DOTTORATO DI RICERCA
in
Storia e Didattica delle Matematiche, Storia e Didattica della Fisica,
Storia e Didattica della Chimica

Ciclo XX - 2005/2006

Consorzio tra Università Bologna, Università Catania, Università di Bratislava (Slovacchia), Università Nitra (Slovacchia), Università di Napoli “Federico II, Università di Alicante (Spagna), Università di Pavia, Università di Palermo, CIRE (Centro Interdipartimentale Ricerche Educative, Università di Palermo)

SEDE AMMINISTRATIVA: UNIVERSITÀ DI PALERMO

CARMELA ZAPPULLA

La Geometria Proiettiva Complessa
Origini e sviluppi da von Staudt a Segre e Cartan

Tutor Prof. Aldo Brigaglia

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA

Palermo 2009

A mio figlio Pietro

Indice

Introduzione

L'uso dei numeri complessi in matematica risale a molti secoli fa: se si considera che già nella soluzione di equazioni di secondo grado si può presentare il caso di soluzioni non reali si capisce che, storicamente, il problema affonda le sue radici in un tempo molto lontano.

In questo lavoro di tesi, comunque, l'attenzione verrà focalizzata sulla seconda metà del secolo XIX e le prime decadi del secolo XX. Infatti, come vedremo, lo sviluppo della geometria proiettiva complessa prende le mosse all'inizio della seconda metà dell'Ottocento con le opere di Möbius e Von Staudt[1], mentre il dibattito sulla rappresentazione geometrica delle quantità immaginarie si era già sviluppato a inizio secolo (con qualche accenno a fine Settecento).

Il voler dare un significato geometrico a questi "nuovi" numeri trovava una giustificazione nella convinzione (risalente a Euclide) che per legittimare l'esistenza di un ente se ne doveva fornire la rappresentazione geometrica. Ma bisogna sottolineare che ancora tra la fine del Settecento e i primissimi anni dell'Ottocento le geometrie non euclidee non avevano assunto un ruolo fondamentale nella costruzione delle teorie non solo geometriche ma di tutta la matematica, e quindi, in mancanza di una concezione moderna dell'idea di campo numerico, si cercava ancora una giustificazione geometrica per le soluzioni (reali o complesse) di una qualsiasi equazione, concezione, come abbiamo detto, tipicamente classica.

Ma la spinta allo studio del campo complesso e alla rappresentazione reale dei suoi elementi si deve, oltre che alla teoria delle equazioni che affonda le sue radici nel Rinascimento Italiano, soprattutto al ruolo primario assunto della teoria delle funzioni a variabile complessa nel panorama degli sviluppi dell'analisi, soprattutto sulla spinta della sistemazione datale da Cauchy.

[1] (von Staudt 1856-57-60).

Qui non si vuole percorrere la storia dell'introduzione dei numeri complessi, tra l'altro ben nota, bensì presentare la storia dell'evoluzione della Geometria Proiettiva Complessa partendo della rappresentazione geometrica degli elementi immaginari. Quindi, si arriverà all'utilizzazione della geometria complessa nel XX secolo in campi apparentemente lontani da quello prettamente geometrico.

E vedremo in primo piano la scuola italiana di geometria della seconda metà del XIX secolo: essa, si sa, raggiunge in quegli ultimi decenni del secolo suddetto l'apice storico del suo successo per quanto concerne ricerche, produzioni, pubblicazioni, persone e studiosi che si dedicarono costantemente e in più direzioni allo sviluppo della geometria. In questo scenario si inseriscono le opere di cui tratteremo, uniche nel loro genere e degne di attenzione: tali sono alcune pubblicazioni di Corrado Segre (1863-1924) (pubblicazioni che a nostro parere sono state generalmente sottovalutate dai suoi stessi biografi) che vanno dal 1888 ai primi anni del XX secolo.

L'argomento sviluppato da Segre risulta essere interessante soprattutto per i suoi molteplici risvolti scientifici: i suoi studi sono entrati in tempi successivi nello sviluppo della Geometria differenziale, della Geometria algebrica e dell'Analisi e, in particolare:

1) delle funzioni automorfe, i cui trattati pongono a loro base lo studio delle trasformazioni lineari sul campo complesso e il cui studio entra in molti punti della teoria delle equazioni differenziali,
2) dei sistemi numerici ipercomplessi come gli ottonioni e in generale gli 2^n-nioni,
3) della grafica 3D dei frattali[2].

Inoltre, le ricerche di Segre costituiscono una delle prime trattazioni della geometria su un campo diverso da quello reale (ciò se si escludono certi lavori di alcuni matematici tedeschi): infatti Segre, dopo aver dato inizio alle ricerche in geometria complessa, orienterà i suoi sforzi in direzione dello studio di geometrie su algebre con divisori dello zero (p. e. sui bicomplessi o sui duali), studi che assieme ai lavori di Weierstrass e quelli di Hamilton sui quaternioni ne costituiscono una pietra miliare.

L'ultimo capitolo sarà dedicato all'analisi dei primi due testi universitari di Geometria Complessa (quelli di Coolidge e di Cartan), che prendono entrambi le mosse dall'opera di Segre.

[2] Si veda alla fine del §6.4.

Vogliamo concludere questa introduzione con una citazione di Corrado Segre del 1905, dalla quale si intuisce bene l'alta considerazione del matematico torinese per tali ricerche:

Le varietà di enti che si considerano ordinariamente in Geometria sono analitiche, od in particolare algebriche: definibili cioè con legami analitici od algebrici fra le coordinate complesse dei loro elementi. Ma, seguendo la tendenza ad ampliare il campo geometrico, si possono anche studiare delle varietà più generali: ottenute cioè considerando staccatamente, come variabili indipendenti, le due componenti reali di ogni coordinata complessa; e ponendo dei legami fra le varie coppie di componenti reali. Se questi legami sono algebrici, si hanno le così dette varietà iperalgebriche, intorno a cui io ho pubblicato verso il 1890 alcune ricerche. Fra esse vi sono le imagini geometriche di quelle forme quadratiche di HERMITE a variabili complesse coniugate, che si son presentate tanto spesso in questi anni, collegandosi ai gruppi di sostituzioni lineari ed alle funzioni automorfe. Così le forme di HERMITE nel campo quaternario rappresentano delle corrispondenze fra punti e piani molto analoghe alla polarità rispetto ad una quadrica. Considerandole sotto questo aspetto geometrico, varie questioni su quelle forme, per esempio sulle loro espressioni canoniche, sulle loro trasformazioni lineari in se stesse, ecc…, riescono notevolmente semplificate.

Fra le varietà iperalgebriche si trovan pure quelle composte dei punti reali di una varietà algebrica. Così dalla geometria degli enti complessi passiamo a quella degli enti reali!

Le funzioni di variabili complesse han fatto trascurare per qualche tempo le funzioni di variabili reali, sebbene queste sian più importanti di quelle! Ora, o Signori, lo stesso fatto è accaduto in Geometria! Sono pochi gli scienziati che si occupano delle questioni di realità, o forma, o topologia; quantunque esse costituiscano un campo così degno di essere coltivato! ….

Ma debbo pure avvertire che l'astrazione, che ripetutamente ho messo in evidenza come un carattere della Geometria moderna, ha avuto anche l'effetto di moltiplicare, per così dire, le geometrie complesse.

Da un lato si può avere l'opportunità di considerare certi enti geometrici come punti di nuova natura, aventi per coordinate numeri complessi di specie superiore. Così nello studio delle varietà iperalgebriche, fin nei problemi più semplici che nascono dalla considerazione dei rami reali di una curva algebrica, si son presentati spontaneamente dei punti bicomplessi.[3]

[3] Da (Segre 1905).

CAPITOLO 1

I numeri complessi e la loro origine

Possiamo far risalire la prima idea che porta verso la conoscenza delle quantità immaginarie al XVI secolo. Dalla risoluzione delle equazioni di terzo grado di Scipione Del Ferro (1465-1526) e Girolamo Cardano (1501-1576)[4] alle cruciali regole per il calcolo operazionale dell'*Algebra* (1572) di Rafael Bombelli (1530-1590), gli autori di tale secolo diedero impulso alla definizione di una teoria algebrica dei numeri immaginari. Ma la strada verso la legittimazione alla ragion d'essere dei numeri complessi era ancora lunga.

> *Provate a dividere il numero 10 in due parti, in modo che il loro prodotto sia uguale a 40. Evidentemente è impossibile! Eppure, benché implichi una serie di torture mentali, ciò è fattibile grazie ad alcuni numeri sofistici.*[5]

Infatti Cardano nel suo *Ars magna* arrivò a considerare non solo numeri negativi (che chiamava "puramente falsi"), ma anche numeri complessi (che chiamava "puramente sofistici"); infatti egli osservò che se trattate secondo alcune regole, allora tutte le equazioni quadratiche senza radici reali possono essere pensate come aventi radici complesse. E forse egli arrivò ai numeri complessi attraverso il caso "irriducibile" delle equazioni di terzo grado. Nel suo *Opus novum de proportionibus* (Basel, 1570), parla a proposito di questi numeri immaginari come di "non-numeri": *quot modis numerus possit produci ex non numero*.[6]

---

[4] (Cardano 1545, cap. 37).

[5] Da (Toth 2002).
La citazione esatta di Cardano è: *dividi 10 in due parti, il prodotto delle quali sia 30 o 40, è ovvio che tale caso o questione è impossibile* (Cardano 1545, p. 131). Cfr. anche (Caparrini 2001-2002, pag. 141-142.)

[6] Vedi (Toth 2002).

 Girolamo Cardano	 Ars Magna, 1545

Tre secoli dopo, Jacques Hadamard (1865-1963) non nasconde la sua ammirazione e il suo stupore:

> *Le regole dell'algebra mostrano che il quadrato di qualunque numero, sia positivo che negativo, è un numero positivo: quindi, parlare di radici quadrate di un numero negativo è una mera assurdità. Ora, Cardano commette deliberatamente tale assurdità e comincia a fare calcoli con tali numeri "immaginari". Si vorrebbe descrivere ciò come pura follia; e ancora l'intero sviluppo dell'algebra e dell'analisi*


Jacques Hadamard

> *sarebbe stata impossibile senza quel fondamento –che, naturalmente, fu, nel diciannovesimo secolo, stabilito su basi solide e rigorose. È stato scritto che il cammino più corto e migliore tra due verità sul dominio reale passa spesso attraverso quello immaginario* (Hadamard 1954, p. 122-123).[7]

Ma è stato soprattutto Bombelli a riconoscere la necessità di ampliare i numeri fin allora conosciuti (anche gli irrazionali erano accettati e trovati come approssimazione di razionali, e i negativi resi plausibili dalla nozione di senso o direzione su una linea) con quelle *quantità silvestri*[8] che altro non sono che le radici immaginarie delle equazioni; Bombelli dimostrò l'importanza dei complessi e in particolare l'uso fondamentale dei

[7] *The rules of algebra show that the square of any number, whether positive or negative, is a positive number: therefore, to speak of the square root of a negative number is mere absurdity. Now, Cardan deliberately commits that absurdity and begins to calculate on such "imaginary" quantities.*
On would describe this as pure madness; and yet the whole development of algebra and analysis would have been impossible without that fundament – which, of course, was, in the nineteenth century, established on solid and rigorous bases. It has been written that the shortest and best way between two truth of real domain often passes through the imaginary one. (Hadamard 1954, p. 122-123, trad. it. nostra).

[8] Con tali termini Bombelli e Cardano definiscono i numeri immaginari (si veda a tal proposito (Maracchia 2005, pag. 283-284)).

numeri complessi coniugati nella risoluzione delle equazioni, e introdusse i termini *più di meno* e *meno di meno* per indicare gli attuali + *i* e – *i*.

Frontespizio dell'opera di Bombelli

Con un linguaggio forse eccessivamente moderno, Bourbaki nota che

> *Bombelli considera i numeri complessi come 'combinazioni lineari' a coefficienti positivi di quattro elementi di base …; in particolare egli pone come assioma che 'più' e 'più de meno' non si addizionino; prima apparizione, questa, dell'indipendenza lineare* (Bourbaki 1963, pp. 91-92, in nota; (cfr. Bombelli 1572-1579, pp. 169 e 190)).

Tali numeri vennero successivamente definiti *immaginari* da René Descartes (1596-1650) nel terzo libro de *La Géométrie* (1637) per indicare delle soluzioni

René Descartes

considerate fittizie e irreali, né vere né "false", prese in considerazione solo per dimostrare che il problema era appunto insolubile; infatti:

> *Del resto, tanto le radici vere che le false non sono sempre reali, ma qualche volta solamente immaginarie, cioè che si può sempre immaginare tanto che ho detto in ogni equazione, ma che non c'è alcuna quantità che corrisponde a quella che si immagina; come ancora che se ne può immaginare tre in quella,*
>
> $$x^3-6x^2+13x-10=0$$
>
> *ce n'è comunque una reale che è 2, e per le altre due, che sebbene le si aumenti o diminuisca, o moltiplichi nella maniera che ho spiegato*

prima, non si potranno mai rendere altro che immaginarie (Descartes, p. 63) [9].

Ma si dovette aspettare il 1685, anno in cui John Wallis (1616-1703) pubblicò il suo *De Algebra Tractatus* (scritto in realtà nel 1673) contenente una prima rudimentale

John Wallis

idea di rappresentazione geometrica della radice quadrata di un numero negativo. Egli infatti inizialmente[10] spiega perché le quantità immaginarie debbano essere accettate:

Abbiamo avuto prima l'occasione (nella soluzione di alcune equazioni quadratiche e cubiche) di menzionare i quadrati negativi, e le radici immaginarie; in contrapposizione di quelle che si chiamano radici reali, sia affermative [=positive] *che negative.…*
Si reputa che queste quantità immaginarie (nascenti dall'aver supposto la radice quadrata dei negativi) implichino (se capitano) la impossibilità del caso proposto.
E così è infatti se ci si attiene alla prima e stretta nozione proposta. Non è possibile che un numero, (sia esso positivo o negativo) moltiplicato per se stesso possa dare (per esempio) -4. Dal momento che tali segni (del tipo + o -) daranno sempre +, e quindi mai -4.
Ma allo stesso modo è impossibile che una quantità possa essere negativa. Non è possibile infatti che una grandezza possa essere minore di niente o che un numero qualsiasi sia più piccolo di 0.

---

[9] *Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine; comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-ci,*

$$x^3-6x^2+13x-10=0$$

il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2, et pour les deux autres, quoiqu'on les augmente o diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne sauroit les rendre autres qu'imaginaires (Descartes 1637, Libro III p. 63).

[10] Si veda (Wallis 1685, capp. LXVI-*De Quadratis Negativis; eorumque Radicibus dictis Imaginariis,* LXVII-*Eorundem Exemplificatio in Geometria* e LXIX- *Aliæ quæ huc spectant Æquationes Geometricæ*).

Tuttavia tale ipotesi (sulle quantità negative) non è né inutile né assurda, se rettamente intesa. E sebbene la notazione algebrica comporti una quantità minore di niente, questa nelle sue applicazioni in fisica denota una quantità reale come se il suo segno fosse +, ma viene interpretata in senso contrario (Wallis 1685, pag. 286)[11],

per poi specificare che la nozione di radice immaginaria è vera[12] e che le radici di numeri negativi possono essere supposte anche in geometria[13]. Vediamo come:

se si parte da A e si pone AB=+b e (sulla stessa retta) si procede ponendo BC=+c, sia AC (=AB+BC=+b+c) il diametro di un cerchio: sarà esso il seno retto, oppure media proporzionale, $BP=\sqrt{+bc}$.

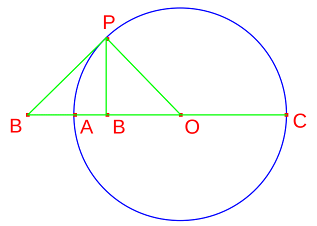


Fig. 1[14]

Se invece da A (e con segno contrario) si ha –AB=–b, e da B si procede in modo che BC=+c, il cerchio avrà come diametro AC=–AB+BC=–b+c: sarà esso la tangente, o media proporzionale, $BP=\sqrt{-bc}$.

---

[11] *Superius, in solutione quarundam AEquationum Quadricarum & Cubicarum , facta est mentio de Quadratis Negativis eorumque Radicibus Imaginariis dici solitis; prout contradistinguuntur Radicibus Realibus, sive affimativæ hæ sint sive negativæ. Sed quorum pleniorum tractationem in hunc locum rejecimus.*

Hæ quantitates Imaginariæ (ex supposita radice quadrati Negativi oriundæ,) reputantur indicare (quoties contingunt) propositum casum Impossibilem esse.

Quod & verum est, secundum primam strictamque notionem rei propositæ. Fieri enim non potest ut numerus aliquis (sive affirmativus sive negativus) in se ductus, conficiat (verbi gratia) -4. Quippe signa similia (sive sint + sive -) semper conficiunt +; adeoque non -4.

Sed & omnimo impossibile est, quantitatem ullam (utut non sit negativum quadratum) negativam esse.Impossibile enim est ut ulla magnitudo sit minus quam nihil, aut ullus numerus, paucior quam 0.

Nec tamen est ea supposito (quantitatis Negativæ) aut inutilis aut absurda; modo recte intelligatur. Quamvis enim, quoad puram Notationem Algebricam, innuere videatur nota –magnitudinem quæ minor sit quam nihil; cum tamen Physicam subit considerationem, magnitudinem non minus Realem denotat, quam ipsum +; sed sensu suppositioni contrario interpretandam (Wallis 1685, Cap. LXVI, pag. 286, trad. nostra).

[12] Cfr. (Wallis 1685, pag. 287, fine cap. LXVI).

[13] Cfr. (Wallis 1685, pag.287, inizio cap. LXVII).

[14] Riproduzione fedele della figura in (Wallis 1685, pag. 288).

Quindi $\sqrt{+bc}$ *significa linea retta, mentre* $\sqrt{-bc}$ *la tangente (nello stesso cerchio) dell'arco AP,* dallo stesso punto P allo stesso diametro AC, evidentemente prolungato. *E lo stesso triangolo OBP (col centro O) che prima era rettangolo in B, sarà (nel caso successivo) rettangolo in P* (Wallis 1685, cap. LXVII, pag. 288)[15].

L'idea di Wallis, quindi, era quella di sfruttare la nozione di verso, così come egli stesso faceva per i numeri negativi che hanno senso inverso ai positivi: la lunghezza rappresentata della radice quadrata di una quantità negativa non poteva essere misurata sulla stessa retta dei numeri positivi e negativi, prima o dopo di essi che si voglia, ma veniva misurata su una linea nello stesso piano e *sopra* la retta stessa[16].

Nel 1712 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nella sua *Observatio,*

Gottfried Wilhelm Leibniz

con le parole

> *quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores, et de vero sensu Methodi infinitesimalis*
> (*Leibniz* 1712, pp. 167-169)

ne accenna l'esistenza a proposito sia dei logaritmi ad argomento negativo sia dell'opera di Wallis, per poi comunque considerarli enti anfibi, a metà tra l'essere e il non essere, come egli stesso li denominava: *uscito dall'irrazionale, stupefacente e nel*

---

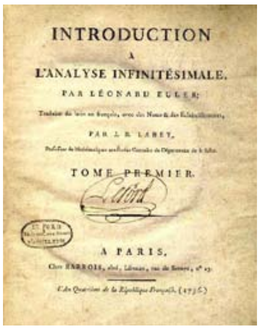
[15] *Si prorsum ab A sumatur AB=+b, & prorsum adhuc (in eadem recta) BC=+c; sitque AC (=AB+BC=+b+c) diameter circuli:erit sinus rectus, seu media proportionalis, BP=* $\sqrt{+bc}$.

Sin retrorsum ab A (adeoque cum contrario signo) sumatur –AB=-b; &, à B prorsum, BC=+c; manente eadem circuli diametro AC=-AB+BC=-b+c: erit Tangens, seu media proportionalis, BP= $\sqrt{-bc}$.

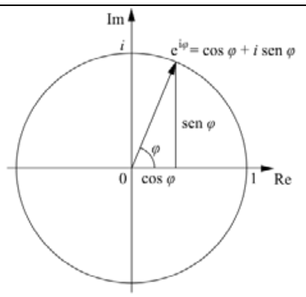
Adeoque $\sqrt{+bc}$ *significabit Sinum rectum, &* $\sqrt{-bc}$ *Tangentem, ejusdem (in eodem circulo) Arcus AP; ab eodem P puncto ad eandem AC diametrum, saltem productam. Ipsumque (ad centrum O) triamgulum OBP rectangulum, quod prius erat rectangulum ad B, siet (casu posteriori) rectagulum ad P* (Wallis 1685, Cap. LXVII, pag. 288, trad. nostra).

[16] Cfr. (Wallis 1685, pag. 289 penultimo capoverso, cap. LXVII).

contempo elegante, questo numero è un mostro del mundus idealis per il quale lo spirito va alla ricerca del proprio rifugio[17].

 INTRODUCTION A L'ANALYSE INFINITÉSIMALE. PAR LÉONARD EULER; TOME PREMIER. A PARIS.	Frontespizio dell'opera di Eulero del 1748

Il XVIII vede Leonhard Euler (1707-1783) in prima linea: egli mostra (1747) come il logaritmo di un numero negativo è immaginario, e l'anno successivo nella *Introductio in analysin infinitorum* introduce la sua famosa uguaglianza $e^{i\pi}+1=0$ [18]. Ma già qualche pagina prima, egli definisce in modo chiaro e soprattutto moderno il logaritmo[19], mentre il logaritmo ad argomento negativo viene introdotto in quelle formule che sono passate alla storia col suo nome[20].

	
Leonhard Euler	Interpretazione geometrica odierna della formula di Eulero

Invece, la prima attestazione dell'uso del simbolo ***i*** per indicare l'unità immaginaria si trova in uno scritto del 1777, che Eulero indirizzò all'Accademia delle Scienze di S. Pietroburgo, ma che venne pubblicato postumo nel 1794 in un volume delle "*Institutionum calculi integralis* …" , più precisamente nel V supplemento al tomo I capitolo V dell'*Integrazione di forme che implicano angoli o seni di angoli*, nel primo

[17] Citato in (Toth 2002).

[18] Cfr. (Euler 1748, Cap. VII - *De quantitatum exponentiarum ac Logarithmorum per series explicatione*, p.86).

[19] Cfr. (Euler 1748, pp. 72-73), tratto da: (Euler 1796).

[20] Cfr. (Euler 1748, p. 102).

paragrafo dal titolo: *Di forme differenziali angolari soprattutto irrazionali, che tuttavia si possono integrare per mezzo di logaritmi e archi circolari*[21]:

> *Poiché non mi appare altra via che quella di procedere attraverso gli immaginari, nel seguito indicherò la formula $\sqrt{-1}$ con la lettera i, così che sia ii = -1 e 1/i = -i*[22].

Infatti $\frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$.

Ma ancora, tutti i matematici menzionati non avevano affrontato il problema di tracciare su un piano un punto corrispondente a un numero complesso, limitandosi a operare algebricamente con le quantità immaginarie e a usarle lì dove tornavano utili.

Si dovranno aspettare gli ultimi anni del XVIII secolo durante i quali l'uso dell'algebra dei numeri complessi, anche se non ancora definita in modo corretto, era comunemente accettata. Di contra, sarà invece la prima metà del XIX secolo che vedrà la definitiva rappresentazione geometrica di un numero complesso.

---

[21] In Eulero, *Institutionum calculi integralis,* 1794

SUPPLEMENTUM IV. *AD TOM. I. CAP. V.* DE INTEGRATIONE FORMULARUM ANGULOS SINUSVE ANGULORUM IMPLICANTIUM. 1) De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet. *M. S. Academiae exhibit. die* 5. *Maii* 1777.	Frontespizio di (Eulero 1794)

[22] *Quoniam mihi quidam alia adhuc via non patet istud praestandi, nisi per immaginaria procedendo, formulam* $\sqrt{-1}$ *lettera i in posterum designabo, ita ut sit i·i=-1, ideoque* $\frac{1}{i} = -i$ (Euler 1777, pag. 184).

Originariamente scritto nel 1777, ma pubblicato in *Institutiones calculi integralis* 4, 1794, pp. 183-194; *Opera Omnia*: Series 1, Volume 19, pp. 129 – 140; ristampato in *Institutiones calculi integralis*, ed. tertia, 4, 1845, pp. 183-194 [al n. E671a dell'archivio Eulero reperibile anche online alla web site: *http://www.math.dartmouth.edu/~euler/tour/tour_08.html*

CAPITOLO 2

Le origini della rappresentazione dei numeri complessi

§2.1 Wessel

Sulla strada verso l'interpretazione reale dei numeri immaginari, una tappa importante costituisce il 1797, anno in cui Caspar Wessel (1745-1818) presentava all'Accademia delle Scienze di Copenhagen il suo lavoro *Om directionens analytiske Betegning* (*Sulla rappresentazione analitica della direzione*)[23].

In esso, scritto in danese e quindi inizialmente poco letto, si trova la rappresentazione grafica dei numeri complessi fatta in un piano bidimensionale individuato da un asse immaginario perpendicolare a quello reale, i vettori del qual piano vengono interpretati come numeri complessi:

> *§5 Indichiamo con +1 l'unità rettilinea positiva e con +ε un'altra unità perpendicolare alla prima e avente la stessa origine: allora l'angolo di direzione di +1 sarà uguale a 0, quello di -1 a 180, quello di +ε a 90 e quello di -ε a -90 o 270. …Risulta che ε è uguale a $\sqrt{-1}$… . …Secondo il §5, il seno di un angolo retto è dunque uguale a $\sqrt{-1}$. Poniamo $\sqrt{-1}=\varepsilon$; indichiamo con v un angolo qualunque e con $\sin v$ un segmento della stessa lunghezza del seno dell'angolo … . Allora secondo il §5, $\varepsilon \sin v$ esprimerà il seno dell'angolo v in direzione e grandezza.*
>
> …
>
> *§7. …il raggio che comincia al centro e forma un angolo v con l'unità positiva o assoluta è uguale a $\cos v + \varepsilon \sin v$* (Wessel 1897, pagg. 9-10) [24].

---

[23] Cfr. (Wessell 1799).

[24] *§5. Désignons par +1 l'unité rectiligne positive et par +ε une autre unité perpendiculaire à la première et ayant la même origine: alors l'angle de direction de +1 sera égal à 0, celui de -1 à 180, celui de +ε à 90 et celui de -ε à -90 ou 270. … Il en résulte que ε est égal à $\sqrt{-1}$… . … D'après le §5, le sinus d'un angle droit est donc égal a $\sqrt{-1}$. Posons $\sqrt{-1}=\varepsilon$; désignons par v un angle quelconque et par $\sin v$ un segment de la même longueur que le sinus de l'angle … Alors d'après les §§ 4 et 5, $\varepsilon \sin v$ exprimera le sinus de l'angle v en direction et en grandeur.*
…
§7. …le rayon qui commence au centre et dévie de l'angle v de l'unité positive ou absolue est égal à $\cos v + \varepsilon \sin v$ (Wessel 1897, pagg. 9-10, trad. It. nostra).

Tale testo rimase pressocchè sconosciuto fino al 1895, anno in cui il suo connazionale Sophus Lie (1842–1899) ripubblicò l’opera di Wessel in inglese, invogliato anche dalla positiva opinione di Christian Juel (1855-1935)[25]. E due anni dopo ne venne ristampata anche una traduzione in francese a opera di Hieronymous Zeuthen (1839-1920)[26].

		
Sophus Lie	Christian Juel	Hieronymous Zeuthen

Nell’arco di due anni, quindi,

> *Wessel è stato resuscitato dall’oblio e il suo contributo alla matematica divenne parte dell’eredità culturale della Danimarca* (Eisso J. Atzema 2004, p. 117) [27].

In conseguenza a ciò, visto che l’opera di Wessel era sconosciuta alla maggior parte dei matematici, ancora all’inizio dell’Ottocento i numeri immaginari non erano compiutamente accettati.

[25] (Juel 1895).

[26] Copenhague, 1897.

[27] *Wessel had been resurrected from oblivion and his contribution to mathematics had retroactively become part of Denmark’s cultural heritage* (Eisso J. Atzema 2004, p. 117, trad. it. nostra).

§2.2 Gauss

Il primo a legittimare e ad attribuire agli immaginari lo stesso valore di esistenza dei numeri reali fu Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Carl Friedrich Gauss

Motivava la sua decisione pretendendo per essi *uguali diritti di cittadinanza*[28] nell'universo dei numeri così come li possedevano i reali, poiché secondo lui, i numeri immaginari ne erano stati, fino a quel momento, ingiustamente privati.

Sorprendentemente Gauss precisa che è una forzatura voler fare risalire l'interpretazione geometrica delle quantità complesse al suo lavoro del 1799[29], nel quale tratta questa parte della Matematica

> *da un altro punto di vista, secondo il quale alle quantità immaginarie può venir attribuita benissimo una esistenza* [uno status], *come ai negativi: è mancata però fin'ora l'occasione di esprimere pubblicamente la stessa in un determinato modo, sebbene lettori attenti troveranno facilmente l'origine di essa nello scritto del 1799 sulle uguaglianze e nella pubblicazione circa l'applicazione di superfici. Nella presente dissertazione sono dati brevemente i fondamenti* (Gauss 1831, p. 175)[30].

Quindi è più plausibile supporre che alla rappresentazione geometrica dei numeri complessi, così come appare nell'articolo del 1831, Gauss sia giunto per gradi,

---

[28] Cfr. (Gauss 1831, pag.171).

[29] Si veda (Gauss 1866, Werke, BD. III, pag 105), consultabile anche alla pagina web: http://gdz.sub.uni- goettingen.de/no_cache/dms/load/img/).

