibilmente irregolare, illustra invece il caso in cui si sovrappone un'onda la cui frequenza sta con quella di riferimento secondo il rapporto irrazionale $\sqrt{2}$.

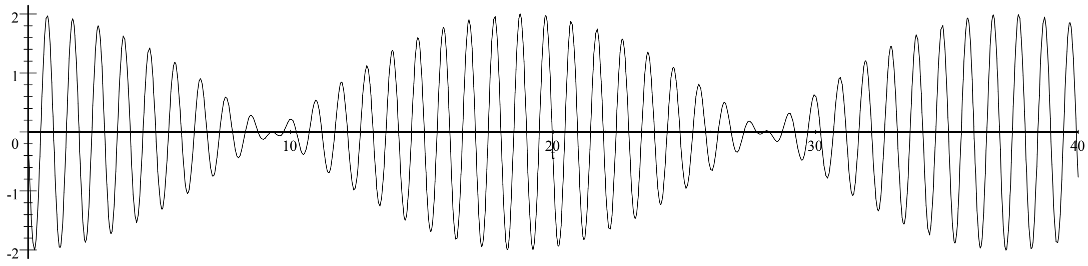
1. $f(t) = sen(-2\pi t)$



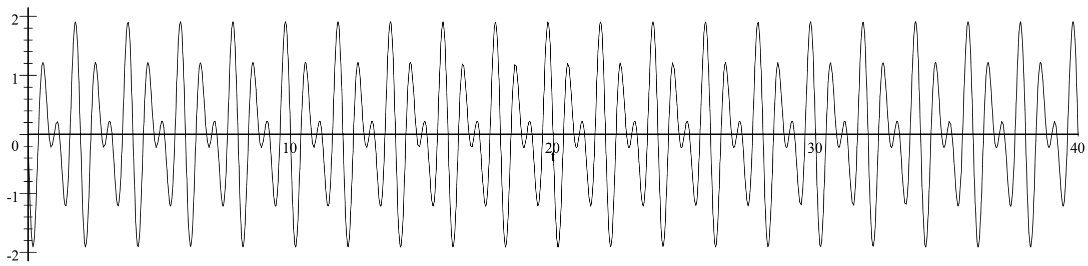
2. $f(t) = sen(-2\pi t) + sen\left(-2\frac{9}{8}\pi t\right)$ (intervallo di un tono).



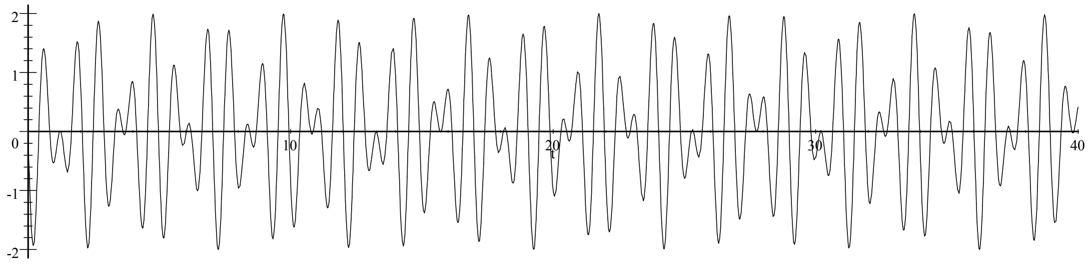
3. $f(t) = sen(-2\pi t) + sen\left(-2\frac{256}{243}\pi t\right)$ (intervallo di un semitono).



4. $f(t) = sen(-2\pi t) + sen\left(-2\frac{3}{2}\pi t\right)$ (intervallo di quinta).



5. $f(t) = sen(-2\pi t) + sen(-2\sqrt{2}\pi t)$ intervallo irrazionale.



Dal punto di vista didattico può essere utile, partire dalla costruzione dei grafici[6], per cercare poi di spiegare, in termini matematici, le ragioni delle regolarità e delle irregolarità.

[6] In questo caso i grafici sono stati ottenuti con *Maple*, ma può essere utilizzato qualunque altro programma del genere tra quelli in commercio.

CAP. II - DA PITAGORA AD ARISTOSSENO

II.1 Premessa

È ormai chiaro come la letteratura più recente, sia pure da diversi angoli visuali e con diverse accentuazioni, tenda a rimarcare la sostanziale autonomia e originalità della scienza ellenistica rispetto alle concezioni scientifiche e filosofiche precedenti[7]. La presente nota prende avvio, in particolare, da due lavori di Migliorato (2005) e di Gentile e Migliorato (2005), nei quali emerge con chiarezza l'ipotesi di un sostanziale mutamento nei fondamenti epistemologici dell'indagine scientifica, iniziato presumibilmente con Euclide[8] e proseguito per oltre un secolo, coinvolgendo successivamente scienziati come Archimede e Apollonio. In particolare, Migliorato (2005) fa riferimento ad un "paradigma euclideo" che verrebbe a contrapporsi ad un precedente "paradigma aristotelico", con l'avvertenza però che tali denominazioni debbano essere assunte con un valore puramente convenzionale e non come assoluta e certa attribuzione rispettivamente

[7] La diversità della cultura ellenistica rispetto alla cultura greca precedente fu esplicitamente teorizzata per la prima volta intorno alla metà del XIX sec. da Johann Gustav Droysen che ne mise in evidenza i caratteri di originalità, introducendo anche il termine "ellenismo". Questo termine fu infatti da lui usato per indicare l'ambito di egemonia greco-macedone in una vasta area del Mediterraneo orientale e dei territori conquistati da Alessandro, a partire dalla formazione dei regni successivi alla morte del grande conquistatore (Droysen, 1836 -1843). Vedi anche quanto sostenuto da Canfora (1995) e da Migliorato (2005). La difficoltà di analizzare il periodo in questione (in particolare III e II sec. a.C.) è dovuta alla carenza quasi totale di fonti primarie, mentre le testimonianze dei secoli successivi che ci sono giunte sembrano volerne prendere le distanze, quasi a rimuovere le concezioni che prevalentemente erano state elaborate in quel periodo. Basta pensare come l'intero corpus del pensiero filosofico sviluppato a partire dal III secolo nell'ambito delle tre scuole prevalenti (Stoica, Epicurea, Scettica), non solo ci è pervenuto in forma assolutamente frammentaria, ma i testimoni temporalmente più prossimi su cui si può fondare una ricostruzione, si pongono generalmente in posizione di rifiuto più o meno radicale, manifestando talvolta anche sarcasmo e acredine, come è per esempio nel caso di Galeno nei confronti di Crisippo (cfr. Isnardi Parente (1994)). Gentile e Migliorato (2005) osservano come i soli testi di una certa entità sopravvissuti in forma più o meno integra, sono opere matematiche (Euclide, Archimede, Apollonio) altamente formalizzate, scritte pertanto in uno stile "asettico" che non lascia trasparire specifiche visioni del mondo e ipotizzano quindi che proprio questo carattere, questa assenza di pronunciamenti sulla verità e sull'essere, abbia consentito la loro sopravvivenza, sottraendoli all'abbandono e all'oblio. Il momento cruciale della selezione che, ha determinato la sopravvivenza di determinate opere e la morte di altre, si può collocare a partire dal I sec. d.C., quando si passa dalla scrittura su papiro, materiale estremamente deperibile, alla scrittura su pergamena. `E proprio in questa fase che vengono ricopiati, con priorità i testi ritenuti al momento più validi e meritevoli, ed appare ovvio che questi abbiano avuto una ben più alta probabilità di sopravvivenza rispetto a quelli non copiati. E ciò, probabilmente, non solo per la diversa deperibilità dei due materiali. Dice ad esempio Noel (2007, pp. 106-107): «*Niente è più pericoloso per i contenuti dei vecchi documenti di un perfezionamento nelle tecnologie informatiche, poiché esso richiede un trasferimento in massa dei dati, e qualcuno deve farlo. La transizione dal rotolo al codice - il formato di libro in uso ancor oggi – fu la prima vera rivoluzione nella storia della memorizzazione dei dati [...] Un codice di 200 fogli (400 pagine) alti 15 centimetri ha la stessa area potenziale per immagazzinare dati di un rotolo della stessa larghezza e lungo 600 metri [...] Inoltre per accedere ai dati raccolti su un rotolo è necessario esplorarne l'intera lunghezza [...] C'è una grossa differenza tra "srotolare" e "sfogliare" [...] I testi antichi che non subirono la transizione da rotolo a codice sparirono. Gli antichi si disfarono dei loro rotoli per la stessa ragione per cui noi abbiamo abbandonato i nostri dischi di vinile a 78 giri: erano diventati un sistema di registrazione dei dati obsoleto*».

[8] Sebbene Euclide viene posto tra la fine del IV e l'inizio del III sec. a.C., la sua attività nell'ambito del Museo di Alessandria è probabilmente da collocare non prima dell'inizio del III secolo (cfr. Gentile e Migliorato, 2005).

ad Euclide e ad Aristotele delle categorie concettuali che tali espressioni intendono rappresentare. Nel presente lavoro, un'attenta lettura del trattato sull'armonia di Aristosseno, sembra dare ragione sia all'ipotesi di una rottura epistemologica che si sarebbe verificata dopo Aristotele, sia alle cautele con cui se ne individua il momento iniziale e l'attribuzione dei paradigmi. Sembra infatti emergere da quest'opera una posizione che prelude, per molti aspetti, a quello che Migliorato (2005) chiama "paradigma euclideo" e ad una esplicita presa di distanza da una visione che sommariamente possiamo qui definire pre-scientifica e di cui analizzeremo meglio più avanti le connotazioni. Per chiarire i termini della questione, è necessario innanzitutto riprendere alcuni dei punti essenziali dei lavori citati di Migliorato e Gentile (2005) e di Migliorato (2005). Aristotele poneva quale condizione per la corretta fondazione di una scienza dimostrativa, che si individuassero delle premesse non ulteriormente dimostrabili, ma che per la loro stessa autoevidenza fossero indubitabilmente vere e incontrovertibili. Ora questa richiesta può apparire ineludibile fino a quando si chiede alla scienza di dare una descrizione di una realtà oggettiva esistente in sé e di presentarla nella sua effettiva essenza. Ed è stata proprio questa richiesta che ha frenato e condizionato invece per secoli lo sviluppo della scienza dei "fenomeni" come scienza possibile, fino a quando il criterio dell'autoevidenza non è stato superato, con la rivoluzione scientifica moderna, in favore di una più pragmatica corrispondenza tra previsione e fenomeno. Ma la rivoluzione scientifica dell'età moderna non sembra essere stata, come molti hanno ritenuto, un fatto assolutamente nuovo e inedito nel corso della storia. Sicuramente in epoca ellenistica vi fu un momento di forte affermazione di questo approccio alla conoscenza scientifica, approccio poi presto abbandonato, e sicuramente Alessandria ne fu il centro propulsivo.

La problematica che qui si è voluto affrontare nasce da alcune recenti ricerche che si muovono in questa direzione e particolarmente da un problema sollevato da Migliorato (2005) sulle concezioni che in quel contesto vengono indicate come *rivoluzione euclidea* e *paradigma euclideo*.

Quel lavoro, infatti, si fonda essenzialmente sul confronto tra il testo di Euclide e le precedenti enunciazioni teoriche di Aristotele, rilevandone sia gli aspetti di continuità sia, soprattutto, le sostanziali differenze. Tutto ciò assume il significato di un mutamento di paradigma se analizzato nel contesto di un preciso quadro teorico che in larga misura può essere riferito alle idee di Thomas Kuhn (1970), sia pure con le limitazioni e le precisazioni già espresse da Migliorato[9].

L'elemento di rottura epistemologica più significativo viene individuato nell'abbandono dell'evidenza dei postulati come criterio irrinunciabile della validità scientifica. Indipendentemente dal fatto, di per sé non facilmente rilevabile, che a questa rottura epistemologica corrisponda o meno un mutamento delle credenze circa l'essere e la verità, ciò che qui interessa è il mutamento del significato stesso di dimostrazione[10]. Se infatti per Aristotele doveva intendersi con questo termine solo il "sillogismo con premesse vere", questo significato viene a cadere quando il giudizio di verità è in qualche modo sospeso e quindi il giudizio di validità è necessariamente separato da esso.

Ma su che cosa, allora, può essere fondato il criterio di validazione di una premessa scientifica? La risposta che sembra emergere dai lavori citati, appare non del tutto univoca, presentando qualche differenziazione a seconda che le premesse scientifiche riguardino la spiegazione di fenomeni naturali (come nel caso dell'ottica) o di oggetti del puro pensiero (geometria, aritmetica). Nel primo caso, come sembra emergere con chiarezza nell'*Optica* e nei *Phaenomena* di

[9] Sebbene si faccia esplicito riferimento a Kuhn per quanto riguarda i concetti di "paradigma" e di "rivoluzione scientifica", Migliorato (2005) avverte esplicitamente di usare tali termini in un senso generico, come strumenti di analisi funzionali nel contesto dato, e non come totale adesione ad una pretesa di fondazione definitiva della scienza. Precisa inoltre che l'uso del termine "paradigma" nell'accezione più ristretta, definita da Kuhn nella seconda edizione de "La struttura delle rivoluzioni scientifiche" (Kuhn, 1970), sarebbe difficilmente utilizzabile per l'analisi della scienza ellenistica, anche (ma non solo) per l'insufficienza del materiale testuale disponibile.

[10] Per un approfondimento su tali questioni si vedano Migliorato (2005) e Gentile e Migliorato (2005).

Euclide, l'unica possibile giustificazione dei postulati scelti è quella di consentire una spiegazione razionale dei fenomeni. Nel secondo caso, almeno per ciò che riguarda il quinto postulato, il criterio di validazione può essere cercato nella sua idoneità a dare fondamenti logici rigorosi ad una precedente tradizione di risoluzione di problemi.

Al di là di questa ovvia differenziazione tra postulati matematici e postulati delle scienze empiriche, un filo unificatore può essere trovato nel fatto che in entrambi i casi il criterio di validità non è più "a priori" e non trova in se stesso la propria validazione, ma deve essere giustificato, possiamo dire "a posteriori", attraverso la sua idoneità a risolvere problemi e a consentire previsioni.

A questo punto la questione della effettiva priorità di Euclide nella formulazione di un paradigma scientifico fondato sulla validazione "a posteriori" delle premesse scientifiche, viene di fatto accantonata e rinviata, in quanto non necessaria al contesto di quello specifico lavoro di ricerca. Il problema tuttavia persiste. Dato infatti che nessuna opera matematica precedente quella di Euclide è giunta fino a noi, allo stato attuale dei fatti e delle conoscenze, non è possibile avere certezze ben fondate sulla questione in oggetto. Si potrebbe d'altronde supporre che ciò che è stato chiamato paradigma euclideo, sia in realtà l'atto finale e compiuto di un processo iniziato già in precedenza, eventualmente con approssimazioni, titubanze e contraddizioni, come generalmente avviene per ogni cambiamento di paradigma. Ovviamente se si ritrovassero nuovi materiali documentali (testi originali o testimonianze attendibili e significative) si potrebbe sperare di ricavare da esse informazioni utili ai fini di questo problema, ma allo stato dei fatti non sembra un evento probabile. Il tentativo che qui si vuole portare avanti è invece quello di trarre qualche ulteriore indicazione dalle fonti già note, rianalizzando queste, però, alla luce degli studi più recenti e delle ipotesi ora poste. In particolare tenteremo di rivedere il trattato sull'armonia di Aristosseno, non tanto dal punto di vista musicale come è solitamente avvenuto fino ad oggi, ma da un punto di vista più generale, quello di un'opera finalizzata comunque a "conoscere" qualcosa e a trarne delle conseguenze. Ciò verrà fatto assumendo come premessa quanto già citato in precedenza.

La tesi che viene sostenuta dagli autori è che, a partire dalle opere di Euclide, sarebbero stati accantonati i criteri di verità già sostenuti da Aristotele per la validità delle premesse scientifiche. Questi infatti richiedeva che le premesse scientifiche, per essere accettate come tali dovessero essere *vere, prime, immediate, più note della conclusione, anteriori ad essa, e che siano cause di essa*; Euclide, invece, lasciando cadere tanta assolutezza e rigidità, risultata peraltro sterile per la crescita della conoscenza, avrebbe assunto piuttosto come criterio, l'adeguatezza delle premesse ai fini di spiegare una classe di fenomeni o di dare fondamento rigoroso ad una pratica di risoluzione di problemi.

II.2 Il problema delle scale musicali da Filolao ad Archita

Naturalmente non si vuole qui esporre in modo esauriente il problema delle scale musicali, così come si è andato configurando fino ad Archita, cosa che sarebbe abbastanza ardua sia per la sua complessità che per l'esiguità delle fonti. Per altro si tratta di materia ampiamente studiata e che, almeno nelle sue linee generali, dobbiamo qui considerare nota. Vogliamo invece darne uno schema interpretativo che ci aiuti ad analizzare l'opera di Aristosseno in relazione al tema che ci siamo proposti di affrontare.

Per il fine di cui sopra, partiamo da due presupposti fondamentali che costituiscono la base della teoria musicale pitagorica: 1) due suoni sono armonici se e solo se le loro misure stanno tra loro in un rapporto razionale tra numeri sufficientemente piccoli; 2) il rapporto 2/1 (intervallo di ottava) è quello da considerarsi fondamentale.

Il problema diventa allora quello di dividere l'intervallo di ottava in intervalli più piccoli, conservando però la razionalità dei rapporti reciproci. Ora se si impone che gli intervalli siano uguali (cioè che sia costante il rapporto tra la misura di una nota e quella della nota successiva), è chiaro, alla luce delle conoscenze odierne, che il problema non può avere soluzione. Infatti qualunque sia n, indicando con x il rapporto tra due note consecutive, si dovrebbe avere in tal caso che $x^n = 2$ e quindi $x = \sqrt[n]{2}$ che è sempre un numero irrazionale (vedi quanto già detto in Sarritzu, 2004). Posta in questi termini la questione può apparire eccessivamente semplificata, tuttavia può dare un'idea delle difficoltà incontrate dalla scuola pitagorica nella ricerca di una scala fatta da gradini sufficientemente regolari, ma aventi tra loro rapporti rigorosamente armonici nel senso già chiarito.

La ricerca dei pitagorici si orientava dunque verso l'individuazione di rapporti frazionari semplici tra i diversi suoni della scala, e non potendo trovare, per quanto visto sopra, una frazione unica che valesse per tutti i gradini, bisognava operare delle scelte sulla base di qualche criterio. La questione che si può porre a questo punto è di capire se e in che misura una tale scelta possa avere elementi di arbitrarietà o, viceversa, in che modo possa essere individuato un criterio "oggettivo". La dottrina pitagorica, infatti, rimane legata, in forma più o meno dogmatica, all'idea che il carattere armonico degli intervalli musicali sia oggettivamente dato a priori e si trovi correlato a precise leggi aritmetiche, il che presuppone la ricerca di rapporti che in qualche modo fossero privilegiati rispetto ad altri. Ma è proprio questa pretesa che sembra costituire l'ostacolo principale ad una ricerca proficua nello studio dell'armonia musicale. A tal fine è opportuno riassumere qui brevemente quali fossero le principali proposte di suddivisione.

Una prima proposta di divisione del tono è stata data da Filolao (V sec. – inizio IV sec. a.C.). Si trattava ancora di una proposta impregnata di elementi mistici e di oscurità. Egli spiegava infatti che: «*l'anima è una specie d'accordo, perché accordo è mescolanza e composizione di contrari, e il corpo è composto di contrari*» (Timpanaro Cardini, 1958-62, v. 2, p. 179). Da questa definizione possiamo già intuire la visione pitagorica di Filolao, cioè quella visione aritmo-geometrica degli enti matematici. Per meglio capire il legame forte con la scuola pitagorica entriamo nel problema musicale, ossia la divisione del tono.

Premettiamo solo qualche concetto per meglio capire l'idea di base.

Il primo è quello di *medietà armonica*; questa si ha quando date tre grandezze a, b, c, risulta:

$(a - b) : a = (b - c) : c$

Il concetto di medietà armonica si lega strettamente a quello di armonia geometrica, che per Filolao è rappresentata dal cubo. Infatti si ha che:

$(12 - 8) : 12 = (8 - 6) : 6$

e d'altra parte 12 sono gli spigoli nel cubo, 8 sono i vertici, 6 le facce. Ciò premesso, la relazione che lega tali rapporti con l'armonia musicale, appare immediata se si osserva che gli intervalli

$$\frac{12}{6}=\frac{2}{1} \qquad \frac{12}{8}=\frac{3}{2} \qquad \frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

sono rispettivamente l'intervallo di ottava, di quinta e di quarta.