[30] *aus einem verschiedenen Gesichtspunct, wobei den imaginären Grössen eben so gut ein Gegenstand unterlegt werden kann, dieselbe öffentlich bestimmt auszusprechen, wenn gleich aufmerksame Leser die Spuren davon in der 1799 erschienenen Schrift über die Gleichungen, und die Preisschriften über die Umbildung der Flächen leicht wiederfinden werden. In der gegenwärtigen Abhandlung sind die Grundzüge davon kurz angegeben* (Gauss 1831, p. 175).

magari dopo lo studio dell'opera di Carnot e dell'integrazione nel piano complesso[31]. Infatti è già nel 1811, che Gauss, in una sua lettera a Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)[32], afferma:


Friedrich Wilhelm Bessel

Così come l'intero campo di tutte le quantità reali si può pensare attraverso una infinita linea retta, anche l'intero campo delle grandezze reali e immaginarie si può pensare attraverso un piano infinito, nel quale ogni punto rappresenta, attraverso l'ascissa =a, l'ordinata =b, la quantità a+bi. La possibilità per x [in una funzione] *di assumere il valore a+bi appare attraverso una linea* (Gauss 1811, pagg. 90-91) [33].

Nel 1831, comunque, Gauss, dopo avere legittimato algebricamente i numeri complessi, vuole dare al metodo di rappresentazione trovato una importanza rilevante per impedire che ancora qualcuno abbia reticenza ad accettare la *natura delle quantità immaginarie*[34] e pensare che essi abbiano una qualche *vacillante apparenza* (*schwankende Haltung)*[35].

Al contrario l'aritmetica dei numeri complessi è capace di una raffigurazione evidentissima, e se l'autore nelle sue rappresentazioni ha seguito una trattazione aritmetica, così egli ha avuto anche per queste l'accorgimento più giusto (Gauss 1831, p. 17). [36]

A proposito di ciò, un secolo e mezzo dopo Boyer affermerà:

---

[31] Cfr. (Caparrini 2006, pag.147).

[32] Si veda (Gauss 1811).

[33] *so wie man sich das ganze Reich aller reelen Grössen durch ene unendliche gerade Linie denken kann, so kann das ganze Reich aller Grössen, reeller und imaginärer Grössen sich durch eine unendilche Ebene sinnlich machen, worin jeder Punkt, durch Abscisse =a, Ordinate =b bestimmt, die Grösse a+bi gleichsam repreäsentirt. Der stetige Übergang von einem Werthe von x zu einem anderen a+bi geschieht demnach eine Linie* (Gauss 1811, pagg. 90-91).

[34] Cfr. (Gauss 1831, p. 174).

[35] Cfr. (Gauss 1831, p. 174).

[36] *Im Gegenteil ist die Arithmetik der complexen Zahlen der anschaulichsten Versinnlichung fähig, und wenn gleich der Verf. in seiner diesmaligen Darstellung eine rein arithmetische Behandlung befolgt hat, so hat er doch auch für diese die Einsicht lebendiger machende* (Gauss 1831, p.17, trad. it. nostra).

Gli uomini credono a ciò che vedono; così le vecchie teorie sulla non-esistenza dei numeri immaginari furono abbandonate dalla maggior parte dei matematici” (Boyer 1982, p. 579).

L’idea di Gauss è chiara: il piano su cui rappresentare i numeri complessi a coefficienti interi (interi di Gauss) era illimitato, ogni successione di essi con la stessa parte immaginaria è costituita da punti che stanno su rette parallele le une alle altre, rette che avevano uguale distanza l’una dall’altra (distanza pari a *i*), sicché da avere un sistema di punti e una *suddivisione dell’intero piano in puri e uguali quadrati*[37].

> *Il punto vicinissimo a 0 nella prima successione adiacente da una parte della successione, la quale rappresenta i numeri reali, si riferisce ai numeri i* [cioè quelli con parte immaginaria positiva], *così come il punto vicinissimo a 0 nella prima successione adiacente dall’altra parte della successione si riferisce a –i* [cioè quelli con parte immaginaria negativa], *ecc. Con questa rappresentazione lo sviluppo delle operazioni aritmetiche riferentesi alle quantità complesse diviene capace di una raffigurazione, che non lascia altro a desiderare.*
>
> *In altre parole con ciò la vera metafisica delle quantità immaginarie viene posta sotto una nuova e chiara luce* (Gauss 1831, p. 174-175).[38]

Gauss continua affermando che mentre i numeri reali si possono descrivere e ordinare in una sola successione, i complessi

> *Non possono venire ordinati in una, sebbene illimitata, successione, ma piuttosto si lasciano ordinare in successioni di successioni, o che*

---

[37] *Eintheilung der ganzen Ebene in lauter gleiche Quadrate* (Gauss 1831, p. 174).

[38] *Der nächste Punkt bei 0 in der ersten Nebenreihe auf der einen Seite der Reihe, welche die reellen Zahlen repräsetirt, bezieht sich dann auf die Zahlen i, so wie der nächste Punkt bei 0 in der ersten Nebenreihe auf der anderen Seite auf –i u.s.w. Bei dieser Darstellung wird die Ausführung der arithmetischen Operationen in Beziehung auf die complexen Grössen … einer Versinnlichung fähig, die nichts zu wünschen übrig lässt.*
Von der andern Seite wird hierdurch die wahre Metaphysik der imaginären Grössen in ein neues helles Licht gestellt (Gauss 1831, p. 174-175).

è lo stesso, formano una varietà di dimensione due (Gauss 1831, p. 176). [39]

Con ciò la rappresentazione grafica dei numeri complessi in un piano bidimensionale, era ultimata e resa nota pubblicamente.

---

[39] *nicht in Eine, wenn gleich unbegrenzte, Reihe geordnet werden können, sondern sich nur in Reihen von Reihen ordnen lassen, oder was dasselbe ist, bilden sie eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen* (Gauss 1831, p. 176, trad. it. nostra).

§2.3 Argand

Ciò che Gauss non sapeva era che una rappresentazione geometrica degli immaginari era già stata data nel 1806 da Jean Robert Argand (1768-1822) in *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques*, cosa che Gauss ancora nel 1831 ignorava, visto che l'opuscolo pubblicato da Argand era passato in sordina poiché non venne distribuito che tra pochi studiosi[40] e non posto in commercio[41]. Solo dopo la pubblicazione nel 1813-14 negli *Annali* di Gergonne di una memoria di Jacques Frédéric Français (1775-1833)[42] sullo stesso argomento (di cui Français dice di avere preso lo spunto da una lettera mandata a suo fratello François da Adrien-Marie Legendre (1752-1833)), Argand[43] mandò a Joseph Diaz Gergonne (1771-1859) copia del suo volume rivendicando priorità rispetto alle idee di Français, affermando che ai tempi era stato proprio Legendre ad avere

Adrien-Marie Legendre

esaminato il manoscritto e a dargli qualche consiglio[44]. A onor del vero, Français a termine del suo scritto rivela che

> *Il fondo di questa idea nuova non mi appartiene. Io l'ho trovato in una lettera del Sig. Legendre al mio defunto fratello. … Ciò che mi appartiene si riduce dunque al modo di esporre e di dimostrare*

[40] Cfr. (Argand 1813-14, p. 134).

[41] Cfr. (Argand 1874, p.VII). Solo nel 1813-14 fu pubblicata da Argand una memoria negli annali di Gergonne in cui rivendicava il primato delle sue idee rispetto al Français.

[42] (Français 1813-14).

[43] (Argand 1806).

[44] Cfr. (Argand 1813-14, p. 133).

questi principi, alla notazione, e all'idea del mio segno di posizione $1_{\pm\alpha}$. (Français 1813-14, p. 70-71)[45]

e si augura che

la pubblicità che ho dato a quei risultati cui sono pervenuto permetta di determinare il primo autore di queste idee a farsi riconoscere, e a mettere in luce il lavoro che egli stesso ha scritto su questo argomento (Français 1813-14, p. 71).[46]

Tali questioni a parte, ecco come Argand introduce la rappresentazione di un numero complesso.

Dopo avere stabilito che la media proporzionale geometrica tra due quantità di segno diverso, cioè la quantità *x*, soddisfa la relazione +1:x=x:-1, e che non esiste alcun numero positivo o negativo uguale a x, bisogna rilevare che combinando in un certo modo l'idea di grandezza assoluta con l'idea di direzione si può assegnare un posto alla *x* nell'universo dei numeri nel modo seguente. Fissato un punto *K* siano date su una retta per *K* l'unità positiva *KA* (con senso da *K* ad *A*) e l'unità negativa *KI* (con senso da *K* a *I*): a esse si possono assegnare rispettivamente i valori +1 e -1. Siano ora fissati i segmenti *KE* (con senso da *K* a *E*) e *KN* (con senso da *K* a *N*) perpendicolare a precedenti *KA* e *KI*. La precedente proporzione salta fuori se si considerano il triangolo rettangolo isoscele *IEA* e l'unità immaginaria viene concepita come media proporzionale tra l'unità reale positiva e l'unità reale negativa.

---

[45] *le fond de ces idée nouvelles ne m'appartient pas. Je l'ai trouvé dans une lettre de M. Legendre à feu mon frère. … Ce qui m'appartient en propre se réduit donc à la manière d'exposer et de démontrer ces principes, à la notation, et à l'idée de mon signe de position $1_{\pm\alpha}$* (Français 1813-14, p. 70-71, trad. it. nostra).

[46] *la publicité que je donne aux résultats auxquels je suis parvenu puisse déterminer le premier auteur de ces idées à se faire connaitre, et à mettre au jour le travail qu'il a fait lui-méme sur ce sujet* (Français 1813-14, p. 71, trad. it. nostra).

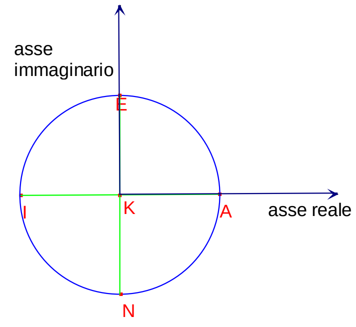


Fig.2

Si trova che

La direzione di KA è, riguardo alla direzione di KE, quella che questa ultima è in riguardo alla direzione di KI. …Esse sono dunque quello che si esprime rispettivamente attraverso $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ (Argand 1806, p.7).[47]

Così come era stato per le quantità negative, le grandezze immaginarie altro non sono che la massima estensione (per l'epoca) dell'idea di rappresentazione di una quantità geometrica, delle quali successivamente rivisitate in chiave analitica, Cauchy farà una base per lo studio della teoria delle funzioni (e forse è per tale motivo che nella tradizione francese il piano complesso viene detto "di Cauchy").

Argand prosegue precisando che:

Si vede che ogni linea parallela alla direzione primitiva è espressa da un numero reale, che quelle che sono a lui perpendicolari sono espresse da un numero immaginario della forma $\pm a\sqrt{-1}$, *e, infine, che quelle che sono tracciate in un'altra direzione diversa dalle due precedenti appartengono alla forma* $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, *che si compone di una parte reale e di una parte immaginaria.*

Ma queste linee sono delle quantità tutte reali al pari della primitiva; esse derivano dalla combinazione dell'idea della direzione con l'idea

[47] *la direction de KA est, à l'égard de la direction de KE, ce que cette dernière est à l'égard de la direction de KI. … Elle sont donc ce qu'on exprime ordinairement par* $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$. (Argand 1806, p.7, trad. it. nostra).

della grandezza (Argand 1806, p.12).[48]

Argand definisce $\sqrt{-1}$ essere l'unità immaginaria e *l'expression* $a\sqrt{-1}$ *présente* $\sqrt{-1}$ *comme un facteur qui multiplie a* (Argand 1806, p.15); in particolare dice che così come quando si moltiplica +1 o -1 per *a* si scrive solamente +*a* o –*a*, allo stesso modo si può stabilire che ~*a* o ~/*a* stia rispettivamente per +$a\sqrt{-1}$ *e* -$a\sqrt{-1}$ *:*

> *Questi nuovi segni abbrevieranno la notazione e renderanno forse più comodo il calcolo delle quantità immaginarie* (Argand 1806, p.16).[49]

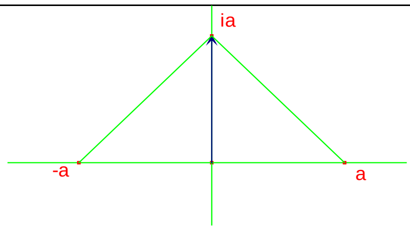


Fig. 3

Precisamente $a\sqrt{-1}$ è ciò che Argand chiama *linea in direzione* abbreviando l'espressione *linea considerata come appartenente a una certa direzione*[50]: sono quelli che noi oggi chiamiamo vettori, e per cui Argand tiene a precisare che

> *esse saranno così distinte dalle linee assolute, in cui si considera la lunghezza, senza alcun riguardo alla direzione* (Argand 1806, p.11).[51]

Infatti Argand porrà una qualunque linea di direzione $\pm a \pm b\sqrt{-1}$ *in* corrispondenza con una linea *KP*, che, a sua volta, sarà scomposta sul piano di riferimento che ha in *K* il punto d'origine tramite due direzioni una parallela a *KA* (asse reale) e l'altra parallela a

---

[48] *on voit que toute ligne parallèle à la direction primitive est exprimée par un nombre réel, que celles qui lui sont perpendiculaires ont exprimées par des nombre imaginaires ou de la forme* $\pm a\sqrt{-1}$ *, et, enfin, que celles qui sont tracées dans une direction autre que les deux précédentes appartiennent à la forme* $\pm a \pm b\sqrt{-1}$ *, qui se compose d'une partie réelle et une partie imaginaire.*
Mais ces lignes sont des quantités tout aussi réelles que l'unité primitive; elles en dérivent par la combinaison de l'idée de la direction avec l'idée de la grandeur (Argand 1806, p.12, trad. it. nostra).

[49] *ces nouveaux signes abrégeraient la notation et rendraient peut-être plus comode le calcul des quantites imaginaires* (Argand 1806, p.16, trad. it. nostra).

[50] Cfr. Argand 1806, p.11 nota (*).

[51] *Elle seront ainsi distinguées des lignes absolues, dans lesquelles on ne considère que la longueur, sans aucun égard à la direction* (Argand 1806, p.11, trad. it. nostra).

KE (asse immaginario) (cfr. Argand 1806, p.19). Tali due direzioni pone essere equivalente anche alla notazione con le funzioni circolari (p. e. cos*a*~sin*a)*.

Per tali linee di direzione vale l'addizione e la moltiplicazione[52], due principi di costruzione su cui poggia il metodo dell'intero saggio, che non sono evidenti ma che devono essere ammessi come ipotesi in modo

> *che le loro conseguenze o dei ragionamenti più rigorosi potranno fare ammettere o respingere* (Argand 1806, p.60)[53].

A conclusione della sua trattazione Argand fornisce una dimostrazione del teorema fondamentale dell'Algebra che, se in taluni punti è un po' imprecisa, costituisce uno sforzo nella direzione della completezza della teoria della risoluzione delle equazioni algebriche.

---

[52] (si veda Argand 1806, p.20 n.11).

[53] *que leur conséquences ou des raisonnements plus rigoureux pourront faire admettre ou rejeter* (Argand 1806, p.60).

§2.4 Buée

Anche Abbé Buée nel 1806[54] dava comunicazione che l'unità immaginaria $\sqrt{-1}$, essendo la media geometrica tra +1 e -1, doveva indicare una linea perpendicolare nell'origine al segmento di estremi appunto +1 e -1. Dalla lettura del saggio di Buée saltano subito agli occhi due fatti. Uno, gli innumerevoli riferimenti al testo del 1803 di Lazare Carnot (1753-1823); in effetti nella *Géométrie de position* di Carnot ci sono alcuni riferimenti sia ai numeri immaginari che alla costruzione di

Lazare Carnot

linea e superfici perpendicolari che tanto richiamano alle mente le successive interpretazioni di Argand e Buée dell'unità immaginaria $\sqrt{-1}$ [55]. Due, il livello non proprio alto della disquisizione matematica di Buée in confronto a quella di Argand: Buée procede per esempi-problemi che portano a soluzioni immaginarie e che quindi vanno considerate a volte di natura aritmetica, altre di natura geometrica. Ma in entrambi i saggi (di Argand e Buée) è chiaro il voler legittimare gli immaginari prendendo ad esempio il caso dei numeri negativi. Se si accettano le quantità negative come segmenti opposti a quelli positivi, si devono accettare anche le quantità immaginarie che si trovano come media tra una quantità positiva e una negativa (posti sulla stessa linea) e quindi su segmenti perpendicolari a quest'ultimi.

Dopo aver quindi giustificato la ragion d'essere dei numeri negativi come quantità reali (cioè esistono geometricamente o se ne può dare una rappresentazion geometrica, esattamente allo stesso modo di come all'inizio del suo saggio fa Argand), Buée introduce (sia pure in modo alquanto confuso) l'unità immaginaria $\sqrt{-1}$ come

> *il segno di perpendicolarità, la cui proprietà caratteristica è, che tutti i punti della perpendicolare sono ugualmente lontani dai punti*

[54] (Buée 1806).

[55] A tal proposito si veda (Caparrini 2006).

posti a egual distanza, da una parte e dall'altra del suo piede. Il segno $\sqrt{-1}$ *esprime proprio solo ciò.*

Questo segno messo davanti ad a (con a si intende una linea o una superficie) vuole dunque dire: esso conferisce ad a una posizione perpendicolare rispetto a quella che avrebbe se fosse semplicemente +a o –a (Buée 1806, p. 28)[56].

E a p. 29-30 si legge:

12. $\sqrt{-1}$ *non è dunque né il segno di una operazione aritmetica, né di una operazione aritmetico-geometrica, ma di un'operazione puramente geometrica. È un segno di perpendicolarità. È un segno puramente descrittivo. Io chiamo un segno puramente descrittivo un segno che indica la direzione di una linea, astrazion fatta per la sua lunghezza. Così l'espressione puramente descrittiva ha lo stesso significato dell'espressione puramente geometrica.*

13. Si distinguerà la perpendicolarità indicata attraverso questo segno da quelle che indica i segni sin e cos. Questi ultimi segni non possono indicare la perpendicolarità l'uno senza l'altro, e lo stesso se l'uno e l'altro non si riferiscono alla stessa quantità. Così sina e cosa indicano la perpendicolarità dell'uno rispetto all'altro; ma sina e cosb non la indicano. $a\sqrt{-1}$*, al contrario, indica relativamente ad a una situazione di perpendicolarità sia a quella di +a che di –a. Sin e cos sono dei segni artificiali.* $\sqrt{-1}$ *è un segno naturale, poiché esso è una conseguenza necessaria dei segni + e – considerati come segni di direzione.*

[56] *le signe de la perpendicularité, dont la propriété caractéristique est, que tout les points de la perpendiculaire sont également éloignés des points placés à égales distances, de parte et d'autre de son pie. Le signe* $\sqrt{-1}$ *exprime tout cela, et il est le seul qui l'exprime. Ce signe mis devant a (a signifiant une ligne ou une surface) veut donc dire: qu'il faut donner à a une situation perpendiculaire à celle qu'on lui donneroit, si l'on avoit simplement +a ou –a* (Buée 1806, p. 28, trad. it. nostra).

14. La perpendicolarità indicata dal segno $\sqrt{-1}$ è una qualità. Di conseguenza, una quantità accompagnata datale segno non è una quantità astratta, poiché le sue unità non sono delle unità arbitrarie.

15. Non solo l'unità affiancata dal segno $\sqrt{-1}$ non è un'unità arbitraria, ma essa può essere guardata come una nuova indeterminata introdotta da quel segno. In effetti, quel segno indica la perpendicolarità e solo quella. Esso non indica il punto di partenza della perpendicolare. Se dunque questo punto di partenza non è determinato altrove, quel segno la lascia indeterminata. Tanto che la lunghezza della linea perpendicolare è costante, il suo modo di essere perpendicolare è variabile (Buée 1806, p. 29-30) [57].

Da tale citazione si può facilmente intuire che Buée tratta il segno $\sqrt{-1}$ *come un* operatore e in particolare potremmo dire come un *operatore di perpendicolarità* (o meglio, con linguaggio moderno, di rotazione di 90°).

[57] 12. $\sqrt{-1}$ *n'est donc pas le signe d'une opération arithmétique, ni d'une opération arithmético-géométrique (No.2), mais d'une opération purement géométrique. C'est un signe de perpendicularité. C'est un signe purement descriptif. J'appelle signe purement descriptif un signe que indique la direction d'une ligne, abstraction faite da sa longueur. Ainsi les mots purement descriptifs ont la même signification que les mots purement géométriques (No.2).*

13. Il faut distinguer la perpendicularité indiquée par ce signe de celles qu'indiquent les signes sin. et cos. Ces derniers signes ne peuvent pas indiquer la perpendicularité l'un sans l'autre, et même si l'un et l'autre ne sont pas attachés à la même quantité. Ainsi sin.a et cos.b ne l'indiquent bien pas a $\sqrt{-1}$ *, au contraire, indique relativement à a une situation perpendiculaire à celles de +a et de –a.*

Sin. et cos. sont des signes artificiels. $\sqrt{-1}$ *est un signe naturel, puisqu'il est une conséquence nécessaire des signe + et de – considérés comme signes de direction.*

14. La perpendicularité indiquée par le signe $\sqrt{-1}$ *est une qualité. Par conséquent une quantité accompagnée de ce signe n'est pas une quantité abstraite, parceque ses unités ne sont pas des unités arbitraires.*

15. Non seulement l'unité affectée du signe $\sqrt{-1}$ *n'est pas une unité abstraite, mais elle peut être regardée comme une nouvelle indéterminée, mais il n'indique que cela. Il n'indique pas le point de départ de la perpendiculaire. Si donc ce point de départ n'est pas déterminé d'ailleurs, ce signe le laisse indéterminé. Ainsi tandis que la longueur de la ligne perpendiculaire est constante, sa manière d'être perpendiculaire est variable* (Buée 1806, p. 29-30, trad.it. nostra).

§2.5 Cauchy

Malgrado Argand avesse esplicitato tutto nel testo del 1806, la rappresentazione vettoriale delle quantità complesse si affermerà solo dopo la pubblicazione dell'articolo di Gauss del 1831, tant'è che solo allora Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) sentì il bisogno di sistemare tutta la teoria, nell'ambito della scrittura di un nuovo testo.

Augustin-Louis Cauchy

Infatti ai tempi della stesura del suo *Course d'Analyse* (pubblicato nel 1821), Cauchy aveva introdotto la teoria delle espressioni immaginarie (Cauchy 1821, Cap. VII, p.153) come espressioni simboliche che né vengono interpretate attraverso leggi già stabilite, né rappresentano niente di reale (Cauchy 1821, cfr. p. 154). Ecco come:

> *In generale, si chiama espressione immaginaria tutta l'espressione simbolica* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, α, β *designanti due quantità reali. … l'uguaglianza di due espressioni immaginarie si indica … attraverso il segno =, e il risultato si chiama equazione immaginaria. Ciò posto, tutta l'equazione immaginaria non è che la rappresentazione simbolica di due equazioni tra quantità reali. Per esempio, l'equazione simbolica* $\alpha+\beta\sqrt{-1}=\gamma+\delta\sqrt{-1}$ *equivale a due equazioni reali* $\alpha=\beta$, $\gamma=\delta$ *(Cauchy 1821, p.155)* [58].

Quindi, lontano da una interpretazione geometrica delle quantità immaginarie, nel 1821 Cauchy dimostra solamente come rendere rigorosa la teoria delle espressioni e delle equazioni immaginarie, e si accontenta di ciò (cfr. (Cauchy 1847, p. 175-176)).

[58] *En général, on appelle expression imaginaire toute expression symbolique de la forme* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, α, β *désignant deux quantités réelles. … L'égalité de deux expression imaginaires s'indique …par le signe =, et il en résulte ce qu'on appelle une équation imaginaire. Cela posé, toute équation imaginaire n'est que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles. Par exemple, l'équation symbolique* $\alpha+\beta\sqrt{-1}=\gamma+\delta\sqrt{-1}$ *équivaut seule aux deux équations réelles* $\alpha=\beta$, $\gamma=\delta$ (Cauchy 1821, p.155, trad. it. nostra).

Infatti è solo nel 1847, e precisamente nel quarto volume degli *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématiques* che riconosce i vantaggi che si possono derivare dal

> *rimpiazzare questa espressione attraverso le quantità geometriche, il cui impiego dona all'algebra non solo una chiarezza, una precisione nuova, ma ancora una maggior generalità (Cauchy 1847, p. 175)*[59] ,

e così

> *dopo nuove e mature riflessioni, la migliore cosa mi è parsa d'abbandonare completamente l'uso del segno* $\sqrt{-1}$ *, e di rimpiazzare la teoria delle espressioni immaginarie attraverso la teoria delle quantità che io chiamerò geometriche (ibidem)* [60].

Bisogna però sottolineare che Cauchy nella prima parte dello stesso testo sostiene ancora che non c'è motivo di "torturarsi" nel voler dare una rappresentazione al simbolo $\sqrt{-1}$:

> *non c'è necessità di porre lo spirito sotto tortura per cercare di scoprire cosa può rappresentare il segno simbolico* $\sqrt{-1}$ *, cui i geometri tedeschi sostituiscono la lettera i. Questo segno o questa lettera sarà, se così posso esprimermi, un utensile, uno strumento di calcolo la cui introduzione nelle formule permette di arrivare più rapidamente alla soluzione molto reale delle questioni che si sono poste. Ma è evidente che le teorie algebriche diventeranno molto più chiare ancora, e molto più facili da cogliere, e potranno essere alla portata di tutte le intelligenze, se si raggiunge lo scopo di liberarsi completamente dalle espressioni immaginarie, nel ridurre la lettera i a non essere più che una quantità reale. Sebbene una tale riduzione appaia inverosimile e impossibile a prima vista, io ho tuttavia provato a risolvere questo singolare problema, e, dopo qualche*

---

[59] *remplacer ces expressions par les quantités géométriques, dont l'emploi donne à l'algèbre non seulement une clarté, une précision nouvelle, mais encor une plus grande généralité* (Cauchy 1847, p. 175, trad. it. nostra).

[60] *après de nouvelles et mûres réflexions, le meilleur parti à prendre me paraît être d'abandonner entièrement l'usage du signe* $\sqrt{-1}$ *, et de remplacer la théorie des expressions imaginaires par le théorie des quantités que j'appellerai géométriques* (ibidem, trad. it. nostra).

tentativo, sono stato abbastanza onorato di riuscirci. Il principio al quale mi sono appoggiato sembra tanto più degno d'attenzione, che esso può essere applicato alla teoria dei numeri, nella quale esso conduce a dei risultati che meritano d'essere sottolineati (Cauchy 1847, p. 93-94) [61].

E ancora prima, nel terzo tomo degli *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématiques* datato 1844, Cauchy spiega

Così come ho sottolineato nel mio Analyse algébrique, una espressione immaginaria non è altro che una espressione simbolica della forma $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α, β essendo due quantità reali. … L'uso delle espressioni immaginarie, permettendo di rimpiazzare due equazioni con una sola, offre spesso il modo di semplificare i calcoli e di scrivere con una forma abbreviata i risultati molto complicati. Tale è il motivo principale per il quale si dovrà continuare a servirsi di queste espressioni che, prese alla lettera e interpretate secondo le convenzioni stabilite generalmente, non significano nulla e non hanno senso. Il segno $\sqrt{-1}$ non è che una sorta di utensile, uno strumento di calcolo, che può essere impiegato con successo, in un gran numero di casi, per rendere molto più semplice e concise, non solamente le formule analitiche, ma anche il metodo con l'aiuto di quelle pervenendo a stabilire queste (Cauchy 1844, p. 361-362)[62].

[61] *Cela posé, il n'y avait plus nulle nécessité de se mettre l'esprit à la torture pour chercher à découvrir ce que pouvait représenter le signe symbolique $\sqrt{-1}$, auquel les géomètres allemands substituent la lettre i. Ce signe ou cette lettre était, si je puis ainsi m'exprimer, un outil, un instrument de calcul dont l'introduction dans les formules permettait d'arriver plus rapidement à la solution très réelle des questions que l'on avait posées. Mais il est évident que les théories algébriques deviendraient beaucoup plus claires encore, et beaucoup plus faciles à saisir, qu'elles pourraient être mises à la portée de toutes les intelligences, si l'on parvenait à se débarrasser complètement des expressions imaginaires, en réduisant la lettre i à n'être plus qu'une quantité réelle. Quoiqu'une telle réduction parut invraisemblable et même impossible au premier abord, j'ai néanmoins essayé de résoudre ce singulier problème, et, après quelques tentatives, j'ai été assez heureux pour réussir. Le principe sur lequel je m'appuie semble d'autant plus digne d'attention, qu'il peut être appliqué même à la théorie des nombres, dans laquelle il conduit à des résultats qui méritent d'être remarqués* (Cauchy 1847, p. 93-94, trad. it. nostra).

[62] *Ainsi que je l'ai remarqué mon Analyse algébrique, une expression imaginaire n'est autre chose qu'une expression symbolique de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, α, β désignant deux quantités réelles. …*

Ma qualche pagina più in là, nell'introduzione alla teoria delle funzioni a variabile complessa, Cauchy, definisce variabile complessa l'espressione immaginaria $x=s+it$, dove s e t sono numeri reali, e afferma che (p. 365):

> *Nulla mi impedisce di considerare le quantità reali s, t come rappresentanti le coordinate rettilinee di un punto situato in un piano dato. Allora i diversi valori di x che si ottengono dalla formula (1) [x=s+it], attribuendo alla variabili s, t diversi sistemi di valori, corrisponderanno alle diverse posizioni che potrà prendere un punto mobile P nel piano nel quale si muove. Se le coordinate s, t non sono solamente rettilinee, ma rettangolari, il modulo r e l'argomento ρ, legati a s, t dalle formule (3), rappresenteranno il raggio vettore condotto dall'origine fino a quel punto, e l'angolo polare che descriverà quel raggio vettore ruotante attorno all'origine considerata come polo; in conseguenza r e ρ saranno le coordinate polari del punto P* (Cauchy 1844, p.365)[63].

Ciò ci permette di stabilire che Cauchy ammette una rappresentazione geometrica delle quantità complesse, ma essa in realtà non vede le quantità complesse come vettori del piano ma come punti del piano cartesiano, in accordo ad una interpretazione più geometrico-analitica che puramente geometrica e vettoriale, come era stato per Argand, Buée, Gauss,… .

L'emploi des expressions imaginaires, en permettant de remplacer deux équations par une seule, offre souvent le moyen de simplifier les calculs et d'écrier sous une forme abrégée des résultats fort compliqués. Tel est même le motif principal pour lequel on doit continuer à se servir de ces expressions qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, ne signifient rien et n'ont pas de sens. Le signe $\sqrt{-1}$ n'est quelque sorte qu'un outil, un instrument de calcul, qui peut être employé avec succès, dans un grand nombre de cas, pour rendre beaucoup plus simple et plus concises, non seulement les formules analytiques, mais encore le méthode à l'aide desquelles on parvient à les établir (Cauchy 1844, p. 361-362, trad. it. nostra).

[63] *Rien m'empêche de considérer les quantités réelles s, t comme représentant les coordonnées rectilignes d'un point situé dans un plane donné. Alors les diverses valeurs de x que l'on déduira de la formule (1) [x=s+it], en attribuant aux variables s, t diverses systèmes de valeurs, correspondront aux diverses positions que pourra pendre un point mobile P dans le plan dont il s'agit. Si les coordonnés s, t sont non-seulement rectilignes, mais rectangulaires, le module r et l'argument ρ, liés à s et t par les formules (3), représenteront le rayon vecteur mené de l'origine à ce point, et l'angle polaire que décrira ce rayon vecteur en tournant autour de l'origine considérée comme pole; par conséquent, r et ρ seront les coordonnées polaires du point P* (Cauchy 1844, p.365, trad, it, nostra).

§2.6 Carnot

Ma perché più volte i matematici, di cui qui si è trattato, hanno citato l'opera di Lazare Carnot[64]? Se si legge la *Dissertation preliminaire* che precede l'opera del 1803, potrebbe sembrare, a prima lettura, che Carnot rigetti non solo gli immaginari (o il logaritmo dei numeri negativi), ma addirittura e soprattutto i numeri negativi. In realtà, da una lettura più approfondita, si capisce che ciò che egli, in quanto geometra puro, rifiuta di tali numeri è *il significato vero di queste quantità negative isolate*[65] in assenza di precise definizioni di operazioni *chiare e eseguibili come per le quantità positive o piuttosto assolute*[66]. Così

> *Se non ci si accorda su questo punto, si parla di cose che sono realmente inintellegibili nella loro essenza* (Carnot 1803, p. III) [67].

Quindi tutte le argomentazioni date da matematici più o meno eminenti (Carnot cita tra gli altri D'Alembert ed Euler) non possono

> *Soddisfare uno spirito geometrico. Le ragioni sulle quali solitamente si appoggiano le due nozioni* [cioè, uno, i numeri negativi sono quantità minori di zero e, due, considerati come quantità analoghe ai positivi ma presi in senso contrario] *che io ho appena combattuto, sono inoltre senza consistenza*[68].

Quindi è chiaro il pensiero di Carnot: le contraddizioni cui si giunge dopo un ragionamento comunque rigoroso altro non possono che affermare che le ipotesi da cui si è partiti sono false, e le ipotesi poste all'inizio sono proprio l'esistenza delle quantità

---

[64] A tal proposito si veda anche (Caparrini 2006).

[65] *la véritable signification de ces quantités négatives isolées* (Carnot 1803, p. III).

[66] *claires elles-mêmes et executables, que pour les quantités positives ou plutôt absolues* (ibidem).

[67] *si l'on ne s'accorde pas sur ce point, c'est qu'on parle de choses qui sont réellement inintelligibles par leur essence* (ibidem).

[68] *satisfaire un esprit géométrique. Les raison sur lesquelles on a costume d'appuyer les deux notions que je viens de combattre, sont d'ailleurs sans consistance par elles-mêmes* (ibidem, p. XII).

Per la prima nozione (i numeri negativi sono quantità minori di zero) Carnot argomenta così: *se -3 è più piccolo di 2, perché* $(-3)^2$ *è più grande di* $(2)^2$*?* (cfr. (ibidem, p. IX)). Per la seconda (i numeri negativi considerati come quantità analoghe ai positivi ma presi in senso contrario): *se +a e –a sono della stessa natura, perché* $\sqrt{+a}$ *esiste ed è reale e* $\sqrt{-a}$ *non esiste e viene detta immaginaria?* (cfr. (ibidem, p. IX-X)).

negative e il poterle trattare alla pari coi numeri positivi[69]. Tutto ciò se si pensa alle quantità negative dotate di una vita propria (*isolée*); se invece esse si ritrovano in formule o calcoli algebrici, essendo frutto di posizioni e ipotesi esatte, allora sono

> *Semplici forme algebriche, incapaci di rappresentare una quantità reale e effettiva* [e] *…astrazion fatta dal suo segno, non è altra cosa che la differenza di due altre quantità assolute* (Carnot 1803, pag. XVIII)[70].

E le espressioni tipo -sin*a* vengono chiamate da Carnot

> *valori di correlazione delle quantità, al posto delle quali si devono sostituire nelle formule primitive. Anzi questi valori di correlazione non sono altro che formule algebriche, che, messe dentro le formule primitive al posto delle quantità vere che essi rappresentano, rendono queste formule applicabili a dei casi prima inaspettati* (Carnot 1803, pag. XVII)[71].

Pertanto, come abbiamo detto, un geometra puro come Carnot non poteva accettare concetti privi di una definizione geometrica precisa, esatta, rigorosa, seppur dotati di una *giustificazione* algebrica; anzi etichetta tali nozioni come astratte sulle quali i geometri non possono essere d'accordo[72].

Ma contemporaneamente a tutto questo argomentare, Carnot introduce il concetto di *direzione* come rappresentazione dei numeri. In particolare, egli chiama

> *Dirette e inverse … le quantità ordinarie o assolute, ma considerate ciascuna come la differenza variabile di due altre quantità che diventano alternativamente tanto più grandi, tanto più piccole le une che le altre. … la quantità che esprime la differenza dei loro valori assoluti, si chiama quantità diretta ; al contrario, se essa diventa più*

---

[69] Cfr. (Carnot 1803, p. XV).

[70] *simples forme algébriques, incapables de représenter aucun quantité réelle et effective* [e] *… abstraction faite de son signe, n'est autre chose que la différence de deux autre quantités absolues* (Carnot 1803, pag. XVIII, trad. it. nostra).

[71] *valeur de corrélation des quantités, à la place desquelles on doit les substituer dans les formules primitives. Ainsi ces valeurs de corrélation ne sont autre chose que des formules algébriques, qui, mises dans les formules primitives à la place des véritables quantités qu'elles représentent, rendent ces formules applicables à des cas d'abord imprévus* (Carnot 1803, pag. XVII, trad. it. nostra).

[72] *notions abstraites sur lesquelles les Géomètres ne peuvent s'accorder* (Carnot 1803, pag. XIX).

piccola, questa differenza si chiama quantità inversa. Così muore tutta la metafisica delle quantità positive e negative. Restano soltanto le quantità dirette e inverse, che sono delle quantità assolute come tutte le altre quantità immaginabili. … Così, la geometria che io chiamo di posizione, non è altro che la geometria ordinaria, entro la quale la teoria delle quantità dette positive e negative, è rimpiazzata da quella delle quantità che io chiamo dirette e inverse (Carnot 1803, pag. XXII-XXIII)[73].

E qualche rigo più in là, a riguardo delle radici di numeri positivi e negativi, Carnot afferma:

> [Ho dato nuove prove del fatto] … *Che quindi tutte le radici sono algebricamente esatte; che con delle trasformazioni le si può rendere utili; e che è precisamente e univocamente attraverso l'uso che fa l'analisi di queste forme negative o immaginarie, come se fossero delle vere quantità, che differisce dalla***,** *e che questa ha su quella un vantaggio tanto grande. A questa nozione principale delle quantità dirette e negative … io ne unisco altre che mi sembrano giustificare ancora il titolo di Geometria di posizione che ho dato a questa opera* (Carnot 1803, pag. XXIV)[74].

E ancora:

> *Anzi, per fissare le idee in una maniera precisa, dirò che la geometria di posizione è quella nella quale la nozione di quantità positive e*

[73] *directes et inverses … les quantités ordinaires ou absolues, mais considérées chacune comme la différence variable de deux autres quantités qui deviennent alternativement tantôt plus grandes, tantôt plus petites l'une que l'autre. … la quantité qui exprime la différence de leurs valeurs absolues, se nomme quantité directe; lorsqu'au contraire elle devient plus petite, cette différence se nomme quantité inverse. Ainsi disparoît toute la métaphysique des quantités positives et négatives. Il ne reste plus que des quantités directes et inverses, qui sont des quantités absolues comme toutes les autres quantités imaginables. … Ainsi, la géométrie que je nomme de position, n'est autre chose que la géométrie ordinaire, dans laquelle la théorie des quantités dites positives et négative, est remplacée par celle des quantités que j'appelle directes et inverses* (Carnot 1803, pag. XXII-XXIII, trad. it. nostra).

[74] *Que cependant toutes ces racines sont algébriquement exactes; que par des transformations, on peut les rendre utiles; et que c'est précisément et univoquement par l'emploi que fait l'analyse de ces formes négatives ou imaginaires, comme si c'étoit de véritables quantités, qu'elle diffère de la synthèse, et qu'elle a sur elle un si grand avantage. A cette notion principale des quantités directes et négatives … j'en réunis d'autres qui me paroissent justifier encore le titre de Géométrie de position que j'ai donné à cet ouvrage* (Carnot 1803, pag. XXIV, trad. it. nostra).

> *negative isolate è sostituita da quella di quantità dirette e inverse* (Carnot 1803, pag. XXXV)[75].

Lo stesso principio di continuità introdotto per le quantità positive e negative (se si trasforma un numero positivo in negativo attraverso trasformazioni (corrette) algebriche, ciò che si ottiene è un numero esistente quanto il primo), viene trasportato da Carnot in geometria: quando da una figura (*primitive*) si passa a un’altra (*corrélative*) attraverso una trasformazione ammissibile per la prima, per la seconda valgono le stesse proprietà della prima, e viceversa[76]. E a conclusione della *Dissertation préliminaire*, Carnot tiene a precisare che ciò che egli chiama Geometria di Posizione non è altro che un *nouveau mode pour donner plus d’extension aux applications de l’algèbre à la géométrie ordinaire* (Carnot 1803, pag. XXVII).

Anche i numeri immaginari esprimono un nuovo stato del sistema il quale è in *corrélation imaginaire avec le systême primitif* (Carnot 1803, pag.4).

---

[75] *Ainsi, pour fixer les idées d’une manière précise, je dirai que la géométrie de position est celle où la notation des quantités positives et négatives isolée, est suppléée par celle des quantités directes et inverses* (Carnot 1803, pag. XXXV, trad. it. nostra).

[76] Cfr. (Carnot 1803, pag. XXVI).

§ 2.7 Bellavitis

Tutto questo accedeva tra Francia e Germania. In Italia invece c'e solo una voce nella prima metà dell'Ottocento che dà risposta al dibattito franco-tedesco sulla possibilità di una interpretazione geometrica delle quantità immaginarie: quella di Giusto Bellavitis (1803-1888).

Giusto Bellavitis

Egli nel 1835 creò un calcolo coi vettori all'interno della sua teoria delle equipollenze che finisce con l'inglobare in sé i vettori del piano complesso, e quindi la rappresentazione reale degli elementi complessi. Infatti egli, sulla scia di Carnot voleva trovare un algoritmo che permettesse di rappresentare a un tempo stesso la grandezza e la posizione delle diverse parti di una figura geometrica, ottenendo buoni risultati a partire da un ristretto numero di assunzioni e leggi generali. Ciò che distingue Bellavitis da Argand, Buée, Français è che mentre questi ultimi forniscono una rappresentazione delle quantità complesse nate da un'esigenza tutta algebrica (come soluzioni di equazioni) e quindi "adattano" o meglio "trasportano" le regole algebriche dai reali ai complessi, in Bellavitis il calcolo coi segmenti (complessi) si è affrancato dalla sua natura algebrica per costituire esso stesso spunto di ricerca geometrica. In primo luogo l'originalità epistemologica di Bellavitis risiede nel fatto di voler (a tutti i costi) trovare le quantità immaginarie (quindi definire i numeri complessi) a partire dalle equipollenze[77] tra segmenti *reali*. Prima di lui si erano solo *spostate* proprietà e caratteristiche dai numeri reali ai numeri complessi senza alcuna dimostrazione rigorosa. Bellavitis vuole di più:

> *Il tipo, come si disse, la rappresentazione delle quantità immaginarie, fu data da parecchi analisti molto prima che io ne deducessi il mio metodo delle equipollenze; anche Cauchy la adopera non rade volte, ma sempre come un mezzo di esprimere più*

[77] Il termine equipollenza è tratto da Carnot (cfr. Caparrini, 2006, p. 149).

chiaramente qualche circostanza relativa alle quantità immaginarie, non già come l'essenziale ed unica definizione delle medesime: io invece la prenderò come la vera definizione e da essa dedurrò le proprietà degli immaginarie (Bellavitis 1852, pag. 247)[78].

Quindi non è l'elemento complesso a trovare una ragion d'essere tramite la geometria, o tramite la sua rappresentazione geometrica che dir si voglia, ma è proprio la geometria classica la base da cui partire per definire l'algebra degli immaginari[79]. Tant'è che nel 1835 nel *Metodo delle Equipollenze* Bellavitis scrive:

d'altra parte a me sembra che piuttosto d'introdurre nella Geometria le quantità immaginarie e l'oscurità che le accompagna, sia molto meglio appoggiarsi a principj geometrici rigorosamente dimostrati, i quali potranno anche offrire agli Analisti un oggetto reale che valga a pienamente a giustificare i calcoli del loro simbolo $\sqrt{-1}$*. …la lettera* γ *(che adopero in mancanza di un segno particolare) ei [il lettore] la calcolerà come il simbolo* $\sqrt{-1}$*, che da molti Analisti fu trovato troppo imbarazzante e perciò disegnato colla lettera i* (Bellavitis 1837, pag. 245).

Così dopo avere stabilito tutte le regole di calcolo del metodo delle equipollenze inerenti le *rette considerate in lunghezza e in direzione* (in realtà quindi segmenti orientati o vettori) e stabilito i rapporti ε^{α} di inclinazione tra esse, a fine articolo può finalmente introdurre nel modo seguente le quantità geometriche immaginarie, con tali tre termini intendendo che egli non parte dal numero immaginario e trova per esso una rappresentazione geometrica, ma che è il segmento immaginario che si trova essere identico al $\sqrt{-1}$ degli analisti; infatti:

Se rappresentiamo con π *l'inclinazione di 180°, è palese che (1)* $\varepsilon^{\pi}\simeq -1$*, …, e che* $\varepsilon^{2\pi}\simeq 1$*. In quanto a* $\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}$ *esso sarà equipollente a* $\frac{OB}{OA}$*, essendo OA,OB due rette eguali e perpendicolari …; occorre tanto frequentemente d'indicare questa inclinazione di un angolo retto,*

[78] Si veda anche: (Freguglia 1992).

[79] Cfr. (Freguglia 1992, pag. 32).

che sarà comodo disegnarla con una lettera particolare ponendo (2)

$\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \simeq \gamma$ *… . Se debbiasi moltiplicare* γ *per se medesimo, basterà rammentare le precedenti (1) e (2) per accorgersi che* $\gamma\gamma \simeq -1$*; ne viene che il simbolo* γ *si calcolerà precisamente come dagli Analisti è calcolata la quantità immaginaria* $\sqrt{-1}$*; per ricordare questa analogia noi chiameremo immaginario il simbolo* γ*, e immaginarie le formule che lo contengono … . Possiamo riguardare come una fortunata combinazione che gli Analisti abbiano già considerate le quantità immaginarie … . La piena analoga fra il simbolo* γ*, che indica l'inclinazione di 90°, e l'immaginario* $\sqrt{-1}$ *ci offre un altro vantaggio di presentare un oggetto reale che preso per tipo delle quantità immaginarie toglie a queste ogni oscurità, e rende convincentissime molte proposizioni che le riguardano* (Bellavitis 1837, pag. 259).

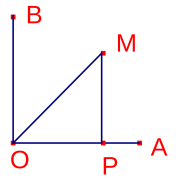
Qualche rigo avanti Bellavitis stabilisce un *Canone fondamentale*:

Insieme con una equipollenza sussiste sempre la sua coniugata, che si ha mutando il segno ad ogni esponente di ε*, e perciò anche ad ogni* $\gamma \simeq \varepsilon^{\frac{\pi}{2}}$*: se l'equipollenza proposta contenesse esplicitamente qualche retta, nella equipollenza conjugata bisognerebbe sostituirvi una retta eguale alla prima e tanto inclinata al di sotto della retta considerata come orizzontale, quanto la prima è inclinata al di sopra; tal nuova retta dirassi la conjugata della prima* (Bellavitis 1837, pag. 259-260).

Il matematico di Bassano, quindi, ritrova tutti i risultati già trovati in ambito algebrico, ma precisa che

finchè il loro $\sqrt{-1}$ *era un segno, a cui non si poteva connettere alcuna idea, essa doveva considerarsi come un elegante processo di calcolo piuttostochè come una vera dimostrazione; ora invece siccome i principj del metodo delle equipollenze sono suscettibili di rigorosissima dimostrazione geometrica, così l'esposto modo …. è* *quanto semplice altrettanto esatto, ed è pienamente generale valendo per ogni grandezza di angoli* (Bellavitis 1837, pag. 261).

Ovviamente Bellavitis si riferisce al modo di rappresentare un vettore *OM* nel piano, in cui (fig. 2) $OA \cong 1$ e $OB \cong \gamma$ (cioè uguale e perpendicolare a *OA*), con l'equipollenza $OM \cong OP+PM$, in cui $OP \cong \cos\alpha \cdot OA \cong \cos\alpha$ e $PM \cong \operatorname{sen}\alpha \cdot OB \cong \operatorname{sen}\alpha \cdot \gamma$.



Si ponga: $M\hat{O}A=\alpha$

Fig. 4

E nella memoria del 1837 dice esplicitamente, a proposito di tangenti, derivate e differenziali, non lasciando più dubbi circa il suo pensiero:

Serva d'esempio il sistema delle coordinate ortogonali espresso da $OM \cong x+y\gamma$ *(*Bellavitis 1835, pag. 254).

Bellavitis non tralascia neanche di osservare che il suo metodo di affrontare lo studio delle equipollenze non è riconducibile a quello del calcolo baricentrico dei tedeschi, poiché

I due metodi partono da principj, che facilmente potrebbero ridursi all'identità, ma si allontanano ben presto e per l'oggetto e per la forma. Ciò che principalmente rende degnissima di studio l'opera succitata [il calcolo baricentrico di Möbius], *si è a mio credere la generalità, con cui vi sono trattate varie questioni in modo da gareggiare coi fecondissimi metodi della projezione, ed in generale della derivazione delle figure; ora le equipollenze non solo comprendono come un loro ramo tutto il calcolo baricentrico, ma inoltre per una maggiore abbondanza di mezzi si applicano più facilmente a tutte le questioni di Geometria* (Bellavitis 1835, pag. 244-245).

Da quanto detto, si può capire come il contributo dato da Bellavitis col suo calcolo geometrico delle equipollenze va visto, in quel ben determinato contesto storico, come un contributo originale anche verso la comprensione della natura dei numeri complessi e della loro rappresentazione reale.

Per Bellavitis la rappresentazione geometrica degli immaginari è essenziale e costituisce essa stessa l'unica definizione delle quantità immaginarie, mentre per altri, così come per Cauchy, resta *un mezzo per esprimere più chiaramente qualche circostanza* (Bellavitis 1852, pag. 247).

Quindi a metà Ottocento i numeri complessi erano un'ordinario strumento in uso agli analisti per quanto riguarda le funzioni a variabile complessa, agli algebristi che potevano dimostrare senza eccezioni il teorema fondamentale dell'algebra e ai geometri che potevano fornirne una doppia rappresentazione, o come vettori o come punti del piano complesso, e che presto svilupparono una geometria degli elementi immaginari. Sarà questo l'argomento del prossimo capitolo.

CAPITOLO 3

Verso la definizione della Geometria Proiettiva Complessa

§3.1 La teoria delle inversioni (Dandelin, Quetelet, Steiner, Plücker)

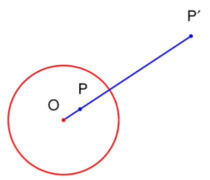
Le rappresentazioni geometriche viste nel precedente capitolo consideravano il piano complesso dal punto di vista affine ed euclideo e quindi sostanzialmente coincidente con R^2 (nel senso che è possibile tradurre ogni affermazione dal primo al secondo e viceversa; oggi diciamo che le due rappresentazioni del piano sono isomorfe). Discordanze sostanziali sorgono invece quando ci si pone il problema di dare alla rappresentazione complessa del piano una struttura proiettiva. Infatti rendendo omogenee le equazioni espresse in C^1 di fatto si aggiunge un solo punto all'infinito e questo comporta le ben note differenze tra la retta proiettiva complessa e il piano proiettivo reale. Questo a nostro avviso costituisce il primo passo decisivo verso lo studio delle geometrie su un campo qualunque e sarà quindi l'argomento principale di questa tesi, tenendo particolarmente conto di quanto fatto da Corrado Segre che queste differenze mise bene in luce, introducendo ad esempio accanto alle proiettività le antiproiettività (che nel piano reale non esistevano affatto).

L'importanza di questa impostazione in vari ambiti scientifici, soprattutto viste le loro applicazioni in campo analitico (analisi complessa), ha determinato all'inizio del XX secolo un *ritorno di fiamma* dei matematici per considerazioni che da più di trent'anni (da quando cioè erano state introdotte da Corrado Segre) sembravano ormai avere poco interesse.

Il primo esempio già noto da tempo, di antiproiettività (anche se naturalmente non vista ancora come tale) si ha nelle inversioni, trasformazioni che sono state studiate a partire dal concetto di proiezione stereografica di una sfera sul piano, concetto molto popolare nella prima metà dell'Ottocento[80].

Ricordiamo che per inversione si intende una particolare trasformazione di punti del piano rispetto a una circonferenza di centro O e raggio r l'applicazione $\nu : R^2-\{O\}\rightarrow R^2$ che fa corrispondere a un punto P un altro punto P' che sta sulla semiretta uscente da O e passante per P e tale che $OP\cdot OP'=r^2$.

[80] Per una storia dell'inversione come trasformazione geometrica, cfr. (Patterson 1929).

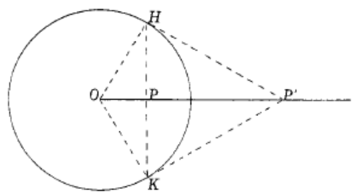


Inversione circolare

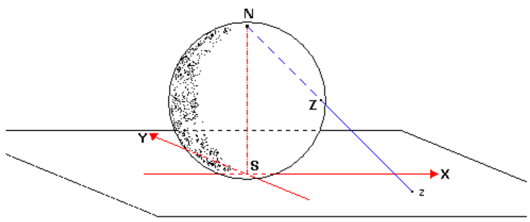
L'inversione non è definita in generale per *P*=*O*. Si può definire l'inversione in *O* aggiungendo al piano un punto, il "punto all'infinito" ∞, e ponendo O e ∞ l'uno il punto inverso dell'altro. In altre parole, l'inversione scambia il centro della circonferenza con il punto all'infinito. Spesso il punto O viene detto *polo* e la costante r^2 *potenza*. L'inversione si può costruire geometricamente come segue: sia P interno al cerchio fondamentale; consideriamo da P la perpendicolare alla retta OP, sino ad incontrare la circonferenza in H e K; le tangenti alla circonferenza in H e K si incontrano nel punto corrispondente, poiché applicando il primo teorema di Euclide si ha $OP \cdot OP' = OH^2 = r^2$. Se invece il punto P è esterno, basta condurre da esso le tangenti alla circonferenza fondamentale e congiungere i loro punti di contatto; tale congiungente incontra OP nel punto corrispondente P'. Usando le coordinate cartesiane, se P(x; y) e P'(x'; y'), si vede facilmente che l'inversione è rappresentata dalle equazioni

$$x' = \frac{xr^2}{x^2 + y^2} \quad , \quad y' = \frac{yr^2}{x^2 + y^2} \, .$$

Tramite *proiezione stereografica*, il piano completato con il punto all'infinito può essere identificato con una sfera: l'inversione corrisponde quindi in realtà una trasformazione della sfera.



Costruzione geometrica dell'inverso P' di P rispetto la circonferenza di centro O



Proiezione stereografica tramite la sfera di Riemann

Il piano di inversione può essere visto analiticamente come un piano di Argand-Gauss completato dal punto all'infinito, immagine del polo Nord della sfera. Le rette euclidee, immagine dei cerchi massimi della sfera, vengono completate quindi con il punto all'infinito, due rette parallele si intersecano in tale punto. Il piano inversivo reale è detto di Möbius e non è altro che la proiezione della superficie di un'ordinaria sfera e i suoi elementi sono le immagini dei punti e dei cerchi con le usuali relazioni di incidenza. In esso non si hanno considerazioni metriche o che dipendono dalla distanza tra due punti.

Chi sia stato davvero il primo a introdurre il concetto di inversione non è facile da stabilire[81]: di esso si possono rintracciare tracce in Ipparco (II sec. A. C.) e in Tolemeo di Alessandria (II sec. D.C.)[82]. In epoche più recenti, sicuramente tra coloro che fecero un uso massiccio nelle loro ricerche della proiezione stereografica di una sfera su un piano figura Germinal Pierre Dandelin (1794-1847). Quest'ultimo già nel 1822[83] pubblica un articolo in cui studia la posizioni dei fuochi di determinate sezioni

Germinal Pierre Dandelin

coniche (da cui poi il teorema che porta il suo nome) e trova come proiettare cerchi in cerchi[84]. Successivamente nel 1827 pubblica sulla stessa rivista anche (Dandelin

[81] Patterson afferma: "*When one seeks to find to whom we are indebted for the invention of this fruitful method of geometry* [the inversion] *he is confronted only by meagre footnotes and confusing reference in the literature*" (Patterson 1933, pag.154-155) .

[82] Cfr. (Patterson 1933, p.158 nota (7)).

[83] (Dandelin 1822). Si vedano anche (Dandelin 1827a) e (Dandelin 1827b).

[84] Dal seguente passaggio è chiaro che Dandelin usualmente usa passare tramite proiezione da cerchi in cerchi:

30. D'abord tous les cercles, passant par N et tangents à la focale, se projetteront sur la sphère suivant des cercles passant par n'' et tangents à la sphère-focale. Les cercles K e K' jouissent de cette propriété comme les autres, mais en outré on remarquera que ces deux cercles divisent la sphère en quatre régions (Dandelin 1822, p. 187).

1827b), in cui afferma l'importanza dell'uso della proiezione stereografica[85], e soprattutto (Dandelin 1827a) in cui trasforma cerchi in rette e viceversa e trova la relazione $OP \cdot Op' = r^2$ nella ricerca di nuovi modi di costruire una lemniscata, indicando con tale nome indifferentemente una delle tre curve che si ottengono dai piedi di perpendicolari tracciate a partire da un punto P di una curva di secondo grado (parabola, ellisse o iperbole), in modo che al muoversi di P su detta curva resta tracciata su un piano a essa tangente un'altra curva (rispettivamente, curva focale, concoide o lemniscata)[86].

Importante è notare che in (ibidem, pag. 9), indicando con ρ il raggio vettore della lemniscata, con ρ' quello della conica e con R il raggio della sfera, Dandelin trova la nota relazione che definisce un'inversione: $\rho\rho' = R^2$, con ρ e ρ' che si corrispondono.

L'articolo in questione si chiude con le seguenti frasi:

> *Quando si è così costruita una curva di secondo grado generatrice della lemniscata, è comodo servirsene per determinare tutte le propietà di quest'ultima; si può con il suo aiuto costruire i cerchi osculatori, le tangenti, determinarne i punti singolari; ma poiché tutte queste cose sono facili per quelle che avranno letto con qualche attenzione la nostra Memoria sulle proiezioni stereografiche, noi non ne parliamo più oltre.*
>
> *Ci sono su queste curve anche delle ricerche analitiche molto curiose, ma di cui tratterò altrove, giacché qui mi sono proposto di dare un nuovo esempio dell'uso delle proiezioni stereografiche* (Dandelin 1827a, p. 9-10).[87]

---

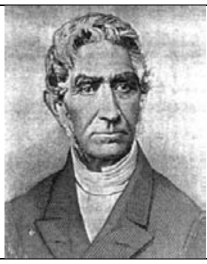
[85] *On voit donc qu'il serait possible de remplacer, pour représenter les pointes de l'espace, la méthode des projections orthogonales par celle des perspectives; et celle-ci, comme nous le verrons, offert dans de certains cas de grands avantages sur l'autre* (Dandelin 1827b, p. 14).