Inoltre, la struttura aritmo-geometrica del cubo, cioè il fatto che una figura geometrica fosse regolata da una legge aritmetica del tipo $n \times n \times n$ diede a Filolao lo spunto per tentare di dividere il tono in intervalli consonanti più piccoli[11].

[11] Se si parte da un suono assegnato (qui fissiamo convenzionalmente il Do), l'ottava nota è ovviamente il Do

Il passo di Boezio, unico documento che dà testimonianza di questo tentativo è tutt'altro che chiaro, anzi, come rilevato dalla Timpanaro Cardini (1958-62), è affetto da evidenti errori e fraintendimenti. Tuttavia nella scelta del numero 27 come numeratore della frazione 27/24 = 9/8 con cui egli fissava l'intervallo cercato, sembra indiscutibile il riferimento al 27 come cubo del primo numero dispari[12]. Filolao, trovato questo numero, lo divide in due parti, che ovviamente non sono uguali; la prima, quella più grande, che consta di 14 unità, la chiama apotome, la seconda, formata invece da 13 unità, la chiama diesis prima e semitono minore poi. La convinzione che quest'ultima parte dovesse essere composta da 13 unità si rafforzò perché proprio 13 è la differenza fra 256 e 243. Ricordiamo che il rapporto 256/243 determinava proprio il semitono ed era stato ottenuto scendendo di una terza a partire da una quarta, cioè:

$$\frac{256}{243} = \frac{4}{3} \div \frac{81}{64}$$

Altra motivazione è data dalla partizione del numero 13:

$13 = 9 + 3 + 1$

dove l'1 rappresenta il punto, il 3 la prima linea dispari e il 9 il primo quadrato dispari; ed inoltre la differenza (che Filolao definisce *comma*) fra l'*apotome*, che consta di 14 unità, e il *diesis*, che consta invece di 13, è proprio l'unità.

Tutto ciò, se pure esposto per cenni, mostra non solo il tipo di problematica che si poneva, ma anche e soprattutto la complessità di un approccio nel quale vi sono considerazioni di tipo aritmetico, ma sempre fondate su basi in cui confluiscono valenze mistiche e coincidenze casuali, in quanto le relazioni che pure sussistono tra alcuni numeri, presi singolarmente e non nella loro totalità, vengono assunte come valenze di ordine generale e cosmico.

Un passo avanti si ha con Archita di Taranto (428-350 a.C.), di poco più giovane di Filolao. Tolomeo (Harm. I, 13 p. 30, cit. in Timpanaro Cardini 1958-62, v. 2, p. 311) riporta che:

«*Archita di Taranto [...] si propone di conservare la continuità secondo un criterio di proporzionalità non solo nelle consonanze, ma anche nella divisione dei tetracordi, ponendo come principio che carattere peculiare della musica è la commensurabilità degli intervalli*».

Ciò vuol dire che l'armonicità del rapporto, fondato sulla commensurabilità, deve valere sia nella successione melodica dei suoni costituenti la composizione musicale, sia nella successione fisica delle note del tetracordo, cioè nella scala formata da quattro note di cui la prima e l'ultima nota differiscono di un intervallo di quarta. Modernamente ciò corrisponde all'intervallo La-Mi in senso discendente, quindi La Sol Fa Mi. Il problema sta nel fatto che mentre La e Mi (note limite del tetracordo) sono fisse in quanto determinate dall'intervallo di 4/3, le altre due note vanno determinate in modo da rispettare i criteri che si ritiene siano alla base dell'armonia. Dunque se per Filolao tale criterio è rigidamente legato a proprietà aritmetiche dogmaticamente prefissate, ora Archita ipotizza ancora la sussistenza di un legame tra armonia e rapporti numerici, ma tale legame appare meno rigidamente ancorato ad una regola fissata a priori. In effetti, ciò che vi è di sostanzialmente nuovo, non consiste in un effettivo abbandono del criterio aritmetico,

---

successivo (indicato con Do2), corrispondente ad un intervallo, detto appunto di ottava, dato dal rapporto 2/1. La quinta nota è invece quella che corrisponde all'intervallo 3/2 (Sol). Per ottenere il Fa (quarta nota), si procede scendendo di una quinta (2/3) e risalendo poi di un'ottava. Il risultato è quindi il rapporto 4/3. In questo modo si ha che risalendo di un intervallo di quinta a partire dalla quarta (Fa) si ottiene proprio l'ottava (Do2). Allo stesso modo, scendendo di una quarta, a partire dall'intervallo di quinta (Sol), si ottiene una nota (Re) che differisce dal Do di un intervallo di 9/8. È proprio questo intervallo che viene assunto come tono, anche se, come si è visto, non è possibile definire un intervallo razionale che divida in parti uguali l'intera scala musicale. Si ha l'intervallo di un tono soltanto tra Do e Re, come già visto, e tra Fa e Sol (cfr. quanto già detto in Sarritzu 2004).

[12] Boezio così si esprime in proposito: «*Filolao pitagorico provò a dividere il tono in un altro modo, stabilendo cioè come generatore del tono il primo numero che è cubo del primo numero dispari*» (Boethius, Inst. Mus., III 5, p. 276, 455-458, trad. it. in Timpanaro Cardini (1958-62), v. 2, pp. 181, 183).

ma pone tale criterio ad un più alto livello di astrazione. Concetti come quelli di medietà armonica, infatti, sono costruiti *ad hoc* su numeri già assegnati, le cui mutue relazioni sono specifiche ed hanno ben poco di generale. Il concetto di commensurabilità è invece molto più generale e astratto. Esso esprime quelle relazioni tra grandezze che sono traducibili in termini esatti di rapporti numerici. In questo modo, pur restando ferma la correlazione tra armonia e rapporto numerico, questo non appare più determinato sulla base di regole mistico-numerologiche. La richiesta di commensurabilità, in altri termini, fornisce ora un requisito entro il quale rimane un discreto margine di variabilità che lascia spazio alla sperimentazione. Tuttavia anche questo è valido entro certi limiti. Infatti il concetto di commensurabilità a cui sembra riferirsi Archita, non è quello del tutto generale che può corrispondere ad una definizione moderna, ma è piuttosto legato alle possibilità effettive di pensare e di rappresentare rapporti numerici con le limitate possibilità della matematica greca tra il quinto e il quarto secolo a.C.. La possibile variabilità dei rapporti rimane quindi limitata alle frazioni i cui termini siano abbastanza piccoli, ed a ciò si deve aggiungere l'esigenza che tra le due note estreme vi siano tre intervalli, tutti e tre ben riconoscibili e quantificabili. Nessuno di essi può essere quindi né troppo piccolo,né del tutto preponderante rispetto agli altri.

II.3 Carattere strutturale dell'*Armonica*

Passiamo ora ad analizzare le definizioni che Aristosseno pone a fondamento dell'*Armonica* per cercare di capire a che livello semantico vengano collocati i concetti fondamentali. Vogliamo capire, in altri termini, se e in che misura egli tenti di fissare la natura e l'essenza delle cose di cui parla, o se non si limiti piuttosto a darne una caratterizzazione funzionale agli scopi che si prefigge. A tal fine limiteremo qui l'analisi alle definizioni di *continuo-discontinuo*, *parlare-cantare*, *tensione-allentamento*, *acutezza-gravità*, *grado*, *nota, intervallo*, proprio perché queste sembrano assumere un ruolo fondante su cui poi si basano tutti gli altri concetti successivamente definiti. Così, ad esempio, quando definisce la scala come «*composta di uno solo o di più intervalli*» (Da Rios, 1956, I, 16).

Ecco, dunque, come egli definisce la *continuità*, la *discontinuità*, il *parlare,* il *cantare* (Da Rios, 1956, I, 8 9):

«*quando la voce si muove in modo che sembra all'udito non si fermi in nessun punto, chiamiamo questo movimento* ***continuo****, quando invece sembra si fermi in qualche punto e poi salti uno spazio e, dopo questo movimento, di nuovo si fermi su un altro grado e mostri di continuare questo alternato processo senza interruzione fino alla fine, chiamiamo un tale movimento* ***discontinuo****. Chiamiamo dunque continuo il movimento del* ***parlare****, perché, quando parliamo, la voce si muove spazialmente in modo che sembra non si fermi in nessun punto. Nell'altro movimento, che chiamiamo discontinuo, avviene il contrario, perché sembra che la voce si fermi e tutti dicono che chi si vede far così non parla, ma* ***canta***».

Per il momento ci limitiamo qui a notare come il senso di ciascuno dei termini utilizzati, sembra volere emergere più dai mutui rapporti e dalle reciproche opposizioni che non da una precisa descrizione per ciascuno di essi.

Troviamo poi per le definizioni di *tensione*, *allentamento*, *acutezza* e *gravità* (Da Rios, 1956, I, 10-11):

«*La* ***tensione*** *è il movimento continuo della voce da una posizione più grave ad una più acuta, l'****allentamento*** *è il movimento da una posizione più acuta ad una più grave. L'****acutezza*** *è il risultato della tensione, la* ***gravità*** *dell'allentamento. [...] Bisogna che cerchiamo di comprendere, osservando il fenomeno stesso, che cosa facciamo quando, accordando uno strumento, allentiamo o tendiamo ciascuna delle sue corde. È chiaro, a quanti non sono del tutto ignari di strumenti, che portiamo la corda all'acuto tendendola, al grave allentandola, ma che, durante il* *tempo in cui muoviamo la corda per condurla all'acuto, l'acutezza non può prodursi dalla tensione. Vi sarà acutezza solo quando la corda, condotta attraverso la tensione al grado conveniente, stia ferma e non si muova più. Ora questo avverrà solo quando la tensione sia cessata e non esista più, perché non è possibile che una corda si muova e nello stesso tempo stia ferma. C'è tensione quando la corda si muoveva, c'è acutezza quando essa si è fermata e sta ferma. Lo stesso diremo riguardo all'allentamento ed alla gravità, salvo il riferimento ad opposte direzioni. Così è chiaro, da quanto è stato detto, che l'allentamento è altra cosa dalla gravità, come la causa dall'effetto, e che lo stesso rapporto sta tra la tensione e acutezza*».

Anche qui si cercherebbe invano di comprendere quale sia nella sua essenza l'oggetto designato da ciascun termine, mentre appare abbastanza chiara la funzionalità dell'intero discorso ove lo si assuma come caratterizzante di relazioni reciproche.

Ed ancora per la definizione di grado (Da Rios, 1956, I, 12):

«*Quello che noi vogliamo indicare con* ***grado*** *è quasi un certo indugio e stabilità della voce. Non lasciamoci turbare dalle opinioni di coloro i quali riducono i suoni a dei movimenti e che affermano che il suono in generale è movimento, perché ci accadrebbe di dire che, in certe circostanze, il movimento potrà non muoversi, ma rimanere fisso ed immobile. Per noi è lo stesso indicare il grado con uguaglianza o identità di movimento o, se si trovasse, con un altro termine più chiaro di questi. Noi non diremo nemmeno che la voce si ferma, quando la nostra sensazione ci mostra che essa non si muove né verso l'acuto né verso il grave, noi non faremo altro che dare un nome a tale stato della voce. È chiaro che la voce fa questo nel cantare: si muove, cioè, nel fare un intervallo, ma si ferma sulla nota*».

Come si può ben notare, il punto di vista di Aristosseno è diametralmente opposto a quello dei Pitagorici, infatti egli intendeva il movimento non come vibrazione, ma come lo spostarsi della voce da una nota ad un'altra. Possiamo dire che i Pitagorici avevano un punto di vista del fenomeno più fisico-aritmetico, mentre Aristosseno più geometrico-strutturale-relazionale. Oggi è molto più semplice capire il significato di ciò che intendeva Aristosseno. Facciamo un esempio immaginando di essere davanti alla tastiera di un pianoforte e di spingere uno dei tasti; questo nostro movimento azionerà un martelletto all'interno che andrà a colpire le corde facendole vibrare (causa); la corda percossa, vibrando, produrrà quello che noi oggi chiamiamo suono (effetto). Lo studio di Aristosseno parte dal suono così come viene percepito, senza alcun riferimento alla sua natura e alle possibili spiegazioni causali. Anche quando parla di tensione o allentamento è chiaro come con ciò non intende né un movimento fisico, né la forza tensiva che agisce sulla corda, ma la trasformazione dei caratteri del suono che può avvenire secondo due versi tra loro opposti: tensione e allentamento. È da rilevare il senso traslato dei termini che vengono qui utilizzati, non con il loro significato originario del linguaggio comune, ma in senso tecnico. Così, per esempio, è chiaro come i termini tensione e allentamento alludano al tendere e allentare fisicamente una corda per ottenere suoni più alti o più bassi; ma è altrettanto chiaro come gli stessi termini, nell'uso tecnico che qui viene fatto, trascendano tali operazioni fisiche per indicare soltanto una trasformazione dei caratteri del suono.

Egli si affida all'orecchio, che viene quindi considerato "sommo giudice"[13] nell'interpretazione e nella valutazione dei fenomeni musicali, per intervenire affinché il suono prodotto da uno strumento o dalla voce umana sia il più gradevole possibile all'orecchio stesso. Quindi, studiare il fenomeno è analizzare il suono, tralasciando l'aspetto prettamente fisico e puntando solo su caratteri percepibili e rilevanti per le finalità poste. Ma soprattutto interessa rilevare in questa sede come il significato di ogni termine appaia definito solo nella relazione reciproca con altri termini fino a determinare una struttura, come infine viene esplicitamente espresso nella seguente definizione di nota (Da Rios, 1956, I, 15):

[13] Tale espressione viene usata dalla Rios in (1956, p. 21, nota 1).

«*la* ***nota*** *è la caduta della voce su di un grado, poiché allora sembra che il fermarsi su un grado produca un suono tale da poter essere ordinato nella melodia armonizzata. Questo è la nota*».

Qui infatti la possibilità di ordinare armonicamente le note è esplicitamente indicata come carattere determinante e costitutivo del concetto di nota. Significativa a tale riguardo è anche la definizione di intervallo (Da Rios, 1956, I, 15):

«*l'****intervallo****, invece, è lo spazio compreso tra due note che non stanno sullo stesso grado. Per dirla per sommi capi, l'intervallo sembra sia una differenza di gradi ed uno spazio capace di contenere note più acute del più grave e più gravi del più acuto dei due gradi che limitano l'intervallo. La differenza di grado dipende dalla maggiore o minore tensione*».

Qui l'ordinamento strutturale precedentemente postulato viene a configurarsi in una forma geometrico-spaziale, che però non allude ad un'effettiva spazialità fisica, ma si presenta come un espediente, una metafora in grado di riprodurre la situazione strutturale dei vari elementi; in termini moderni potremmo dire che costituisce una modellizzazione.

II.4 Il carattere ipotetico-deduttivo dell'*Armonica*

Come è stato giustamente evidenziato in una recente pubblicazione di Bellissima (2002), l'*Armonica* di Aristosseno presenta una struttura deduttiva che consente di vedere questa opera come un esempio tipico di "scienza dimostrativa" nel senso che Aristotele assegna a questa espressione[14].

Il saggio appena citato, con le sue accurate analisi, costituisce sicuramente un contributo importante per la comprensione di Aristosseno e pertanto daremo per acquisite alcune delle sue conclusioni, in particolare per ciò che riguarda i limiti in fatto di rigore deduttivo.

Per esaminare la struttura ipotetico-deduttiva del trattato di Aristosseno, prenderemo comunque l'avvio da alcune osservazioni di Bellissima per tentare poi una rilettura entro il quadro critico precedentemente tracciato con i riferimenti ai lavori citati di Migliorato (2005), Gentile e Migliorato (2005), Russo (1996) ed altri.

Scrive Bellissima (2002, p. 17):

«*Definizioni. Tradizionalmente, costituiscono il punto più vulnerabile di un sistema assiomatico non formalizzato. Quello di Aristosseno non fa eccezione. Le troviamo numerose nel corso dei primi due libri, gestite, secondo il dettato aristotelico, tramite classificazioni e distinzioni. La loro non sempre elevata precisione creerà non pochi problemi al sistema del libro terzo*».

Ora è vero che le definizioni costituiscono un punto "vulnerabile" dei sistemi deduttivi non formalizzati, ma la questione si presenta, a mio avviso, in maniera ancora più complessa di quanto qui non appaia se dall'enunciazione generica cerchiamo di fare riferimento ai casi storici effettivi. Quali e quanti sono infatti i testi antichi a noi pervenuti e strutturati in forma di sistema deduttivo? Quanti tra questi contengono definizioni di enti che si possano considerare primitivi? (sono infatti queste ultime definizioni a risultare particolarmente problematiche). Il riferimento più prossimo sembra debba essere fatto ad Euclide ed in particolare alle prime sette o otto definizioni del primo libro; ma se accettiamo le conclusioni di Russo (1998) (per le prime sette) e di Migliorato (2005) (per l'ottava), tali definizioni sarebbero delle aggiunte posteriori, mentre il

---

[14] «*chiamiamo sapere il conoscere mediante dimostrazione. Per dimostrazione [...] intendo il sillogismo scientifico, e scientifico chiamo poi il sillogismo in virtù del quale, per il fatto di possederlo noi sappiamo. Se il sapere dunque è tale, quale abbiamo stabilito, sarà pure necessario che la scienza dimostrativa si costituisca sulla base di premesse vere, prime, immediate, più note della conclusione, anteriori ad essa, e che siano cause di essa. [...] un sillogismo potrà sussistere senza tali premesse, ma una dimostrazione non potrebbe sussistere, poiché allora non produrrebbe scienza*» (Aristotele, An. Post., 71 b 18-25 in Aristotele, Organon, a cura di Giorgio Colli, Adelphi, 2003).

trattato originale di Euclide avrebbe lasciato non definiti tali concetti. Non è ovviamente questo il caso di Aristosseno che invece pone una serie di definizioni, cercando anche di spiegarne le ragioni e il senso. Prima di affrontare nel merito tali definizioni e spiegazioni, è il caso di osservare come le difficoltà e le incongruenze, che si possono ricondurre alla presenza di definizioni nei sistemi deduttivi, hanno caratteri di volta in volta diversi, anche in modo radicale. Nel caso di Aristosseno, per es., rileva Bellissima che «*la loro non sempre elevata precisione creerà non pochi problemi al sistema del libro III*» (Bellissima, 2002, p. 17). Laddove, invece, le inopportune e spesso oscure definizioni degli *Elementi*, così come ci sono pervenute, non creano alcun problema nel corso dello sviluppo deduttivo, proprio perché non vengono mai utilizzate. Tuttavia, il fatto che comunque tali definizioni (o spiegazioni o come si voglia considerarle) siano state aggiunte (in qualunque momento ciò sia avvenuto) sta ad indicare che se ne sia avvertita una qualche esigenza la cui natura è strettamente legata al momento in cui ciò è avvenuto. Ed in effetti se ipotizziamo che le definizioni siano state scritte dallo stesso autore degli *Elementi*, allora il fatto di non averle mai utilizzate rende problematica la spiegazione di tali esigenze e fornisce, al contrario, una ragione forte per dubitare dell'ipotesi fatta. Se invece si ipotizza una successiva interpolazione, allora la loro spiegazione appare del tutto coerente con una progressiva incomprensione del metodo ipotetico-deduttivo in periodo di decadenza della scienza ellenistica.

In ogni caso, appare evidente che le definizioni degli enti fondamentali che appaiono nel primo libro degli *Elementi* e le definizioni fondamentali dell'*Armonica*, differiscono profondamente nella sostanza e negli scopi.

Per es., le definizioni I,1 e I,3 degli *Elementi* definiscono entrambe il punto[15], nel primo caso caratterizzandolo, secondo la tradizione pitagorica, come unità indivisibile, nel secondo caso, coerentemente con Aristotele, come limite o taglio di una linea. In entrambi i casi cercando di cogliere l'essenza metafisica dell'oggetto in sé. Al contrario, le definizioni fondamentali di Aristosseno, come si è anticipato nella sezione precedente, sembrano proprio caratterizzarsi per il tentativo di eludere la natura o essenza dell'oggetto da definire, e tuttavia facendone scaturire il senso, in modo ovviamente astratto, dalla loro collocazione funzionale in una struttura che, nel caso specifico, è quella dell'ordinamento armonico quale viene di fatto percepito dagli ascoltatori e dagli stessi addetti ai lavori. Nel primo caso le definizioni, che come già detto non vengono mai usate, non potrebbero neppure esserlo dal momento che nulla possono aggiungere o togliere alla trattazione. Nel secondo caso (al di là delle rilevate insufficienze e imprecisioni) sono funzionali e necessarie all'intera struttura dell'opera. E in questo senso sembra potersi interpretare anche l'avvertenza che viene premessa da Aristosseno, che per altro è citata da Bellissima (Da Rios, 1956, I, 16):

«*Chi ci ascolta deve sforzarsi di ben accogliere ciascuna di queste definizioni, senza occuparsi se le definizioni date siano esatte o superficiali. Deve piuttosto sforzarsi di accettare di buon animo e di ritenere sufficientemente istruttiva la nostra definizione, se è capace d'introdurlo alla comprensione di quanto è stato detto*».