[86] Si veda (Dandelin 1827a, p. 3-4).

[87] *Lorsqu'on a ainsi construit une courbe du second degré génératrice de la lemniscate, il est commode de s'en servir pour déterminer toutes les circonstances du cours de cette dernière; on peut par son aide en construire les cercles osculateurs, les tangents, en déterminer les pointes singuliers; mais comme toutes ces choses sont faciles pour ceux qui auront lu avec quelque attention notre Mémoire sur les projections stéréographiques, nous n'en parlons pas d'avantage.*

Il y a aussi sur ces courbes des recherches analytiques très-curieuses, mais dont je traiterai ailleurs, car ici je ne me suis proposé que donner un nouvel exemple de l'emploi des projections stéréographiques (Dandelin 1827a, p. 9-10).

Anche Adolphe L. J. Quetelet (1796-1874), amico di Dandelin, pubblica negli


Lambert Adolphe Jacques Quetelet

stessi anni alcuni articoli in cui studia curve tipo la lemniscata e trova una certa analogia tra tali curve e le coniche ottenute tramite una doppia proiezione stereografica[88]. Ma Quetelet non si accontenta solo di un metodo geometrico: egli ottiene[89] che la trasformazione con cui si trova un punto della polare di equazione f(x',y')=0 di una curva f(x,y)=0 rispetto la conica $x^2+y^2=r^2$ ha per equazioni (su un piano a coordinate ortogonali) $x'=\frac{xr^2}{x^2+y^2}, y=\frac{yr^2}{x^2+y^2}$,[90] cioè le trasformazioni di Möbius.

Negli stessi anni J. Steiner (1796-1863), e precisamente nel 1824, in uno scritto


Jakob Steiner

(trovato dopo la sua morte in una libreria di Berna e, quindi, pubblicato postumo)[91] dall'impressionante titolo *Von der Wiedergeburt und der Auferstehung* (=Sulla rinascita e sulla resurrezione)[92], usa l'inversione per risolvere numerosi problemi in geometria descrittiva. Non si conosce il motivo per il quale Steiner non fece pubblicare mai tale

[88] Cfr. (Patterson 1933, p. 161).

[89] Cfr. (Quetelet 1827).

[90] Cfr. (Quetelet 1827, p. 112).

[91] Si veda a tal proposito (Patterson 1933, p.164-169).

[92] Ibidem.

libretto; egli invece pubblica nel 1826 un articolo[93] in cui trova una definizione di punti inversi ottenuta a partire dalla teoria della potenza di un cerchio.

Anche J. Plücker (1801-1868) dà il suo contributo alla teoria delle inversioni nel

Julius Plücker

lungo articolo, pubblicato in 6 note tra il 1833 e il 1834, dal titolo *Analytish-geometrichen Aphorismen*[94], precisamente nel paragrafo dal titolo *Über ein neues Übertragungs-Princip*[95]; in esso Plücker sviluppa analiticamente le trasformazioni inverse, a partire dalla loro definizione:

> *Se è dato un cerchio, due qualunque punti, che stanno entrambi su una stessa retta tracciata a partire dal centro del cerchio dato e che soddisfano la proprietà che l'uno sta sulla polare dell'altro, vengono detti poli corrispondenti in riferimento al dato cerchio. Il luogo geometrico di tutti i poli corrispondenti di tutti i punti, che stanno su un altro cerchio, è un nuovo cerchio. La relazione tra questi due cerchi è reciproca; io li chiamo nel prosieguo cerchi corrispondenti e dico che un cerchio è il cerchio polare dell'altro.*[96] (ibidem, pag. 219)

E una pagina dopo precisa che:

[93] (Steiner 1826).

[94] (Plücker 1933 e 1934).

[95] (ibidem, Bd. 11, pag. 219).

[96] *Wenn ein Kreis gegeben ist, irgend zwei Puncte, welche beide auf derselben durch den Mittelpunct dieses Kreises gehenden geraden Linie liegen und die Eigenschaft haben, dass einer derselben auf der Polar des andern liegt, zugeordnete Pole in Beziehung auf den gegebenen Kreis genannt werden. Der geometrische Ort für die zugeordneten pole aller Puncte, die auf dem Unfange irgend eines gegebenen Kreis liegen, ist eine neuer Kreis. Die Beziehung der beiden Kreise zu einander ist eine durchaus gegenseitige; ich nenne dieselben in dem Folgenden zugeordnete Kreise und sage, der Kreis sei der Polar-Kreis des andern* (ibidem, pag. 219, trad. it. nostra).

A un cerchio che passa per l'origine delle coordinate, che coincide col centro del cerchio ausiliario [il cerchio di inversione Nota mia], appartiene come luogo corrispondente una retta, e viceversa, a una qualsiasi linea retta appartiene come luogo corrispondente un cerchio, che passa attraverso un punto fisso che è il centro del cerchio ausiliare. Se la data retta è un diametro del detto cerchio, essa corrisponderà a se stessa.[97] (ibidem, pag. 220-221)

In definitiva si può affermare che Dandelin e Quetelet arrivarono all'inversione ragionando su considerazioni fatte sulla proiezione stereografica; Steiner molto probabilmente arrivò alla formulazione dell'inversione passando attraverso la teoria della similitudine di figure e la corrispondenza tra punti omologhi di due cerchi; Plücker studiando la teoria delle polari[98].

---

[97] *Zu einem Kreise, der durch den Anfangspunct der Coordinaten, den Mittelpunct des Hülfs-Kreises, geht, gehört also als zugeordneter Ort eine gerade Linie, und umgekehrt, zu irgend einer gegeben gerade Linie gehört als zugeordneter Ort ein solcher Kreis, der durch einen festen Punct, den Mittelpunct des Hülfs-Kreises, geht. Wenn die gegebene gerade Linie ein Durchmesser letztgenannten Kreises ist, so ist sie ihr eigner zugeordneter Ort* (ibidem, pagg. 220-221, trad. it. nostra).

[98] Cfr. (Patterson 1933, pag. 179).

§3.2 Bellavitis

Le considerazioni precedenti ci riportano a Bellavitis. L'importanza che rivestono alcuni scritti dell'ampia produzione di Bellavitis per il nostro discorso non è certo marginale. Infatti per una corretta formulazione dall'intera teoria dell'inversione, come noi oggi la conosciamo, bisogna arrivare al 1836, anno in cui Giusto Belavitis pubblica *Teoria delle figure inverse, e loro uso nella Geometria elementare*[99].

Abbiamo già detto che, inspirato dalle ricerche di L. Carnot e di A. Buée[100], Bellavitis diede vita già sin dal 1832 a un calcolo con segmenti orientati del piano (il cosiddetto *calcolo delle equipollenze*) e riportava a esso ogni problema o teorema non solo geometrico ma anche fisico o meccanico, anticipando quelle che poi saranno le teorie di Grassmann e Hamilton. Bellavitis rapportava ogni teoria al suo calcolo considerando quest'ultimo una sorta di chiave di lettura generale.

Ma qualche anno dopo (dal 1836 in poi), i suoi lavori, soprattutto quelli inerenti la *Geometria Derivata*, sembrarono risentire maggiormente dell'influenza di Jean Victor Poncelet (1788-1867), Möbius, Plücker e Steiner.

Jean Victor Poncelet

Bellavitis si interessa così ai metodi della Geometria di Posizione, alla derivazione polare e alla teoria delle inversioni, vista come un ramo della più generale *Geometria Derivata* e comunque come una campo di ricerca in cui sfruttare il suo calcolo delle equipollenze poiché "*da una equazione relativa ai punti di una retta se ne deduce subito un'equipollenza relativa ai punti di un piano*" [101]

In ogni caso, Bellavitis presenta nella memoria del 1836 una teoria completa sull'inversione, in cui

---

[99] (Bellavitis 1836).

[100] Cfr. (Freguglia 1992, pagg. 44-45) e (Caparrini, 2006, pag. 149).

[101] Cfr. (Bellavitis 1836, pagg. 126-127); citato anche in (Freguglia 1992, pagg. 40-41).

> "*L'oggetto … sarà stabilire la relazione fra due figure inverse, e specialmente trovare la proprietà di una di esse conoscendo quelle dell'altra. Perciò la teoria delle figure inverse può riguardarsi come un ramo della Geometria ch'io chiamo derivata, appunto perchè in essa le proprietà di una figura si derivano da quelle di un'altra*" (Bellavitis 1836, pag. 127).

Altra memoria è il *Saggio di Geometria derivata*[102] di due anni più tarda. Nelle due opere citate, Bellavitis pone quindi l'attenzione sull'importanza dell'introduzione di tali metodi in Geometria, metodi che, non solo trasportando il problema da un ambito a un altro (quello inverso), semplificano il problema posto e lo risolvono con estrema facilità rispetto a quello di partenza, ma che

> *sono tutto al più una dozzina, quanto fecondi altrettanto facili da intendersi e ricordare* (Bellavitis 1854, pag. 241).

Passiamo così a considerare la memoria del 1854, nella quale Bellavitis, forse alla luce di alcuni lavori pubblicati proprio in quegli anni da Möbius, riprende il discorso del 1836 e del 1838 e sottolinea come un tale studio gioverebbe al *desiderio di alcuni Giovani Geometri Italiani* (Bellavitis 1854, pag. 241). Egli analizza la derivazione (trasformazione) simile, quella affine e quindi la inversa, particolarizzando sempre di più i metodi esposti e puntualizzando che mentre

> *la derivazione da una figura ad altra simile, che vedemmo utile per la soluzione di qualche problema grafico, non può tornare di alcun vantaggio a scoprire nuovi teoremi; essendochè tutte le proprietà di una figura spettano egualmente al ogni figura simile; egli è per questo che a dare esempio degli usi della derivazione passiamo tosto a considerare un'altra legge* (Bellavitis, pag. 244-245).

La parte finale dell'articolo è incentrata sulla risoluzione di particolari problemi di Geometria elementare tramite la derivazione d'inversione, poiché egli sostiene che

> "*quanto siamo andati esponendo è più breve ad immaginare e ad eseguire, di quello che sia a partitamene descrivere. Ciò avviene*

[102] (Bellavitis 1838).

sempre nei metodi di derivazione, pei quali le idee si presentano intuitivamente" (Bellavitis 1854, p. 247).

Il contributo di Bellavitis quindi si può leggere in relazione da un lato al dibattito tutto Ottocentesco intorno al calcolo vettoriale, con risvolti nella rappresentazione delle quantità immaginarie, e dall'altro agli studi di geometria proiettiva che fanno capo a L. Carnot e Poncelet[103].

Per capire ancora meglio in che termini la teoria delle inversioni interessi la geometria proiettiva complessa non possiamo non considerare l'opera di A.F. Möbius.

[103] Cfr. (Freguglia 1992, cap. 1).

§3.3 Möbius

August Ferdinand Möbius

Nel 1827 August Ferdinand Möbius (1790-1868) pubblicava il *Der barycentrische Calcul*, nella prefazione del quale è già chiaro il riferimento a L. Carnot e alla sua *Géométrie de position*, nella quale, dice l'autore stesso[104], il matematico francese cercava di trovare il baricentro non solo di corpi, superfici e linee, ma anche di un qualsiasi sistema di punti. Möbius stabilì così un *metodo nuovo* per determinare il baricentro di un qualsiasi sistema di punti attraverso la determinazione della posizione di tre punti (chiamati punti fondamentali) in un piano, che altro non è che un alternativa al metodo delle coordinate. Infatti alla fine della prima parte del calcolo baricentrico, Möbius mostra come passare dall'espressione baricentrica di una curva o di una superficie (espressione trovata a partire dalle coordinate dei suoi tre punti fondamentali) alla sua equazione in termini di coordinate cartesiane, e viceversa[105]. Se, invece, si considera il calcolo baricentrico indipendentemente dalla posizione dei punti fondamentali, tutte le relazioni tra i punti di una figura espresse in termini di coefficienti dei suoi punti fondamentali continueranno a valere anche si considera un'altra figura costruita con gli stessi coefficienti, anche se a partire da altri punti fondamentali[106]. Così:

> *Si vede immediatamente, che due tali figure non sono simili, ma stanno in un rapporto più generale l'una all'altra.*
> *Allo stesso tempo venni io con ciò indirizzato, a ricercare altre relazione tra figure, e per questo sviluppai la seconda parte del mio libro, il quale tratta delle affinità geometriche, una dottrina, che nel*

[104] Cfr. (Möbius 1827, p. 5).

[105] Cfr. (ibidem, pag. 8).

[106] Cfr. (Möbius 1827, pag. 9).

senso qui usato in sé racchiude il fondamento di tutta la geometria (Möbius 1827, pag. 9)[107] .

Ma ciò che più interessa questo lavoro di tesi riguarda il concetto di affinità (*Verwandtschaft*), inizialmente inerente configurazioni reali di punti, ma che ben presto viene riferito anche al piano e allo spazio complessi[108].

Möbius sarà tra i primi a capire l'importanza del concetto di affinità[109] all'interno della teoria delle proiezioni, infatti sin dalle prime pagine del suo scritto fondamentale afferma che la *Teoria delle proiezioni prospettiche e delle collineazioni* (=*Theorie der perspectivischen Projectionen und der Collineationsverwandtschaft*)

> *è per mezzo del calcolo baricentrico il principale argomento della seconda parte* [del mio testo] *e allo stesso tempo il principale del mio libro, il quale io vorrei consigliare soprattutto all'attenzione del lettore* (Möbius 1827, pag. 10) [110].

Alla teoria delle collineazioni Möbius fu guidato dalle considerazioni sulle applicazioni prospettiche di una figura piana (cfr. Möbius 1827, pag. 10); ben presto tale teoria porterà Möbius alla formulazione delle trasformazioni che oggi portano il suo nome e della geometria dei cerchi. Vediamo come.

In tanto, è nella seconda parte del Calcolo baricentrico che Möbius non solo applica tutti i risultati trovati alla teoria del birapporto (*Doppelschnittsverhaeltniss*) che connette alle reti geometriche (*geometrischen Netzen*), da cui discende la definizione di quadrangolo completo o quadrilatero fondamentale, ma estende anche allo spazio la teoria delle collineazioni. Ma lo scopo per Möbius è sempre uno:

---

[107] *Man sieht augenblicklich, dass zwei solche Figuren einander nicht ähnlich sind, sondern in einer allgemeineren Beziehung zu einander stehen.*

Zugleich aber wurde ich dadurch bewogen, noch mehrere dergleichen Beziehung zwischen Figur auszumitteln, und somit entstand der zweite Abschnitt meines Buchs, welcher von den geometrischen Verwandtschaften handelt, eine Lehre, welche in dem hier gebrauchten Sinne die Grundlage der ganzen Geometrie in sich fasst (Möbius 1827, p. 9, trad. it. nostra) .

[108] Per visualizzare un interessante video sulla trasformazione di Möbius, cliccare sul sito http://youtube.com/watch?v=JX3VmDgiFnY

[109] In accordo alla traduzione di Mario Pieri, il termine tedesco *Verwandtschaft* verrà tradotto in italiano col sostantivo *affinità*.

[110] *mittelst des baricentrischen Calculs ist der Hauptgegenstand des zweiten Abschnitts und zugleich dasjenige in meinem Buche, was ich der Beachtung des Lesers am meisten empfehlen möchte* (Möbius 1827, pag. 10, trad. it. nostra).

Attraverso ciò, come anche alle volte attraverso il calcolo baricentrico stesso, viene accostata l'evidenza del metodo sintetico con la generalità della relazione analitica, mentre con l'applicazione dei puri segni geometrici, i quali sono consonanti scelte per i punti di una figura, si rappresentano le relazioni aritmetiche fra parti della figura attraverso formule, le quali valgono per tutte le possibili posizioni delle parti (Möbius 1827, pag. 12)[111] .

Ma è nel 1852[112] che Möbius dimostra aver completamente assimilato la rappresentazione geometrica sul piano di Argand-Gauss di un numero complesso, anzi questa gli ha suggerito la teoria esposta in questo articolo nel quale definisce la lunghezza complessa di un segmento. Vediamo come. Una volta ribadita la corrispondenza tra un punto complesso della retta e il suo corrispondente reale del piano individuato da coordinate rettangolari, Möbius definisce la distanza (*Abstände*) complessa tra due punti A e B, indicata col simbolo [AB], di una retta nel modo seguente: siano A e B i punti reali corrispondenti dei due complessi in un qualunque piano; sia AB la distanza, espressa da un numero reale del segmento che ha per estremi A e B (una volta stabilite un'unità di misura e una direzione nel piano); sia definita la funzione $\varphi(\alpha)=\cos\alpha+\sqrt{-1}\,\sin\alpha$ dove α è l'angolo individuato tra un asse x definito come direzione normale del piano e la direzione positiva della linea AB; quindi si pone $[AB]=AB\cdot\varphi(\alpha) =AB\cdot(\cos\alpha+\sqrt{-1}\,\sin\alpha)$.

Tale risultato gli permetteva di: 1) trovare le relazioni $\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta)=\varphi(\alpha+\beta)$ e $\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}=\varphi(\alpha-\beta)$; 2) ridurre un quadrato a un triangolo (attraverso un determinato algoritmo fra angoli già usato nel calcolo baricentrico); 3) rappresentare attraverso formule le relazioni aritmetiche tra punti di una figura, formule valide a prescindere

---

[111] *Es wird hierdurch, so wie auch zum Theil durch den barycentrischen Calcul selbst, die Anschaulichkeit der synthetischen Methode mit der Allgemeinheit der analytischen in möglichst nahe Verbindung gebracht, indem man mit Anwendung rein geometrischer Zeichen, dergleichen die für die Puncte einer Figur gewählten Buchstaben sind, die arithmetischen Beziehungen zwischen den Theilen der Figur durch Formel darstellt, welche für alle möglichen Lagen der Theile Gültigkeit haben.* (Möbius 1827, pag. 12, trad. it. nostra).

[112] In (Möbius 1852).

dalla posizione della figura; 4) determinare la posizione armonica di 4 punti in un piano.

Infine, egli stesso ammette che tali considerazioni lo hanno portato a considerare le proprietà dell'involuzione di 6 punti di una retta su un piano e quindi una nuova specie di affinità (*Verwandtschaft*) tra figure piane,

> *una affinità, che mi risultò dal trasferire un sistema collineare affine di punti di una retta su di un piano* (Möbius 1852, ultima pagina)[113] .

L'anno successivo, nel 1853, Möbius pubblica *Über eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren*[114] (=Circa una nuova affinità tra figure piane) in cui si prefigge lo scopo di indagare queste nuove collineazioni tra figure piane, che gli si sono presentate inaspettatamente nello studio di collineazioni tra sistemi di punti di una retta in un piano, studio condotto attraverso il campo immaginario. Ecco come viene definita questa nuova affinità[115].

Sia dato un sistema di *n* punti A, B, C, … in un piano e si costruisca un secondo sistema di *n* punti A', B', C', …, in un piano fissando i primi tre, e tale che D' sia dato dall'uguaglianza dei birapporti

$$\frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}. \tag{1}$$

E così facendo verranno individuati tutti gli altri *n-3* punti del secondo sistema di punti. Ora, così come[116] l'uguaglianza tra i birapporti di due sistemi di punti di una retta definisce una particolare affinità (=proiettività), allo stesso modo i due sistemi di punti in un piano determinano una nuova affinità.

Definito il concetto di differenza di angoli (*Winkelunterschied*) degli *n* punti come le *n-3* quantità date da ACB-ADB, ACB-AEB, … , si potrà definire la nuova affinità anche a partire dall'uguaglianza delle sottostanti differenze di angoli tra i due sistemi di punti

A'C'B'-A'D'B' =ACB-ADB.

---

[113] *eine Verwandtschft, die sich mir durch Übertragung collinear verwandter Systeme von Puncten in einer Geraden auf die Ebene ergab* (Möbius 1852, ultima pagina, trad. it. nostra).

[114] In (Möbius 1853a).

[115] (cfr. Möbius 1853a, §3).

[116] Si veda (Möbius,1827, §225).

Si dimostra che dati i tre punti A', B', C' sul piano, il quarto punto D' che soddisfa l'uguaglianza (1) deve stare sul cerchio individuato da A', B', C' [117]. Per tale motivo se i primi quattro punti A, B, C, D stanno su un cerchio anche i corrispondenti quattro A', B', C', D' staranno su un cerchio; così Möbius afferma che

> *la nuova affinità si definisce in modo che a ogni quattro punti di un piano, che stanno su di una circonferenza, possono essere messi in corrispondenza altri quattro che allo stesso modo nell'altro piano si trovano su di una circonferenza, e che così a ogni cerchio dell'uno corrisponda un cerchio nell'altro. Io voglio in seguito chiamare affinità circolare la nuova affinità (cfr. Möbius 1853a, §8 alla fine*)[118].

Da ciò discende che, se una retta si può intendere come illimitata parte di una circonferenza[119], si può affermare che tali nuove collineazioni circolari: uno, mandano cerchi in cerchi (intendendo per cerchio anche la retta) e, due, mantengono invariata la grandezza degli angoli. E,

> *come si sa, le stesse relazioni valgono anche tra ogni figura sferica e la sua proiezione stereografica, e due proiezioni stereografiche di una stessa figura sferica si corrispondono in una affinità circolare* (Möbius 1853a, §13 penultimo capoverso) [120].

Nell'ultimo paragrafo (§14) della memoria del 1853a, Möbius mette in parallelo le *2n-6* relazioni (la somma degli *n-3* birapporti e *n-3* differenze di angoli che si vengono a determinare fissando tre punti di un sistema *n* punti di un piano (quindi questi tre con ciascuno dei rimanenti n-3 punti forma esattamente n-3 birapporti e n-3 differenze di angoli)), ognuna delle quali è determinata da quattro punti, con i quaternioni. In altre parole, Möbius determina un sistema di quantità alla cui base ce ne

[117] Cfr. (Möbius 1853a, §4).

[118] *Kann die neue Verwandtschaft auch dadurch definiert, dass von je vier Puncten der einen Ebene, welche in einem Kreise liegen, die entsprechenden in der anderen gleichfalls durch einen Kreis verbunden werden können, und dass somit jedem Kreise der einen ein Kreise in der anderen entspricht. Ich will hiernach die neue Verwandtschaft Kreisverwandtschaft nennen* (Möbius 1853a, §8 alla fine, trad. it. nostra).

[119] Cfr. (Möbius 1853a, inizio del §11).

[120] *wie man weiss, haben dieselben Beziehungen auch zwischen jeder sphärischen Figur und ihrer stereographischen Projection statt, und es werden daher je zwei stereographische Projection einer und derselben sphärischen Figur,…, einander kreisverwandt sein* (cfr. Möbius 1853a, §13 penultimo capoverso, trad.it. nostra).

stanno 2n-6 indipendenti, ognuna delle quali è determinata da 4 punti e che chiama quaternioni[121]; poi trova tutte le altre quantità-quaternioni attraverso funzioni delle precedenti.

Inoltre precisa che il concetto nuovo di affinità qui descritto può essere enunciato anche per lo spazio[122].

La naturale continuazione di queste due memorie è stata pubblicata da Möbius nel 1855: essa si intitola *Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung (=Teoria delle affinità circolari in una pura rappresentazione geometrica)*[123]. In realtà nello stesso anno 1853 Möbius scrive un altro articolo *Ueber die Involutionen von Punten in einer Ebenen*[124] in cui stabilisce una serie di proprietà per le involuzioni di punti in un piano, senza tralasciare di sottolineare che egli tratterà di

> *ciò che concerna l'involuzione di punti in un piano, che nel mio ultimo lavoro si riferisce all'affinità circolare, la quale deve valere tra due sistemi di punti A, A', B, B', C, C', … e A', A, B', B, C', C, giacenti in un piano, quando le coppie A und A', ecc., sono in involuzione* (Möbius 1853b, ultima pagina)[125] .

Ma vediamo come Möbius definisce l'involuzione tra punti. Egli fornisce due definizioni di involuzione; la prima viene formulata nel seguente modo: tre o più coppie di punti in una retta sono in involuzione se esistono due punti E ed F della retta rispetto ai quali ogni coppia è armonica; i punti E ed F sono i punti doppi dell'involuzione e sono tali che il punto medio O di EF è coniugato al punto all'infinito. O è detto il punto centrale dell'involuzione. La seconda definizione non è altro che quella di inversione circolare: poiché si sa dalla teoria delle sezioni armoniche che i punti A, A' della retta sono armonici rispetto E ed F e sono l'un l'altro coniugati si avrà che

---

[121] Pur essendo il nome lo stesso, non c'è riferimento alcuno all'opera di Hamilton.

[122] (cfr. Möbius 1853a, §14 ultimo capoverso).

[123] (Möbius 1855).

[124] (Möbius 1853b).

[125] *was die Involution von Puncten in einer Ebene anlangt, so ist es die in meinem letzten Berichte* [Über eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren] *behandelte Kreisverwandtschaft, welche zwischen den zwei in einer Ebene liegenden Systemen A, A', B, B', C, C', … und A', A, B', B, C', C, … stattfinden muss, wenn die Paare A und A', u.s.w. in Involution sein sollen* (Möbius 1853b, ultima pagina, trad. it. nostra).

$OA \cdot OA' = OE^2 = OF^2$; per ogni coppia di punti A,A', B,B', C,C', … il prodotto delle distanze dei due punti della coppia dal punto centrale O è uguale a una quantità costante (In pratica, quindi, le coppie in involuzione sono costituite da punti inversi tra loro rispetto a una circonferenza di centro O e di raggio OE; cfr. (Möbius 1853b, p.176)).

Quest'ultimo fatto, unitamente a quanto asserito precedentemente, mostra come Möbius avesse chiara in mente la definizione di trasformazione inversa, collocandola nell'ambito di una teoria molto più generale: quella delle trasformazioni che conservano cerchi e angoli (conformi) e descrivendo la teoria con un linguaggio decisamente geometrico e proiettivo.

Ma passiamo al lavoro del 1855. In esso Möbius ci dice espressamente che se per trovare la nuova affinità circolare (*Kreisverwandtschaft*) è dovuto passare per il campo complesso (1852), successivamente non ha più avuto bisogno di esso in quanto per definire le nuova affinità fece uso solo del concetto di cerchio[126] e del metodo di rappresentazione tipico della geometria pura. Möbius nota anche che già nel 1832 Ludwig Immanuel Magnus (1790-1861) aveva pubblicato un articolo nel quale trattava di applicazioni identiche alle sue, ma per le quali il matematico berlinese non si era accorto che il birapporto rappresentava un invariante; le ricerche di Möbius, facendo uso invece di tale proprietà, riescono a essere d'aiuto nella risoluzione di molti problemi, nello svolgimento di proposizioni e nelle conseguenze che da queste vengono tratte[127].

La definizione di affinità circolare viene posta da Möbius giusto all'inizio della memoria:

> *Supposto che, in due piani a ogni punto dell'uno un punto, e non più di uno, dell'altro corrisponda, che ogni quattro punti, che giacciono in un cerchio, i corrispondenti sono contenuti ugualmente in un altro cerchio, allora ogni sistema di punti di un piano e il sistema costituito dai punti corrispondenti, così anche ogni linea dell'uno una linea*

[126] *„Namentlich habe ich gegenwärtig von jener das Imaginäre zu Hülfe nehmenden Methode keine Gebrauch gemacht, sondern bin ich unmittelbar von der Definition der Kreisverwandtschaft durch Kreise ausgegangen"* [=Cioè io non ho di contra fatto uso del metodo immaginario, ma piuttosto sono approdato immediatamente alla definizione di affinità circolare attraverso i cerchi] (Möbius 1855, pag. 529, trad. it. nostra).

[127] (Möbius 1855, pag. 532, fine dell'introduzione).

dell’altro, la quale collega i punti coi punti corrispondenti della prima linea, stanno in una affinità circolare (Möbius 1855, pag. 532)[128].

In tal modo Möbius:

1) svolge tutta la teoria e le proprietà delle inversioni, sia tra figure sul piano che nello spazio;

2) ricava l’invarianza del birapporto tra quattro punti (concetto che può essere posto a definizione dell’inversione stessa e che sarà alla base anche della nozione di proiettività in von Staudt e Segre);

3) definisce il biangolo (*Doppelwinkel*) di quattro punti di una circonferenza in un piano in modo analogo al concetto di birapporto: poiché sussiste la relazione tra i quattro angoli ABC+BCD+CDA+DAB=0, si avrà che BCD+DAB=– ABC–CDA, quindi la somma di angoli ABC+CDA o la differenza di angoli ABC–ADC si possono indicare per brevità con ABCD; esso ha la proprietà che ABCD=–BCDA=CDAB=–DABC e che un biangolo si può esprimere come il logaritmo del corrispondente birapporto (cioè del birapporto individuato dagli stessi quattro punti)**.** In altre parole il biangolo di 4 punti A, B, C, D nel piano è l’angolo formato tra i due cerchi ACD e BCD (cioè l’angolo tra le due tangenti nel punto d’intersezione dei due cerchi) (Fig. 5a); se i 4 punti stanno su uno stesso cerchio, il valore del biangolo è 0° o180° (Fig. 5b);

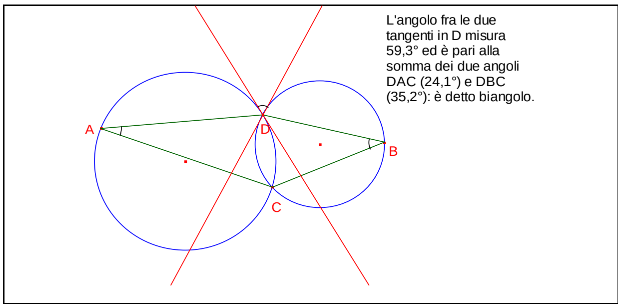


Fig. 5a

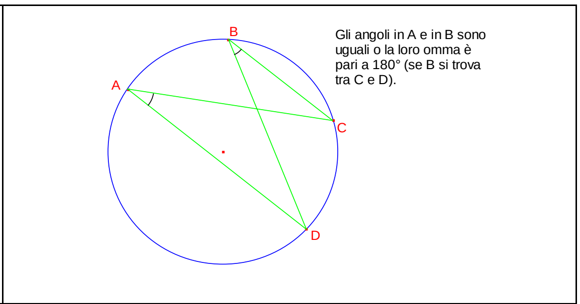


Fig. 5b

[128] *Angenommen, dass in zweie Ebenen jedem Pucten der einen ein Punct, und nicht mehr als einer, in der anderen dergestalt entspricht, dass von je vier Puncten der einen, welche in einem Kreise liegen, die entsprechenden in der anderen gleichfalls in einem Kreise enthalten sind, so sollen jedes System von Puncten der einen Ebene und das von den entsprechenden Puncten in der andere gebildete System, also auch jede Linie der einen und die Linie der anderen, welche die den Puncten der ersten Linie entsprechenden Puncte verbindet, einander kreisverwandt heissen* (Möbius 1855, pag. 532, trad. it. nostra).