Aristosseno infatti invoca una fiducia non altrimenti motivata da parte del lettore a cui chiede di rinunciare, almeno per il momento, alla comprensione e, quindi, al giudizio sulla esattezza e significanza del procedimento definitorio. Le definizioni fondamentali di Aristosseno infatti risultano significative e comprensibili solo all'interno di una struttura complessivamente considerata. Si riveda ad esempio, nella sezione precedente, la definizione di *nota*, dove la ripetizione finale del termine definito (*questo è la nota*) sembra proprio rispondere al fatto che solo dopo aver fatto riferimento all'ordinamento strutturale nella melodia è possibile la comprensione del termine. E così nella definizione di *grado*, questo appare caratterizzato dal movimento, pur non essendo movimento *(è chiaro che la voce fa questo nel cantare: si muove, cioè, nel fare un intervallo ma si ferma sulla nota*). In altri termini, è necessario che ci sia una scala perché ci sia-

[15] Def. 1: «*Il punto è ciò che non ha parti*» ; def. 3: «*La linea è terminata da punti*».

no i gradini: la scala è composta di gradini ma un gradino non può sussistere di per sé indipendentemente dalla scala. Il tutto è necessario alla definizione della parte[16].

Questa conclusione può apparire certamente problematica se si pone come presupposto l'ascendenza aristotelica di Aristosseno[17], che per altro è invece riscontrabile nella struttura logico deduttiva della sistemazione teorica complessiva. Ma tale problematicità si attenua nel momento in cui accettiamo l'idea che anche l'opera di Euclide presenti una struttura deduttiva fondamentalmente aristotelica (ed anzi in maniera più rigorosa) mentre le definizioni degli enti fondamentali verrebbero del tutto omesse[18], rinunciando così ad ogni pronunciamento sulla loro natura.

Ma come si è già detto, l'opera di Euclide si allontana dal pensiero aristotelico in maniera ben più significativa, investendo le questioni più profonde del significato e della verità. Ed è questo che ci porta proprio al nucleo problematico che volevamo affrontare. Da quanto si è visto fino ad ora, non sembra infatti che si possa avvalorare né un'adesione completa al pensiero aristotelico né, d'altra parte, una sicura transizione verso una concezione simile a quella ipotizzata per Euclide. Non vi è piena adesione al pensiero aristotelico, perché questo, imponendo la fondazione di ogni scienza dimostrativa su principi semplici e immediati, non può accettare organizzazioni complesse in cui ogni oggetto è definibile solo in funzione della struttura globale. Non vi è però neppure una chiara evidenza di quella maturazione teoretica che fa degli *Elementi* la prima opera veramente scientifica, nel senso moderno del termine, che sia giunta fino a noi. Questa seconda differenza non è di minore importanza rispetto alla precedente.

Torniamo infatti per un momento al saggio di Bellissima in cui sono pienamente e accuratamente evidenziate le carenze sul piano del rigore logico-dimostrativo. Ancora Bellissima pone in evidenza le difficoltà e forse l'impossibilità di raggiungere una formulazione assolutamente rigorosa, paragonabile a quella delle trattazioni geometriche a noi note. Ma cosa è effettivamente

---

[16] Edgar Morin, tra l'altro, mette in guardia dal facile fraintendimento che può nascere quando si confonde il concetto di complessità con quelli cui alludono termini come complicato, difficile, inestricabile, ecc... Un sistema complesso, infatti, si caratterizza come un sistema strutturato e capace di autoregolazione dove le singole parti sono definibili solo in relazione al tutto. È ciò che avviene per esempio in un organismo vivente come in un intero ecosistema o nella struttura semiotica di un linguaggio naturale. Dice Morin (2004, pp. 55-57): «*Ecco dunque cos'è la complessità a prima vista, un ordito di elementi eterogenei associati in modo inseparabile, che presenta il rapporto paradossale che unisce l'uno al molteplice. La complessità è effettivamente l'ordito di eventi, di azioni, di interazioni, di retroazioni, di determinazioni, di alea che costituiscono il nostro universo fenomenico. È così che la complessità si presenta sotto l'aspetto inquietante della perplessità [...]. Si può dire che ciò che è complesso recupera, da una parte, il mondo empirico, l'incertezza, l'incapacità di raggiungere la certezza, di formulare una legge eterna, di concepire un ordine assoluto. Esso recupera d'altra parte qualche cosa che si riferisce alla logica, vale a dire all'incapacità di evitare le contraddizioni [...] La complessità non è la complicazione. Ciò che è complicato può essere ridotto a un principio semplice, come una matassa complicata o un nodo marinaro [...]. La vera questione non è dunque quella di convertire la complicazione degli sviluppi in regole che hanno una base semplice, ma quella di accettare il fatto che la complessità si trovi alla base*». Particolarmente interessante ai fini della nostra analogia appare, nel passo di Morin, il riferimento alla dimensione della perplessità come elemento che contribuisce a definire il concetto. Anche qui, infatti, la definizione strutturale dei nuovi concetti da parte di Aristosseno sembra nascere da una perplessità di fronte ad una realtà fenomenica, l'armonia musicale, che sfugge alla semplicità razionalizzante delle teorie pitagoriche.

[17] È appena il caso di richiamare il carattere metafisico che per Aristotele deve assumere la definizione. A tal riguardo mi limito a richiamare un solo passo chiave della Metafisica: «*È chiaro dunque che la definizione è la nozione dell'essenza e che l'essenza c'è solo delle sostanze, oppure che delle sostanze c'è in senso fondamentale, primario e assoluto*» (Aristotele, Meth., VII.5, 1031a 11-14).

[18] Secondo quanto sostiene Russo (1996), con argomenti sicuramente validi e fondati, le prime sette definizioni contenute nelle versioni a noi giunte degli Elementi di Euclide, sarebbero state in realtà aggiunte in epoca successiva per motivi didattici. Migliorato (2005), nell'accettare la ricostruzione di Russo, avanza l'ulteriore ipotesi che anche le definizioni 8 e 9 (angolo e angolo rettilineo) possano essere apocrife. Se ciò fosse vero, allora gli enti fondamentali della geometria si presenterebbero negli Elementi come oggetti primitivi, non definiti e caratterizzati dai postulati oltre che dalle "nozioni comuni".

mancato ad Aristosseno per raggiungere un tale rigore? In qualche misura, anche su questo, Bellissima fornisce delle risposte ineccepibili sul piano tecnico quando evidenzia le ambiguità e le incoerenze non totalmente risolte dalle definizioni; ma vogliamo qui fare un passo ulteriore chiedendoci se una più rigorosa definizione dei termini e conseguentemente un pieno rigore dimostrativo potevano attuarsi all'interno del quadro concettuale e semiotico di cui Aristosseno poteva disporre.

Se ora rileggiamo gli *Elementi* di Euclide, spogliati dalle definizioni 1-7 (o eventualmente 1-9) e interpretiamo gli assiomi (ατtματα e κοιναι εννοιαι) come delle assunzioni convenzionali su "oggetti" anch'essi convenzionali, allora possiamo più facilmente comprendere la differenza del quadro semiotico in cui operava Euclide rispetto a quello di cui poteva disporre Aristosseno. Euclide opera infatti all'interno di una tradizione, quella geometrica, già consolidata, in cui esiste, ed è generalmente noto agli esperti, un linguaggio tecnico che permette di usare i termini fondamentali senza specificazioni che ne evidenzino il carattere (eventualmente) convenzionale. Aristosseno al contrario, trattando di teoria musicale, è ancora condizionato da almeno due tradizioni in qualche modo parallele: quella pragmatica e popolare del fare musica e quella filosofico-teorico-dogmatica ereditata dai pitagorici. Entrambe le tradizioni si fondavano su visioni (ciascuna a proprio modo) realistiche. Il passo che bisognava fare e che, tra incertezze e possibili esitazioni, Aristosseno sembra avere intrapreso, è invece quello di procedere ad una concettualizzazione convenzionale e astratta, perché solo a queste condizioni è possibile applicare fruttuosamente un procedimento deduttivo rigoroso ed esatto. Solo i concetti ideali di una scienza astratta sono di fatto assoggettabili alla logica binaria[19]. Ora, dall'analisi delle definizioni fondamentali di Aristosseno emerge, come si è visto, il carattere concettuale e astratto di oggetti quali quelli di *intervallo*, *nota*, *scala*, ecc... . Tuttavia l'individuazione dei concetti, si sviluppa attraverso una complessa rete di metafore dalla quale sembrano poi scaturire gli stessi assiomi. Il passo ulteriore, che avrebbe potuto conferire un rigore sicuramente più alto, sarebbe stato quello di caratterizzare i concetti primitivi con la sola enunciazione di un certo numero di assiomi.

Non sarebbe corretto qui avanzare congetture sul "vero" pensiero di Aristosseno, al di là di ciò che è desumibile dal testo e dal contesto, tuttavia non è difficile pensare che l'assenza di una tradizione terminologica analoga a quella della geometria e riferibile ai concetti usati da Aristosseno, abbia reso molto più difficile e forse, in quel momento, impraticabile il passo decisivo mancante.

II.5 Una chiave di lettura

Riassumendo quanto detto fino ad ora, vi è almeno un punto di particolare rilievo che non era stato evidenziato fino ad oggi e che emerge dalla nostra analisi. Lo sforzo chiarificatore di Aristosseno sembra infatti diretto non già alla ricerca di preesistenti quanto improbabili legami tra entità date a priori, ma piuttosto a individuare una possibile struttura ideale, capace però di rappresentare e spiegare i fenomeni musicali, così come si presentano nella pratica del far musica e nell'esperienza dell'ascolto. Egli stesso, infatti, nel "definire" gli elementi di tale struttura (*intervallo*, *continuità*, *discontinuità*, *tensione*, *movimento*, ecc...), chiede al lettore di rinunciare

[19] La rivoluzione scientifica del XVII secolo nasce solo nel momento in cui si comincia a ragionare non su oggetti reali, per i quali l'esperienza falsificherebbe subito le leggi della meccanica newtoniana, ma in termini di oggetti ideali come il *punto materiale* che si muove in un improbabile *spazio vuoto* e fuori da qualunque influsso esterno, ecc... . Anche nell'antichità ellenistica, tuttavia, ciò appare evidente in più contesti, che vanno dalla geometria di Euclide alla meccanica di Archimede. A questo proposito è interessante rilevare che un passo decisivo è compiuto quando dal vecchio concetto realistico *di centro di sospensione* si passa a quello, introdotto da Archimede, di *centro di gravità*, dotato di connotazioni assolutamente astratte e riconducibili, come notato da Gentile e Migliorato (2005), al solo fatto geometrico.

ad una comprensione diretta e immediata e di non cercare quindi di capire se le definizioni siano più o meno sensate. La comprensione dovrà essere dunque un atto successivo derivante dall'adattarsi dell'intera totalità strutturata alla totalità fenomenica percepita e sperimentata. Vale dunque anche qui il principio della "validazione a posteriori" evidenziato già da Migliorato e Gentile nell'opera di Euclide e, più recentemente (con lavori in corso di pubblicazione), di Archimede. Ciò è quanto appare nell'opera considerata. Quanto Aristosseno fosse deliberatamente consapevole delle potenzialità di questa procedura non è dato sapere, e, come per ogni autore di cui non si conoscono pronunciamenti espliciti, ogni congettura sulle sue "reali intenzioni" sarebbe pura fantasia. Ciò non toglie però che tutto questo costituisca di fatto un precedente, sia pure parziale e impreciso, a quella che è stata chiamata "rivoluzione euclidea". Questa dunque non sembra nascere dal nulla ma piuttosto dal progressivo dipanarsi di un nucleo problematico e da uno sforzo di pensiero in cui sembra convergere più di una singola e isolata voce.

CAP. III - LA RICERCA IN DIDATTICA NEL CONTESTO NAZIONALE E INTERNAZIONALE

III.1 L'ambito tematico

Per poter sviluppare *competenza matematica* nell'alunno, è necessario superare il modello di insegnamento lineare, quello dell'unica relazione pedagogica tra l'insegnante e l'allievo:

In questo senso ci viene in aiuto la ricerca in Didattica della Matematica.

La ricerca psicologica ha rilevato il ruolo determinante del pensiero e della volontà dell'allievo nell'atto di imparare e la ricerca pedagogica e didattica hanno mostrato che spesso questa condizione favorevole si realizza quando l'allievo affronta situazioni-problema. Così l'attenzione si è spostata dall'insegnamento all'atto di imparare, l'apprendimento, e alle condizioni che lo favoriscono. Uno dei concetti più noti nell'ambito della Ricerca in Didattica della matematica è quello di *sistema didattico*, costituito dalla terna insegnante, alunno e sapere, comprese le interazioni tra insegnante ed alunno relative ad un dato sapere, in una **situazione** di insegnamento. Introdotto in Francia, attorno agli anni 70, da G. Brousseau e dai suoi collaboratori, si pone come obiettivo la creazione di una teoria didattica che permetta da una parte, di capire e spiegare i fatti che avvengono nell'insegnamento/apprendimento della matematica e d'altra parte, fornire ad insegnanti e ricercatori uno strumento per progettare e realizzare un insegnamento efficace della matematica.

Il progetto iniziale si pone come obiettivo l'identificazione di una serie di situazioni di apprendimento che permettano all'allievo di imparare quasi senza interventi di insegnamento da parte dell'insegnante. Nei decenni successivi, la riflessione e la ricerca mettono però in luce una maggiore complessità dei fenomeni di insegnamento/apprendimento; la teoria dunque si evolve e si arricchisce verso la forma attuale. Adesso, quindi, disponiamo di un modello teorico per l'insegnamento della matematica chiamato **Teoria delle Situazioni Didattiche**, che continua ad essere in piena evoluzione grazie ai numerosi lavori sperimentali e teorici, portati avanti dalla comunità dei ricercatori in didattica della matematica.

III.2 Contratto Didattico

«*In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma* *l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico*» (Brousseau, 1986).

È così che Guy Brousseau definisce il contratto didattico in un suo famoso articolo del 1986, in cui rilancia un'idea già teorizzata negli anni '70 ma che solo parecchi anni dopo trova ampio consenso, entrando così nel linguaggio condiviso dall'intera comunità internazionale. Bisogna specificare che le "attese" di cui parla Brousseau non sono dovute ad accordi specifici presi tra insegnanti e allievi o direttive imposte dalla scuola ma alla concezione della scuola stessa, della Matematica e alle ripetizioni delle modalità (D'amore, 2003). In questi ultimi decenni, lo studio dei vari fenomeni di comportamento degli allievi da questo punto di vista ha portato a grandi risultati, permettendo di interpretare e di chiarire molti comportamenti considerati fino a poco tempo fa inspiegabili o legati al disinteresse, all'ignoranza, o alla età immatura degli studenti (Baruk, 1985; Spagnolo, 1998; Polo, 1999; D'Amore, 1999). Questi studi hanno permesso di rivelare appunto che i bambini ed i ragazzi hanno attese particolari, schemi generali, comportamenti che nulla hanno a che fare con la matematica, ma che dipendono da motivazioni molto più complesse ed interessanti derivanti dal contratto didattico instaurato in classe (D'Amore, 1993b; D'Amore e Martini, 1997; D'Amore e Sandri, 1998). È necessario, quindi, elaborare strategie didattiche in cui gli studenti siano attori attivi del proprio processo di costruzione della conoscenza. Per far si che ciò accada, nella pratica d'aula, è necessario ricorrere alle cosiddette situazioni a-didattiche, in cui gli studenti affrontano attività che li coinvolgono senza essere a conoscenza delle finalità cognitive che l'insegnante si propone di far raggiungere. La "consegna di responsabilità" che l'insegnante affida agli studenti (devoluzione) rompe le clausole del contratto didattico, che spesso si instaura in aula e che spesso gioca un ruolo inibitorio nella costruzione dell'apprendimento (B. D'Amore, 1999). La devoluzione è, quindi, l'atto attraverso il quale l'insegnante fa accettare all'allievo la responsabilità di una situazione di apprendimento (a-didattica) o di un problema e accetta lui stesso le conseguenze di questo transfert (Spagnolo, 1998).

III.3 Apprendimenti

In matematica si possono riscontrare diverse tipologie di apprendimento; mi rifarò ad un'attenta classificazione di Marazzani (2008):

Concettuale (noetica)

Algoritmico (es. sapere eseguire operazioni o sequenze composte di atti elementari)

Strategico (es. risoluzione dei problemi)

Comunicativo (es. argomentazione, validazione, dimostrazione etc.)

Della gestione dei diversi registri semiotici

Che le difficoltà in questi apprendimenti siano specifiche è sotto gli occhi di tutti: ci sono infatti studenti che hanno costruito concetti, ma non sanno eseguire algoritmi; studenti che eseguono algoritmi, ma non sanno che concetti ci sono alla base di tali esecuzioni; studenti che hanno costruito concetti e sanno eseguire algoritmi, ma non sanno risolvere problemi; studenti che hanno costruito concetti, sanno eseguire algoritmi, sanno risolvere problemi, ma non sanno comunicare quel che hanno personalmente costruito… E così via: è piuttosto facile fare esempi per ogni livello scolastico.

Dunque, lo studio delle difficoltà può essere specifico delle singole componenti dell'apprendimento della matematica. Tuttavia alcune si intrecciano tra loro.

III.4 Teoria delle situazioni

Dopo aver dato i caratteri generali ed evidenziato l'importanza di questo modello teorico per l'insegnamento della matematica chiamato Teoria delle situazioni, vediamo con attenta analisi ogni suo tipo di possibile manifestazione e caratterizzazione. La Teoria delle situazioni si divide in tre momenti possibili:

- *Situazione non-didattica*
- *Situazione didattica*
- *Situazione a-didattica*

Nella *Situazione non-didattica* le strategie messe in atto dagli alunni, anche se in esse si fa uso di strumenti "matematici", non sono specifiche per il raggiungimento di obiettivi cognitivi scolastici. Lo studente può anche imparare, ma l'insegnante non è responsabile di tale apprendimento, non ha costruito un ambiente finalizzato a quel particolare apprendimento: manca l'intenzionalità.

La *Situazione didattica* è una situazione che l'insegnante crea tenendo conto dello stato cognitivo dei suoi allievi, delle esigenze del programma, della trasposizione, dell'ambiente; egli la propone ai propri studenti in modo esplicito, operando da mediatore tra il sapere da insegnare ed i propri studenti, dichiarando esplicitamente quel che vuole ottenere, intervenendo attivamente nel loro processo di apprendimento, sostituendosi agli studenti nel tentativo di spiegare ogni dettaglio, di dichiarare apertamente che cosa bisogna fare, che cosa bisogna dire, come si fa per risolvere, per scrivere etc. Tutto è esplicito, tanto che il contratto didattico è l'elemento trionfante: lo studente è così impegnato non tanto ad imparare la Matematica ma ad imparare quali sono le attese dell'insegnante, esplicite ma soprattutto implicite". L'allievo, quindi, è consapevole che sta imparando e che l'insegnante sta insegnando, l'insegnante, a sua volta, è consapevole del suo ruolo e c'è intenzione esplicita ad insegnare.

La *Situazione a-didattica* è una situazione che l'insegnante crea tenendo conto dello stato cognitivo dei suoi allievi, delle esigenze del programma, della trasposizione, dell'ambiente; egli la propone in maniera indiretta o, meglio, se possibile, non la propone affatto, ma fa sì che sia necessario entrarvi."

Allo studente viene devoluto un incarico, proposta una situazione problematica: l'allievo sa che "il problema è stato scelto per fargli acquisire una nuova conoscenza ma deve sapere che questa conoscenza è interamente giustificata dalla logica interna della situazione e che può costruire senza far appello a delle ragioni didattiche."

In una *situazione a-didattica* i poli attivi sono l'alunno ed il sapere. Non ci sono obblighi didattici, ma è la situazione che suggerisce delle esigenze a cui gli allievi danno risposte. Se tale attività non riesce al primo tentativo, si innesca tra gli allievi una discussione nel tentativo arrivare ad un accordo, ed è proprio da tale attività che viene prodotta conoscenza, ma senza che tale produzione sia stata richiesta dall'insegnante: è l'allievo che produce conoscenza. Ciò presuppone che da parte dell'allievo si sia raggiunta la devoluzione, cioè l'allievo si interessi personalmente del problema e della risoluzione di quanto gli è stato proposto.