4) mette in luce il parallelo con la proiezione stereografica e quindi, in prospettiva, con l'idea di sfera di Riemann;

5) giustifica l'uso inconscio del postulato di continuità[129];

6) ritrova la tipica relazione tra due punti P e P' corrispondenti $OP \cdot OP' = r^2$, in cui O e *r* sono rispettivamente centro e raggio del cerchio rispetto al quale si effettua l'inversione[130].

Anche in questo lavoro Möbius torna sul concetto di quaternioni. Così come aveva fatto nel 1853a, egli chiama *quaternione* una delle *2n-6* quantità date dai *2n-6* biangoli di un sistema di *n* punti A, B, C, … che in un piano corrispondono in modo circolare (cioè sono gli inversi) ad altri *n* punti A', B', C', …; infatti fissati arbitrariamente tre punti A', B', C' i successivi n-3 punti si ottengono dai valori dei due biangoli definiti per ciascuno di essi nel modo seguente: per D' i biangoli ABCD e ACBD, per E' i biangoli ABCE e ACBE, ecc. Così:

> *Se si costruisce il sistema affine-circolare con questi 2n-6 biangoli, allora si trova immediatamente tutti i restanti biangoli e tutti i birapporti del sistema originario, mentre queste grandezze in entrambi i sistemi hanno lo stesso valore. Se si chiamano biangoli e birapporti, trattati come grandezze, che attraverso quattro punti vengono determinati, sotto il comune nome di Quaternioni, allora devono essere rappresentabili da ogni 2n-6 biangoli tutti gli altri quaternioni del sistema. …*
> *Attraverso un sistema di n punti in un piano, se qualsiasi 2n-6 dai quaternioni che si formano a partire da questi sono indipendenti da quelli dell'altro, possono essere trovati tutti gli altri quaternioni* (Möbius 1855, §39 alla fine)[131] .

---

[129] (Möbius 1855, §5 alla fine).

[130] (Möbius 1855, §8c).

[131] *Hat man aber mit diesen 2n-6 Doppelwinkeln das kreisverwandte System construirt, so hat man damit zugleich alle übrigen Doppelwinkel und alle Doppelverhältnisse des ursprünglichen Systems gefunden, indem diese Grössen in beiden Systemen gleiche Werthe haben. Wenn man daher Doppelwinkel und Doppelverhältnisse, als Grössen, deren jede durch vier Puncte bestimmte wird, unter dem gemeinsamen Namen Quaternionen begreifen, so müssen von jeden 2n-6 Doppelwinkeln alle übrigen Quaternionen des Systems als Functionen darstellbar sein. …*

Möbius si serve dei quaternioni, da lui stesso definiti come i valori dei corrispondenti birapporti di 4 punti, per distendere un sistema di numeri sul cerchio. Il fatto di aver chiamato l'insieme di tali 4 punti quaternioni non ha nulla a che vedere con i quaternioni di Hamilton[132]: non si va oltre la pura omonimia. Invece questi ultimi sembrano avere più relazioni con le tetradi (*Würfe*) che von Staudt definisce nel secondo quaderno dei *Beiträge*.

In definitiva, nel 1855 Möbius anticipa e fonda nozioni che si sarebbero sviluppate in anni seguenti (per esempio a opera di Cremona, Segre e ancor dopo di Pieri[133]), fornisce una prima teoria completa delle trasformazioni conformi e la connette all'idea di proiezione, e, da ultimo ma ugualmente importante, anticipa in parte il programma di Erlangen di Klein di quasi vent'anni, ponendo l'idea di trasformazione al centro della sua teoria. Egli tra l'altro fu il primo a ragionare sulle prime trasformazioni quadratiche nella storia, anticipando il pensiero teoretico sui gruppi in geometria, senza il quali forse lo scritto di Klein del 1872 si sarebbe limitato al gruppo delle trasformazioni proiettive e ai suoi sottogruppi, stando a quanto afferma Klein nell'ultima redazione datata 1921 del suo Programma:

> *….rimando ancora volentieri, mentre concludo questa ristampa del Programma di Erlangen, ai lavori di Möbius (che io stesso ho compreso nella loro interezza dopo che ho potuto collaborare negli anni 1885-87 all'edizione generale delle opere presso la Società delle Scienze di Sassonia). Möbius non aveva ancora conosciuto il concetto generale di gruppo, né molte delle trasformazioni geometriche che sono state prese in considerazione per illustrare il Programma di Erlangen ma aveva orientato, spinto da un istinto sicuro, i suoi successivi lavori geometrici verso l'idea di fondo del Programma. Già nel paragrafo centrale del Calcolo Baricentrico (1827), Möbius classificava i "compiti geometrici" secondo la "parentela" delle "uguaglianze" (congruenze), "similitudini",*

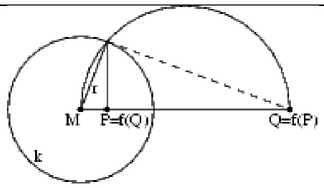
Bei einem Systeme von n Puncten in einer Ebene können demnach, wenn von den durch sie gebildeten Quaternionen irgend 2n-6 von einander unabhängige gegeben sind, alle übrigen Quaternionen gefunden werden (Möbius 1855, §39 alla fine, trad. it. nostra).

[132] Tant'è vero che Möbius non cita mai Hamilton, né in (Möbius 1853a) né in (Möbius 1855).

[133] Si veda qui il capitolo 4.

"affinità" e "collineazioni". Dal 1853, inizia a parlare di "affinità circolari" (cioè di geometria dei raggi reciproci del piano). Già prima (1849), si era occupato di simmetria dei cristalli. Nel 1863, all'età di 73 anni, tratta le "affinità elementari" (cioè quel campo della geometria, che oggi chiamiamo Analysis situs) (Klein 1921, ultima pagina)[134].

Infine mi preme concludere che in quel periodo molti matematici erano affascinati da cosa succedeva ai concetti matematici se dal campo reale si passava a quello complesso. E Möbius non fece altro che chiarire come si comportava un'applicazione considerata sulla retta complessa, o in altre parole quale applicazione geometrica del piano in sé lascia invariato il birapporto complesso di quattro punti, e questa era appunto la sua affinità circolare (*Kreisverwandtschaft*).

	Inversione circolare

Inoltre, abbiamo già visto che il piano inversivo reale è giustamente detto di Möbius.

[134] Vedi anche (Klein 1998, p. 92).

§3.4 von Staudt

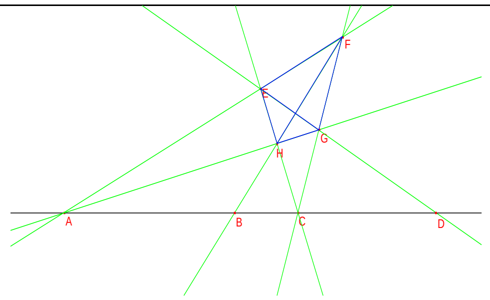
Nel 1835 veniva chiamato all'Università di Erlangen, dove nel 1822 si era laureato, come professore ordinario Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867), e lì rimase fino al termine della sua vita. Formatosi all'Università di Göttingen con Gauss, la cui influenza traspare nei suoi primi lavori di natura analitica, si dedicò ben presto allo studio della geometria proiettiva. Suggestive furono le letture del *Traité des propriétés projectives des figures* di Poncelet, del *Barycentrische Calcul* di Möbius e del *Systematischer Entwicklung der Abhangigkeit geometrischer Gestalten voneinander* di Steiner, rispettivamente del 1822, del 1827 e del 1832.

Karl Georg Christian von Staudt

Convinto che la geometria proiettiva mancasse di basi solide e rigorose e che si dovesse tagliare definitivamente il cordone che univa geometria metrica e geometria descrittiva, rendendo quest'ultima indipendente dall'altra e dal concetto di misura, nel 1847 pubblicò il testo *Geometrie der Lage*[135], per il quale verrà in seguito ricordato, forse con qualche esagerazione, come l'Euclide moderno. Con rigore e chiarezza von Staudt riuscì a riunire le ricerche dei suoi predecessori, e partendo dalle più semplici nozioni di geometria elementare ritrovò e stabilì tutti i concetti e le principali teorie geometriche, non senza note di originalità. Infatti esse traspaiono soprattutto nella definizione e nella trattazione delle proiettività tra forme di 1ª, 2ª, e 3ª specie, in cui risulta massiccia l'applicazione dei gruppi armonici e del birapporto (*Wurf*), e nella assegnazione di coordinate (razionali) ai punti di una retta attraverso l'uso del quadrilatero completo[136], concetto preso in prestito dall'opera di Möbius ma che von Staudt rende cardine della teoria descrittiva rendendo la geometria pura e senza contaminazioni da parte

[135] (von Staudt 1847).

[136] Si veda (Möbius 1827, p. 237) per la definizione di quadrato fondamentale; e (von Staudt 1847, ed. 1889 pag. 36 n. 93) per la definizione di forma armonica tramite quadrangolo completo.

EFGH è il quadrilatero fondamentale o completo, i cui lati individuano i punti A, B, C e D che formano una quaterna armonica (cioè un birapporto di valore -1).	

della geometria metrica. All'opera di von Staudt non mancarono certo delle critiche, soprattutto in relazione dell'uso implicito del postulato delle parallele e nella assenza di una formulazione assiomatica esplicita della teoria esposta[137].

Ma malgrado ciò il testo del 1847 rappresentava il primo tassello di una opera di ancor più ampio respiro, i *Beiträge zur Geometrie der Lage* che vide le stampe a Nürnberg in tre fascicoli nel 1856, 1857 e 1860[138]. I concetti su cui si fonda l'intera opera sono quello di coppia immaginaria di punti e di proiettività sul campo complesso (successivamente detta antiproiettività). Già alla fine della *Geometrie der Lage* von Staudt aveva introdotto i termini di punti immaginari e coniche immaginarie. Ma tali concetti restano poco più che dei termini isolati alla fine dell'opera e che servono all'autore per "*abbreviare certi enunciati relativi a coniche, quadriche, ecc.*"[139]: nel 1847, molto probabilmente, egli non aveva ancora gli strumenti adeguati per sviluppare una teoria degli enti immaginari che rispecchiasse quei canoni di rigore e chiarezza, propri della *Geometrie der Lage.*

Scopo principale dei *Beiträge zur G. d. L.* è quello di estendere la geometria di posizione agli elementi immaginari. Si ottiene ciò partendo dai concetti basilari di polo-polare, involuzione e forme involutorie. Infatti la polare p di un punto P di una qualunque retta r del piano interseca quest'ultima in un punto P', la cui polare p', a sua volta, interseca la r in P: si viene a creare così molto banalmente un'involuzione che coinvolge tutti i punti di r (P→P'→P). Ora, poiché una conica C è il luogo geometrico dei punti che giacciono sulle loro polari (che sono esattamente le tangenti alla conica in quel punto), i due punti di $C \cap r$ godranno di quest'ultima proprietà (giacere sulla

[137] Si veda gli articoli pubblicati da Klein, Lüroth e Zeuthen attorno al 1872-74.

[138] (von Staudt 1856-57-60).

[139] Cfr. (von Staudt 1889, pag. XIII).

propria polare) e saranno i punti fondamentali dell'involuzione definita da C su *r*. In tale situazione P=P'. Così, la coppia di punti definita da C$\cap$*r* sarà reale o immaginaria a seconda che r interseca C in due punti distinti o non la interseca affatto (se r tange C, i due punti sono coincidenti, l'elemento immaginario coincide col suo coniugato, e quindi si è nel primo caso). A questo punto[140], von Staudt reinterpreta il fatto di essere T$\in$C reale o immaginario con l'involuzione indotta dalla polarità di C su una qualsiasi retta r per T (le polari di tutti i punti di r passano tutte per uno stesso punto R (la cui polare è r stessa), quindi ottengo un fascio di rette per R, che è una forma fondamentale di prima specie[141]).

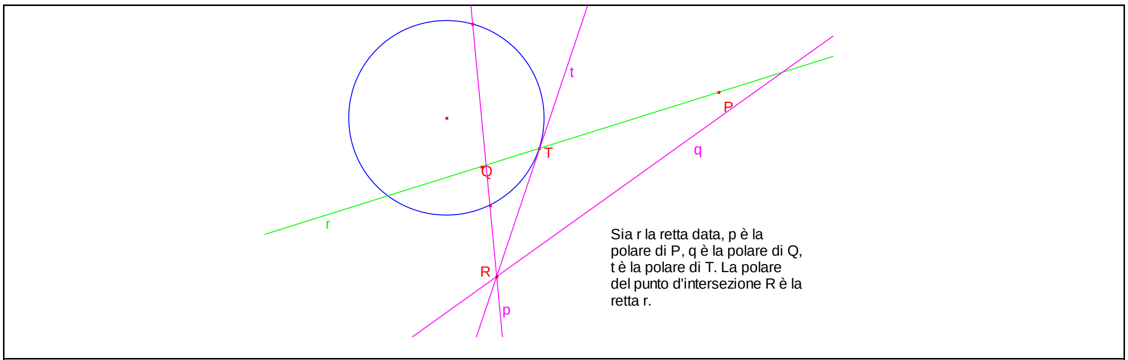


Fig.6

Se la retta r congiunge due punti immaginari P e $\overline{P}$, a ciascuna di questi due punti viene associata un'involuzione (orientata) di r che ha P e $\overline{P}$ come punti fondamentali. Ora, se si parla in termini di coordinate, al punto immaginario P (in $P^2(C)$) vengono associate le coordinate omogenee complesse $(\zeta,\eta,\tau)\in C^3$-{(0,0,0} con $\zeta=\zeta_1+i\zeta_2$, $\eta=\eta_1+i\eta_2$, $\tau=\tau_1+i\tau_2$, le quali individuano due punti reali P_1 e P_2, con coordinate

[140] Cfr. (Rowe 1997, pag. 197).

[141] Von Staudt, riprendendo la classificazione di Steiner, e come lui successivamente anche Corrado Segre, faceva uso delle cosiddette "*forme fondamentali*". Vediamo nel dettaglio cosa sono:
1) la punteggiata: totalità dei punti di una retta (detta sostegno);
2) il fascio di piani: totalità dei piani passanti per una retta;
3) il piano punteggiato: totalità dei punti appartenenti a un piano;
4) la stella di piani: totalità dei piani passanti per un punto;
5) il piano rigato: totalità delle rette appartenenti a un piano;
6) la stella di rette: totalità delle rette passanti per un punto;
7) lo spazio punteggiato: totalità dei punti;
8) lo spazio dei piani: totalità dei piani;
9) il fascio di rette: totalità delle rette passanti per un punto e contenute in un piano;
Sono forme di <u>prima specie</u> la punteggiata e i fasci, di <u>seconda specie</u> i piani e le stelle, di <u>terza specie</u> lo spazio punteggiato e lo spazio di piani.

omogenee rispettivamente (ζ_1,η_1,τ_1) e (ζ_2,η_2,τ_2). Se P1 fosse uguale a P2, allora, dividendo per 1+i si avrebbe che la terna (ζ,η,τ) sarebbe equivalente a una terna reale, contro l'ipotesi. Quindi $P_1 \neq P_2$ ed essi determinano una retta reale $\overline{P_1}\overline{P_2}$ che passa anche per $\overline{P}$, cioè la retta r. Quindi sulla retta r resta associata un'involuzione (orientata) I che ha come punti fondamentali proprio P e $\overline{P}$. Ma poiché in geometria proiettiva un'involuzione di una retta reale in un piano viene associata dualmente a un fascio di rette passanti per un punto reale (come precedentemente visto con la relazione polo-polare), resta associata a ogni punto P di $P^2(R)$ una retta. Generalizzando nel campo complesso, a ogni coppia di punti complessi coniugati resta associata l'involuzione (su una retta reale) che ha essi come punti fondamentali.

Quanto detto fin'ora, avviene nel primo dei tre fascicoli dei *Beiträge zur Geometrie der Lage.* Prima di passare al secondo dei detti quaderni, resta da precisare esattamente come von Staudt definisce un elemento immaginario. Risiede proprio nella seguente definizione il contributo di originalità dello *scopritore della teoria geometrica degl'immaginari*[142]:

> *Se in una forma involutoria semplice $AA_1.BB_1$….,che non ha elementi doppi, si stabilisce un verso ABA_1, allora si avrà un elemento immaginario ABA_1B_1 di 1^a^ specie, oppure una retta immaginaria di 1^a^ specie, oppure un piano immaginario di 1^a^ specie, a seconda che la forma semplice sia una forma punteggiata, o un fascio di rette o un fascio di piani. Se nella stessa forma involutoria si considera in verso opposto, si ottiene l'elemento immaginario A1BAB1, che è coniugato al precedente. Gli elementi associati al secondo concetto [coniugati] vengono chiamati allo scopo, poiché essi spesso rappresentano la posizione di veri (reali) elementi* (von Staudt 1956, I. Heft, pag. 76, n. 116) .[143]

---

[142] Così venne definito von Staudt da Segre nella lunga prefazione alla traduzione italiana della *Geometrie der Lage* (cfr. (von Staudt 1889, pag. XVII, nota (*))).

[143] *116. Wenn man mit einem involutorischen einförmigen Gebilde, A A_1 .B B1 ..., welches keine Ordnungselemente hat, einen bestimmten in demselben enthaltenen Sinn A B A_1 verbindet, so hat man ein imaginäres Element ABA_1B_1 I. Art, nämlich einen imaginären Punkt, oder eine imaginäre Gerade I. Art oder eine imaginäre Ebene, je nachdem das einförmige Gebilde ein Punktgebilde oder ein*

Quindi per von Staudt parlare di elemento immaginario o di forma semplice (cioè di un sistema di elementi geometrici della specie, punti, rette o piani) involutoria priva di elementi doppi reali (oggi diremmo involuzione ellittica) è la stessa cosa[144]. Ancor meglio si può dire che tale forma è la *rappresentazione* (geometrica) del punto immaginario come coppia di elementi coniugati, così come spesso è solito puntualizzare lo stesso von Staudt all'interno del §8, quello dedicato agli elementi immaginari[145]. Infatti viene esplicitamente detto:

> *Osservazione. Fino a ora venne sempre supposto che se si parlava di un elemento immaginario di 1ª specie, lo stesso era rappresentato attraverso quattro elementi reali di una forma semplice.*
> *177. Ogni elemento immaginario contenuto in una forma semplice reale, può venire rappresentato da 4 reali elementi della forma, così che …. siano proiettivi a una data tetrade* [Wurf] (von Staudt 1956, I. Heft, pag. 115-116)[146].

Si precisa che von Staudt considera le forme elementari (o semplici) di due ordini: appartengono al primo il sistema di punti di una retta, il fascio piano di rette per un punto e il fascio di piani per una retta; sono forme semplici del secondo ordine, invece, il sistema di punti di una conica, il fascio di rette tangenti a una conica, il fascio di rette generatrici di un cono del secondo ordine, il fascio di piani tangenti a un cono del secondo ordine e il fascio di rette generatrici di un'iperboloide a una falda.

Anche le coniche e le quadriche immaginarie vengono definite per la prima volta come luogo dei punti (immaginari) autoconiugati di una polarità uniforme. E due

---

Strahlenbüschel oder ein Ebenenbüschel ist. Verbindet man mit demselben involutorischen Gebilde den entgegengesetzten Sinn, so erhält man das imaginäre Element A_1AB_1 welches dem erstem conjungirt heissen soll. Elemente werden aber dergleichen Verbindungen zweier Begriffe nur aus dem Grunde genannt, weil sie häufig die Stelle von wirklichen (reellen) Elementen vertreten. (von Staudt 1956, I. Heft, pag. 76, n. 116, trad. it. nostra).

[144] In realtà un elemento immaginario è la coppia di elementi doppi della forma, che no avendoli reali si dice possederli immaginari. Quindi elemento immaginario identificato da una coppia, che individua una ben determinata involuzione su una forma.

[145] Si cfr. (von Staudt 1956, I. Heft, §8, pag. 76).

[146] *Anm. Bisher wurde, wenn von einem imaginären Elemente I. Art die Rede war, immer vorausgesetzt, dass dasselbe durch vier reelle Elemente eines einförmigen Gebildes dargestellt sei.*

177. *Jedes imaginäre Element, welches in einem reellen Elementargebilde enthalten ist, kann durch vier reelle Elemente dieses Gebildes dargestellt werden, so dass überdies die Darstellung von einem gegebenen reellen Elemente des Gebildes ausgeht und zu einem gegebenen ordentlichen Wurfe projektivisch ist* (von Staudt 1956, I. Heft, pag. 115, trad. it. nostra).

polarità nel piano portano alle trasformazioni quadratiche o a quelle che noi oggi chiameremmo trasformazioni cremoniane (forme bilineari simmetriche).

Il secondo fascicolo (datato 1857) dei *Beiträge* è tutto incentrato sulla nozione di catena (*Kette*) definita in una forma semplice dall'insieme di tutti i punti della forma che insieme a tre dati della forma stessa hanno birapporto reale. Due catene della stessa forma differiscono per tre elementi fissi detti fondamentali per la catena. Supposto che i tre punti P, Q, R appartengono a una stessa retta immaginaria di 2ª specie[147], se p, q, r sono i sostegni reali dei tre punti[148], allora la catena è formata da tutti i punti della retta u, i sostegni reali della quale (cioè dei suoi punti) appartengono alla schiera rigata pqr.

In altre parole, von Staudt considera due specie di rette immaginarie: quelle della prima specie sono le rette doppie di un fascio di rette involutorie del primo ordine; quelle di seconda specie sono le rette doppie di un sistema involutorio di rette generatrici di un iperboloide.

Per maggior chiarezza possiamo dire che i punti immaginari di una retta sono punti reali del piano di Argand-Gauss e le catene sono in esse rappresentate da rette o circoli. Ma von Staudt forse non riuscì a mettere insieme le sue catene e le trasformazioni in esse con la geometria dei cerchi di Möbius, e continuò a trattare le catene come "nuovi" enti geometrici.

Von Staudt si serve di tutto questo apparato di definizioni ed enti per stabilire le proprietà degli enti immaginari di forme reali e quelle di forme immaginarie contenute in sistemi reali, ma, malgrado lo strumento privilegiato sia la corrispondenza proiettiva tra figure, egli non ricava proprietà di figure reali (magari difficili e astruse da ottenere

---

[147] *Imaginäre Gerade II. Art*, cfr. (von Staudt 1956, I. Heft, pag. 77, n. 117)): è la retta immaginaria in cui si è fissato un verso e tale che le 4 rette reali (sostegni di ciascun punto immaginario che definisce la retta immaginaria di 2ª specie) si separino a due a due all'interno della stessa schiera rigata. C'è una sostanziale differenza tra retta immaginaria di 1ª specie e di 2ª specie: ogni retta immaginarie di 1ª specie giace in un piano reale e passa per un punto reale, mentre una retta immaginaria di 2ª specie né giace in un piano reale né passa per un punto reale (von Staudt 1956, I. Heft, pag. 78: *Jede imaginäre Gerade I. Art liegt in einer reellen Ebene und geht durch einen reellen Punkt, während eine imaginäre Gerade II. Art weder in einer reellen Ebene liegt noch durch einen reellen Punkt geht.*).

In altre parole, la retta immaginaria di 1ª specie si ottiene considerando coppie costituite ciascuna di un'involuzione ellittica reale presa insieme a uno dei due versi della forma involutoria; la retta immaginaria di 2ª specie è un'involuzione rigata ellittica spaziale presa con una dei due sensi della congruenza lineare dei suoi raggi doppi.

[148] Per sostegno reale di un punto immaginario si intende la retta reale sulla quale il punto immaginario giace (cfr. (von Staudt 1856, I. Heft, pag. 78, n. 119)).

per via reale) dalle corrispondenti immaginarie, così come sarebbe piaciuto per esempio a Chasles o a Poncelet applicando un analogo del principio di continuità[149].

Da quanto descritto sopra, si capisce che l'opera di von Staudt si può considerare come il primo trattato sistematico di geometria immaginaria, in cui le proprietà geometriche metriche e descrittive risultano ancora una volta separate e indipendenti le une dalle altre. Malgrado ciò, per esempio, un matematico del calibro di Luigi Cremona, da un lato, non è tanto d'accordo con questa netta separazione, ritenendo che è talmente *sconveniente e svantaggioso il volerne fare un sì completo divorzio* che *il sig. Staudt avrebbe fatto un lavoro meno utile che curioso* (Cremona 1854, pag. 125), dall'altro esalta le doti geometriche dell'autore tedesco, esorta i giovani studiosi alla sua lettura, e decanta lo spirito moderno e di generalità che permea l'opera (ibidem):

> *Collo stesso spirito di generalità, l'autore espone i principj della geometria immaginaria – ardita concezione, che si può dir sorta dalla scuola di Monge, e che, opportunamente applicata, è un potente mezzo d'invenzione* (ibidem, pag. 126).

E ciò è proprio quello che fece Corrado Segre, che partendo proprio dalla definizione data da von Staudt di elemento immaginario, porta la geometria proiettiva complessa ad alti livelli di studio, forse poco compresi o forse troppo profondi da non essere afferrati immediatamente dalla maggior parte del mondo scientifico dell'epoca.

[149] Cfr. (Cremona 1854, pag.126).

CAPITOLO 4

La Geometria Proiettiva Complessa in Italia

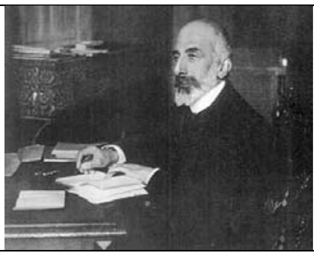
§4.1 Introduzione

All'inizio della seconda metà del diciannovesimo secolo, la situazione riguardante la geometria proiettiva complessa era la seguente.

In primo luogo, i numeri immaginari, e i complessi in generale, erano ormai entrati a far parte del sapere scientifico ed erano diventati strumenti d'uso del ricercatore; anzi, con le ricerche di Hamilton, Weierstrass, Dedekind, Kronecker,… dei vent'anni precedenti, anche i quaternioni e in generale i campi con più unità immaginarie erano diventati usuali strumenti in uso del matematico.

In secondo luogo, ma non meno importante, la geometria proiettiva si era ormai definitivamente affermata. Da Chasles e Poncelet a von Staudt, dalle ricerche di geometria non euclidea al programma di Erlangen di Felix Klein, rimaneva poco da fare in campo reale.

In campo complesso invece le cose non stavano così. Se è vero che von Staudt coi suoi *Beiträge* aveva fatto molto, mancava ancora l'anello di congiunzione tra la teoria delle affinità circolari (*Kreisverwandtschaft*) di Möbius e le ricerche sulle catene e le loro trasformazioni di von Staudt. Tale argomento stava per venire affrontato da Corrado Segre (1863-1924), che, all'epoca dei fatti poco più che ventenne, partendo proprio dalle ricerche di questi due suoi predecessori, pose le basi per uno studio tutto nuovo riguardante sia il gruppo di trasformazioni della geometria degli elementi immaginari (facendo propria la lezione di Klein del 1872) che le rappresentazioni reali delle forme complesse.



Corrado Segre

Così come esordisce L. W. Dowling (1867-1929) già nel 1925, anche noi possiamo affermare: *Segre fece molto per la geometria in più sensi*[150]. Qui vogliamo esaminare questa affermazione attraverso tre sue memorie: la prima in cui egli rimodula

[150] *Segre did much for geometry in several directions* (Dowling 1925, pag. 490).

la definizione di elemento immaginario data da von Staudt e la tiene in serbo per una più agevole applicazione, la seconda in cui il matematico di Torino fonda la geometria proiettiva complessa a partire dal suo gruppo fondamentale (quello esteso alle antiproiettività), e il terzo, ultimo in senso cronologico ma non meno importante dei due precedenti, in cui Segre non solo dà una rappresentazione reale degli enti che aveva introdotto e studiato nel secondo dei tre lavori, ma apre a nuove geometrie ottenute a partire dai nuovi sistemi numerici, precisamente i sistemi ipercomplessi (algebre di dimensione maggiore di due) che aveva definito.

> *Ciò mostra una sbalorditiva ricchezza di dettagli –una ricchezza oltre i sogni dei geometri più avari. … Ma dubito che tutti i grandi spiriti che crearono e perfezionarono l'algebra dei quanti hanno mai sognato che i prosaici simboli con cui essi hanno lavorato potevano nascondere una tale ricchezza di forme geometriche scoperte lungo le linee suggerite da Segre* (Dowling 1925, pagg. 490-491)[151].