Andiamo adesso a scandire le fasi della *Situazione a-didattica*:

1. Devoluzione
2. Implicazione
3. Formulazione
4. Validazione
5. Socializzazione
6. Istituzionalizzazione

La Devoluzione è l'azione con cui l'insegnante affida agli studenti la gestione della situazione.

L'Implicazione è l'impegno degli studenti ad accettare la gestione della situazione: in questa fase gli alunni sanno che, accettando tale responsabilità, impareranno qualche cosa, cioè sanno che lo scopo dell'attività è di apprendimento, ma non sanno che cosa stanno per accettare.

Per Formulazione si intende il momento in cui gli studenti lavorano, si impegnano, discutono, scoprono, fanno delle congetture...e l'insegnante ha la funzione di "regista" della situazione; non entra nei dettagli della costruzione che gli studenti fanno ma si limita a sorvegliare, a indirizzare.

Validazione: quando qualche studente arriva alla costruzione della conoscenza che l'insegnante sa essere quella voluta, quando questo studente dichiara in qualche modo il raggiungimento di essa e l'insegnante vi scorge appunto una costruzione personale, invita quello studente a renderla pubblica, difendendo la propria costruzione (che nessuno sa se è o no quella corretta) dalle incertezze o addirittura dalle opposizioni di altri studenti; questa difesa costringe lo studente a passare da un modello interno ad uno esterno, a causa della volontà comunicativa creatasi nella situazione.

La Socializzazione è la fase in cui si giunge ad un accordo comune, ad una costruzione condivisa della conoscenza: è il momento in cui gli studenti si voltano a guardare l'insegnante e questo cessa di avere una pura funzione da regista e riacquista la funzione di insegnante.

L'Istituzionalizzazione è la fase in cui l'insegnante, riacquistata la sua funzione, riconosce a quel sapere socializzato uno status ufficiale e gli assegna il nome con cui la società lo riconosce: da quel momento in poi quel sapere è di tutta la classe ed è spendibile in ogni occasione futura.

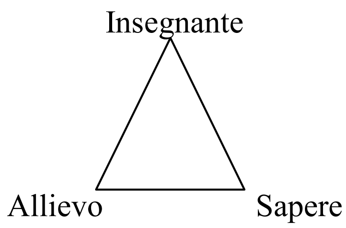
III.5 Il triangolo: insegnante, allievo, sapere

Brousseau, teorizzando i fatti concernenti l'insegnamento della matematica dà alla didattica della matematica lo statuto di scienza, definendola: «*una scienza che si interessa alla produzione e comunicazione delle conoscenze matematiche*». Una scienza che ha come oggetti specifici di studio:

- le operazioni essenziali della diffusione della conoscenza, le condizioni di questa diffusione e le trasformazioni che essa produce, sia sulle conoscenze, sia sui suoi utilizzatori.
- Le situazioni e le attività che hanno come scopo quello di facilitare queste operazioni.

In questo senso è dunque possibile descrivere un *sistema didattico* formato da tre componenti: insegnante, allievo e sapere. La didattica della matematica si occupa dunque del carattere sistemico dell'interazione tra i tre elementi succitati che caratterizzano l'azione didattica. Ma cosa si intende per *sistema*?

Per *sistema* si intende un qualsiasi complesso di elementi che interagiscono fra loro e le relazioni, sia interne (tra elementi del sistema) sia esterne (tra il sistema stesso ed altri sistemi), lo definiscono e ne determinano l'evoluzione; ogni elemento del sistema non può essere considerato singolarmente ma solo all'interno della complessità di queste relazioni.



I vertici

In questo paragrafo faremo riferimento alla sintesi riportata in D'Amore e Fandiño (2002) dove si mette in evidenza come ogni "vertice" del triangolo agisca da polo:

• *il sapere* inteso come quello accademico, ufficiale, universitario, rappresenta il polo ontogenetico o epistemologico. È nei dintorni di questo vertice che si situa la teoria degli *ostacoli epistemologi* legati alla natura intrinseca del concetto, alla sua evoluzione o alla complessità formale delle sue strutture.

• *l'allievo* rappresenta il polo genetico o psicologico. In questo vertice si fa riferimento a progetti culturali o cognitivi personali, filtrati però dal rapporto di *scolarizzazione* che fa sì che le esperienze personali di un soggetto apprendente non siano libere da vincoli. È nei dintorni di questo polo che si situa la teoria degli *ostacoli ontogenetici*.

• *l'insegnante* rappresenta il polo funzionale o pedagogico. In questo vertice si fa riferimento a progetti culturali o cognitivi sui quali influiscono in modo notevole l'insieme delle attese pedagogiche (non sempre esplicite), delle credenze relative al sapere, delle convinzioni professionali, delle "filosofie implicite" (Speranza, 1992). È nei dintorni di questo polo che si situa la teoria degli *ostacoli didattici*, dato che è l'insegnante il responsabile delle scelte e dei progetti didattici.

I lati

Sempre in D'Amore e Fandiño (2002) si commentano i "lati" che evidenziano le relazioni tra coppie di poli:

• *insegnante-allievo* che è talvolta riassunto nel verbo *"animare"* (termine che si collega alla *motivazione*, all'interesse, alla *volizione,* mettere in nota la differenza tra motivazione e volizione, vedi tesi sbaragli ...), nel quale si possono rintracciare i seguenti due concetti:

- la *devoluzione* che rappresenta l'azione dell'insegnante verso l'allievo, che lo spinge ad implicarsi nel progetto didattico che lo riguarda; è quindi il processo o l'attività di responsabilizzazione attraverso i quali l'insegnante ottiene che lo studente impegni la sua personale responsabilità in un'attività cognitiva che diventa allora attività cognitiva dell'allievo;

- l'*implicazione* che rappresenta l'azione dell'allievo su se stesso: l'allievo accetta la devoluzione, accetta cioè di farsi carico personale della costruzione della propria conoscenza.

"Animare" può quindi essere interpretato come spingere all'implicazione personale, favorendo la devoluzione.

Nel complesso intreccio che c'è tra devoluzione e implicazione, si trovano le *situazioni a-didattiche* (Brousseau, 1986) che sono quelle situazioni che realizzano il "passaggio" tra devoluzione ed implicazione. Il confronto dell'allievo con una *situazione didattica* strutturata secondo precise "regole del gioco", invece, non garantisce di per sé acquisizione di conoscenza se essa non prevede, al suo interno, il confronto dell'allievo con una situazione di tipo *a-didattica*. In questo caso è come se si interrompesse il rapporto insegnante-allievo a favore del rapporto allievo-situazione: l'allievo produce la sua conoscenza in risposta personale alle richieste del *milieu*[20] piuttosto che alle attese dell'insegnante. Il milieu non è "costruito" dall'insegnante, esso preesiste alla situazione didattica riferendosi piuttosto, in modo più generale, all'insieme di oggetti (mentali e concreti) che sono conosciuti dai soggetti del sistema indipendentemente dal fatto che tali oggetti intervengano, in quel momento, nel processo di acquisizione del sapere in gioco.

Gli elementi caratterizzanti questo lato sono ad esempio:
- il contratto didattico;
- gli ostacoli didattici;
- le relazioni pedagogiche;
- la valutazione (Fandiño Pinilla, 2002);
- la scolarizzazione;
- la devoluzione o la sua mancanza;

• *allievo-sapere,* caratterizzato dal verbo *"apprendere"*, dove l'attività che domina è l'*implicazione* che consente un accesso ad un "sapere personale" che verrà *istituzionalizzato* (vedi lato insegnante-sapere) dall'insegnante incentivando la costruzione della conoscenza. In questo lato si trovano le immagini che ha lo studente di scuola, di cultura, … il suo rapporto personale specifico con la matematica e, più in generale, con l'istituzionalizzazione del sapere che dipende molto dall'età, dalle esperienze pregresse, dalla famiglia, dal tipo di società in cui l'allievo vive.

Gli elementi che caratterizzano questo lato sono:
- le diverse teorie dell'apprendimento;
- il ruolo e la natura delle concezioni;
- la teoria degli ostacoli epistemologici;

• *insegnante-sapere* dove il verbo che domina è *"insegnare"* e le attività caratterizzanti sono: *l'istituzionalizzazione delle conoscenze* (Chevallard, 1992) e la *trasposizione didattica* (Chevallard, 1985, 1994; Cornu e Vergnioux, 1992).

L'*istituzionalizzazione delle conoscenze*[21] rappresenta un processo complementare alla devoluzione e all'implicazione, che avviene quando l'insegnante riconosce come sapere legittimo e spendibile nel contesto scuola il sapere acquisito con l'impegno personale dell'alunno, una volta che si sono verificate la devoluzione e l'implicazione dell'allievo.

L'attività più generale che caratterizza questo lato rappresenta la *trasposizione didattica* (Chevallard, 1985) che è intesa come il lavoro di adattamento, di trasformazione del sapere in oggetto di insegnamento in funzione del luogo, del pubblico e delle finalità didattiche che ci si pone. L'insegnante deve perciò operare una trasposizione dal *sapere* (che sorge dalla ricerca) al *sapere insegnato* (quello della pratica in aula); in realtà, il passaggio è molto più complesso perché va dal *sapere* (quello degli esperti della disciplina che strutturano e organizzano tale sapere)

[20] Nell'ambito della *Teoria delle Situazioni Didattiche*, Brousseau (1989, pag. 312), anche allo scopo di delineare il carattere sistemico del suo approccio, introduce la nozione di *milieu*: *«una modellizzazione, per il ricercatore, dell'ambiente e delle sue risposte pertinenti per l'apprendimento in corso. Non è che una parte della situazione (didattica). (...) Esso gioca dunque un ruolo centrale nell'apprendimento, come causa degli adattamenti (da parte dell'allievo) e nell'insegnamento, come riferimento e oggetto epistemologico».*

[21] Secondo Brousseau (1994): *«l'istituzionalizzazione del compito è l'atto sociale attraverso il quale il maestro e l'allievo riconoscono la devoluzione».*

al *sapere da insegnare* (quello deciso dalle istituzioni) al *sapere insegnato* (quello che l'insegnante sceglie come oggetto specifico del suo intervento didattico).

Il passaggio tra *sapere* e *sapere da insegnare*, è filtrato dalle scelte epistemologiche dell'insegnante che dipendono dalle sue convinzioni, dalle sue "filosofie implicite", dall'idea che ha di trasposizione didattica, dall'influenza della *noosfera*[22].

Gli elementi caratterizzanti questo lato sono quindi le credenze dell'insegnante relative a: sapere, allievi, apprendimento, scopi dell'educazione, idea di scuola, …

In questa analisi, il "triangolo" non ha funzione esplicativa e descrittiva dell'esperienza scolastica ma, soprattutto, metodologica: ciascun "vertice" del sistema è l'osservatore dal quale si cerca di guardare alla relazione tra gli altri due, pur nella consapevolezza che nessuno degli elementi coinvolti può essere totalmente separato dagli altri. Inoltre lo sforzo in esso implicito, è di rendere tale schema quanto più possibile comprensivo della molteplicità di fattori (o di variabili) che insistono sull'esperienza educativa intesa come esperienza problematica.

In questo modello sistemico si distinguono quindi almeno tre categorie di enti che incidono:

- *elementi* (che si identificano con i "vertici" o poli)
- *relazioni* tra elementi (che si identificano con i "lati")
- *processi* che identificano le modalità di funzionamento del sistema (es.: devoluzione, trasposizione didattica, ingegneria didattica, ...).

Su tutto il triangolo pesa poi la *noosfera* con le sue attese, le sue pressioni, le sue scelte a monte.

III.6 Gli Ostacoli

Un concetto viene sempre presentato dando di esso una immagine. Quando quest'ultima, si rivela, in una situazione nuova, inadeguata allora crea un conflitto. Se, durante le varie fasi di avvicinamento ad un concetto, una immagine resiste a nuove sollecitazioni, dimostrandosi "vincente", tale immagine si rafforza, diventa stabile e prende il nome di modello. È proprio da qui che partirei per definire gli ostacoli, perché, riprendendo un concetto di Giordan e De Vecchi del 1987, ogni concetto anche semplice in apparenza,è circondato da un intorno fluttuante e complesso di rappresentazioni associate che comportano molteplici livelli di formulazione e livelli di integrazione del concetto. Quindi il primo problema è quello di "ripulire" il concetto da questo alone che sembra nascondere il significato intimo (D'amore, 2003). Già Bachelard nel 1938 aveva dato una definizione di ostacolo epistemologico anche se in ambito diverso, cioè di scienze naturali; egli diceva: «*È in termini di ostacolo che bisogna porre il problema della conoscenza scientifica. E non si tratta di considerare gli ostacoli esterni, come la complessità e la fugacità dei fenomeni, né di incriminare la debolezza dei sensi e dello spirito umano: è nell'atto stesso di conoscere, intimamente, che appaiono, per una sorta di necessità funzionale, delle lungaggini e degli scompigli. È là che noi mostreremo le cause di stagnazione e anche di regressione, è là che noi individueremo delle cause d'inerzia, che noi chiameremo Ostacoli Epistemologici*» (Bachelard, 1938).

D'Amore definisce così gli ostacoli: «*Un ostacolo è un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi (anche solo cognitivi) precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo), si tende a conservare l'idea già*

[22] La *noosfera* è una sorta di zona intermedia tra il sistema scolastico (e le scelte dell'insegnante) e l'ambiente sociale più esteso (esterno alla scuola). In essa si articolano i rapporti tra i due sistemi, in un tutto unico, con i loro conflitti. La noosfera si potrebbe pensare come «*la cappa esterna che contiene tutte le persone che nella società pensano ai contenuti ed ai metodi di insegnamento*» (Godino, 1993).

acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti».

Brousseau distingue tre tipi di ostacoli:

di natura *ontogenetica*
di natura *didattica*
di natura *epistemologica*

Gli *ostacoli ontogenetici* dipendono dalla insufficiente capacità e conoscenza dell'alunno, rispetto all'acquisizione di particolari concetti. Tali ostacoli possono dipendere dalla età mentale, non ancora adatta a mezzi e scopi di quella età, e in genere (a parte alcune patologie) scompaiono anche solo per motivi cronologici.

Gli *ostacoli didattici* dipendono dalle scelte dell'insegnante. La scelta di un progetto, un curricolo, un metodo, l'interpretazione personale della "*trasposizione didattica*", dipendono dalle convinzioni personali del docente. Egli crede in quella scelta e la propone alla classe perché pensa sia efficace; ma quel che è efficace effettivamente per qualche studente, potrebbe non esserlo per altri. Per questi ultimi, la scelta di quel progetto potrebbe rivelarsi un ostacolo didattico.

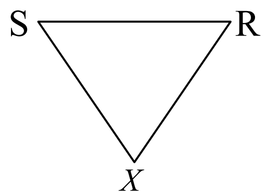
Gli *ostacoli epistemologici* dipendono dalla natura stessa dell'argomento. Ogni concetto matematico ha un proprio statuto epistemologico che dipende dalla storia dell'evoluzione all'interno della matematica, della sua accettazione critica nell'ambito della matematica, dalle riserve che gli sono proprie, dal linguaggio in cui è espresso o che richiede per potersi esprimere. Quando nella storia dell'evoluzione di un concetto si individua una non-continuità, una frattura, cambi radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto abbia al suo interno un ostacolo epistemologico sia ad essere concepito, sia ad essere accettato dalla comunità dei matematici, sia ad essere appreso. C'è da dire, dunque che l'errore non è necessariamente frutto di ignoranza, ma potrebbe essere il risultato di una conoscenza precedente, una conoscenza che ha avuto successi, che ha prodotto risultati positivi, ma che non tiene alla prova di fatti più contingenti o più generali. Non si tratta sempre di errori di origine sconosciuta, imprevedibili, ma di ostacoli epistemologici. Quest'ultimi sono quindi una conoscenza; tale conoscenza ha successo in particolari ambiti, ma fallisce in un ambito più generale e proprio per il fatto di avere avuto successo in questi particolari ambiti che funge da ostacolo al successivo (più generale) apprendimento.

Con questo, comunque, non si vuole affermare che la classificazione degli ostacoli è rigida, ma è possibile che in certi casi un ostacolo possa essere di natura diversa.

III.7 Le macchine matematiche nella didattica, il contributo di Vygotskij

Vygotskij (Il Processo Cognitivo, Bollati Boringhieri 1987, pag. 64-65): «*Ogni forma elementare di comportamento presuppone una reazione diretta al compito proposto all'organismo (che può essere espresso dalla semplice formula S→ R, stimolo-risposta). Ma la struttura delle operazioni con i segni necessita di un legame intermedio tra stimolo e risposta. Questo legame intermedio è uno stimolo (segno) di secondo grado che è trascinato nell'operazione ove adempie a una speciale funzione; crea un nuovo rapporto tra S e R. Il termine "trascinare nel" indica che un individuo deve essere impegnato attivamente nello stabilire tale legame. Questo segno possiede inoltre l'importante caratteristica dell'azione inversa (cioè, opera sull'individuo, non sull'ambiente).*

Di conseguenza, il semplice processo di stimolo-risposta è rimpiazzato da un'azione complessa e mediata che noi raffiguriamo nel modo riprodotto nella figura.



In questo nuovo processo l'impulso diretto di reagire è inibito e si inserisce uno stimolo ausiliario che facilita il completamento dell'operazione con mezzi indiretti.

Studi accurati dimostrano che questo tipo di organizzazione è fondamentale per tutti i più alti processi psichici, anche se in forme molto più sofisticate di quelle illustrate sopra. Il legame intermedio in questa formula non è solo un metodo per migliorare l'operazione preesistente e non è neppure un mero legame addizionale in una catena S-R. Siccome questo stimolo ausiliario possiede la funzione specifica dell'azione contraria, esso trasferisce l'operazione mentale a forme più alte e qualitativamente nuove e permette agli esseri umani, per mezzo di stimoli estrinseci, di controllare il loro comportamento dal di fuori. L'uso di segni porta gli esseri umani a una struttura specifica del comportamento che si distacca dallo sviluppo biologico e crea forme nuove di un processo psichico culturalmente fondato».

Il riferimento all'opera di Vygotskij è dovuto, sia perché è un contributo fondamentale nel settore educativo puntando sul ruolo dell'interazione sociale e della mediazione culturale dell'insegnante nell'acquisizione della conoscenza, sia per l'attenzione che Vygotskij stesso dedica alla funzione degli strumenti tecnici e psicologici, trasmessi socio-culturalmente, il cui ruolo è cruciale nei processi di sviluppo. Per approfondire l'importanza dell'artefatto come strumento che favorisce l'acquisizione di conoscenza, è opportuno ricomporre il quadro vygotskiano, mettendo in luce quelli che per lui sono i costrutti fondamentali. Si divide essenzialmente in tre parti:

La mediazione semiotica.
L'interiorizzazione o internalizzazione.
La zona di sviluppo prossimale.

Secondo Vygotskij è proprio alle *interazioni sociali* dell'individuo nell'ambiente che va ricondotta l'attenzione per un approfondito studio sullo sviluppo cognitivo; si ha, quindi, un effettivo incremento di conoscenza solo grazie alle nostre interazioni con gli altri.

Secondo questo approccio, dunque, è attraverso *l'interazione sociale* che i *comportamenti mentali naturali* inferiori si trasformano in *comportamenti mentali culturali* superiori, passando così da una dimensione biologica (dotazione mentale naturale) ad un culturale. Il controllo della dotazione mentale naturale è mediato dagli strumenti o "artefatti" che si sono sviluppati durante l'evoluzione filogenetica della società a cui si appartiene. Questi *strumenti* possono essere *tecnici* oppure *psicologici* (simbolici). Di questi ultimi fa parte il linguaggio che risulta essere il più importante fra tutti. I primi mettono l'uomo in relazione con il mondo esterno sul quale producono dei cambiamenti. I secondi sono prodotti sociali che non fungono da semplici sussidi, non producono cambiamenti nel mondo esterno, ma servono ad influenzare psicologicamente il comportamento, sono rivolti all'interno.

La mente, il cui sviluppo consiste nel padroneggiare le strutture simboliche, diviene quindi uno strumento di *mediazione* tra il mondo esterno e quello interno, in continua comunicazione. Questa mediazione permette al soggetto di attribuire un *significato* all'esperienza e di contribuire con la sua acquisizione al proprio sviluppo. È proprio attraverso la trasformazione nell'uso delle parole, dalla funzione originaria esterna di contatto e funzione sociale al discorso interiore, che è possibile osservare e comprendere l'evoluzione e la ristrutturazione mentale delle forme del pensiero da non-verbale a verbale, da inferiore a superiore.