Importante è sottolineare che Segre inizia la sua trattazione secondo uno schema che poi verrà ripreso, quaranta anni dopo, sia da Coolidge che da Cartan[152], e cioè da un'analisi della retta proiettiva complessa che per la prima volta viene studiata come un oggetto autonomo e indipendente dall'ordinaria geometria reale.

---

[151] *Thus is revealed an astonishing wealth of detail –a wealth beyond the dreams of the most avaricious geometer. …but it is doubtful if any of the great spirits who created and perfected the algebra of quantics ever dreamed that the prosaic symbols with which they wrought could hide such a wealth of geometric forms as has been uncovered along the lines suggested by Segre* (Dowling 1925, pagg. 490-491, trad. it. nostra).

[152] Si veda il Capitolo 7 di questa tesi.

§4.2 Segre 1888

Il primo articolo di Segre cui ci riferiremo fu scritto nel 1886 e pubblicato due anni dopo è (Segre 1888). Esso precede una serie di note pubblicate da Segre negli *Atti della Regia Accademia delle Scienze di Torino* che trattano del gruppo di trasformazioni della geometria proiettiva complessa. In (Segre 1888) l'autore si propone di approfondire un tema che gli stava particolarmente caro per affinità di pensiero: dare un *seguito* all'opera di von Staudt.

Segre, sottolineando una carenza di trattazione nella letteratura matematica che precede la sua memoria, introduce alla teoria delle coppie di elementi immaginari riprendendoli direttamente dai *Beiträge zur Geometrie der Lage*, scritti, come visto, da G.K.C. von Staudt e pubblicati a Norimberga tra il 1856 e il 1860. In essi viene esposta la teoria degli elementi immaginari connessa ai metodi puramente sintetici della *Geometrie der Lage,* opera che egli aveva pubblicato nel 1847[153] . Segre nota che i matematici, pur avendo accolto favorevolmente le novità introdotte dai ragionamenti grafico – sintetici introdotti da von Staudt[154], non si erano accorti (e cita testualmente Reye, Thomae, Steiner-Schroeter, Cremona e Hankel) dei vantaggi che si potevano derivare in eleganza e in generalità da un uso più appropriato della teoria suggerita proprio da von Staudt nei *Beiträge* e dalla metodologia di cui aveva fatto uso.

Infatti fino agli inizi degli anni ottanta del XIX secolo, malgrado i lavori di von Staudt avessero avuto una grande eco in tutta Europa, gli elementi immaginari non erano ancora visti come dei veri e propri enti geometrici attorno ai quali costruire tutta una struttura teorica a se stante; essi rimanevano soltanto *ancore di salvezza* nelle situazioni di disagio scientifico o costituivano un adeguato complemento all'esigenza tutta matematica di completezza nella trattazione di uno specifico argomento.

Naturalmente un attento lettore di von Staudt come Segre non poteva non accorgersi che gli elementi immaginari potevano essere studiati come "protagonisti di una loro teoria" cogliendo attentamente la particolare definizione che von Staudt ne aveva dato. Ricordiamo che per von Staudt l'elemento immaginario non è soltanto un

[153] La traduzione in italiano ad opera di Pieri, venne incoraggiata proprio da Segre autore della prefazione all'edizione italiana pubblicata nel 1889.

[154] Si ricordi che Staudt, a sua volta, si era riagganciato ai lavori di Möbius e Steiner.

elemento doppio di una proiettività tra forme di prima specie sovrapposte (come avviene per esempio in Reye), ma è la stessa involuzione ellittica (cioè un'involuzione priva di elementi uniti reali)[155] su una forma di prima specie (la retta punteggiata, il fascio di rette o il fascio di piano). In più, stabilendo i due versi di tale involuzione (che poi risulta essere il "verso" della forma), von Staudt indicava che si potevano individuare i due diversi (coniugati) elementi immaginari. Lo stesso tipo di ragionamento può essere ripetuto per esempio per un punto all'infinito quando esso si intende non come il punto d'intersezione di due rette parallele ma la *direzione* stessa di una retta.

Segre stesso si meraviglia dell'eleganza e della semplicità di tale intuizione: riesce immediato mettere in relazione tali coppie di elementi immaginari con le coppie dei complessi coniugati dell'analisi. Si deve sottolineare però che von Staudt ha sempre considerato l'elemento immaginario non come un unico elemento-coppia; von Staudt parlava di loro separazione, mentre per Segre era del tutto innaturale pensare la metà di una coppia separata dall'altra: forse da qui scaturisce una delle possibili complicazioni insite nell'opera di von Staudt che la rendeva astrusa a molti matematici. Lo stesso ragionamento veniva seguito già vent'anni prima da Henry John Stephen Smith (1826-1883), che in un articolo del 1869[156] in

H. J. Stephen Smith

cui però si limitava alla geometria piana, pur attribuendo a von Staudt il merito di aver definito in modo preciso l'elemento immaginario, riconosceva che si poteva studiare altresì la loro geometria anche se ciascun elemento immaginario non si isolava dal suo coniugato: in altre parole, studiare la coppia (che chiama diade) e non il singolo elemento per evitare complicazioni alla teoria[157].

[155] Si pensi all'involuzione ortogonale in un fascio proprio di rette: ogni retta corrisponde alla sua perpendicolare, e quindi non esistono rette proprie unite.

[156] Si veda (Smith 1869).

[157] Cfr. (Smith 1869, pag. 114).

Nella memoria che andremo a esaminare, Segre dunque riprende la definizione di von Staudt di coppie di elementi immaginari, e mostra che, se introdurre elementi provenienti da coppie separate complica notevolmente la teoria, lo studio delle involuzioni ellittiche (così vengono chiamate le coppie secondo la definizione di von Staudt), prescindendo da ogni loro separazione, porta a

> *una teoria rigorosa e semplicissima delle coppie di elementi immaginari, tale che si può esporre in un qualsiasi corso di geometria proiettiva sintetica* (Segre 1888, pag. 5).

Alla base del suo metodo sta la trasformabilità di proiettività con altre proiettività, prima fra tutte la permutabilità cioè la trasformabilità di una proiettività in se stessa tramite un'altra proiettività[158]. Ciò permise a Segre di evitare inutili e fuorvianti ragionamenti di tipo metrico o costruzioni particolari su coniche[159].

Segre evidenzia anche il fine delle sue scelte: dare un seguito alla teoria proposta da von Staudt (e non sostituirla a questa) riprendendo i vari concetti secondo un metodo nuovo che trovava ampia applicazione anche nella didattica accademica. Infatti, se i risultati ottenuti da Segre in questa sua prima memoria sono tutti noti, nuovo invece è il metodo usato nel trarre gli stessi, che si riallaccia, come detto, direttamente ai metodi grafici di von Staudt.

L'impronta di generalità voluta da Segre rende questa sua memoria ancora più completa dal punto di vista concettuale. La validità delle proprietà delle coppie di elementi immaginari e le relazioni che intercorrono fra di esse e con le coppie di elementi reali devono continuare a valere "*anche se le coppie considerate sono tutte reali*" (Segre 1888, pag.7).

---

[158] È possibile trasformare una proiettività β in se stessa, se esiste un'altra proiettività β_1 tale che $\beta_1^{-1}\beta\beta_1=\beta$ o, il che implica, moltiplicando a sinistra per β_1 $\beta\beta_1=\beta_1\beta$, cioè la commutatività del prodotto (v. anche (Segre 1888, pag. 6 nota (*))). Tale proprietà viene detta da Segre permutabilità.

[159] Si deve notare, con Segre, che a tale risultato era arrivato con metodo diverso tre anni prima Hermann Wiener (1857 - 1939), in un lavoro che Segre conobbe solo dopo la stesura della sua memoria.

Si veda il Capitolo 5 per maggiori ragguagli sull'opera di Wiener.

§ 4.2.1 Contenuto della memoria (Segre 1888)

Una delle prime relazioni che vengono studiate da Corrado Segre riguarda l'armonicità di due coppie reali diverse; essa viene ricondotta alla permutabilità delle rispettive involuzioni (quindi, in questo caso, non ellittiche) di cui le coppie vengono ad essere elementi doppi.

Quella che per le coppie reali è una conseguenza dell'armonicità diviene, per coppie qualunque, la definizione che Segre dà di armonicità: *Due coppie distinte qualunque diconsi armoniche se le loro rispettive involuzioni sono permutabili* (Segre 1888, pag. 7). Si tratta di un modo di operare oggi divenuto comune, ma allora nuovo e interessante che conferma l'impressione di una forte propensione del matematico piemontese alla formalizzazione e all'astrazione.

Se si hanno due coppie armoniche, almeno una di esse deve essere reale; e per quanto detto prima, questo equivale ad affermare che due involuzioni entrambe ellittiche non permutano, cioè le coppie corrispondenti di punti doppi non sono armoniche.

Si può quindi trarre una proprietà caratteristica delle coppie di elementi coniugati in una involuzione di qualunque specie: Se si hanno due coppie, una reale e l'altra immaginaria, armoniche, si stabilisce che la coppia reale è una coppia di elementi coniugati nell'involuzione ellittica relativa alla coppia immaginaria. Naturalmente è evidente anche il viceversa, che altro non è che la definizione di coppia immaginaria di elementi coniugati di un'involuzione: una coppia immaginaria qualunque appartiene ad un'involuzione, ovvero è una coppia di elementi coniugati in questa, quando essa è armonica alla coppia degli elementi doppi dell'involuzione (cioè quando la relativa involuzione ellittica è permutabile con questa).

Da ciò segue che:

1) un'involuzione ellittica contiene solo coppie reali[160];

2) un'involuzione iperbolica contiene infinite coppie immaginarie;

3) "*vi è sempre una e una sola involuzione (o coppia di elementi) armonica a due involuzioni (o coppie) distinte date*" (ibidem, pag. 8).

---

[160] Poiché, si è visto, di due coppie armoniche almeno una deve essere reale.

Ribadendo sempre il suo intento di generalità e trattando coppie di elementi indipendentemente dal fatto che esse siano reali o immaginarie, Segre stabilisce anche che per coppia di elementi uniti di una proiettività si intende la coppia degli elementi doppi, reali (distinti o coincidenti) o immaginari, di una *involuzione unita I di una proiettività* β[161], intendendo per *I* quella proiettività in cui si corrispondono un elemento A di una forma di prima specie F e il coniugato armonico α rispetto ai due elementi che gli corrispondono in una proiettività β su F (cioè $\beta(A)$) e nella sua inversa β^{-1} (cioè $\beta^{-1}(A)$). Ecco che si può definire una coppia di elementi uniti di una qualunque proiettività come la coppia di elementi doppi, reali (distinti o coincidenti) oppure immaginari, della sua involuzione unita. Quest'ultima, *I*, verrà detta iperbolica, parabolica o ellittica a seconda che β abbia elementi uniti reali e distinti, o coincidenti o immaginari, proprio perché se *I* è iperbolica i suoi elementi doppi sono elementi uniti di β (e viceversa), mentre se *I* è parabolica β ha un solo elemento unito coincidente con l'elemento doppio di I (e viceversa); infine solo β non ha elementi uniti *I* è ellittica.

Bisogna notare che l'involuzione unita *I* aveva molta importanza nello studio delle proiettività già prima che Segre ne facesse menzione; infatti anche Wiener ne riconobbe l'importanza nel suo lavoro del 1885.

Adesso Segre ha tutti gli strumenti per poter affermare che si definisce

> *coppia di elementi uniti di una proiettività qualunque la coppia di elementi doppi, reali (e distinti o coincidenti) od immaginari della sua involuzione unita* (ibidem, pag. 10)[162]

e per dimostrare che le involuzioni armoniche all'involuzione unita *I* della proiettività β sono tutte e solo quelle che trasformano β nella sua inversa[163].

Si può adesso dimostrare la seguente proposizione fondamentale:

---

[161] Se β non è essa stessa un'involuzione, *I* è l'unica involuzione che permuta con β, cioè che viene trasformata in se stessa da β; in generale, la permutabilità di due proiettività viene a stabilirsi se queste hanno in comune la stessa involuzione unita.

[162] Quindi per elementi uniti immaginari si intende proprio un'involuzione unita.

[163] *Le involuzioni armoniche all'involuzione unita I della proiettività* β *sono tutte e solo quelle … che trasformano* β *nella sua inversa* (Segre 1888, pag. 11).

Una proiettività è individuata dalla sua coppia di elementi uniti, cioè dall'involuzione unita, e da due elementi corrispondenti" (ibidem, pag. 11).

Infatti, dati i due elementi corrispondenti A e A' e i loro coniugati α e α' nell'involuzione unita *I*, viene costruito l'elemento A_1 coniugato armonico di A' rispetto A ed α di modo che nella proiettività richiesta dovranno corrispondersi A_1 e A, A e A', α e α'. Viceversa, la proiettività individuata da queste tre coppie ha come involuzione unita quella in cui sono coniugati A e α (fermo restante la particolare costruzione di A_1), e i loro corrispondenti A' e α' nella proiettività stessa, cioè proprio *I*. Si deve notare che la doppia implicazione presente nell'enunciato di tale proposizione (vi si può leggere il teorema fondamentale di von Staudt) permette di affermare che sono infinite le proiettività aventi una data involuzione unita e che esse sono a due a due permutabili (cioè una inversa dell'altra) e che due proiettività sono permutabili se hanno in comune la stessa involuzione unita.

Segre estende il concetto di *gruppi proiettivi* anche al caso di gruppi contenenti coppie immaginarie e stabilisce che:

> *Data una proiettività qualunque β, se di un elemento variabile A sono A' e A_1 i corrispondenti in β e nella sua inversa e si costruisce l'elemento α tale che il gruppo $\alpha AA'A_1$ sia proiettivo ad un gruppo fisso, A ed α si corrisponderanno in una proiettività determinata permutabile con β; e cambiando il gruppo fisso si ottengono così, se β non è involutoria, tutte le proiettività permutabili con β* (ibidem, pag. 13).

Da ciò discende che si possono costruire *serie armonicamente proiettive* di elementi, reali o immaginari, costruite a partire da due qualunque elementi A e B di cui si considerano i coniugati armonici $A_1A_2A_3$…. e $B_1B_2B_3$…. rispetto alle coppie reali o immaginarie di una data involuzione e scrive usando una simbologia in voga in quel periodo: $AB_1B_2B_3\ldots \wedge BA_1A_2A_3\ldots$.

Segre sottolinea che tutti i teoremi finora esposti sulle involuzioni unite e sulle permutabilità di proiettività si possono anche dimostrare nel caso in cui la coppia di elementi uniti sia immaginaria. Infatti se si considerano fasci di rette o piani e si sostituisce alla proiettività β una rotazione (cioè un'uguaglianza indiretta), si può ripercorrere tutto il ragionamento fatto fino ad ora per le coppie di elementi, arrivando a definire le coppie di punti ciclici del piano come i punti doppi immaginari dell'involuzione circolare all'infinito[164] e le involuzioni armoniche all'involuzione unita come delle simmetrie.

Una volta esplicitate le caratteristiche generali di proiettività e involuzioni, Segre applica tutta la teoria appena sviluppata e relativa alle coppie di elementi immaginari, alla teoria grafica delle coniche, partendo dalla definizione rigorosa di loro coppie di punti e di tangenti immaginari. Importante è l'uso generale che se ne può fare se essi variano in conseguenza alla variazione degli enti che determinano la conica, per esempio due fasci proiettivi di rette del piano[165], e di una retta *r* che seca tali due fasci in due punteggiate proiettive tra loro, la cui coppia di punti uniti può essere reale (i punti d'intersezione effettivi tra la retta e la conica) o immaginari (se la retta non taglia la conica). Tale coppia di punti uniti immaginari è per Segre la *coppia immaginaria di punti di una conica*. Interessante è l'osservazione di Segre a questo proposito circa la mancanza di rigore con il quale si erano trattati fino allora gli immaginari in geometria:

> *è singolare che non si pensa mai di esser lecita la domanda, se al variare dei due fasci proiettivi generatori della serie dei punti (reali) della conica ed al variare per conseguenza delle due punteggiate proiettive su r non varierà la coppia degli elementi uniti immaginari di queste: in fatti che quella coppia non varia è evidente solo quando r taglia realmente la conica, ma non più se la coppia stessa è immaginaria. Senza riflettere a tale obbiezione si introduce poi il fatto non dimostrato che quella coppia di elementi uniti non varia nelle dimostrazioni di altri teoremi, come quello di Desargues. Così fa, ad esempio, lo Chasles* (Segre 1888, pag.14).

Così Segre propone egregiamente una soluzione a tale questione dando

[164] Cioè l'involuzione unita che altro non è che una rotazione pari a un angolo retto. Essa è l'involuzione unita comune a tutte le rotazioni.

[165] È questa la definizione di curva di 2° ordine che usualmente si trovava nei trattati di geometria proiettiva. Segre invita, comunque, a considerare la definizione che ne da invece von Staudt: il luogo dei punti che stanno sulle loro polari rispetto ad un sistema polare.

> *una nuova dimostrazione, più completa delle ordinarie (in quanto tiene conto delle coppie di punti imaginari), del fatto che una curva di 2° ordine si può generare con fasci proiettivi scegliendo ad arbitrio su essa i centri di questi* (ibidem, pagg.14-15),

da cui

> *il teorema di Desargues in tutta la sua generalità segue ora immediatamente nel modo noto* (ibidem, pag.15).

È dunque ancora più chiaro l'intento di Segre: la generalità e il rigore vengono perseguiti in nome della completezza teorica e viene determinata mostrando come dalla semplice definizione di coppie di elementi, indipendentemente dal fatto che siano reali o immaginari, si può costruire e ottenere tutta la geometria, senza trascurare, ovviamente, il teorema di Desargues, l'esagramma di Pascal e le sue proprietà (relative alla teoria delle serie proiettive di punti su una conica), il teorema stesso di Pascal e l'esistenza del punto di Steiner e di quello di Kirkman, il primo dei quali è il punto in cui concorrono le tre rette di Pascal, mentre il secondo è quel punto che corrisponde all'involuzione armonica comune alle tre proiettività individuate dalle tre rette di Pascal (le cui dimostrazioni vengono date a pagg. 16 e 17).

L'involuzione di *punti coniugati* rispetto alla conica su una retta *r* viene definita come l'involuzione (unita) avente per elementi doppi la coppia di punti intersezione di r con la conica stessa. Da ciò deriva

> *immediatamente il teorema fondamentale della teoria della polarità: il luogo dei punti coniugati di un punto P rispetto alla conica è una retta. …* e *le proposizioni e definizioni duali di coppia di rette immaginarie di un inviluppo di 2^{a} classe, di rette coniugate rispetto a questo, ecc.* (ibidem, pag. 16).

Naturalmente, un punto molto importante rappresenta l'introduzione di coniche immaginarie *mediante sistemi polari in cui non vi sia alcun punto (reale) posto sulla sua polare*. E tra i vantaggi di un approccio più generale sta quello di poter introdurre con estremo rigore il cerchio immaginario all'infinito nelle questioni metriche[166] e definire la coppia di punti immaginari di una conica immaginaria come

> *la coppia dei punti doppi dell'involuzione di punti coniugati rispetto al relativo sistema polare posto su una retta (e dualmente)* (ibidem, pag.18);

viceversa, dalla teoria dei sistemi polari discenderà quella delle coniche immaginarie.

Introducendo nei fasci di coniche anche quelle immaginarie, si arriva agevolmente a dimostrare il teorema di Sturm:

> *tutte le coniche, reali o imaginarie, passanti per due coppie fisse, reali o imaginarie, di punti (...) tagliano una retta qualunque r nelle coppie, reali o imaginarie, di un'involuzione I costruibile nel modo visto* (ibidem, pag.18).

Tale teorema può essere invertito e quindi si può stabilire che per ogni coppia dell'involuzione *I* passa una data conica del fascio considerato.

Il teorema di Sturm e il suo inverso servono a Segre per far vedere essenzialmente due cose: 1) per individuare in generale una determinata conica reale basta considerare due coppie, reali o immaginarie, di punti e un solo altro punto reale, 2) le polari di un punto rispetto alle coniche di un fascio formano a loro volta un fascio, 3) *le involuzioni determinate da un fascio di coniche sulle rette del piano sono tutte riferite proiettivamente tra loro* (ibidem, pag. 19).

A questo punto Segre esamina le coppie di elementi immaginari nelle relazioni metriche sia lineari[167] che angolari[168], visto che era già

> *noto che nelle relazioni metriche si possono introdurre gli elementi immaginari senza uscire dal campo delle grandezze reali, cioè senza farvi comparire grandezze imaginarie* (ibidem, pag. 19).

Le relazioni metriche e la definizione di coppia di punti immaginari di una conica permettono a Segre di generalizzare la trattazione dei cerchi a partire dalla teoria degli

---

[166] Come ad esempio *la ricerca puramente sintetica degli assi, delle sezioni circolari e delle proprietà focali delle quadriche* (ibidem, pag. 18).

[167] Tramite le quali Segre generalizza alcune relazioni metriche segmentarie che fanno riferimento alla potenza di un punto rispetto la conica.

[168] Angoli formati da due rette, considerate come elementi doppi, del fascio che genera la curva di 2° ordine considerata.

assi radicali e dei fasci di cerchi, facendo a meno delle restrizioni che l'eventuale esclusione dei punti immaginari causerebbe. Per Segre, quindi, considerare gli elementi (punti, rette o coniche che siano) immaginari vuol dire non solo rispondere a esigenze di generalità ma anche di esemplificazione ed eleganza teorica. In modo particolare la teoria delle coniche assume carattere di completezza poiché nella sua trattazione non vengono tralasciate né le principali relazioni metriche (diametri coniugati, assi, asintoti, ecc.) né il riferimento a punti, tangenti o coniche stesse indifferentemente considerati reali o immaginari.

Torniamo alle curve di 2° ordine; poiché queste si possono definire come gli enti generati da due fasci proiettivi di rette di un piano, altresì è esatto affermare che una retta qualunque *r* dello stesso piano taglia i due fasci in due punteggiate proiettive: se la coppia di punti individuata su di esse è reale, allora essi sono le intersezioni della conica con la retta *r*, mentre se la coppia è immaginaria *r* non ha intersezioni con la conica e tale coppia immaginaria consta dei punti immaginari della conica; ciò accade per il cerchio, che è proprio la curva di 2° ordine caratterizzata dal fatto di essere tagliata dalla retta all'infinito nella coppia di punti ciclici.

In particolare la teoria degli assi radicali e dei fasci di cerchi segue in modo naturale dalla seguente costruzione, perfettamente ripercorribile anche nel caso di punti immaginari. Sia dato un cerchio di centro C e raggio ρ e una retta *r* secante, si conduca per C la perpendicolare a *r* e sia O il suo piede; siano inoltre S e S' le intersezioni di tale retta *r* col cerchio, e I un qualunque punto sul cerchio. Siano X e X' le intersezioni di *r* coi dei raggi IS e IS'.

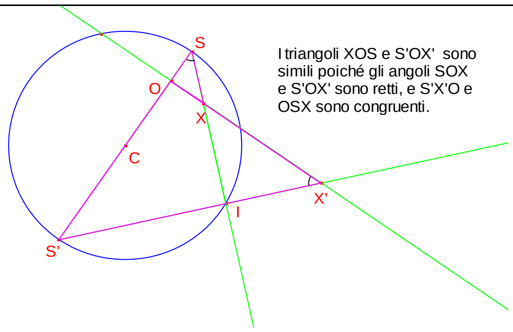


Fig. 7

Allora poiché i triangoli XOS e S'OX' sono simili, vale la relazione OX·OX' =-OS·OS'; in più, se si pone d=OC, si ottiene OX·OX'=ρ^2-d^2. Si può concludere in generale che la coppia di punti M e N (intersezioni di *r* col cerchio) è la coppia di punti doppi (reali o immaginari) dell'involuzione avente per centro O e per potenza ρ^2-d^2. Quindi, se si prende un qualsiasi punto P di *r* si avrà sempre che $PM \cdot PN = PC^2 - \rho^2$ cioè -(ρ^2-PC^2). Quindi, se per ogni punto P appartenente al piano del cerchio (C,ρ) si fa ruotare una retta *r*, $PC^2 - \rho^2$ resta costante rispetto la coppia, reale o immaginaria, M e N di punti d'intersezione della retta *r* col cerchio. Segue immediatamente e, come annunciato, senza l'esclusione dei punti immaginari la teoria degli assi radicali, poiché risulta che

> *dati due cerchi in un piano, esiste in generale al finito una retta r che li taglia nella stessa coppia di punti, e che è quindi luogo dei punti di ugual potenza rispetto ad ambo i cerchi*" (ibidem, pagg. 21-22).

Nella trattazione proiettiva, svolta qui da Segre e che trova nella teoria delle coniche il suo naturale campo d'applicazione, trova spazio anche il teorema di natura metrica di Carnot, che ci dà una proprietà metrica fondamentale. La scelta di tale teorema non è casuale: esso oltre a essere anche di natura proiettiva, fornisce

> *una relazione tra sei punti (o sei tangenti) di una conica valida anche se questi formano tre coppie di cui alcune o tutte siano immaginarie, ed anzi valida anche quando la conica sia immaginaria* (ibidem, pag. 22).

Per la dimostrazione di tale teorema, Segre applica ripetutamente il teorema di Menelao[169] e precisa che quasi tutti i testi sull'argomento appoggiano tale dimostrazione su quello di Desargues, con l'inconveniente di dover inizialmente supporre che la conica sia reale, poiché essa deve essere tagliata in almeno due punti reali da due lati del triangolo, per poi generalizzare ai casi in cui la conica viene tagliata realmente da un solo lato del triangolo quindi da nessun lato.

---

[169] Teorema di Menelao (diretto): *Se i punti P, Q, R appartenenti rispettivamente ai lati (o ai loro prolungamenti) AB, BC e CA di un triangolo ABC sono collineari, allora vale* $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1$. Ne esiste anche una forma inversa.

In più Segre, tramite il teorema di Carnot, costruisce una semplice relazione, valida anche se la conica stessa è immaginaria, tra sei punti di una conica (o meglio fra tre coppie immaginarie o no)

$$\frac{BA_1.BA_2}{CA_1.CA_2}\frac{CB_1.CB_2}{AB_1.AB_2}\frac{AC_1.AC_2}{BC_1.BC_2}=1$$

dove A, B e C sono i vertici di un triangolo qualunque nel piano della conica e A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sono i punti d'intersezione rispettivamente dei lati BC, CA, AB del triangolo con la conica.

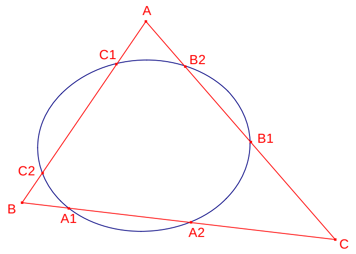


Fig. 8

Bisogna anche sottolineare che, definendo le coniche immaginarie tramite polarità, basta poggiare la dimostrazione del teorema di Carnot sulle proprietà di due triangoli mutuamente polari (o omologici), per esempio gli stessi sfruttati nella dimostrazione del teorema di Sturm, che quindi può essere considerato come l'equivalente grafico del teorema di Carnot, essenzialmente metrico.

Completa il quadro il duale nel piano del teorema di Carnot che spiana la strada al teorema di Pascal, al suo inverso e alle principali relazioni metriche riguardanti le coniche

> *come quelle relative ai diametri coniugati, agli assi, agli asintoti, ecc., senza escludere né i punti (e le tangenti) imaginari, né le coniche immaginarie* (ibidem, pag. 23).

Segre tiene a precisare che tutto il metodo finora esposto, di cui egli stesso ha posto un nuovo fondamento, si può applicare senza incontrare alcuna difficoltà anche alle coppie di elementi immaginari dello spazio ordinario, alle proiettività di forme di 2ª o 3ª specie e alle quadriche[170].

Sempre riferendosi alle opere di von Staudt, Segre conclude con un accenno al fatto che lo studio delle coppie, immaginarie o reali, di rette sghembe o di 2ª specie[171] è strettamente legato a quello delle involuzioni rigate dello spazio e a quello delle involuzioni tra le generatrici di un sistema di una quadrica rigata. Ma per tali argomentazioni, per gli sviluppi delle proiettività involutorie, delle involuzioni rigate e per le loro conseguenze, Segre rimanda ai paragrafi 104, 106 e 109 dei *Beiträge* di von Staudt per evitare superflue ripetizioni.

In conclusione quindi: Segre è pienamente cosciente non solo di aver posto il fondamento per metodi nuovi di investigazione nello studio delle coppie di elementi immaginari di forme geometriche dello spazio ordinario, delle proiettività di forme di 2ª e 3ª specie, delle quadriche rigate e non, ma anche di aver ampliato e valorizzato la teoria di von Staudt rendendola anche più rigorosa. Si può dire che in questo momento, seguendo l'impostazione di von Staudt, ma introducendo molte visioni originali e metodi nuovi, la geometria proiettiva complessa trova una sua prima sistemazione organica.

Di lì a poco Segre aprirà a nuovi mondi di ricerca geometrica che egli stesso si preoccuperà di scoprire in una serie di note dal titolo *Un nuovo campo di ricerche geometriche* pubblicate tra il 1889 e il 1891.

---

[170] Si veda (Segre 1888, pag. 23 nota (**)).

[171] Le coppie di rette sghembe sono le involuzioni rigate, che nel caso di coppie *immaginarie* vengono dette *ellittiche* e sono quelle che non hanno punti o piani doppi: tale coppia costituisce la coppia dei propri assi; nel caso in cui un'involuzione rigata ha per punti o piani doppi i punti o i piani di due rette sghembe essa si dirà iperbolica.