Il linguaggio, dunque, viene collocato da Vygotskij al centro della “linea sociale di sviluppo” (culturale), che interagisce con la “linea naturale di sviluppo” (genetica) tramite la “mediazione semiotica”.

Nella fase di apprendimento dunque si verifica un passaggio da un livello *interpsicologico* ad uno *intrapsicologico*, che va dall’esterno verso l’interno.

L’interiorizzazione della conoscenza viene prima condivisa con gli altri (apprendimento socializzato), in seguito elaborata autonomamente e progressivamente trasferita dall’attività sociale esterna, mediata da segni, al controllo interno.

Questa concezione pone su basi radicalmente diverse il processo di sviluppo e di apprendimento dell’individuo, perché non assume più questi ultimi come contrapposti. Infatti “sviluppo” e “apprendimento” sono ambedue spiegati da un meccanismo che va dall’esterno verso l’interno, che procede cioè dal sociale all’intrapersonale e non dall’individuale al sociale. Ciò vuol dire che l’uso di una capacità cognitiva o linguistica nel contesto dello scambio sociale è il necessario precursore della padronanza individuale e autonoma di quella stessa capacità: in altri termini le funzioni psicologiche complesse di qualsiasi tipo (linguistiche, logiche, emotive) appaiono prima come funzioni sociali, e quindi all’interno dell’interazione sociale, e solo successivamente si manifestano anche nel funzionamento mentale autonomo del singolo. Lo studio della mente umana corrisponde pertanto allo studio del processo di interiorizzazione di attività il cui fondamento è sociale.

Il concetto di *zona di sviluppo prossimale* di Vygotskij include in sé le idee di interiorizzazione, di mediazione semiotica e di sviluppo concettuale. Vygotskij afferma che i concetti spontanei degli alunni grazie all’impulso ricevuto dai concetti scientifici connessi alle aree disciplinari, arrivano ad un livello di consapevolezza, di controllo e di astrazione superiori dando forma ad una *zona di sviluppo prossimale* attraverso la quale l’allievo non è ancora passato. I concetti spontanei degli alunni sono situati all’interno di questa zona; essi emergono e vengono riorganizzati attraverso l’istruzione.

Una buona istruzione, quindi, deve essere rivolta alla *zona di sviluppo prossimale* dell’alunno dato che essa precede e guida lo sviluppo:

«*Ciò che l’alunno riesce a fare in cooperazione oggi, potrà farlo da solo domani. Pertanto, l’unica buona forma di istruzione è quella che anticipa lo sviluppo e lo conduce; essa non dovrebbe essere indirizzata tanto alle forme mature, quanto a quelle che stanno maturando*».

La *zona di sviluppo prossimale* è definita da Vygotskij come uno spazio intermedio tra il *livello attuale di sviluppo* del bambino, determinato dalla sua capacità di risolvere da solo un problema, e il suo *livello di sviluppo potenziale* determinato dalla capacità di risolvere un problema con l’aiuto di un adulto o di un coetaneo più competente. In altre parole, la *zona di sviluppo prossimale* delimita quelle funzioni che sono presenti nel processo di maturazione del bambino ma che non sono ancora maturate, funzioni che sono embrionalmente già presenti e che matureranno attraverso l’interazione sociale con un adulto (o coetaneo competente).

L’approccio vygotskiano introduce, quindi, un nuovo elemento, non contrastante ma complementare, l’artefatto. Quest’ultimo può, nell’interazione sociale, assumere anche un’altra funzione, collegata con l’intenzione di insegnare: esso può mediare significati relativi ai saperi che vi sono incorporati

Riporto un passo di Meira del 1995:

«*un artefatto culturale diviene efficace e trasparente, attraverso il suo utilizzo nel contesto di tipi specifici di interazioni sociali e in relazione alle trasformazioni che esso subisce nelle mani di chi lo usa*».

In altre parole, le potenzialità dello strumento non coincidono con le proprietà intrinseche della materia, ma dipendono dall’interazione realizzata in classe, sotto la guida dell’insegnante, per mezzo di particolari consegne e all’interno di pratiche sociali. Il ruolo dell’insegnante diventa essenziale nel definire la direzione del processo di esplorazione.

III.8 La base della semiotica, il contributo di D'Amore

Riporterò qui le nozioni base della semiotica riprendendo definizioni e schemi di D'Amore (2007):

semiotica $=_{df}$ rappresentazione realizzata per mezzo di un sistema di segni
noetica $=_{df}$ acquisizione concettuale di un oggetto.[23]

Indicherò, d'ora in poi:

$r^m =_{df}$ registro semiotico m-esimo

$R^m{}_i(A) =_{df}$ rappresentazione semiotica i-esima di un concetto A nel registro semiotico r_m (m = 1, 2, 3, …; i = 1, 2, 3, …).

Si può notare che, se cambia il registro semiotico, cambia necessariamente anche la rappresentazione semiotica, mentre non è detto il viceversa; cioè può cambiare la rappresentazione semiotica pur mantenendosi lo stesso registro semiotico.

Uso un grafico per illustrare la questione, perché mi sembra più incisivo ed efficace:

caratteristiche della	rappresentazione trattamento conversione	implicano attività semiotica- cognitive diverse

[23] Per Platone, la noetica è l'atto di concepire attraverso il pensiero; per Aristotele, l'atto stesso di comprensione concettuale.

Concetto A da rappresentare $\Longrightarrow$ scelta dei tratti distintivi di A

$\Downarrow$

RAPPRESENTAZIONE di A $R^{m}{}_{i}(A)$ in un dato registro semiotico r^{m}

$\Downarrow$ Trasformazione di rappresentazione TRATTAMENTO

nuova rappresentazione $(i \neq j)$ $R^{m}\ j(A)$ nello *stesso* registro semiotico r^{m}

$\Downarrow$ Trasformazione di registro CONVERSIONE

nuova rappresentazione $(h \neq i, h \neq j)$ Rn h(A) in un *altro* registro semiotico rn $(n \neq m)$ $(m, n, i, j, h = 1, 2, 3, \ldots)$

CAP. IV - UNA RICERCA SPERIMENTALE

IV.1 Oggetto e scopi

Come si è già precedentemente accennato, l'iniziale base di partenza delle ipotesi che vogliamo verificare, nasce su un piano essenzialmente euristico suggerito dal parallelismo tra filogenesi e ontogenesi. Già nell'introduzione si è fatto riferimento ad un passo di Borzacchini che ipotizza un'origine del concetto di incommensurabilità fondata sulla modellizzazione dei fenomeni musicali non meno che su questioni geometriche (diagonale del quadrato). Che si accetti o meno una tale ipotesi, non è possibile ignorare che i problemi connessi alla suddivisione della scala musicale ebbero comunque un ruolo tutt'altro che trascurabile nella definizione di concetti fondamentali quali quelli di numero (tranne gli interi), di grandezza, di rapporto, proporzione, ecc... Non a caso Platone vi fa riferimento esplicito nel *Timeo*, come già notato al cap. 1. Ma, come abbiamo visto, è con Aristosseno, che la modellizzazione matematica del problema delle scale si fa più pressante e assume una veste più precisa e rigorosa. Ed è in questa nuova forma di rappresentazione che anche l'aporia connessa con la richiesta di razionalità del rapporto diventa evidente e irresolubile. Da qui l'idea che gli ostacoli connessi alla comprensione del concetto di numero reale non siano solo di natura ontogenetica o didattica, ma anche epistemologica, e che proprio su questo aspetto possa dimostrarsi utile un percorso che utilizzi il problema delle scale musicali.

A tal fine non si può però prescindere dai diversi percorsi che nel corso della storia hanno dato significato e fondamento al concetto di numero reale[24]. In particolare non si può non fare riferimento ai principali approcci logico-formali con cui, in epoche diverse, si è dato fondamento ai numeri reali.

Non si tratta qui di esporre le diverse teorie in modo più o meno dettagliato, ma di metterne a confronto i caratteri salienti e i punti di maggiore criticità in rapporto ai processi di apprendimento.

In particolare possiamo innanzitutto distinguere, su una base semantico-motivazionale un tipo di approccio che possiamo definire operativo-tecnologico da un tipo di approccio più apertamente epistemologico.

Al primo tipo appartengono quelle definizioni del numero reale che sono essenzialmente fondate su algoritmi di calcolo che, sia pure idealmente, possono essere pensati come processi infiniti. Una sistemazione di questi all'interno della teoria degli insiemi è per esempio, alla base della definizione dei reali come allineamenti illimitati di segni di un alfabeto, detti cifre, che può essere decimale o in base diversa dal 10. Senza coinvolgere esplicitamente l'infinito in atto si può fare invece ricorso al concetto di convergenza, inteso come proprietà della successione stessa e non come esistenza di un limite (Es.: Criterio di Cauchy). La concezione dei numeri irrazionali procede qui in un modo che è solo apparentemente naturale, ma proprio per questo presenta i rischi più insidiosi. I processi algoritmici su cui si fondano le definizioni, infatti, nascono all'interno di un quadro teorico già noto: che è quello dei numeri razionali, per essere estesi attraverso

---

[24] Va ricordato, per altro, che lo *status* di *numero* accordato ai rapporti (razionali e irrazionali) è un fatto del tutto sconosciuto nell'antichità e che il termine *reale* nasce in contrapposizione a immaginario solo via via che anche quest'ultima entità va acquistando dignità di *numero*.

l'artificio di una potenziale estensione all'infinito del processo algoritmico. Su un piano puramente intuitivo ciò non sembrerebbe presentare difficoltà, e potrebbe anzi agevolmente essere spiegata geneticamente con la teoria della metafora di Lakoff e Nuñez (2000) Ma è proprio questa apparente naturalità del passaggio che può indurre in errore, creando un potenziale ostacolo epistemologico.

Al secondo tipo possiamo invece ascrivere quelle fondazioni tendenti a definire, in astratto, una nuova classe di oggetti, che possono chiamarsi "rapporti di grandezze" (fondazione euclidea), o "numeri reali" (fondazione di Dedekind), entro cui si possono assimilare, come costituenti una sottoclasse, i già noti "numeri razionali". Questo secondo modo di definire i numeri reali, se può apparire più soddisfacente da un punto di vista logico-fondazionale, non è però, a nostro avviso il più idoneo per la formazione concettuale degli alunni di una scuola secondaria. Il fatto che talvolta venga utilizzato da alcuni insegnanti può invece essere alla base di ostacoli didattici. La nostra ricerca è indirizzata essenzialmente al rilevamento degli ostacoli epistemologici con il primo modo di definire i numeri reali e sull'eventuale utilità che può derivare dall'uso dell'approccio musicale congiunto a quello geometrico. E' tuttavia da tenere presente, che ostacoli didattici, fondati su definizioni del secondo tipo e dovuti a precedenti esperienze di alcuni alunni, potrebbero interferire con l'esperimento. Di ciò si dovrà tenere conto nell'interpretazione dei risultati, non avendo la possibilità di selezionare preventivamente il campione su cui effettuare la ricerca.

IV.2 Domande di ricerca e relative ipotesi di risposta

D1. Il concetto di numero irrazionale presenta ostacoli epistemologici?

D2. La presentazione dell'irrazionale mediante la musica può dare maggiore conoscenza dell'oggetto matematico?

D3. L'uso del Monocordo come "macchina matematica" può facilitare una conoscenza più profonda dell'irrazionale?

Quanto alle ipotesi di risposta, occorre dire che già le domande stesse sono state formulate sulla scorta di alcune ipotesi di fondo e quindi sono in qualche modo già implicitamente supportate dalle stesse domande. Si ritiene infatti, e la pratica didattica ne dà ampia conferma, che il passaggio dal numero razionale al numero irrazionale, sia tra quelli che presentano maggiori difficoltà e ostacoli. Il problema è piuttosto di capirne la natura per approntare quelle misure che si dimostrano maggiormente atte ad un loro agevole superamento. Un'ipotesi di risposta positiva alla domanda D2, può essere suggerita, in via teorica, dal processo storico, ricostruito già nel primo capitolo. Anche se un'automatica trasposizione dal piano filogenetico a quello ontogenetico, sarebbe da considerare arbitraria, tuttavia il parallelismo che si può, in larga misura, rilevare tra i due processi, costituisce sicuramente una buona traccia euristica per formulare ipotesi da sottoporre a controllo sperimentale[25].

Anche per la terza domanda, un'ipotesi utile di risposta, ci viene suggerita ancora una volta dalla storia, se si tiene conto del fatto che già in epoca pitagorica la teoria musicale veniva supportata da esperimenti effettuati sul *monocordo*. Quest'ultimo oggetto, infatti, lungi dall'essere un vero strumento musicale (per la sua stessa conformazione non era adatto all'esecuzione di composizioni vere e proprie, e non era di fatto utilizzato per questo), si configurava invece come un apparato per esperimenti che avevano per oggetto la modellizzazione matematica del fenomeno armonico: quindi una vera e propria macchina matematica.

---

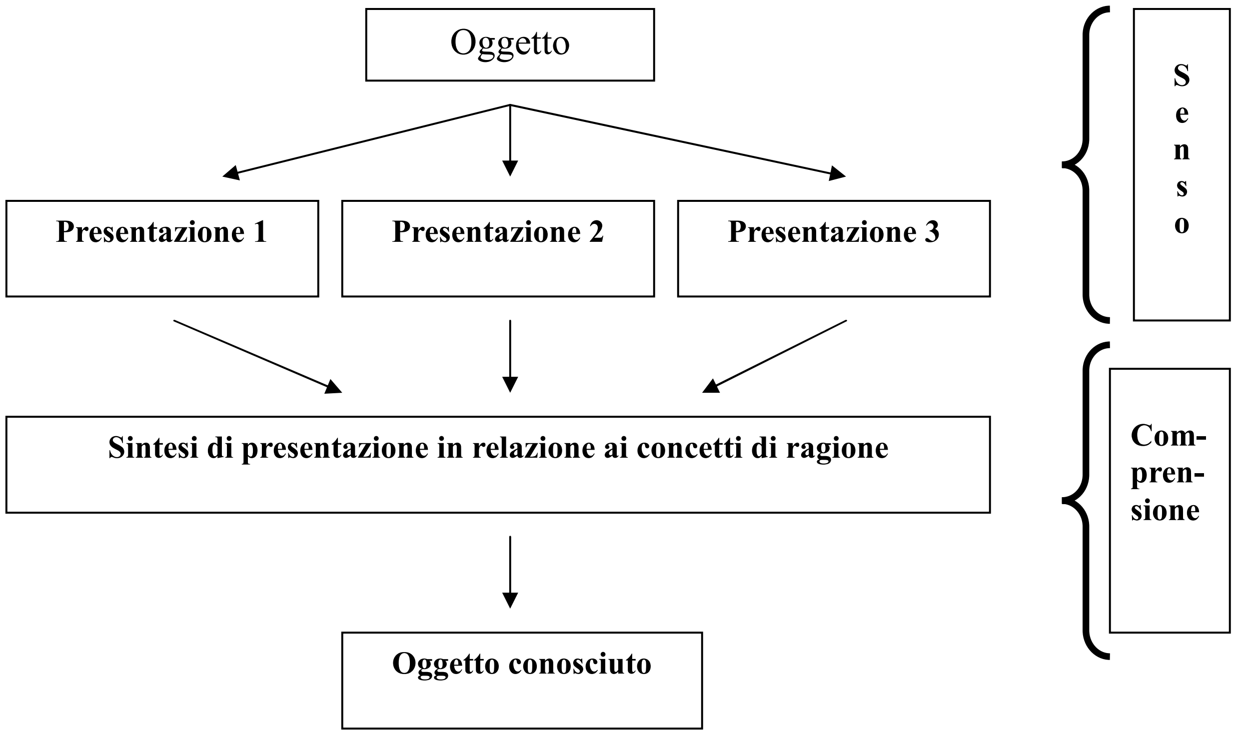
[25] Furinghetti F., Radford L.. (2002); Radford L. (1997); Scimone A. (2003)

IV.3 Quadro teorico

Il nostro lavoro si inserisce all'interno di un quadro didattico ben delineato in D'Amore (1999), il quale offre un'ampia panoramica dei vari gruppi di ricerca facendo riferimento al più moderno contesto internazionale.

Più in particolare la nostra ricerca si muove parallelamente su tre fronti, dal lavoro di D'Amore (2006) che pone maggiore attenzione ai processi di senso e comprensione, a quello della Bartolini Bussi-Maschietto (2006) che mette in luce, con ampi riferimenti alle numerose ricerche in campo internazionale (cito alcune fra le più importanti: Vygotskij 1987, Meira 1995, Radford 2003), il grande contributo che l'uso delle macchine matematiche offre alla didattica, ed infine il lavoro di Spagnolo-Marino (1996) che da un contributo forte al riconoscimento degli ostacoli epistemologici.

Ritornando al lavoro di D'Amore (2006), che, come abbiamo visto nel capitolo precedente pone le basi della semiotica, mi sembra interessante riportare qui uno schema di Radford (2004) dal quale si percepisce il tentativo di porre le idee di *senso* e *comprensione* al loro giusto posto:



Ritornando al lavoro della Bartolini Bussi e Maschietto (2006), poniamo il problema del contributo degli artefatti nella didattica della matematica, più precisamente, quanto questi ultimi possano contribuire alla costruzione e comprensione di oggetti matematici e quanto il ruolo dell'insegnante diventa essenziale nel definire la direzione del processo di esplorazione. Dice la Bussi: «*la presenza di un artefatto in una classe (in un laboratorio) non determina automaticamente il modo in cui è stato concepito dagli studenti, ma può richiamare, attraverso l'uso e rispetto agli scopi di una certa attività, un sapere significativo dal punto di vista educativo. I sistemi semiotici implicati o "trascinati" nell'attività (gesti, linguaggi, rappresentazioni, ecc.) danno forma ad un potenziale processo di mediazione semiotica, che si basa inizialmente* *sull'articolazione tra un artefatto primario ed uno secondario. Tale articolazione è possibile per il rapporto dialogico esistente tra i due, poiché ognuna delle componenti del sistema può evocare le altre e dialogare con esse. In questo senso, la polisemia degli artefatti culturali fa sì che essi divengano buoni candidati per stimolare e sostenere discussioni matematiche in classe, orchestrate dall'insegnante. L'insegnante, introducendo un artefatto primario in una discussione matematica, per interpretarne la funzione o per risolvere uno specifico problema, ne sfrutta al polisemia potenziale creando nuove situazioni problematiche e concedendo tempo per l'articolarsi delle voci, ovvero per rendere accessibili i nuovi significati che sono obiettivo didattico dell'attività. Si creano in questo modo le condizioni per l'appropriazione o la costruzione di artefatti terziari…*».

Il contributo di Radford (2003), coerente con l'approccio vygotskiano in cui i sistemi di segni stanno alla base dell'origine della conoscenza, pone l'attenzione sull'analisi del discorso degli studenti impegnati in attività matematica, sostenendo che il significato sembra essere costruito a partire da azioni, mentali o concrete, che gli studenti compiono operando sul materiale di supporto, come ad esempio grafici o strumenti. La tradizione vygotskiana attribuisce all'insegnante il ruolo di guida esperta verso l'appropriazione degli oggetti del sapere, ed è proprio nel caso delle macchine matematiche che il suo contributo risulta fondamentale, sia nell'organizzazione del percorso per l'acquisizione di nuovi concetti, sia in merito alla decisione sugli artefatti da proporre fornendo le giuste chiavi d'interpretazione per il loro uso. Avendo, nell'ultimo laboratorio, fatto uso di un software che replicasse le funzioni del monocordo, mi preme citare, solo brevemente, il lavoro di Rabardel (1995), il quale, considerando principalmente strumenti contemporanei, pone l'attenzione sulla delicatezza del rapporto strumento-utilizzatore.

Come ultimo tassello c'è il lavoro di Spagnolo-Marino (1996) nel quale si fa il punto sulle attuali conoscenze relative agli Ostacoli Epistemologici e si esibisce un modello per la loro individuazione. Riprendo qui una definizione di ostacolo epistemologico che danno gli autori:

«*Quando in una certa epoca storica, la comunità matematica tenta di operare il passaggio da un campo semantico significativo ad un nuovo linguaggio relativo ad una certa classe di problemi entrano in gioco degli "oggetti" matematici particolari. Gli "oggetti" matematici dei campi semantici precedenti che potrebbero servire per la costruzione sintattica (nei fondamenti del nuovo linguaggio) sono gli ostacoli epistemologici*».

È essenziale riportare anche una loro interpretazione della caratterizzazione che Duroux opera (1982) per il riconoscimento degli ostacoli epistemologici:

Un Ostacolo è una conoscenza: Si effettuano verifiche con strumenti storico-epistemologici.