§4.3 Segre 1889-91

È passato appena un anno dalla pubblicazione della memoria del 1888 da noi qui esaminata, e Corrado Segre rende noti i risultati di alcune sue ricerche, frutto sempre di uno studio alquanto approfondito dei *Beiträge* di von Staudt.

Infatti, se con l'articolo del 1888 Segre pone le basi per una rivisitazione in chiave più chiara dell'opera del matematico tedesco che comporta l'apertura a nuovi mondi di ricerca geometrica, adesso egli stesso si preoccuperà di scoprirli in una serie di note dal titolo appunto *Un nuovo campo di ricerche geometriche* pubblicate tra il 1889 e il 1891[172].

Si deve notare, e anche Segre lo fa lungo il corso del suo articolo, le somiglianze di alcuni risultati di Segre con quelli ottenuti qualche anno prima dal matematico danese Christian Juel (1855-1935). Ma mentre quest'ultimo dimostra solo le prime proprietà delle forme complesse (si veda il paragrafo su Juel di questa tesi) attraverso le quali egli esplicita il ruolo delle proiezioni geometriche, Corrado Segre fonda una nuova e dettagliata teoria che entra in quasi tutti i campi della matematica (geometria ovviamente, ma anche algebra e analisi).

Con l'introduzione degli elementi immaginari nello studio degli enti geometrici, i punti dello spazio tridimensionale sono diventati ∞^6 (prima erano ∞^3 i soli punti reali) e, quindi, diventano degni di studio gli enti costituiti rispettivamente da ∞^1, ∞^2, ∞^3, ∞^4 e ∞^5 punti dello spazio complesso[173]. Così Segre, partendo da quelle che Staudt nei *Beiträge* chiamò catene (*Kette*), ente ∞^1, e dai punti reali delle ordinarie curve e delle superfici reali (enti ∞^1 e ∞^2), amplia tali elementi geometrici con le curve e le superfici con tutti i loro elementi complessi, che possono essere enti ∞^2 e ∞^4. Naturalmente per curve e superfici Segre intende le varietà di punti (alla Riemann) le cui coordinate sono funzioni di 1 o di 2 parametri, il che equivale, geometricamente parlando, all'esistenza in ciascun punto di una sola tangente o di un fascio di tangenti a seconda se il punto appartenga a una curva o a una superficie.

[172] Si veda (Segre 1889-91).

[173] Cfr. (Segre 1889-91, Nota 1 pag. 277).

Quindi, se è vero che una curva o una superficie di punti immaginari costituiscono degli enti ∞^2 e ∞^4, non è sempre vero il viceversa, e cioè che ogni insieme ∞^2 o ∞^4 di punti è una curva o una superficie (ci sono catene semplici o doppie di rette e catene semplici di piani che interverranno nel capitolo 2 di questo lavoro).

Scopo di Segre è studiare con carattere di maggiore generalità gli enti costituiti da infiniti punti complessi seguendo il preciso indirizzo della geometria proiettiva delle forme algebriche e non quello di una trattazione per invarianti e proprietà comuni a tutti gli enti di una data dimensione, di cui si occuperà in un altro lavoro (forse mai pubblicato, almeno nella forma allora prevista).

Il taglio geometrico voluto da Segre in questo articolo prevede di chiamare *iperalgebrici* i punti, le curve, le superfici, ecc., cui naturalmente corrisponde una o più equazione (oggi diremmo hermitiana) del tipo $f(x,\bar{x})=0$, anche esse dette *iperalgebriche*, nelle coordinate x dei loro punti e nei loro complessi-coniugati $\bar{x}$, e viceversa. Quindi è iperalgebrico un ente che ha per coordinate elementi immaginari coniugati.

Nel prosieguo del prossimo paragrafo, comunque, si noterà che le radici del metodo e della trattazione di Segre restano collegati a quelli di von Staudt, e la quantità di argomenti che Segre affronta pone la base per ulteriori studi futuri: è questa di aprirsi a sempre nuove prospettive una delle più peculiari caratteristiche dell'opera di Corrado Segre.

§4.3.1 Contenuto della memoria di (Segre 1889-91)

Per poter costruire una geometria proiettiva **iperalgebrica** che "corrisponda" in qualche maniera a quella degli enti algebrici tradizionali, Segre ha bisogno di definire sin dal principio su quali enti dei primi ordini essa opera: per arrivare a tale scopo un forte ruolo giocheranno le corrispondenze proiettive introdotte da Staudt nei *Beiträge*. Infatti von Staudt studia quelle proiettività che, limitatamente al campo reale, lasciano invariato il valore di una tetrade (=*Wurf*, il birapporto) di 4 elementi della forma in cui è stata definita la proiettività stessa; in più (ed è il teorema fondamentale) una tale proiettività è determinata in una forma semplice da tre coppie di elementi corrispondenti. Ma se si toglie la limitazione al campo reale, la corrispondenza di tre coppie individua due trasformazioni della forma: una è la proiettività appena citata (cioè la trasformazione lineare), mentre l'altra trasformazione ha tutte le caratteristiche della precedente, solo che muta una tetrade[174] di specie[175] rispetto al verso, cioè muta il valore del birapporto di 4 elementi della forma nel coniugato complesso. Esattamente Segre si riferisce a quelle trasformazioni che egli chiamerà **antiproiettività**[176] (le stesse che Juel chiamerà *simmetralità*); essa è dunque, in altre parole, quella corrispondenza che fa corrispondere un elemento di una forma con l'elemento coniugato che appartiene alla forma coniugata, cioè in generale due tetradi corrispondenti sono entrambe neutre o di segno opposto. Viene così introdotto per la prima volta un concetto essenziale per estendere a campi qualsiasi (in particolare campi dotati di automorfismi non banali) i teoremi della geometria proiettiva. Si può quindi dire che l'idea di geometria proiettiva su un campo nasce con questo lavoro di Segre.

L'esempio più banale di antiproiettività è il **coniugio**, che associa ad un elemento di una forma il suo immaginario-coniugato; anzi ogni antiproiettività si può ottenere come prodotto di una proiettività e di un coniugio. Inoltre è facile dimostrare che il prodotto di due antiproiettività dà una proiettività, mentre il prodotto di una antiproiettività con una proiettività dà una antiproiettività; una corrispondenza antiproiettiva si individua mediante coppie di elementi omologhi, così come accade per quelle proiettive.

Si vede subito, quindi, che tali nuove corrispondenze hanno molte caratteristiche comuni con le precedenti, ma hanno anche parecchie differenze. In particolare Segre si

---

[174] Si ricorda che il valore di una tetrade è il più comune birapporto di quattro elementi (che tra l'altro proprio grazie a Staudt è ormai sganciato da misure di lunghezze o di angoli). Dire che le trasformazioni mutano di specie una tetrade vuol dire che cambiano il valore complesso del corrispondente birapporto nel suo coniugato.

[175] La specie di una tetrade si dice essere neutra quando il valore del birapporto è reale ed essere di prima specie quando la sua parte immaginaria è positiva o di seconda specie quando è negativa. Quindi *il coefficiente di i in esso* [il valore del Wurf] *determina col suo segno o col suo annullarsi la specie della tetrade (neutra se quel coefficiente è nullo)* (Segre 1889-91, pag. 283).

[176] E quindi le trasformazioni geometriche verranno anche chiamate anticollineazioni (forme lineari) e antireciprocità (forme hermitiane).

propone di studiare il carattere di un particolare tipo che antiproiettività: quelle involutorie, le stesse dei *Beiträge* di von Staudt, cioè le antiproiettività che coincidono con le loro inverse; esse coi loro eventuali punti uniti forniscono gli enti con infiniti elementi complessi che stanno alla base della nuova geometria antiproiettiva che Segre vuole fondare. Vediamo alcune caratteristiche comuni e differenze che non balzano agli occhi immediatamente; mentre le anticollineazioni involutorie del piano o dello spazio danno con i loro punti uniti certi insiemi ∞^2 ed ∞^3 di punti che Segre per analogia chiama *catene di* 2^a *o* 3^a *specie,* e le antireciprocità involutorie del piano e dello spazio danno con i loro punti isotropi (punti uniti nella terminologia di Segre) delle ∞^3 e ∞^5 che per analogia vengono chiamate iperconiche e iperquadriche, in riferimento alla dimensione maggiore; invece, non si potrà più definire una iperconica come luogo dei punti uniti di un'antireciprocità piana non involutoria (così come avveniva per una conica come luogo dei punti uniti di reciprocità non polari). Dal punto di vista analitico, le catene di punti di una retta, le iperconiche nel piano e le iperquadriche nello spazio possono essere rappresentate con equazioni della forma $f(x,\bar{x})=0$ reali e bilineari nelle rispettive coordinate e nelle coniugate, cioè con equazioni del tipo $\sum a_{lm} x_l \bar{x}_m = 0$, con $a_{ml} = \bar{a}_{ml}$, ossia forme hermitiane.

La prima delle quattro note in cui è articolato il lungo articolo di Segre tratta le proprietà generali delle corrispondenze antiproiettive.

La proprietà di trasformare gruppi armonici in gruppi armonici, caratterizza completamente le corrispondenze proiettive tra elementi reali; per altro, esse sono individuate da tre coppie di elementi corrispondenti secondo il teorema fondamentale della Geometria Proiettiva di von Staudt, dimostrato in modo rigoroso da Darboux. Ma se si considerano, oltre agli elementi reali anche quelli immaginari, tale teorema non vale più, poiché anche le antiproiettività conservano l'armonicità di quattro punti. Infatti, come argomenta Segre, considerate le tre coppie di elementi omologhi di due forme di prima specie

(1) $\varphi(0)=0 \qquad \varphi(1)=1 \qquad \varphi(\infty)=\infty$,

dalla conservazione dell'armonicità discendono le due proprietà

(2) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$

(3) $\varphi(x)^2 = [\varphi(x)]^2$.

Naturalmente per $\forall x \in \Re$ si ha che

(4) $\varphi(x) = x$.

Dalla (3), se si pone *x*=*bi* si ottiene $[\varphi(bi)]^2 = \varphi(-b^2)$ ossia, se $b \in \Re$,

(5) $\varphi(bi) = \pm bi$,

con l'accortezza di prendere sempre l'uno o sempre l'altro segno (*aut*).

Lo stesso vale per un qualunque altro reale *c*, così da avere $\varphi(ci) = \pm ci$. Adesso si può applicare la (2) e ottenere $\varphi(bi) + \varphi(ci) = \varphi[(b+c)i] = \pm(b+c)i$.

In generale, quindi, se nella (2) si pone *x*=*a* e *y*=*bi*, $\forall a, b \in \Re$, si avrà grazie alla (4) e alla (5) che

(6) $\varphi(a+b) = a+bi$

oppure

(7) $\varphi(a+bi) = a-bi$,

determinando due diverse corrispondenze, la (6) rappresenta la proiettività individuata dalle tre coppie di elementi omologhi (1), la (7) è l'antiproiettività definita precedentemente.[177]

Segre definisce quindi come antiproiettività la seguente:

> *Un'antiprojettività fra due forme semplici è dunque una corrispondenza univoca e continua non proiettiva tale che a gruppi armonici corrispondono gruppi armonici. … Essa è individuata da 3 coppie di elementi omologhi. Due tetradi omologhe in essa hanno valori (birapporti) complessi coniugati: esse sono dunque o neutre entrambe (cioè con uno stesso valore reale), oppure di specie contraria rispetto al verso nel senso di Staudt.* (Segre 1889-91, pag. 291).

Ne segue che l'identità, essendo una particolare proiettività, non è un'antiproiettività, e che se si moltiplicano proiettività e antiproiettività il risultato è una

[177] In Staudt, invece, la definizione di antiproiettività è diversa: se si considerano tutte le corrispondenze che mutano catene in catene, e da queste si tolgono tutte le proiettività, ciò che resta sono le antiproiettività.

proiettività o un'antiproiettività a seconda che il numero delle antiproiettività sia pari o dispari.

Per forme di specie superiore si ritrovano gli stessi risultati di quelle di 1ª specie: Un'antiproiettività tra due forme di 2ª o 3ª specie è determinata se a 4 oppure 5 elementi omonimi e indipendenti si associano *ad arbitrio* altrettanti elementi, sempre indipendenti[178], dell'altra forma; essa muterà tetradi in tetradi aventi valore del birapporto coniugato; una qualunque potenza di un'antiproiettività fra forme sovrapposte è una proiettività o un'antiproiettività a seconda se l'indice sia pari o dispari.

Importante è sottolineare il fatto che, poiché una proiettività trasforma forme antiproiettive in forme antiproiettive, la teoria delle antiproiettività appartiene a quella geometria il cui *gruppo fondamentale di trasformazioni* è il gruppo delle proiettività, che, come si sa, individua la geometria proiettiva. Si noti come l'insegnamento di Klein del 1872 è già stato totalmente assimilato dal matematico torinese, e Segre lamenterà infatti la poca diffusione in Italia di tale scritto (ibidem, p. 293 nota (***))[179].

Come detto, si definisce *coniugio* quella antiproiettività che associa a un elemento di una forma il suo complesso coniugato; se la forma è reale tale coniugio sarà un'antiproiettività involutoria. Si dirà che un ente è *reale*, se per ogni suo elemento complesso esso contiene anche il suo coniugato, il che equivale a dire che un ente è reale se esso è trasformato in se stesso da un coniugio. Quindi, se per tale ente si può definire una trasformazione proiettiva in se stesso, si potrà pure definire un'antiproiettività come prodotto del coniugio e della proiettività; e viceversa. Da ciò si deduce che:

---

[178] Per *indipendenti* Segre intende linearmente indipendenti.

[179] Nel 1890 sugli *Annali di Matematica*, Fano pubblica il suo primo lavoro su indicazione di Segre: (Fano 1890), la traduzione in italiano di (Klein 1872).

A tal proposito si veda:

1. (Hawkins 1984, pag. 452): …*by 1885 he* [Segre] *was familar with the contents of Klein's Programm. …Segre decided that the time was ripe to encourage an Italian translation of the Erlangen Programm, especially since young Italian geometers did not seem to be acquainted with its contents. One of Segre's students at Turin, Gino Fano (1872-1952) under took the task of a translation, which was published in 1890.*
2. (Hawkins 2000, pag. 252): *Segre … proposed to combine it* [Cayley's approach to the geometry] *with the ideas of the Erlangen Programm* …[and] *he continued to esteem it highly*.

Anche David E. Rowe sottolinea che *Hawkins deftly characterizes the work of Corrado Segre and his student, Gino Fano, both of whom pushed Klein's ideas into the forefront of research in higher-dimensional algebraic geometry, Italian-style* (Rowe 2003, pag. 674).

> *un ente reale con k trasformazioni projettive in se stesso (l'identità inclusa) ammette pure precisamente k trasformazioni antiprojettive* (ibidem, pag. 294).

Una coppia di elementi *involutori* è formata da due elementi tali che uno di questi (che si dirà a sua volta *involutorio)* si corrisponde in modo doppio (in una determinata corrispondenza e nella sua inversa) con l'altro[180]; è ovvio, per quanto detto prima, che se un elemento è unito o involutorio per un'antiproiettività, sarà unito per la proiettività ottenuta come quadrato di questa e, viceversa, un elemento unito della proiettività quadrato, sarà unito o involutorio per l'antiproiettività. Quindi,

> *un'antiproiettività su una forma semplice può* in generale *presentare due casi: avere cioè due elementi uniti, e nessun elemento involutorio; oppure non avere alcun elemento unito ed averne due involutori* (ibidem, pag. 296).

Fra i casi particolari che si possono presentare, importante è quello di una affinità piana (non involutoria) che ha infiniti elementi uniti: il suo quadrato sarà un'omologia e l'antiproiettività involutoria, che sull'asse di questa (o intorno al suo centro) viene determinata dall'anticollineazione, deve avere infiniti punti uniti (o rette unite), i quali col centro dell'omologia danno tutti i punti uniti dell'anticollineazione.

Vogliamo ora seguire Segre nel dare una <u>rappresentazione analitica delle antiproiettività</u>. Presi due elementi omologhi di due forme qualunque antiproiettive, se x_l e x'_l sono le loro coordinate in un sistema di riferimento in cui per elementi fondamentali e unità si scelgono elementi omologhi, si scriverà allora $x'_l \equiv x_l$. Se invece si considera un qualunque sistema di riferimento si trova che $x_m \equiv \sum_l \overline{\alpha}_{lm}\overline{x}'_l$, e cioè che

> *le coordinate di un elemento dell'una forma si esprimono come forme lineari dei coniugati delle coordinate dell'elemento omologo nell'altra forma* (ibidem, pag. 299).

Ed in modo analogo alla rappresentazione di una proiettività tramite un'equazione bilineare, l'equazione di un'antiproiettività si può esprimere come $\sum a_{lm} x_l \overline{x}'_m = 0$, oppure con la sua coniugata $\sum \overline{a}_{lm} \overline{x}_l x'_m = 0$. Si dimostra poi che

[180] x e y formano una coppia di elementi involutori in f se: $f(x)=y \wedge f^{-1}(x)=y \rightarrow f(x)=f^{-1}(x) \vee f^2(x)=I$.

un'antiproiettività ha per *invariante* il determinante dei coefficienti a_{lm}, e se esso risulta nullo allora l'antiproiettività si dirà degenere[181].

Le anticollineazioni e le antireciprocità involutorie verranno rispettivamente chiamate *antinvoluzioni* e *antipolarità*: di esse tratterà la nota seguente.

La seconda delle quattro note di cui consta la memoria del 1889-91 tratta delle antinvoluzioni e delle catene.

Dopo aver ricordato che un'antinvoluzione è un'antiproiettività coincidente con la sua inversa (o che è lo stesso tale che $\varphi^2 = I$) e aver ammesso che la prima viene determinata in una forma di specie *r* prendendo come elementi uniti *r+2* elementi indipendenti (quindi, ad esempio, in una forma di 1ª specie l'antiproiettività è determinata da tre elementi uniti), Segre considera determinata un'antinvoluzione se: si dà un elemento unito e due omologhi in una forma di 1ª specie, due punti uniti e due omologhi (oppure due coppie di punti omologhi) in un piano, tre punti uniti e due omologhi (oppure un punto unito e due coppie di punti omologhi) nello spazio.

Poiché due involuzioni in forme di *r* specie in cui esistono *r+2* elementi uniti sono sempre proiettive in infiniti modi[182], essa sarà anche proiettiva al coniugio di una forma reale di specie *r,* che quindi avrà ∞^r elementi uniti e non più solo *r+2*. In base a ciò, si definisce *catena di specie r* l'insieme di questi ∞^r elementi uniti[183]. Si dimostra facilmente che: ogni catena di specie r è individuata da *r+2* elementi indipendenti della forma di specie *r*; due catene della stessa specie sono sempre proiettive (o antiproiettive) e, viceversa, una proiettività (o un'antiproiettività) trasforma catene in catene della stessa specie; ogni catena è una varietà continua; ogni catena contiene infinite catene di specie inferiore. Ciò basta per affermare che su una catena di specie *r* si può costruire una geometria projettiva che *coincide colla geometria projettiva degli elementi reali su una forma reale di specie r* (ibidem, pag. 432).

---

[181] Per esempio esse si possono ottenere come prodotto di un'antiproiettività non degenere (p. e. il coniugio) e una proiettività degenere.

[182] Ciò equivale a dire che la proiettività tra due forme che fa corrispondere *r+2* elementi uniti di una forma ed altrettanti elementi uniti dell'altra, trasformerà un'antinvoluzione in un'altra antinvoluzione.

[183] In altre parole, se un'antinvoluzione ha r+2 punti doppi, essa ne avrà infiniti, i quali formano una catena di specie r.

Due fatti meritano essere ancora evidenziati: 1) le tetradi composte da elementi di una catena semplice sono neutre, cioè hanno valore reale, e viceversa; in più una tetrade di una catena può essere trasformata in se stessa solo da un'antiproiettività[184]; 2) gli elementi di una forma di specie *r* con coordinate proiettive reali rispetto ad un sistema di riferimento dato da *r+2* elementi, sono elementi della catena di specie *r* individuata da quegli stessi *r+2* elementi.

Un metodo per costruire tutti gli elementi di una catena in una forma semplice è quello di considerare tutti gli elementi che formano gruppi armonici coi tre elementi fondamentali[185], quindi considerare tutti gli elementi armonici a tre già trovati, e, così facendo, iterando sempre questo procedimento, si ottengono tutti gli elementi di una catena in modo diretto o con un passaggio al limite.

Se si vogliono rappresentare analiticamente in forma parametrica le catene, basta considerare le coordinate fisse a_l, b_l, c_l, … di punti indipendenti a, b, c, … e i parametri reali λ, μ, ν, … , quindi al variare di quest'ultimi le espressioni

$\lambda a_l+\mu b_l$

$\lambda a_l+\mu b_l+\nu c_l$

$\lambda a_l+\mu b_l+\nu c_l+\pi d_l$,

descrivono rispettivamente una catena semplice (rettilinea), una catena doppia (piana), una catena tripla (spaziale) e la corrispondenza tra i punti della catena e i rapporti dei parametri è univoca. Se invece i punti a, b, c, … non sono indipendenti, le catene da essi individuate si diranno degeneri; ad esse si giungerebbe anche applicando a catene non degeneri delle antiproiettività degeneri, già viste in precedenza (alla fine della NOTA I). Quindi, se a e b sono punti coincidenti su una retta la catena semplice che individuano si ridurrà ad un sol punto (singolare), se a, b, c stanno su una retta e godono di un legame lineare *reale* la catena doppia individuata si riduce ad una rettilinea, altrimenti potrà rappresentare tutti i punti della retta; analogamente, se a, b, c, d, appartengono a uno stesso piano, la catena individuata si riduce ad una catena piana se fra le coordinate dei punti esiste un legame lineare reale, altrimenti essa rappresenterà

[184] Il lettore moderno può seguire meglio questi ragionamenti tenendo presente che nel caso della sfera di Riemann (retta proiettiva complessa) una catena è una circonferenza o una retta, e quattro punti stanno sulla stessa retta o sulla stessa circonferenza se e solo se il loro birapporto è reale.

[185] che servono, cioè, per determinare la catena.

un insieme di ∞^3 punti che hanno un punto singolare[186], dal quale tutte le rette che proiettano una catena rettilinea costituiscono un sistema che fornisce tutti i punti dell'insieme ∞^3, che è quindi una catena spaziale degenere.

Ragionando in modo analogo si può generalizzare e affermare che i punti dello spazio che hanno per coordinate delle forme lineari non reali di 5 o 6 parametri siffatte

$\lambda a_l+\mu b_l+\nu c_l+\pi d_l+\rho e_l$

$\lambda a_l+\mu b_l+\nu c_l+\pi d_l+\rho e_l+\sigma f_l$

determinano rispettivamente degli insiemi di ∞^4 punti (di cui uno solo è singolare) *delle rette di una stella che in essa costituiscono una catena doppia*, e di ∞^5 punti (di cui infiniti sono singolari) che *costituiscono i piani di una catena semplice di un fascio di piani* (ibidem, pag. 436).

A questo punto, si può sottolineare che Segre, al contrario di quanto fatto da von Staudt, mostra la centralità del concetto di catena e pone questo stesso in chiara luce.

A seguire Segre dedica alcune pagine[187] alle applicazioni di quanto precedentemente detto agli elementi tangenti di enti composti da infiniti punti e ai loro mutui contatti. Dato un ente qualunque, luogo dei punti le cui coordinate x, y, z sono funzioni di parametri reali indipendenti u, v, …, si definisce *tangente a quell'ente in un suo punto (x,y,z) ogni retta che lo congiunga ad un punto infinitamente vicino dell'ente stesso* (ibidem, pag. 437). In un punto non singolare di un ente ∞^1 vi è una sola tangente; le tangenti ad un ente ∞^2 in un punto non singolare appartengono tutte ad uno stesso fascio, formano una catena semplice e il piano su cui giacciono viene detto piano tangente dell'ente; le tangenti in un punto non singolare di un ente ∞^3 costituiscono una catena doppia e gli ∞^2 piani di tale catena sono piani tangenti all'ente in quel punto. Vengono anche definite le tangenti agli enti ∞^4 e ∞^5 e per tutti Segre considera i casi degeneri.

Segre ritorna poi allo studio della geometria delle catene e delle antinvoluzioni, ma per poterlo approfondire ha bisogno di trattare separatamente le varie forme rispetto la loro specie.

---

[186] V. pag. 435, nota II.

[187] Segre specifica comunque che tali applicazioni rappresentano solo una piccola digressione , poiché saranno oggetto di altri lavori.

Per le <u>forme di 1ª specie</u> dimostra che in esse ogni antinvoluzione o non ha elementi uniti oppure ne possiede una catena; per far ciò si serve del concetto di separazione armonica in modo molto semplice: se P è un elemento unito e A e A' sono due elementi omologhi, l'elemento Q armonico di P rispetto A e A' avrà per omologo l'armonico di P rispetto A' e A, cioè lo stesso Q, quindi anche Q è un elemento unito; al variare della coppia A, A', varierà anche l'armonico di P rispetto ad essi: si ottengono così infiniti elementi uniti. A e A' vengono definiti (in analogia con quanto ha fatto von Staudt) separati armonicamente dalla catena e in più ogni altra catena che passa per essi deve avere con la catena data due elementi, sempre armonici rispetto ai primi due. Per dimostrare l'esistenza di antinvoluzioni prive di elementi uniti, bisogna dimostrare che *ogni catena passante per due elementi omologhi di un'antinvoluzione è trasformata in se stessa da questa, ossia è unita per questa* (ibidem, pag. 442). Ne segue che due coppie qualsiasi di elementi omologhi di un'antinvoluzione appartengono a una catena unita per questa e quindi un'antinvoluzione resta determinata se si danno due coppie di elementi omologhi che stiano in una stessa catena, e viceversa *date ad arbitrio in una catena* **C** *due coppie AA', BB' di elementi, esiste una determinata antinvoluzione che le contiene come coppie di elementi omologhi* (ibidem, pag. 442)[188]. Sulla catena **C** unita per l'antinvoluzione, quest'ultima determina una corrispondenza tra i suoi punti che risulta essere una involuzione ordinaria, che ha due o *nessun* elemento unito a seconda che nella catena le due coppie AA' e BB' non si separano o si separano.

Da ciò si possono ricavare alcune proprietà, sia analitiche che metriche: l'equazione di un'antinvoluzione in una forma di 1ª specie e data da $\sum a_{lm} x_l \bar{y}_m = 0$ dove a_{11} e a_{22} sono reali mentre a_{12} e a_{21} sono fra loro coniugati; il determinante $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ è un invariante; se $\Delta < 0$ l'involuzione ha una catena di punti uniti, se $\Delta > 0$ non ne ha, se $\Delta = 0$ l'antinvoluzione degenera e la catena si riduce a un solo punto; si dimostra che il birapporto non solo di 4 elementi di una catena in una

[188] Tale condizione mette in luce una differenza tra proiettività e antiproiettività: infatti se un'antiproiettività ha due elementi distinti che si corrispondono in modo doppio e altri due omologhi che appartengono ad una catena, essa sarà involutoria; la tal cosa non succede per le proiettività.

forma di 1ª specie è reale ma lo è anche quello di due coppie di elementi omologhi in una qualunque antinvoluzione[189].

In una forma di 2ª specie, p. e. un piano, un'antinvoluzione (che quindi viene detta piana) determina in ogni retta unita del piano un'antinvoluzione (semplice) che avrà come punti uniti tutti i punti di una catena, poiché sicuramente avrà uniti i punti intersezione fra la retta data e le altre rette unite del piano. Quindi, in ogni retta unita vi è una catena di punti uniti e, similmente, per ogni punto unito passa una catena di rette unite. Poiché tra questi infiniti punti uniti se ne possono considerare 4 indipendenti fra loro[190], si avrà che *ogni antinvoluzione tra gli elementi di una forma di 2ª specie ha per elementi uniti gli elementi di una catena di 2ª specie* (ibidem, pag. 447).

Le proprietà di una catena di 2ª specie dedotte da considerazioni sugli elementi reali di una forma di 2ª specie reale, si possono anche trarre dalle proprietà delle antinvoluzioni nelle forme di 2ª specie; si trova così che

> *data in un piano una catena di 2ª specie, ogni retta che non le appartenga l'incontra in un punto solo, mentre ogni retta della catena l'incontra lungo una catena rettilinea; similmente le rette della catena passanti per uno qualunque dei suoi punti formano una catena, mentre per ogni altro punto passa una sola retta della catena* (ibidem, pag. 447).

Quindi, preso sul piano un qualunque punto A non appartenente alla catena fondamentale, esso corrisponde in un'antinvoluzione piana ad un punto A' posto sulla retta per A che appartiene alla catena e che, rispetto alla catena piana, è l'armonico di A.

I punti di una catena piana si possono anche determinare considerando tutti gli armonici S e S' rispetto la catena stessa, sicché si prova che *ogni catena piana è il luogo dei punti d'incontro dei raggi omologhi di due fasci antiprospettivi* [e,] *Viceversa due fasci antiprospettivi di rette di un piano generano una catena piana* (ibidem, pag. 448).

---

[189] *Questa relazione equivale alla proprietà del cerchio di essere il luogo dei punti le cui distanze da due punti fissi (inversi per il cerchio) hanno un dato rapporto.* […] *ciò equivale alla costanza dell'angolo inscritto in un dato arco di cerchio* (ibidem, pag. 445-446 in nota).

[190] E quindi infiniti gruppi di 4 punti uniti indipendenti fra loro.