Questa conoscenza produce delle risposte adatte in un certo contesto frequentemente riscontrato verifica sperimentale attraverso indagini volte a far vedere come si accumulino concezioni attorno a questioni poste in un determinato contesto con un determinato linguaggio.

Questa conoscenza produce delle risposte false fuori dal contesto. Cioè sostanzialmente resiste al transfert. Non riesce a trasferire risposte relative ad un contesto diverso, vuoi perché si è cambiato il punto di vista [c1], vuoi perché si è considerato un contesto più generale [c2] nel quale il primo era un caso particolare: Verifica sperimentale attraverso il cambiamento del contesto per quanto riguarda [c1]. Questi due momenti e cioè il punto di vista e la generalizzazione rappresentano due strumenti importanti per la costruzione dei linguaggi sia nella Storia delle Matematiche sia nella riorganizzazione delle fondamenta delle Matematiche . Ed essendo quindi due momenti importanti della messa a punto delle conoscenze matematiche rappresentano due momenti significativi per la caratterizzazione degli ostacoli epistemologici. Perciò bisogna operare: Una verifica sperimentale attraverso un ampliamento del contesto dove non si riconosce più il ruolo della conoscenza oggetto di ostacolo per quanto riguarda [c2]. Si tratta cioè di un ampliamento di un linguaggio dove la conoscenza oggetto di ostacolo non viene più riconosciuta come elemento fondamentale (ad es. assioma), ma dovrebbe essere riconosciuta come una qualunque proprietà.

Questa conoscenza resiste alle contraddizioni che vengono prospettate. Questo aspetto è sostanzialmente legato al punto precedente, consiste sostanzialmente in un fatto procedurale più basso che di analisi sui fondamenti. Nel senso che si manifesta nello stesso identico modo anche dopo che è stata ripresentata la stessa situazione ripetutamente. Le contraddizioni possono nascere da informazioni supplementari o da situazioni didattiche costruite ad hoc nelle quali deve essere messo bene in evidenza il nuovo ruolo della conoscenza/ostacolo nel nuovo linguaggio ampliato.

Questa conoscenza continua a manifestarsi anche dopo la presa di coscienza. Ossia dopo anche aver preso coscienza del ruolo della conoscenza/ostacolo nel nuovo linguaggio ampliato permangono le concezioni relative al ruolo della conoscenza/ostacolo del linguaggio di partenza. Permane cioè il ruolo di fondamento del linguaggio di partenza. Anche in questo caso la verifica è di tipo sperimentale: si tratterà di mettere a punto delle situazioni didattiche.

IV.4 Scelta della popolazione

Il nostro lavoro si sviluppa all'interno del Progetto Lauree Scientifiche di Messina, pertanto la scelta dei ragazzi con cui realizzare i nostri laboratori non è avvenuta tramite selezione dell'insegnante o del ricercatore, ma dall'adesione dei ragazzi al progetto stesso. Questo punto non è da sottovalutare, perché, se da una parte vi è una certa predisposizione dell'alunno dovuta alla scelta di aderire al progetto e quindi di essere spontaneamente motivato, dall'altra, l'impossibilità da parte del ricercatore di poter scegliere numero di alunni e classe di provenienza, condizioni che potrebbero in qualche modo modificare il piano di esposizione, cioè il tipo di linguaggio da usare da parte del ricercatore.

Le scuole che hanno aderito al progetto "Rapporti musicali e intervalli numerici" sono state il Liceo Classico "Maurolico" di Messina e il Liceo Scientifico Sperimentale "Copernico" di Barcellona (ME), entrambe formate da gruppi di alunni appartenenti a classi diverse e ad anni differenti. Per la sperimentazione abbiamo preso in esame solo la prima scuola; i partecipanti erano quindici, in particolare sei di primo anno, quattro di secondo e cinque di terzo. Fra questi partecipavano anche due musicisti, uno di prima e l'altro di terza liceo. Prima di iniziare l'attività di laboratorio abbiamo diviso i ragazzi in gruppi da tre e da due, preoccupandoci sia di rispettare la classe di provenienza sia la competenza musicale. Pensavamo infatti che i musicisti, possedendo una struttura musicale forte, derivante dallo studio dell'armonia classica, potessero in qualche modo trovare più difficoltoso il processo di costruzione di un concetto matematico. La difficoltà, pensiamo, sta nel momento in cui si costruisce la scala musicale, perché, mentre i ragazzi che non studiano musica sono liberi da condizionamenti concettuali esterni che influenzano e ostacolano il processo di costruzione e conoscenza di un qualunque oggetto matematico, i musicisti invece, trovando particolare difficoltà ad abbandonare la struttura armonica in loro possesso, cercano di rispondere ed arrivare ad una soluzione facendo leva sulle loro precedenti conoscenze e intrecciando così i due diversi campi che portano ad un'inevitabile confusione. C'è, però, anche da valutare le capacità dell'alunno stesso, il quale può anche riuscire a colmare questa difficoltà e fare in modo che questa nuova conoscenza si vada ad aggiungere a quella precedente, confermandola e avvalorandola.

IV.5 Descrizione del Monocordo

Vogliamo, in questo paragrafo, non solo fare una descrizione dettagliata dello strumento che abbiamo usato per i nostri laboratori, ma soprattutto inquadrarlo sotto i due aspetti fondamentali che lo costituiscono, cioè, quello musicale e quello matematico. Sarà interessante andare a scoprire le sue origini per poter poi spiegare e chiarire il motivo per cui i pitagorici hanno scelto di costruire proprio il monocordo come strumento per le proprie ricerche. La prima indagine per poter catalogare il nostro monocordo entro la famiglia degli strumenti musicali è di tipo storico. Ci rifaremo agli studi sulla classificazione degli strumenti dell'etnomusicologo C. Sachs, che prevede la divisione in quattro grandi classi definite secondo i principi acustici con cui riproducono il suono: *Idiofoni, Membranofoni, Aerofoni, Cordofoni.*

Gli *Idiofoni* possono essere considerati gli strumenti più antichi presenti nella civiltà arcaica di tutti i continenti; sono quegli strumenti che producono il suono tramite vibrazione della materia con la quale sono costruiti e le azioni di percussione e sfregamento. Rientrano in questa categoria il battito delle mani o di altre parti del corpo, bastoni di legno, campanelle e sonagli e prototipi dello xilofono.

I *Membranofoni* sono tutti i tipi di tamburi costruiti tendendo pelli di animali su recipienti di varia grandezza e suonati con le mani o con bacchette di diversa misura.

Gli *Aerofoni* sono quegli strumenti che producono il suono per mezzo della vibrazione di una colonna d'aria, come per esempio i flauti.

I *Cordofoni* al contrario delle altre classi furono poco sviluppati nelle culture primitive; si presentano in numerose forme e basano la loro sonorità sulla vibrazione delle corde. Fra i vari strumenti che possiamo citare appartenenti a questa famiglia, è interessante focalizzare la nostra attenzione su uno, il "salterio di terra", che consiste di una lunga asta di legno sottile e flessibile in cima alla quale si lega una corda tesa che viene fissata su una buca scavata nel terreno; uno o più suonatori pizzicano e percuotono la corda. Nelle forme più perfezionate le corde sono tese su un'asse o su una cassa di risonanza portatile in legno, provvista di un manico.

Restringendo il nostro campo d'azione alla sola musica greca, notiamo che gli strumenti usati dai greci erano numerosi e venivano usati per accompagnare i canti religiosi e le danze in occasione di feste, banchetti, giochi o altre attività. Su numerosi reperti archeologici vi sono raffigurati vari strumenti a corda e a fiato che stanno a testimoniare la diffusione generalizzata che aveva la musica presso il popolo greco fin dai tempi più remoti. Fra gli strumenti a fiato il più diffuso era l'aulos, potremmo considerarlo come l'antenato dell'oboe; fra gli strumenti a corde, lo strumento più comune e più antico era la lira o cetra, la cui invenzione, la leggenda racconta, viene attribuita al dio Apollo. Nei tempi più antichi la lira aveva poche corde ma a partire dal VII secolo a.C. il musico Terpandro la portò a sette facendola diventare il tipo classico poi usato per centinaia di anni.

La tradizione musicale che ereditavano i pitagorici era forte, mentre i musici continuavano a comporre musica che potesse soddisfare il gusto del popolo, gli artigiani si adoperavano a costruire strumenti con sonorizzazioni sempre migliori e perfezionamenti di vario tipo.

È proprio in questo momento che si colloca il lavoro di teorizzazione musicale dei pitagorici; essi credevano che nessun miglioramento fosse possibile se ad una pratica musicale non si affiancasse la teoria. Parte così il progetto di Pitagora, che, sfruttando il materiale offertogli dalla tradizione musicale greca costruisce il monocordo, non inteso come strumento musicale, cioè adoperabile per eseguire brani, ma come pura macchina matematica-musicale con funzione esplorative, che permettesse facili esperimenti e immediate applicazioni.

Diamo adesso un'interpretazione diversa del monocordo, spostandoci decisamente dal contesto musicale per approdare in quello più strettamente scientifico; inseriremo così il nostro strumento fra la categoria delle macchine matematiche. Quest'ultime si caratterizzano per essere degli artefatti polisemici, facendo coesistere all'interno diversi significati; questo poiché nel corso della storia si sono evoluti, cambiando e migliorando, assumendo talvolta funzioni diverse, passando dall'uso pratico a quello teorico. Riporto un passo di Wartofsky (1979) tratto da un saggio su *Perception, Rapresentation, and the Forms of Action: Towards an Historical Epistemology* che considero importante e significativo per un approccio scientifico ad attività che apparentemente non lo sono, come ad esempio, la musica:

«*Ciò che costituisce una forma tipicamente umana di azione è la creazione e l'uso di artefatti, come strumenti, nella produzione dei mezzi di esistenza e nella riproduzione della specie*».

Di quest'ultimi distinguiamo tre tipi, gli *Artefatti primari*, che si identificano con le macchine stesse; gli *Artefatti secondari* si caratterizzano per essere come un manuale d'uso, cioè sono un compendio di regole e leggi sull'uso e il funzionamento delle macchine dando anche tutte le descrizioni sulla costruzione; infine gli *Artefatti terziari* sono le teorie costruite attorno ai modelli matematici del loro funzionamento.

Per tornare adesso al nostro monocordo, possiamo identificare lo strumento come *Artefatto primario*; in che modo tendere e allentare una corda per avere suoni più o meno acuti, come costruire i ponticelli fissi e mobili, come percuotere correttamente la corda per farla vibrare e tante altre regole che permettono il corretto utilizzo dello strumento si possono identificare come gli *Artefatti secondari*; gli Artefatti terziari invece, altro non sono che le teorie musicali e tutte quelle modellizzazioni che possono spiegare fenomeni musicali, come per esempio, la consonanza armonica. Passiamo adesso alla descrizione del nostro monocordo, dando dei brevi cenni sui componenti che lo costituiscono. C'è da premettere che la fase più delicata è stata quella della costruzione (ci siamo infatti affidati ad un liutaio), poiché, se da una parte il nostro strumento doveva rispondere a certe caratteristiche musicali, ossia avere una cassa armonica che permettesse una chiara riproduzione dei suoni, la possibilità di una accordatura precisa e fedele, dall'altra vi era la necessità di ottenere una macchina utile ai fini da noi preposti e che permettesse un facile utilizzo didattico. Costruito in legno di abete, il nostro strumento (fig. 1) è dotato di due corde fisse della stessa lunghezza, appoggiate su ponticelli fissi alla distanza di 72 cm. e tenute ferme da due tipologie diverse di accordatura. La prima (fig. 2) viene detta a farfalla e consente una accordatura profonda, la seconda (fig. 3), più sensibile, viene chiamata accordatura fine e permette di allineare con precisione i suoni sulla stessa frequenza. Per prendere porzioni di corda differenti da quelle fissate in origine ci siamo serviti di ponticelli mobili (fig. 4), inseriti all'interno di una delle due corde per poter variare la lunghezza della corda stessa ed ottenere, così, suoni più o meno acuti; la scelta di aggiungere una seconda corda è venuta fuori dall'esigenza di poter mettere a confronto subito i suoni prodotti dalle due corde, così da stabilire la consonanza o la dissonanza dei suoni stessi. Altra caratteristica del nostro monocordo è quella di avere, incollato sulla base di legno e al centro delle due corde, un metro della lunghezza di 72 cm.,; la scelta dell'inserimento di quest'ultimo è dovuta al fatto che il monocordo, inteso come macchina matematica, dovesse principalmente essere uno strumento didattico e, pertanto, permettesse un immediato approccio e un facile utilizzo. Ovviamente anche la scelta della lunghezza è stata debitamente studiata, tenendo conto, soprattutto, delle porzioni delle corde e cercando nella loro divisione di ottenere il più possibile numeri interi. Ogni fase della costruzione del monocordo è stata seguita con grande attenzione, affinché non si perdesse mai di vista lo scopo del nostro lavoro e poter riprodurre esattamente ciò che i pitagorici costruirono due secoli e mezzo fa.

Fig. 1

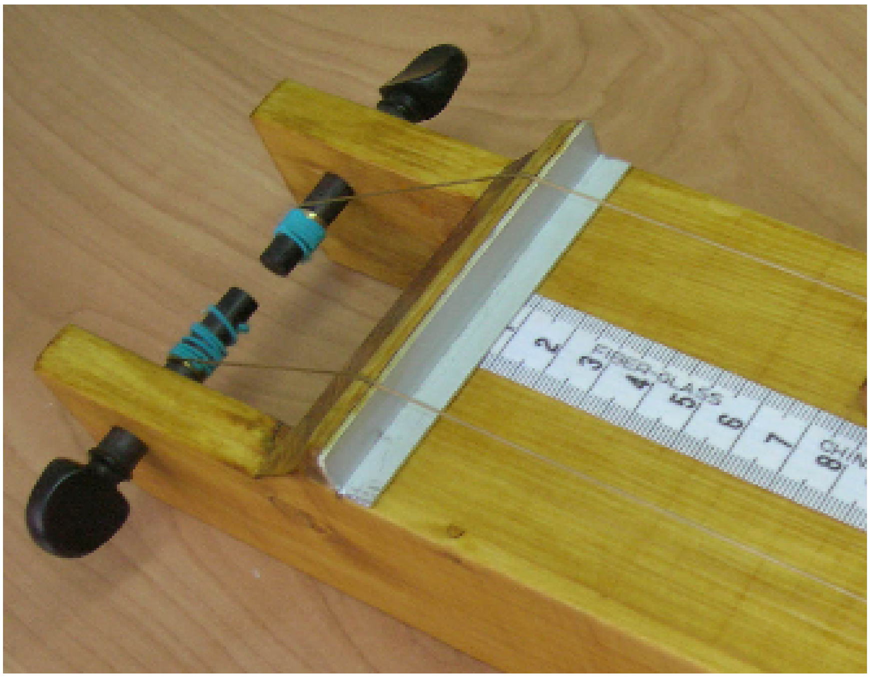


Fig.2

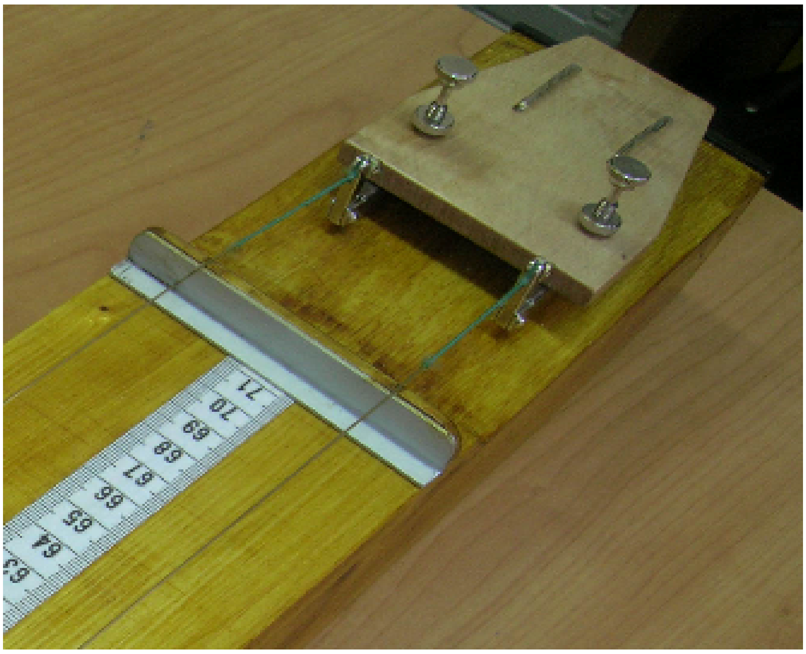

64
65
66
67
68
69
70
71

Fig. 3

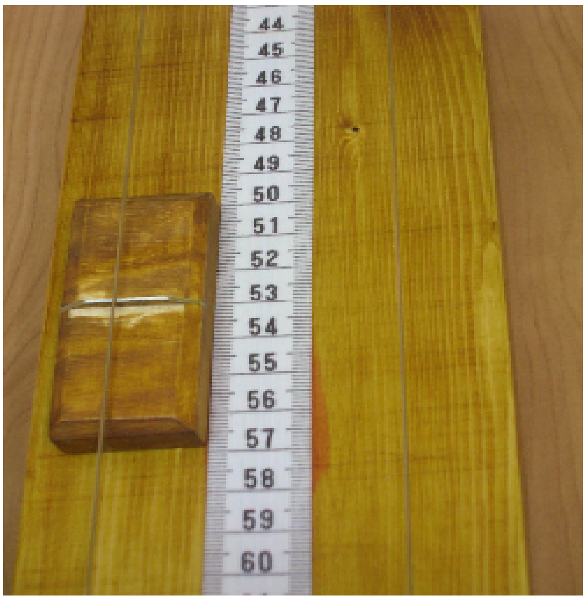

44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60

Fig. 4

IV.6 Descrizione dei laboratori

La ricerca è stata organizzata nella seguente modalità: quattro incontri di tre ore circa, di cui, i primi tre a scuola con i ragazzi divisi in gruppi ed impegnati in attività di laboratorio, mentre l'ultimo all'università, sotto forma di incontro-dialogo, con il gruppo al completo chiamato a partecipare attivamente con domande ed interventi. I quattro incontri sono stati distribuiti in tre settimane, e più precisamente, i primi due nella prima settimana, il terzo nella seconda settimana e infine l'ultimo nella terza settimana. La scansione è stata studiata considerando soprattutto i momenti di riflessione previsti per gli alunni, in modo tale da lasciare loro il tempo di fissare le idee e sviluppare i nuovi concetti acquisiti.

A tutti e tre i laboratori svolti a scuola sono stati presenti i quindici alunni, il ricercatore e l'insegnante. La figura di quest'ultimo è stata determinante ed il suo contributo prezioso, non solo dal punto di vista organizzativo, data la conoscenza dei ragazzi, ma anche e soprattutto per non averli influenzati con consigli e suggerimenti e contribuendo ad invogliarli e stimolarli senza interferire con il progetto di ricerca in corso.

Nel primo laboratorio il ricercatore ha mostrato agli alunni il monocordo, spiegando tecnicamente il suo funzionamento e l'utilizzo, evitando però di spiegare a cosa servisse, camuffando così la macchina matematica in solo strumento musicale. Quindi, dopo questo primo momento preliminare che si potrebbe intendere come un "manuale d'uso", si chiedeva ai ragazzi (ecco la prima consegna) di trovare la corrispondenza tra lunghezza della corda e suono consonante. Dapprima tutti i ragazzi hanno tentato a caso, senza applicare nessuna tecnica, successivamente però, si sono accorti che dimezzando la corda si otteneva un suono che era, per così dire, il "doppio" del primo o per essere più precisi abbiamo convenuto di chiamare quest'altro suono, ottava. Vogliamo sottolineare che il linguaggio usato in classe, quindi il nome delle note e altri termini, è stato frutto di un lavoro collettivo che ha visto partecipi i ragazzi, i quali, scegliendo il nome delle note si sono accorti della convenzionalità di tali nomi e quindi della possibilità di cambiarli senza alterare l'altezza del suono. Ogni tentativo e commento fatto dai ragazzi, è stato segnato da loro stessi in fogli d'appunti, che venivano firmati e poi consegnati alla fine di ogni laboratorio, così da salvare ogni tipo di intuizione e poter riconoscere le difficoltà e gli ostacoli in cui potevano imbattersi. Dopo alcuni tentativi, spostando il ponticello mobile lungo la corda, si sono accorti che dividendola in quattro parti e prendendone prima un quarto poi i tre quarti si ottenevano suoni armonicamente consonanti col suono di riferimento; lo stesso risultato è stato ottenuto dividendo la corda in tre parti e prendendone prima un terzo, poi i due terzi. La prima e più immediata intuizione è stata quella di aver capito che più corte erano le porzioni di corda che si prendevano più il suono era acuto, cioè, che la frequenza di un suono è inversamente proporzionale alla lunghezza della corda che lo produce. Dopo diversi tentativi hanno preso un'altra strada per risolvere il problema, concentrando l'attenzione sulla lunghezza della corda, cioè sul numero settantadue, convenendo dopo qualche calcolo che altro non era che il prodotto di potenze di due e tre. Il primo incontro si conclude così con la fissazione dell'intervallo di ottava, quinta e quarta dando loro le rispettive frazioni di riferimento: 2/1 l'ottava, 3/2 la quinta, 4/3, la quarta.

Nel secondo laboratorio prendendo come riferimento la tastiera del pianoforte e usando il confronto con il modello del monocordo, abbiamo fatto vedere come differenze o somme di intervalli sono rappresentate da rapporti e prodotti di frazioni.

Si è discusso su alcuni intervalli, come ad esempio quello di seconda, ottenuto dalla differenza fra quello di quinta e quello di quarta; tutto questo affinché il confronto fra rappresentazione "geometrica" e "aritmetica" facesse nascere l'idea di una "distanza" il cui calcolo avviene però in modo diverso da quello usuale. Un altro risultato ottenuto dai ragazzi è stato quello di accorgersi che i rapporti rimanevano costanti indipendentemente dalla lunghezza della corda di riferimento (un'altra delle tematiche che il monocordo consente di trattare è la proporzionalità, tema cui si è solo brevemente accennato ma che non si è ulteriormente sviluppato vista la scelta preventivamente fatta).

Il terzo laboratorio è stato il più impegnativo e anche il più ricco di sorprese. Si è chiesto ai ragazzi di costruire l'intera scala musicale adoperando la tecnica già imparata e verificata nei laboratori precedenti, cioè di somma di intervalli mediante prodotto e divisione di frazioni. Dopo aver scelto il DO come nota di partenza della nostra scala, si è dovuto decidere quale sarebbe stato l'intervallo di riferimento con cui trovare tutte le altre note. Per ricondurre i ragazzi all'esperienza già fatta dai pitagorici, il ricercatore ha proposto come intervallo tipo, quello di quinta. Fatto ciò, i ragazzi hanno incominciato a trovare tutte le note della scala, dando loro delle frazioni identificatrici, come in precedenza avevano fatto per gli intervalli di quinta, quarta e ottava. Proprio quest'ultimo era sotto costante osservazione, poiché definiva il punto di arrivo della scala, cioè, il prodotto (somma) degli intervalli doveva concludersi con la frazione 2/1; ogni tentativo portava ad ottenere, invece, dei valori maggiori di 2, che ovviamente, non permettevano la corretta chiusura della scala, mettendo in evidente crisi tutti gli alunni. Senza svelare il perché di quel curioso "imbroglio" numerico si è posto il problema in termini più semplici, chiedendo ai ragazzi di divedere l'ottava in 2 parti uguali, cioè di trovare 2 frazioni uguali che moltiplicate dessero come risultato 2. Lo scopo era quello di metterli di fronte alla sua impossibilità, così da poter introdurre un concetto nuovo, o meglio, dei numeri nuovi, gli irrazionali.

Al quarto laboratorio abbiamo dato, invece, una veste diversa, cioè, di un incontro-dialogo, nel quale i ragazzi avevano ampio spazio per domande ed interventi. Condotto dal prof. Migliorato e dal prof. Gentile, l'incontro ha avuto come protagonista unico l'irrazionale, presentato nelle sue diverse forme. Dapprima si è chiesto ai ragazzi di duplicare l'area di un quadrato di lato *l* rappresentato su una lavagna di fronte a loro (vedi quadrato rosso in fig.1); la prima e più immediata soluzione è stata quella di un ragazzo che ha proposto: «*Basta raddoppiare i lati*»; è stato sufficiente far notare che il quadrato così ottenuto fosse quattro volte più grande di quello assegnato e non il doppio come richiesto (vedi quadrato blu in fig.1); la seconda e non meno curiosa soluzione è stata quella di un altro allievo che ha detto: «*Basta allora raddoppiare solo due lati paralleli così avremo metà del quadrato di prima*»; i rimanenti studenti hanno fatto notare subito che la figura così ottenuta non era un quadrato bensì un rettangolo e pertanto non soddisfaceva la condizione richiesta. I ragazzi hanno convenuto che il lato richiesto fosse compreso fra il lato *l* e il suo doppio 2*l*; sulla base di questa osservazione alcuni ragazzi hanno proposto come soluzione corretta il segmento che si trova esattamente a metà fra *l* e 2*l,* ovvero 3/2 *l* (vedi quadrato bianco in fig.1); è stato mostrato come anche questa soluzione non fosse corretta, facendo vedere nella figura stessa come tale quadrato fosse maggiore del doppio (vedi le coppie di rettangoli opportunamente evidenziate in fig.1). a questo punto uno studente ha proposto di intervallare un opportuno rombo fra il quadrato originario e l'ultimo proposto; alla richiesta di rappresentare tale rombo il ragazzo lo ha disegnato come è possibile vedere in fig.1. È stata cura dello sperimentatore far notare che il rombo proposto non era nient'altro che un quadrato ruotato rispetto a quello originario, e che la correttezza della soluzione non poteva essere dimostrata ma che fosse necessario costruire tale quadrato sulla base di quello dato. È stato a questo punto che i ragazzi hanno avuto l'idea di dimezzare il quadrato quadruplo usando la diagonale del quadrato di partenza (vedi fig.2), non solo ottenendo la soluzione corretta ma avendo anche la garanzia della correttezza medesima. Finita questa fase è stato letto il famoso passo del *Menone* di Platone in cui Socrate ragiona con uno schiavo di come raddoppiare l'area di un quadrato di lato dato. Volevamo in questa maniera far prendere coscienza ai ragazzi che i tentativi da loro fatti fossero simili se non del tutto identici a quelli narrati e descritti da Platone sottolineando così l'importanza del processo costruttivo oltre che del prodotto finale. L'incontro si è chiuso con la classica dimostrazione aritmetica dell'irrazionalità della radice di 2 e con la descrizione di un software di facile applicazione e immediata comprensione che replica le funzioni del monocordo.

Dopo un mese da quest'ultimo laboratorio abbiamo valutato l'apprendimento del concetto di irrazionale, sottoponendo ai ragazzi un questionario, il cui contenuto viene qui di seguito e-sposto; il prossimo paragrafo sarà dedicato alla descrizione dei risultati che da tale questionario sono scaturiti.

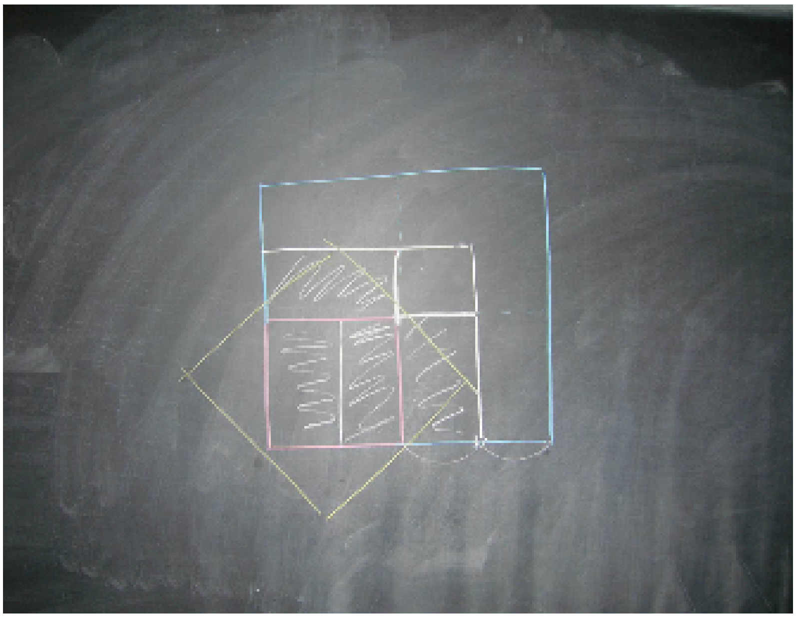


Fig. 1

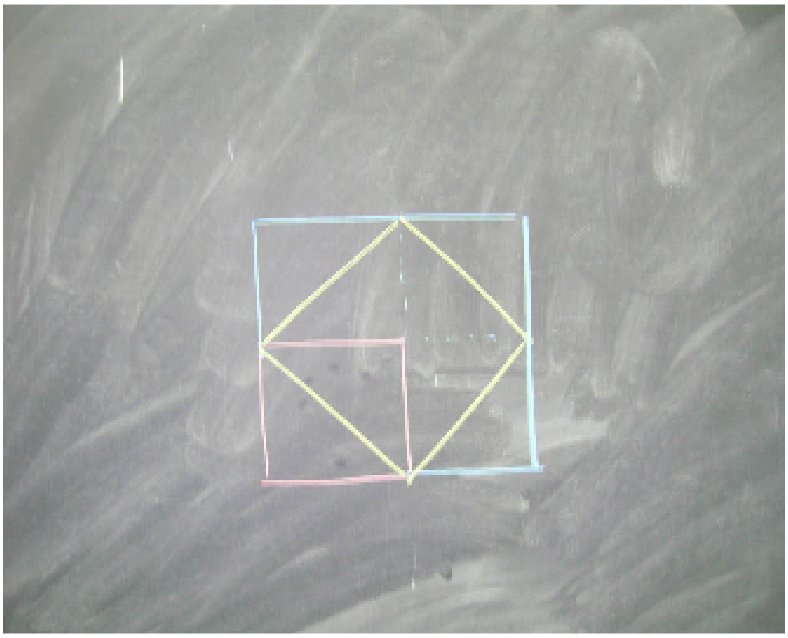


Fig. 2

IV.7 Il questionario

1. È possibile dividere l'ottava in due parti uguali?
2. È possibile dividere l'ottava in tre parti uguali?
3. In quante parti si può dividere l'ottava? Fai un esempio di divisione dell'ottava in due parti.
4. Come si rappresenta numericamente un intervallo musicale? Come si sommano gli intervalli musicali?
5. La consonanza e la dissonanza sono aspetti musicali. Questi fatti si possono esprimere numericamente? Se sì, come?

Un tuo amico, che frequenta la scuola media, ti dice di aver sbirciato un libro delle superiori e che ha letto la frase "numero irrazionale" senza riuscire però a capirci niente. Che cosa gli dici? Come glielo spiegheresti?

Rispondi alle seguenti domande:

1. Cosa vuol dire il simbolo $\sqrt{2}$?
2. Che cosa significa che un numero è irrazionale?
3. I numeri irrazionali sono solo quelli con la radice?
4. Perché si usano?
5. Quanti sono?
6. Posso fare operazioni con questi numeri?
7. Quali dei seguenti numeri sono irrazionali:

$\sqrt{2}$ $\sqrt{4}$ $\log_2 8$ $\log_2 7$ π $1,\overline{6}$ e 3,75 5 -2 2/7

Leggi le seguenti frasi:

Trova un numero che al quadrato fa 2.
$x^2 = 2$.
Dividere l'ottava (musicale) in due parti uguali.
Esprimere il rapporto fra diagonale e lato di un quadrato.

Cosa ne pensi delle precedenti richieste

IV.8 Descrizione ed interpretazione dei risultati del questionario

IV.8.1 Descrizione del questionario e delle motivazioni sottese

Il questionario è stato presentato ai ragazzi in quattro fogli formato A4, con le domande sufficientemente separate da poter contenere le risposte; la consegna è stata divisa in quattro momenti; dopo aver consegnato il primo foglio, ognuno dei successivi è stato consegnato solo dopo aver ritirato il precedente. Il primo foglio, contenente le domande dalla 1 alla 5, verteva sugli aspetti musicali messi in luce durante i primi tre laboratori; ai ragazzi è stato concesso un tempo di 15 minuti per poter fornire le risposte. Il secondo foglio prevedeva una personale produzione libera con l'intento di accertare l'assimilazione del concetto di irrazionale senza vincoli o costrizioni formali che avrebbero potuto invalidare le nostre conclusioni; per tale produzione era previsto un tempo di 20 minuti. Nel terzo foglio si chiedeva di rispondere a sette domande di carattere più marcatamente matematico e che miravano a sapere se la presentazione degli aspetti musicali, sottesi al concetto di irrazionale, avesse avuto delle ricadute positive sull'apprendimento dello stesso; il tempo di consegna per tale foglio è stato di 15 minuti. Nell'ultimo foglio veniva richiesto ai ragazzi di esprimersi su quattro frasi con l'obiettivo di sapere se e quante di esse venivano riconosciute come aspetti dello stesso concetto, in ambiti fra di loro diversi, ovvero se e quante conversioni i ragazzi erano in grado di operare fra registri semiotici differenti, essendo la capacità di convertire uno dei parametri indicativi dell'avvenuto apprendimento; il tempo concesso per l'espletamento di quest'ultima consegna è stato di 15 minuti.

IV.8.2 Risultati del questionario

L'analisi dei risultati è stata effettuata sia dal punto di vista quantitativo che qualitativo. Ciò si è reso necessario perché, se da una parte, quasi tutte le risposte al questionario potevano essere tradotte quantitativamente in maniera naturale, era presente una domanda aperta che, richiedendo una produzione libera, si prestava meglio ad un'analisi qualitativa.

Per quanto riguarda l'analisi quantitativa si è fatto uso del software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive), dopo opportuna traduzione numerica delle risposte; da tale analisi statistica sono rimaste fuori cinque domande: quella contenuta nel secondo foglio, che è stata analizzata qualitativamente; la prima domanda del primo foglio, la quinta del terzo foglio e parte della settima sempre del terzo foglio (segnatamente l'aver indicato i numeri 5 e -2 come numeri razionali), poiché sono risultate corrette per tutti gli alunni, e lo CHIC non è predisposto ad una simile analisi. Le risposte alle domande del primo foglio sono state tradotte in maniera standard, cioè assegnando 1 alla risposta corretta e 0 a quella sbagliata; la stessa cosa vale per il terzo foglio tranne che per la settima domanda in cui sono stati assegnati i valori 0 ed 1 singolarmente a nove delle undici risposte (due di esse sono state espunte dall'analisi come già chiarito sopra); per quanto riguarda l'ultimo foglio è stato assegnato 1 nel caso in cui tutte le frasi fossero state riconosciute come esprimenti lo stesso problema, 0 nel caso in cui neanche due fra di esse fossero state riconosciute equivalenti (Non si è posto il problema di valori intermedi perché in effetti ogni ragazzo li ha riconosciuti o tutti equivalenti o con nessuna equivalenza).

Per quanto riguarda la domanda contenuta nel secondo foglio, essa, come già anticipato, è stata analizzata da un punto di vista qualitativo, cercando di mettere in evidenza, se ce ne fossero stati, analogie o parametri che consentissero di classificarle. Da tale analisi emerge con chiarezza che le risposte a tale quesito si possono classificare in tre gruppi, che corrispondono di fatto alle tre classi (I, II e III liceo) di appartenenza. I ragazzi delle classi di I liceo sembrano riferirsi a conoscenze per “compartimenti stagni” dando definizioni, o solo operativo-algoritmiche, o storiche, o fondate sul problema musicale.

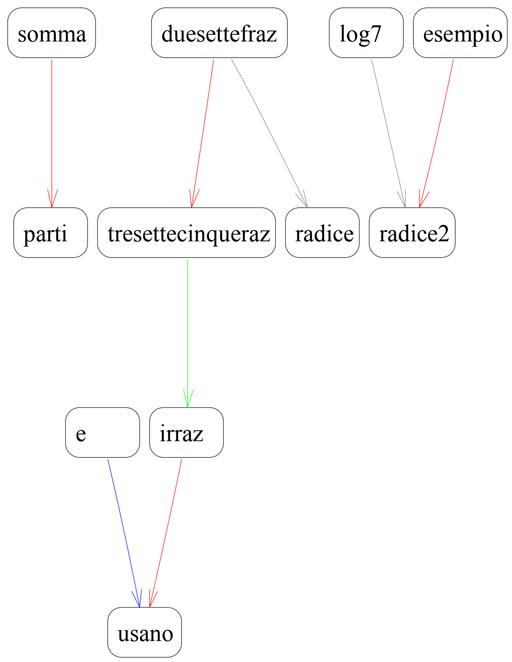
Per Es. A risponde così: «*I numeri irrazionali permettono di compiere operazioni altrimenti impossibili. A noi hanno permesso, per esempio di dividere l’ottava e trovare gli intervalli. Un esempio* $\sqrt{2}$ *. Sono dunque dei numeri indispensabili. Essi hanno infinite cifre dopo la virgola ma non sono periodici*».

B, sempre di I liceo, scrive: «*Nell’antichità i pitagorici misuravano il mondo con un’unità di misura del tutto particolare: il numero. Loro riuscivano a scorgere l’ordine della matematica ovunque. Era sorto però un problema che aveva messo in difficoltà le loro menti, ovvero l’esistenza, anzi l’ipotizzata esistenza di numeri che non fossero finiti, che non fossero completi. Da poco tempo in effetti sono stati scoperti i cosiddetti “numeri irrazionali”. Un esempio è 2,5. Oltre al 5 dopo la virgola possono esserci altri numeri, per esempio 2,5672354 e così via; questi numeri effettivamente sono infiniti. Proprio questo “errore nel sistema matematico” aveva indotto i pitagorici all’errore*».

Le risposte dei ragazzi di secondo liceo sembrano invece essere intrise di formalismo. Non è difficile qui riconoscere la probabile interferenza (come già preventivato) di un precedente intervento didattico sulla tematica dei numeri reali (irrazionali), definiti mediante “classi contigue”. Riportiamo ad e. la definizione di C: «*Direi che è un numero definito mediante due classi contigue, una contenente valori approssimati per difetto ed una per eccesso…* ».

Tra i ragazzi di terza liceo, tre su cinque si distinguono perché si servono più liberamente di espressioni che denotano una comprensione del concetto non soltanto verbale. Efficace appare anche l'uso della suggestione e della metafora per simboleggiare il passaggio all'idea dell'infinito. È particolarmente significativa la risposta di D: «*Un numero irrazionale è un numero non conoscibile del tutto ma rappresentabile. Un numero irrazionale potrebbe essere costituito da infinite cifre, e nessuno può venire a dirci che sono disposte casualmente, esse dopo una lunga disposizione potrebbero anche ripetersi, ma neanche mio nonno che ha 94 anni è riuscito a saperlo né se campasse altri 100 anni lo saprebbe. Noi usiamo per indicarli espedienti come la radice quadrata…* $\sqrt{2}$ *è un esempio di numero irrazionale il cui valore oscilla tra il valore 1 e il 2. 1.414… per l’esattezza…anzi per la* <u>*non*</u> *esattezza*».

Passiamo adesso all’analisi quantitativa, servendoci appunto, del grafico implicativo ottenuto dallo CHIC dove la freccia rossa ha un valore di 95, la blu 90, la verde 87 e la grigia 85. Per una più facile lettura del grafico implicativo, do le corrispondenze fra gli acronimi messi in tabella e le domande a cui si riferiscono: **somma** si riferisce alla domanda 4 del primo foglio (somma di intervalli musicali); **parti** alla domanda 3; **duesettefraz**, **tresettecinqueraz**, ***e***, **log7**, alla domanda 7 del terzo foglio (più precisamente indicano la frazione 2/7, il numero razionale 3,75, *e*, log7); **radice** corrisponde alla domanda 3 del terzo foglio; **esempio** alla domanda 3 del primo foglio; **radice2** alla domanda 1 del terzo foglio; **irraz** alla domanda 2 del terzo foglio; **usano** corrisponde infine alla domanda 4 sempre del terzo foglio.



Dal grafico si rilevano quattro implicazioni forti (con indice di implcazione ≥0,94). Tre di queste appaiono per sé stesse abbastanza scontate, ma sono da rilevare perché confermano la correttezza del questionario e la coerenza complessiva dei risultati. La quarta implicazione è quella invece per noi significativa. Più precisamente tre delle implicazioni sono interne ad uno stesso apparato concettuale: l'implicazione somma $\Rightarrow$ parti si riferisce all'ambito musicale, mentre le implicazioni duesettefraz $\Rightarrow$ tresettecinqueraz e irraz $\Rightarrow$ usano sono interne all'ambito matematico; esse, come già accennato, erano attese e, pertanto, averle trovate nell'analisi finale non fa che confermare la bontà delle scelte fatte nel calibrare il questionario e possono essere considerate come una conferma. L'implicazione esempio $\Rightarrow$ radice2 è quella non scontata e, solo per questo, già di per sé significativa; il fatto che poi consente di trasferire una conoscenza di ambito musicale su una conoscenza di ambito matematico le conferisce un maggiore interesse: essa infatti ci dice che chi dimostra di aver compreso come dividere l'ottava musicale, risponde anche correttamente sul significato matematico di $\sqrt{2}$. Vorrei fare le ultime considerazioni dicendo che all'ultima domanda, quella in cui si richiedeva di riconoscere l'irrazionale espresso in ambiti diversi, hanno risposto correttamente 13 ragazzi su 15; il dato è incoraggiante perché, anche se debolmente, rassicura sul metodo usato; i tre ragazzi che hanno mostrato maggiore conoscenza, come dedotto dall'analisi qualitativa, hanno anche risposto correttamente a quest'ultima domanda; e per concludere aggiungerei che i due musicisti hanno reagito all'esperienza in maniera differente, il che significa che avere una precedente conoscenza musicale, non sembra incidere sul tipo di esperienza da noi effettuata. È appena il caso di precisare, infatti, come il problema delle scale musicali, visto quale modello matematico del fenomeno armonico, è qualcosa di ben diverso dalla pratica del fare musica.

IV.9 Risposte alle domande di ricerca

Risposta alla domanda D1: Il concetto di numero irrazionale presenta ostacoli epistemologici?

Come la ricerca in Didattica della Matematica ha ormai acquisito, è possibile far emergere la presenza di ostacoli epistemologici in due contesti diversi e con modalità differenti: sul piano storico, con strumenti storico-epistemologici, sul piano didattico, evidenziando la presenza di "errori" ricorrenti. La strada seguita è stata quella di fondere i due punti di vista, al fine di avere un risultato in un cotesto corroborato e validato da quello attinto nell'altro; così dapprima è stata operata l'analisi storica che ha dimostrato come gli irrazionali siano intrisi di ostacoli di tipo epistemologico; d'altra parte, sul piano didattico, è stato possibile mostrare come la struttura dei numeri razionali, già posseduta dagli alunni, sia un ostacolo epistemologico forte nei confronti del concetto di numero reale. Tale ostacolo si presenta nelle diverse forme e situazioni che si sono presentate anche storicamente. Il problema delle scale musicali appartiene indubbiamente a quest'ambito.

Risposta alla domanda D2: La presentazione dell'irrazionale mediante la musica può dare maggiore conoscenza dell'oggetto matematico?

Questa era sicuramente la domanda di fondo dell'intero lavoro. L'analisi implicativa sviluppata ha evidenziato una implicazione forte che, come già discusso nel paragrafo sui risultati, dimostra come chi è riuscito ad entrare nel problema pitagorico delle scale musicali e della divisione dell'ottava è stato in grado di descrivere in maniera esauriente il concetto di irrazionale. In breve, l'analisi implicativa sui risultati sperimentali rivela una forte correlazione tra la comprensione del fatto musicale e di quello aritmetico e geometrico. Ne consegue l'utilità di un approccio che utilizzi tutti e tre gli aspetti. La risposta pertanto può ritenersi positiva (seppur con alcuni limiti che espliciteremo nelle conclusioni).

Risposta alla domanda D3: L'uso del monocordo come "macchina matematica" può facilitare una conoscenza più profonda dell'irrazionale?

Questa domanda può ritenersi una precisazione ed una particolarizzazione della precedente. Senza dubbio, come già acquisito dalla ricerca in Didattica della Matematica, l'uso di "macchine matematiche" non può che agevolare l'apprendimento; la particolarità della "nostra" macchina è che riveste (ed ha rivestito storicamente) due ruoli, quello musicale e quello matematico ed il suo uso nel nostro esperimento (come in quelli dei pitagorici) è stato squisitamente matematico. Possiamo senz'altro affermare che l'uso del monocordo è stato essenziale nella conduzione dell'esperimento in quanto costituisce lo strumento fondamentale che mette in relazione il fenomeno (suoni armonici) con la sua modellizzazione matematica; anche nel momento in cui è stato presentato un software matematico-musicale, l'aver fatto "esperimenti" sul monocordo ha consentito di comprendere ciò che il software stava semplicemente "replicando", amplificando le potenzialità del software medesimo.

CONCLUSIONI, PROBLEMI APERTI E FUTURE RICERCHE

Al termine dell'intero percorso di questo lavoro, possiamo suddividere le nostre conclusioni secondo le due fondamentali direzioni di ricerca: quella storico-epistemologica e quella didattica. Tale distinzione è necessaria ed opportuna ove si consideri che i risultati conseguiti nella prima direzione, oltre ad avere ricadute sostanziali sulla seconda, riveste un interesse già per sé stessa.

Livello Storico-epistemologico:

Senza ripetere quanto già detto come conclusione del secondo capitolo, l'analisi compiuta sull'opera di Aristosseno ci consente di mettere in evidenza come la modellizzazione matematica dell'armonia musicale, abbia giocato un ruolo significativo nell'evoluzione del pensiero scientifico greco. Tale ruolo si esplica in una molteplicità di direzioni. Innanzitutto il problema della suddivisione della scala musicale non solo è stato, nella tradizione pitagorica, una delle linee su cui si è misurata l'insufficienza del numero (intero e razionale) come fondamento di ogni discorso sulle grandezze, ma ha segnato anche il passaggio dalle forme più arcaicamente dogmatiche, ad una concezione delle scienze fondate sulla deduzione (matematica) e sulla modellizzazione dei fenomeni (scienze della natura). Nel caso specifico si è evidenziato come il trattato sull'*Armonica*, di Aristosseno, segni un passaggio, da una parte verso il metodo ipotetico deduttivo, di cui verosimilmente si ha negli *Elementi* di Euclide il primo esempio compiuto, dall'altra verso una concezione della scienza che possiamo definire "rappresentativa" e "modellistica", in contrapposizione alle spiegazioni più squisitamente "metafisiche" della precedente tradizione.

Un'ulteriore ricerca, in questa direzione, potrebbe prendere in considerazione l'altro aspetto fino ad ora trascurato dell'opera di Aristosseno: quello relativo alla *Ritmica* che è appunto l'altra opera di questo autore a noi pervenuta. Gli stessi lavori sarebbero poi da mettere in relazione anche con gli sviluppi successivi della scienza ellenistica, ed in particolare con l'opera di Archimede alla luce anche di una più recente pubblicazione di Migliorato-Gentile[26]. In quest'ultimo lavoro, infatti, le problematiche già delineate con i lavori dei due autori su Euclide, vengono ulteriormente approfondite, mettendo ancora più in evidenza i caratteri specifici di quello che era stato già chiamato "Paradigma euclideo" e che di cui, come si è mostrato nel presente lavoro, si trovano idee anticipatrici già in Aristosseno.

Livello della Ricerca in Didattica:

La ricerca sperimentale descritta in quest'ultimo capitolo, sebbene non possa ancora considerarsi del tutto esaustiva, costituisce tuttavia, una prima risposta abbastanza forte sull'utilità dell'approccio anche musicale nella didattica dei numeri irrazionali.

Nella valutazione di questo risultato va tenuto presente lo spessore complessivo dei contenuti concettuali a cui si fa riferimento. La proposta didattica qui considerata, infatti, ha come obiettivo, non un apprendimento puramente formale e algoritmico, ma una concettualizzazione forte e profondamente strutturata, in grado di reggere anche in fasi di apprendimento più avanzate. Detto ciò, assume particolare rilievo nella formazione del concetto, la pluralità delle situazioni in cui il concetto stesso viene riconosciuto. Non si tratta quindi di sostituire gli approcci classici (quello puramente aritmetico e quello geometrico), ma di arricchire ulteriormente il quadro delle situazioni riconducibili alla struttura in oggetto.

[26] Gentile G., Migliorato R., (2008).

L'esperienza, condotta sotto forma di laboratorio in situazione "a-didattica" (nei termini della teoria delle situazioni di Brousseau) sembra avvalorare in modo convincente le ipotesi iniziali. L'analisi implicazionale evidenzia infatti una correlazione forte tra la "comprensione" del problema delle scale musicali e la "comprensione" complessiva del numero irrazionale e del suo ruolo nell'insieme dei numeri reali. Questo dato è avvalorato dalle altre implicazioni forti, che non costituiscono di per sé alcuna novità, ma che per la loro piena corrispondenza a quanto atteso, sono fortemente indicative di una coerenza complessiva dei risultati.

Un ulteriore rafforzamento in tal senso deriva anche dalle risposte alle domande libere, sebbene in questo caso bisogna fare alcune distinzioni. In alcuni casi, infatti, si rileva, come si è già osservato, l'interferenza di interventi didattici precedenti che agiscono qui come un "ostacolo didattico" (sempre nel senso di Brousseau) che si sovrappone all'ostacolo epistemologico, da noi posto come oggetto di studio. Tuttavia tale sovrapposizione si è presentata in modo marginale e non ha impedito di evidenziare gli aspetti fondamentali. Tra le risposte alle domande aperte, appaiono di particolare rilievo quelle degli alunni di terza liceo che hanno usato un linguaggio più libero, in quanto da esse traspare un processo di concettualizzazione mediato dalla funzione linguistica della metafora. E' questo un aspetto che merita un approfondimento in future ricerche, prendendo anche in considerazione le idee recentemente sviluppate da Lakoff e Nuñez.

Ciò detto, bisogna tuttavia rimarcare i limiti della ricerca, sia per quanto riguarda il campione, sia per l'articolazione e lo sviluppo della stessa ricerca. Il primo limite è ovviamente quello numerico. Sarà dunque importante riprendere la ricerca su un campione più vasto. Ma al di là di questo bisogna superare i limiti che in questo caso erano imposti dal contesto entro cui, per mancanza di risorse, si è dovuto forzatamente operare. Si è operato infatti all'interno di un progetto finalizzato e organizzato per scopi diversi (Progetto Lauree Scientifiche).

Una ulteriore ricerca dovrebbe innanzitutto rendere più fine la griglia delle domande sulla base dei risultati già conseguiti. Così ad esempio sarebbe da capire più a fondo se le relazioni implicative osservate siano in qualche modo invertibili e in che misura, e quale peso abbia ciascuna delle diverse situazioni sul risultato finale. Allo stesso tempo però andrebbe condotta con una maggiore libertà nella selezione dei campioni, sia per avere campioni sufficientemente rappresentativi di una popolazione scolastica generale, sia per potere individuare dei gruppi di controllo con cui comparare i risultati.

BIBLIOGRAFIA

Aristosseno, *L'Armonica*, a cura di R. Da Rios (Istituto Poligrafico dello Stato, Roma, 1956).
Azzaroni L., *Canone infinito: Lineamenti di teoria della musica*, Clueb, Bologna 1997
Bachelard G., *La formation de l'esprit scientifique*, Paris: Vrin, 1938.
Bartolini Bussi M.G., **Maschietto M.**, *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*, Springer-Verlag, Italia, 2006.
Baruk S., *L'âge du capitain*, Paris, Seuil, 1985.
Bellissima F., *Il sistema assiomatico deduttivo degli elementi armonici di Aristosseno*, Nuncius, XVII, n.1, 2-44 (2002).
Borzacchini L., *Il computer di Platone: alle origini del pensiero logico e matematico*, Edizioni Dedalo, Bari, 2005.
Boyer C. B., *Stona della matematica*, Milano, 1990.
Brousseau G., *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques.* 7, 2, 33-115. 1986.
Brousseau G., *Le contrat didactique: le milieu.* Recherches en didactique de mathématiques. 9, 3, 309-336. 1989.
Canfora L., *Ellenismo*, Laterza, Roma, 1995.
Chevallard Y., *Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique*. Recherches en didactique des mathématiques. 12, 1, 73-112, 1992.
Chevallard Y., *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, La Pensée Sauvage, 1985.
Chevallard Y., *Les processus de transposition didactique et leur théorisation.* In: Arsac G., Chevallard Y., Martinand J. L., Tiberghien A. *La Transposition didactique à l'épreuve.* Grenoble, La Pensée Sauvage, 135-180. 1994.
Cornu L., Vergnioux A., *La didactique en questions*. Paris, Hachette, 1992.
D'Amore B.,*Il problema del pastore*, La vita scolastica, 2, 14-16, 1993b.
D'Amore B., *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora. III 1999 ed. 2001.
D'Amore B., *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica,* Pitagora, Bologna, 2003.
D'Amore B., **Fandiño Pinilla M.I.**, *Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica".* Educación Matemática (México DF, México). 14, 1, 48-61, 2002.
D'Amore B., **Martini B.**, *Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard*. La matematica e la sua didattica. 2, 150-175, 1997.
D'Amore B., **Sandri P.**, *Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante.* La matematica e la sua didattica. 1, 4-18, 1998.
Droysen J. G., *Geschichte des Hellenismus*, 2 vol., Hamburg, Perthes, 1836-1843.
Duroux A., *La valeur absolue (Difficultes majeurs pour une notion mineure)*, Tesi, Bordeaux Università - IREM 30.6.1982
Fandiño Pinilla M.I., *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna, Pitagora 2002.
Fandiño Pinilla M.I., *Frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna, Pitagora 2005.
Frova A., *Fisica nella Musica*, Zanichelli, Bologna, 1999.
Furinghetti F., **Radford L.**, *Historical Conceptual Developments and the Teaching of Mathematics: from Phylogenesis and Ontogenesis Theory to Classroom Practice*, Handbook of International Research in Mathematics Education, Hillsdale, Erlbaum, pp. 631-654, 2002.
Piaget J., **Garcia R.**, *Psychogenèse et histoire des sciences*, Paris, Flammarion, 1983.
Radford L., *On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics*, For the Learning of Mathematics, 17(1), pp. 17-23, 1997.

Gentile G., **Migliorato R.**, *Euclid and the scientific thought in the third century B.C.*, Ratio Mathematica, 15, 37-64, (2005).
Gentile G., **Migliorato R.**, *Archimede aristotelico o platonico: "tertium non datur"?*, Atti Acc. Peloritana dei Pericolanti, Cl. di Sci., Fis, Mat.e Nat. Vol. LXXXVI, C1A0802009, 2008.
Giordan A.,**De Vecchi G.**, *Les Origines du Savoir*. Delachaux et Niestlé, 178, 1987.
Godino J. D., *La metafora ecologica en el estudio de la noosfera matematica.* Quadrante. 2, 1, 9-22, 1993.
Hofstadter D.R., *Gödel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*, Adelphi, 1990.
Isnardi Parente M., *Gli stoici. Opere e testimonianze,* TEA, Milano, 1994.
Kline M., *Storia del Pensiero Matematico*, 2 volumi, Einaudi, Torino, 1991.
Kuhn T., *The structure of scientific revolution, second edition enlarged, with the "Postscript – 1969"*, The University of Chicago Press, Chicago, 1970.
Lakoff G., **Nuñez R.E.**, (2000), *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being,* Ediz. Italiana: *Da dove viene la matematica: come la mente embodied dà origine alla matematica,* Bollati Boringhieri, Torino, (2005).
Macaluso G., *Interpretazione vygotskiana in una situazione a-didattica nell'insegnamento/ apprendimento nella scuola primaria*, Tesi di laurea in Scienze della formazione primaria, Università degli studi di Palermo, Palermo, 2006. Versione in italiano sul sito: http://math.unipa.it/~grim/Tesi_FP_macaluso_06.
Marazzani I., **D'Amore B.**, **Fandiño Pinilla M.I.**, **Sbaragli S.**, *La didattica e le difficoltà in matematica*, Centro Studi Erickson, ISBN: 8861372384, 2008.
Meira, L. (1995). *Meditation by tools in the mathematics classroom*, in *Proceding of the 19th Conf. of the Intern. Group for the Psychology of Mathematics Education,* Recife, Brazil, vol. 1.
Migliorato R., *La Rivoluzione euclidea e i "paradigmi scientifici" nei regni ellenistici*, Incontri Mediterranei, 11, pp. 3-24, 2005.
Migliorato R., *Modelli matematici, predittività e progresso scientifico: un caso storico esemplare,* Atti del Convegno "L'insegnamento della matematica nel quadro delle riforme", S. Cesarea Terme - 2003. (pubbl. elettr. in *Matematicamente* http://www.matematicamente.it/attisantacesarea/index.htm).
Morin E.,**Ciurana E.**, **Domingo Motta R.**, *Educare per l'era planetaria: il pensiero complesso come metodo di apprendimento*, Armando Editore, Roma, 2004.
Netz R., **Noel W.**, *Il Codice perduto di Archimede*, Rizzoli, Milano, 2007.
Odifreddi P., *Pitagora: la matematica dell'armonia*, pubblicazione elettronica, Dipart. di Mat. Università di Roma3, http: / / www.mat.uniroma3.it/scuola_orientamento/ scuola / pitagora.htm.
Pintacuda S., *Acustica Musicale*, Edizioni Curci, Milano, Luglio, 1991.
Platone, *Timeo*.
Polo M., *Il contratto didattico come strumento di lettura della pratica didattica con la matematica*. L'educazione matematica. XX, VI, 1, 4-15, 1999.
Radford L., *Gestures, Speech, and Sprouting of Signs. A Semiotical-Cultural Approach to Students' Types of Generalization,* Mathematical Thinking and Learning, 5(1) 37-70, 2003.
Radford L., *Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità*. La matematica e la sua didattica. 1, 4-23, 2004.
Richelmi C., *Circulata melodia. L'armonia delle sfere nella Commedia di Dante Alighieri*. In De Musica: annuario in divenire (rivista on line a cura del Seminario Permanente di Filosofia della Musica; http://users.unimi.it/~gpiana/demus.htm), annoV, 2001.
Righini P., *Accordature e accordatori*, Berben Edizioni musicali, Ancona, 1979.
Romano F., *Architetture della musica occidentale*, I.S.N.P. Edizioni, Reggio Calabria, 1996.
Rossing T. D., *The Science of Sound*, Addison - Wesly, New York, 1990.
Russo L., *La rivoluzione dimenticata* Feltrinelli, Milano, 1996.
Russo L., *The definition of fundamental geometric entities contained in Book I of Euclid's Elements*, Arch. Hist. Exact Sci., 52, n. 3, pp. 195-219, 1998.

Sachs C., *Storia degli strumenti musicali*, Milano, Mondadori, 1980.
Sarritzu A., *Modelli matematici e armonia musicale: uno sguardo storico*, in Quali prospettive per la Matematica e la sua didattica, Atti on line del Convegno omonimo (Piazza Armerina, 2004, pp. 14) http://math.unipa.it/~grim/convreg1_sarritzu_05
Sarritzu A., *Aristosseno tra Aristotelismo e nuova scienza*, Atti Accademia Peloritana dei Pericolanti, Vol. LXXXVI, pp. 1-15, DOI: 10.1478/C1A0802010, 2008.
Sbaragli S., *Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico*. Tesi di Dottorato di Ricerca. Università Komenského di Bratislava, (2004). Direttore: Ivan Treskansky, advisor: Bruno D'Amore. Versione in italiano e in inglese nel sito: http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm
Scimemi B., *Contrappunto musicale e trasformazioni geometriche*, in Atti. del Convegno "Matematica e Cultura" Venezia, suppl. a "Lettera Matematica Prislem" n°27 - 28 - pp. 77–86, 1997.
Scimone A., *Pupils' conceptions about an open historical question: Goldbach's conjecture. The improvement of mathematical education from a historical viewpoint*, Doctoral Thesis, Quaderni di Ricerca in Didattica del G.R.I.M., n.12, 2003.
Spagnolo F., *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, La nuova Italia Editrice, Scandicci (Firenze), 1998.
Spagnolo F.,**Marino T.**, *Gli ostacoli epistemologici: Come si individuano e come si utilizzano nella Ricerca in Didattica della Matematica*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 19b, n.2, 1996.
Speranza F., *Tendenze empiriste nella Matematica*. *Quaderni di Epistemologia della Matematica.* CNR, Progetto TID-FAIM. 10, 77-88. [Ristampato in: Speranza F. (1997). Scritti di Epistemologia della Matematica. Bologna: Pitagora. 57-64]. 1992.
Surian, E., *Manuale di storia della musica*, vol.1 Rugginenti Editore, Milano, 1991.
Timpanaro Cardini M., *Pitagorici: testimonianze e frammenti*, La Nuova Italia, Firenze, 1958-62.
Vygotskij L. S., *Il Processo Cognitivo*, Universale Bollati Boringhieri, Torino, 1987.
Vygotskij L. S., *Pensiero e linguaggio*, Editori Laterza, Bari, 2003.
Wartofsky M., *Perception, Representation, and the Forms of Action: Towards an Historical Epistemology*. In: *Models. Representation and the Scientific Understanding, D.,* Reided Publishing Company, 188-209, 1979.