Infine, se consideriamo un'antinvoluzione fra gli elementi dello spazio (forma di di 3ª specie), essa ammette infinite rette unite, che si possono vedere come congiungenti coppie di punti omologhi o come intersezioni di piani omologhi; e se ammette un punto unito P, ammetterà unito il piano passante per una retta unita r e il punto P ($P \notin r$); da ciò segue che un'antinvoluzione ha infiniti punti uniti e cioè quegli infiniti punti uniti che stanno sulle infinite rette unite. Fra questi infiniti punti uniti se ne possono scegliere 5 indipendenti fra loro che generano una catena spaziale, e da qui trarre che se un'antinvoluzione dello spazio ha un punto unito, essa avrà sicuramente una catena spaziale fondamentale.

Si dimostra poi che se lo spazio ha dimensione pari, allora tutte le antinvoluzioni hanno infiniti punti uniti e quindi ammettono una catena fondamentale; se invece la dimensione è dispari, lo spazio possiede antinvoluzioni prive di punti uniti e antinvoluzioni con catene fondamentali. In più, nello spazio, il sistema delle rette unite di un'antinvoluzione priva di catena fondamentale non ha punti o piani singolari, così per ogni suo punto e in ogni suo piano passa una sola retta del sistema.

Fra le altre cose, si può facilmente determinare il numero delle coppie di elementi omologhi comuni a due antinvoluzioni in una stessa forma fondamentale di specie r considerando la collineazione prodotto delle due antinvoluzioni: ogni elemento unito della collineazione individuerà un unico elemento omologo in entrambe le antinvoluzioni e quindi restano individuate le coppie da loro formate; poiché in generale gli elementi uniti di una collineazione sono r+1, le coppie saranno k con $0 \leq 2k \leq r+1$. Quindi, due antinvoluzioni avranno: in una forma semplice una coppia di elementi omologhi distinti o due elementi uniti; in una forma piana una coppia comune di elementi armonici sull'unica retta comune alle due catene piane individuate; nello spazio si possono presentare tre casi: 1° quattro punti uniti comuni, 2° due punti uniti comuni e una coppia di punti omologhi distinti, 3° due coppie di punti omologhi distinti in comune. In generale si può affermare che:

> *due catene qualunque di una stessa forma di specie r individuano un sistema infinito (∞^r) di catena aventi a comune un certo numero k (tale che $0 \leq 2k \leq r+1$) di coppie di punti armonici ed inoltre r-2k+1*

punti, e tale che per ogni altro punto (indipendente da quegli r+1) passa sempre una sola catena del sistema (ibidem, pag. 453).

La nota II si conclude con l'applicazione (senza modificare nulla) di tutte le proprietà e proposizioni viste sulle antinvoluzioni e sulle catene di una forma fondamentale alle forme semplici razionali (curva razionale o rigata razionale, una conica o una cubica sghemba, una quadrica), e con le proprietà della corrispondenza tra i punti di una catena **C** e quelli di una retta *r* se **C** viene proiettata da un punto P esterno su *r* in un piano (in generale punti di **C** e punti di *r* si corrispondono in modo univoco).

Passando alla terza notiamo che essa è la più breve e porta come titolo "Delle antipolarità e delle iperconiche e iperquadriche".

La trattazione di questi argomenti si trova nell'opera di von Staudt sviluppata in modo analogo: Segre afferma che la scelta di questa ripetizione è dovuta ad una uniformità di metodo e all'evitare ripetuti richiami o rimandi all'opera staudtiana.

Analogamente alle polarità piane e spaziali in campo antiproiettivo si possono trattare anche le antiproiettività. Segre così, dopo aver definito quando due elementi si dicono *polari* (se sono omologhi) *reciproci* (se uno è incidente al polare dell'altro e viceversa) e *autoreciproci* o *uniti* (incidenti al proprio polare), passa allo studio delle *iperconiche fondamentali per un'antipolarità*, definite come l'insieme ∞^3 di punti uniti di un'antipolarità (se in essa c'è un punto unito allora ci sarà una catena di punti uniti per ognuna delle ∞^2 rette passanti per quel punto unito) e le tangenti ai vari punti dell'iperconica sono le polari di quei punti. Se la tangente in un punto incontra l'iperconica solo in quel punto, ogni altra retta del piano la incontra in una catena o non l'incontra. Per ogni punto del piano, quindi, passa una catena o ne passano ∞^1 che formano le tangenti dell'iperconica. Nel primo caso il punto sarà interno all'iperconica, nel secondo il punto sarà esterno.

Nello spazio si avranno le *iperquadriche fondamentali per un'antipolarità*, definite analogamente come l'insieme di ∞^5 punti uniti (se un'antipolarità ammette un punto unito, ne avrà in realtà ∞^5: una catena per ogni retta unita che passa per quel punto). Per ogni punto dell'iperquadrica avremo un piano tangente. Una retta può incontrare l'iperquadrica lungo una catena semplice o non incontrarlo affatto, un piano secondo un'iperconica o nient'affatto.

Su questa linea Segre definisce anche le *iperquadriche rigate*.

Per poter ottenere un metodo generale di costruzione delle antipolarità bisogna considerare la *permutabilità* tra antipolarità e antinvoluzioni, sia piane che spaziali. Infatti, un'antinvoluzione avente per punti uniti i vertici di un triangolo (o tetraedro) polare di un'antipolarità (un vertice è polare del lato opposto (o della faccia opposta)), è permutabile all'antipolarità. Un triangolo o un tetraedro è detto *autopolare* se viene trasformato in se stesso dall'antipolarità.

Per equazione di un'antipolarità si può assumere la seguente: $\sum a_{lm} x_l \bar{y}_m = 0$ dove (°) $a_{ml} = \bar{a}_{lm}$, mentre per equazione di un'iperconica o di un'iperquadrica l'equazione di discriminante non nullo[191] e di forma iperalgebrica: (*) $\sum a_{lm} x_l \bar{x}_m = 0$ con le stesse condizione sui coefficienti. Infatti, qualunque sia il punto x che vi si sostituisce, se i suoi termini a due a due coniugati hanno tutti valori (reali) con lo stesso segno, allora l'antipolarità non ha punti uniti e l'iperconica o iperquadrica non esiste; se invece hanno segni opposti, i punti complessi del piano o dello spazio restano divisi in due regioni distinte corrispondenti ai due diversi segni che il valore della (*) può assumere: una regione è costituita dai punti interni all'iperconica o all'iperquadrica, l'altra ai punti loro esterni.

Se l'antipolarità è riferita a un triangolo o tetraedro polare avrà per equazione (canonica) $\sum a_l x_l \bar{x}_l = 0$. Da ciò si possono ricavare in modo naturale l'equazione canonica per un'iperconica riferita ad un triangolo autopolare $a_{12}x_1\bar{x}_2 + a_{21}x_2\bar{x}_1 + a_{33}x_3\bar{x}_3 = 0$, quella per un'iperquadrica riferita a un tetraedro autopolare $a_{12}x_1\bar{x}_2 + a_{21}x_2\bar{x}_1 + a_{33}x_3\bar{x}_3 + a_{44}x_4\bar{x}_4 = 0$ e se è rigata $a_{12}x_1\bar{x}_2 + a_{21}x_2\bar{x}_1 + a_{34}x_3\bar{x}_4 + a_{43}x_4\bar{x}_3 = 0$, tutte sempre sotto la condizione (°). Ovviamente due antipolarità, due iperconiche, due iperquadriche non rigate o due iperquadriche rigate sono sempre proiettive o antiproiettive fra loro in infiniti modi, poiché si possono considerare come omologhi due triangoli o due tetraedri polari qualunque. Si può anche dedurre che le rette o i piani tangenti hanno equazione

[191] Se il discriminante di (*) è nullo l'antipolarità si dirà degenere.

$\sum \alpha_{lm} \xi_l \bar{\xi}_m = 0$ dove α_{lm} è il complemento algebrico nel discriminante della (*) e soddisfa per la (°) la condizione $\alpha_{ml} = \bar{\alpha}_{lm}$.

La quarta e ultima nota viene dedicata da Segre ai "Sistemi lineari ed intersezioni d'iperconiche e iperquadriche". In essa Segre si prefissa di studiare alcune proprietà delle antipolarità, come ad esempio i legami tra i vertici di due o più triangoli o tetraedri autopolari in un stessa antipolarità.

Per far ciò sfrutta maggiormente il metodo analitico, introducendo equazioni e sistemi lineari non solo di antipolarità così dati: $\lambda \sum a_{lm} x_l \bar{y}_m + \mu \sum b_{lm} x_l \bar{y}_m + ... = 0$ con $\lambda, \mu, ...$ coefficienti reali e $a_{ml} = \bar{a}_{lm}$, $b_{ml} = \bar{b}_{lm}$, ma anche d'iperconiche e d'iperquadriche $\lambda \sum a_{lm} x_l \bar{x}_m + \mu \sum b_{lm} x_l \bar{x}_m + ... = 0$ per valori reali dei parametri, cioè i sistemi composti da iperconiche o iperquadriche fondamentali (con tutti i punti uniti) per le antipolarità di un sistema dato. L'indipendenza lineare tra equazioni di uno stesso sistema di dimensione *r* si ha solo quando tale sistema non è contenuto in uno di dimensione inferiore. *Così due forme*[192] *distinte determinano un* fascio ∞^1*; tre forme non situate in un fascio determinano una* rete ∞^2*; ecc*. (pag. 36).

Segre passa, quindi, a studiare i fasci di iperconiche e di iperquadriche e di antipolarità: se $\lambda \sum a_{lm} x_l \bar{y}_m + \mu \sum b_{lm} x_l \bar{y}_m = 0$ è un fascio di antipolarità, le proprietà di questo si possono mettere in relazione con proprietà della collineazione risultante dal prodotto delle due antipolarità base del sistema, sicché, con le dovute precauzioni, si può dare una classificazione di iperconiche e di iperquadriche rifacendosi alla collineazione prodotto. I fasci di iperconiche e di iperquadriche vengono esaminati a partire da cosa è e come si determina una base del fascio, quali sono i punti singolari o doppi, quando il fascio è degenere e, infine, lo studio di determinati casi particolari come ad esempio la mutua posizione di due iperconiche o di due iperquadriche.

Quindi, viene introdotto lo studio di una rete definita da $\lambda \sum a_{lm} x_l \bar{y}_m + \mu \sum b_{lm} x_l \bar{y}_m + \nu \sum c_{lm} x_l \bar{y}_m = 0$ a partire da tre antipolarità che non formino un fascio. Escludendo i casi in cui tutte le forme della rete sono degeneri, si ottengono i seguenti risultati:

---

[192] Per forma si intende o un'antipolarità, o un'iperconica o un'iperquadrica.

> *La rete determina una cubica γ e due corrispondenze iperalgebriche univoche, involutorie (o simmetriche), fra i suoi punti. Le coppie di punti omologhi dell'una corrispondenza, Ω, sono le coppie di punti reciproci rispetto a tutte le forme della rete. Le coppie di punti omologhi dell'altra corrispondenza, Π, sono le coppie di punti singolari delle antireciprocità degeneri della rete, cioè i centri delle coppie di fasci antiproiettivi che fan parte della rete* (Segre 1889-91, pag. 54-55).

I punti uniti della corrispondenza Ω sono i punti base della rete (ma se nella rete vi è un'antipolarità priva di iperconica fondamentale, allora la rete non avrà punti base) punti che in generale formano sulla cubica una varietà iperalgebrica ∞^1, detta *filo del 3° ordine* o *filo cubico* (indicato con Ω); in generale verranno chiamati *fili* tutte le varietà di ∞^1 punti, in particolare le catene rettilinee sono *fili del 1° ordine*, e le catene coniche sono *fili piani*.

I punti uniti, invece, della corrispondenza Π sono i punti singolari delle antipolarità degeneri della rete. Chiamando *corda* di Ω ogni retta che o incontri il filo cubico Ω oppure contenga due punti omologhi nella corrispondenza Ω, si potrà affermare che le catene semplici di rette che fanno parte della rete si compongono tutte di corde di Ω, e viceversa. Mentre a differenza della Ω, la corrispondenza Π ammette sempre un filo Π di punti uniti, in modo analogo a Ω, Π determina tra i punti di γ una corrispondenza tra le coppie di punti reciproci rispetto una rete di iperconiche. In più si può dimostrare che *il filo Π' trasformato di Π mediante la corrispondenza Ω è quello che ha colla Π la stessa relazione che il filo Π ha colla Ω* (pag. 57).

Segre passa quindi a dimostrare l'esistenza di *cubiche armoniche*, cioè cubiche proiettive a una cubica reale che hanno per birapporto di 4 punti un numero reale o un numero complesso con modulo l'unità.

Da quanto esposto si evince che vi è un certo legame tra le cubiche appena introdotte e le cubiche piane della geometria proiettiva: basta infatti comporre ogni antiproiettività con un'altra fissata, per esempio il coniugio, per ottenere delle corrispondenze proiettive.

La nota si conclude con la determinazione delle corrispondenze Ω e dei fili cubici da esse individuate sopra una cubica piana razionale.

§4.4 Segre 1892

Nell'articolo (Segre 1892) che andremo ora a esaminare, Corrado Segre segue una via di studio diversa dal precedente articolo del 1889-90. Infatti, pur rimanendo argomento principale la trattazione di elementi ed enti complessi (e con ciò intendendo indifferentemente reali o immaginari) come nella già vista memoria, Segre ora studia a fondo le

> *rappresentazioni di questi con enti algebrici reali, le quali si hanno mediante rappresentazioni reali degli elementi complessi delle forme fondamentali di 1^a, 2^a, … specie* (Segre 1892, p. 414).

Segre ritrova molti dei concetti precedentemente sviluppati, ma li tratta in modo nuovo: se prima aveva esposto le sue ricerche ponendosi più nell'orbita di von Staudt senza badare tanto ai contemporanei sviluppi che i punti di vista analoghi ai suoi avevano avuto, ora egli è in grado di collegare i suoi studi a vari campi della matematica ed è quindi molto più consapevole della loro importanza. Anche per questo è significativa la sua pubblicazione nei *Mathematische Annalen*, una delle riviste più importanti dell'epoca.

Innanzitutto è emblematico l'esordio. Segre riporta una frase tratta dalla prefazione dei *Beiträge* di von Staudt, il cui nome (il che non è un fatto da sottovalutare) ritorna ancora sistematicamente in tutto l'articolo. La citazione[193] fatta da Segre tratta dall'incipit dei *Beiträge*, oltre a evidenziare il vincolo che lega l'opera del matematico piemontese a quella del matematico tedesco, mira a rendere palese lo scopo dell'autore torinese: dimostrare come *qualunque nuovo concetto che si introduce o che si estende da uno preesistente contribuisce a far fare alla matematica quel passo in avanti che ne costituisce un progresso per la scienza in toto*[194]. In questo concetto

[193] *Indem die Mathematik darnach strebt, Ausnahmen Von Regeln zu beseitigen und verschiedene Satze aus einem Gesichtspunkte aufzufassen, wird sie häufig genöthigt, Begriffe zu erweitern oder neue Begriffe aufzustellen, was beinahe immer einen Fortschritt in der Wissenschaft bezeichnet* (=*Aspirando la matematica a rimuovere eccezioni da regole e a comprendere proposizioni differenti sotto uno stesso punto di vista, si trova spesso costretta a estendere i concetti o a stabilirne dei nuovi, il che denota quasi sempre un progresso della scienza* (von Staudt 1856, Vorwort pag. III).

[194] Come da trascrizione (libera) della frase in tedesco di von Staudt riportata da Segre come *incipit* al suo lavoro.

sembra riecheggiare la polemica, proprio di quegli anni, tra Segre e il suo collega Giuseppe Peano[195].

L'articolo di Segre è diviso in due parti. Nella prima vengono esaminate le rappresentazioni reali delle forme e degli enti iperalgebrici in accordo col suo Saggio del 1889-91[196], nella seconda Segre studia l'introduzione degli elementi bicomplessi quale estensione possibile del campo complesso. Il lavoro viene chiuso con un suggerimento per ulteriori e successive generalizzazioni.

Ma perché è importante trattare le rappresentazioni degli enti complessi? Si deve notare, e la presente tesi cerca di dimostrare anche questo, che le rappresentazioni geometriche degli enti complessi hanno guidato i matematici sin dalla fine del Settecento nello studio sia di *nuove* forme geometriche (come nel caso di Segre) sia di *nuovi* metodi di investigazione (come ad esempio nel caso di Bellavitis e del suo calcolo delle equipollenze). I molteplici collegamenti tra campo reale e campo immaginario hanno da sempre affascinato la mente umana, ma si dovette aspettare la seconda metà del XIX secolo per arrivare a una trattazione rigorosa, forse anche stimolata dalle ricerche in campo geometrico relative alle geometrie non, del campo complesso e di quello, come amava definirlo Segre, iperalgebrico.

Infatti, il matematico torinese, vista l'ormai progressiva affermazione dei numeri e degli elementi complessi quale estensione del campo reale, approda a uno studio sempre più generale della teoria geometrica con lo scopo di esaminare

> *gli enti definiti da legami analitici, funzionali fra le coordinate degli elementi* […] *e le loro coniugate* (Segre 1892, pag. 413-414),

che chiama enti iperalgebrici.

Per questa via Segre ritroverà non solo molti dei risultati già ottenuti, ma anche alcune proposizioni più generali. Oltre a ciò, se studiando gli enti algebrici (nel campo reale) è risultata *naturale* l'introduzione degli elementi complessi, con lo studio degli enti iperalgebrici si renderà

[195] Cfr. (Avellone, Brigaglia, Zappulla 2002).

[196] (Segre 1889-91).

necessaria, od almeno utilissima, una nuova estensione di questi elementi in quelli che dico elementi bicomplessi (ibidem, pag. 414)[197].

La rappresentazione di questi ultimi enti, anch'essi iperalgebrici, sarà fatta mediante gli enti algebrici reali, cioè sarà dedotta a partire dalle

rappresentazioni reali degli elementi complessi delle forme fondamentali di 1^a, 2^a, … specie (ibidem, pag. 414).

Segre inoltre è perfettamente consapevole del fatto che le considerazioni che andrà a introdurre

non offrono solo interessi, sì geometrici che analitici e specialmente algebrici, per se stessi, ma possono fornire molteplici aiuti a parecchie teorie matematiche. Dovunque compajono variabili complesse accanto a cui si debbano considerare le coniugate, […] nella teoria delle funzioni di una o più variabili complesse (ad esempio di quelle automorfe); nelle questioni […] delle rappresentazioni conformi, delle superfici minime; in certe moderne ricerche sulle teoria dei numeri (interi complessi) e di particolari gruppi di sostituzioni. (ibidem, pag. 415),

permettendo non solo una maggiore generalizzazione ed esemplificazione delle teorie ma anche di ottenerne delle nuove.

È questa una delle cose più rilevanti dell'opera di Segre: aver intravisto già nel momento stesso della stesura dei suoi scritti, e cioè nei primi anni Novanta, l'importanza degli stessi sia come base per eventuali studi in analisi complessa, sia come fonte di studio in campo geometrico.

Ciò forse è stato poco compreso dai suoi contemporanei, che pur apprezzandone i contenuti non hanno saputo continuare le sue ricerche, e dai suoi più recenti biografi che hanno sottovalutato la portata di queste memorie di Segre. Esse saranno riprese a metà anni venti dello scorso secolo, soprattutto ad opera di Coolidge e di Cartan (si veda Capitolo 7).

---

[197] Se i punti complessi sono stati introdotti come coppie di numeri reali, in analogia, un punto bicomplessso è individuato da una coppia di numeri complessi (cfr. (Segre 1892, pag. 449)).

Le idee di Segre, comunque, vennero esposte in un forma algebrica da Sforza[198] in quello stesso anno.

§ 4.4.1 Contenuto della memoria (Segre 1892)

Entriamo nei particolari dell'articolo.

Nei primi paragrafi vengono riassunte le rappresentazioni reali degli elementi immaginari di forme semplici (di 1[a] specie) e del piano complesso (di 2[a] specie o doppia). Di seguito vengono riportate.

Per quanto riguarda le forme di 1[a] specie, sono tre le rappresentazioni reali:

0. quella mediante punti reali nel piano di Argand-Gauss che risulta se si considera come sostegno della forma (complessa) di prima specie la retta;
1. se invece per essa si considera sostegno una retta immaginaria di secondo genere si ottiene la rappresentazione introdotta da von Staudt con la quale si identificano i punti complessi con rette reali di una congruenza lineare reale ellittica;
2. infine si ha la rappresentazione dovuta a Riemann e studiata da Neumann[199] per la quale le rette immaginarie di 1[a] specie, ovvero una *schiera* di generatrici di una quadrica reale a punti reali ellittici (cioè una sfera, si tratta della ben nota proiezione stereografica), vengono rappresentati dai punti reali di quella quadrica (in altre parole le rette immaginarie di primo genere di una schiera rigata, che è la forma fondamentale, vengono rappresentate dai punti di superfici del secondo ordine, in particolare dai punti di una superficie sferica).

Tali rappresentazioni sono dipendenti l'una dall'altra, e quindi l'una si può dedurre dall'altra con banali considerazioni (cfr. (Segre 1892, pag. 417)). L'identità tra le ultime

[198] Cfr. (Sforza 1891). Si veda anche (Hawkins 2000, pag. 311).

[199] La rappresentazione di Riemann Neumann (della variabile complessa x+iy, distesa su quella schiera di rette (Segre 1892, pag. 417).

due rappresentazioni viene ancor di più messa in rilievo da Segre mostrandone le equazioni analitiche.

Per i punti complessi di un piano π (forma fondamentale di 2^a specie o doppia), Segre introduce i punti reali di uno spazio reale a 4 dimensioni (un S_4) nel seguente modo: si sceglie come forma fondamentale la rete costituita dai piani di S_4 e i punti di π saranno immagini dei piani della *rete* che passano per una retta fissa *r* immaginaria di 2^a specie, cioè sghemba con la coniugata *r'*. Quindi i punti di π avranno per immagine i piani della rete, in particolare l'*unico* (cfr. (Segre 1892, pag. 419)) punto reale del piano della rete. Invece i punti di una retta di π saranno i piani di un fascio (di piano) della rete, i quali corrispondono ai punti reali d un piano per *r* e *r'*. In altre parole, una retta di π avrà per immagine un piano reale di S_4, cioè piani di Gauss. In termini analitici, la rappresentazione di π su S_4 si avrà quando un punto di π con coordinate $x+iy$ e $u+iv$ (cioè due variabili complesse) avrà per immagine il punto di S_4 avente la quattro coordinate reali x, y, u, v.

Un'altra possibile rappresentazione di π è data mettendo in corrispondenza ciascun punto (complesso) di π con la retta reale che lo contiene; tali rette (reali) dello spazio ordinario danno luogo a una congruenza lineare ellittica. La corrispondenza è univoca a eccezione dell'unica retta reale di π cui corrisponderà essa stessa.

In generale (cfr. (ibidem, §7 pag. 423), le rappresentazioni reali degli elementi complessi di una forma fondamentale di specie *n*, si ottengono con punti reali di un S_n, in particolare come generalizzazioni di quelle esposte prima, poiché il concetto resta sempre lo stesso: sulla varietà reale rappresentativa Φ si considerano due schiere coniugate di particolari varietà e si riferisce proiettivamente una di queste schiere con la forma fondamentale F presa in considerazione (quindi si può sostituire a essa):

> *allora ogni elemento di quella schiera insieme col conjugato dell'altra dà una coppia reale, un ente (punto o retta) reale, che serve a rappresentare quell'elemento della 1^a schiera, e quindi l'elemento complesso di F* (ibidem, pag. 424).

Segre è lungimirante: capisce che le sue considerazioni sulle rappresentazioni reali dei punti di un S_n con gruppi di n valori di numeri complessi risultano utili nello studio delle funzioni di n variabili complesse (le coordinate), poiché risulta naturale rappresentare queste variabili complesse su piani di Gauss o sfere di Riemann.

Bisogna comunque definire quale sia il gruppo di trasformazioni (reali) che ciascuna delle tre rappresentazioni considerate faccia corrispondere al gruppo di proiettività della forma complessa.

Facilmente si trova che

> *le projettività della forma semplice corrispondono nella rappresentazione di Staudt alle trasformazioni lineari reali di 1ª specie della congruenza ellittica*" (ibidem, pag. 425).

Se invece si considera la rappresentazione della sfera sul piano di Gauss le trasformazioni corrispondenti alle proiezioni stereografiche sono le due specie[200] delle trasformazioni circolari (gruppo delle inversioni).

Se si considera, infine, lo spazio reale S_4 si ottengono anche delle trasformazioni *quadratiche*[201].

Restano così definite delle trasformazioni reali di 2ª specie (quelle di 1ª specie sono le proiettività) *analoghe alle projettive ma essenzialmente distinte da esse* (ibidem, pagg. 427-8) che Segre chiama **antiproiettività,** per il cui studio e per le cui proprietà rimanda al saggio del 1889-91. Dopo aver comunque ricordato che mentre le proiettività conservano il valore del birapporto di due tetradi (*Würfe*) omologhe e le antiproiettività ne mutano il valore nel suo coniugato, Segre specifica che entrambi i tipi di trasformazioni continue conservano i gruppi armonici e che, poiché un banale esempio di antiproiettività si ha nel *coniugio, le corrispondenze antiproiettive si possono anche definire come prodotti del coniugio e di proiettività (e viceversa)* (ibidem, pag. 428). Quindi:

uno, il gruppo di corrispondenze che comprende tutte le antiproiettività deve altresì comprendere anche tutte le proiettività[202],

due, l'equazione analitica di un'antiproiettività è data da

---

[200] Le due specie sono dovute al fatto che, fermo restando la proprietà di conservare gli angoli, se ne può mutare o no il verso.

[201] Trasformazioni analitiche che mutano in sé l'insieme di varietà quadratiche passanti per le rette fisse *r, r'* da cui l'S_4 era proiettato.

[202] Si ricorda che il prodotto di due antiproiettività danno una proiettività, un'antiproiettività per una proiettività danno un'antiproiettività.

> $x'_l \equiv \sum_m a_{lm}\bar{x}_m$ *le quali esprimono le coordinate di un elemento x' dell'una forma come forme lineari nei valori coniugati* $\bar{x}_m$ *delle coordinate* x_m *che ha l'elemento omologo x nell'altra forma* (ibidem, pag. 429).

In altre parole noi oggi diremmo essere corrispondenze hermitiane in cui, cioè, intervengono i valori delle coordinate x_m di un elemento e i valori dei loro coniugati $\bar{x}_m$.

Fra le corrispondenze antiproiettive meritano uno studio più approfondito quelle involutorie: esse permettono, attraverso i loro elementi uniti, di definire *le prime (e le più semplici) varietà iperalgebriche* (ibidem, pag. 429): le catene. Le antiproiettività involutorie (o semplicemente *antinvoluzioni*) di una forma fondamentale semplice sono congiunte a una proiettività (definita tra i due fasci di rette C e C' del piano σ di Gauss); in tale situazione il cerchio luogo dei punti d'intersezione delle rette omologhe (nella sfera sarà la sezione con un piano reale) sarà, tale che:

1) è coniugato di se stesso,

2) è privo di punti reali o ne avrà infiniti;

allora *un'antivoluzione in una forma fondamentale semplice o non ha elementi uniti o ne ha infiniti formanti una catena semplice* (ibidem, pag. 430). Come von Staudt, Segre definisce col termine *catena* un insieme di ∞^1 elementi di una forma fondamentale semplice che sul piano σ (o sulla sfera) è rappresentata da un cerchio reale. Le antinvoluzioni mutano catene in catene e la catena stessa si può

> *definire come il luogo degli elementi uniti di un'antinvoluzione ben determinata. L'imagine di un'antinvoluzione sul piano σ (o sulla sfera) non è altro che un'ordinaria inversione* (ibidem, pag. 430).

Punto cruciale della memoria è la varietà Σ, introdotta già da Segre in un articolo pubblicato un anno prima nei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (Segre 1891) e quasi in contemporanea dell'ultima nota di (Segre 1889-91). In esso Segre definisce le varietà che rappresentano le coppie di elementi immaginari e introduce la varietà Σ (un opportuno spazio S_4, anzi una varietà proiettiva a esso[203]) che passerà alla storia col suo nome.

[203] Si veda (Segre 1891, pag. 196).

Infatti, si consideri adesso il piano π e il suo coniugato π'. Sia Σ la varietà formata dai punti immagine delle coppie di punti x, y con $x\in\pi$ e $y\in\pi'$; se Σ è ellittica (cioè tutti i suoi piani sono immaginari e quindi le due schiere di piani[204] sono coniugati), ogni piano incontrerà il suo coniugato in un punto reale di Σ; essendo i punti reali di Σ infiniti, ognuno di essi corrisponderà a un preciso piano di Σ su cui esso sta (ma se sta su un piano di una schiera starà anche sul piano coniugato appartenente all'altra schiera) e quindi agli infiniti punti del piano π (per ogni punto di π passa un piano)[205]. Un esempio ne è la sfera (quadrica ellittica) che serve per rappresentare gli elementi complessi di una forma semplice. In altre parole,

> *la rappresentazione degli elementi complessi di π, od in generale di qualunque forma fondamentale doppia, coi punti reali di Σ si potrà considerare come ottenuta sostituendo a quella forma (ossia riferendole proiettivamente) una delle due schiere di piani di Σ, e poi rappresentando i piani di questa schiera coi loro rispettivi punti reali* (Segre 1892, pag. 422).

Infine le quadriche di Σ sono le immagini delle rette di π (come nella rappresentazione di Riemann). Σ e S_4 sono proiettivamente equivalenti poiché dallo spazio S_3 di una quadrica i punti reali di Σ vengono proiettati sui punti reali di S_4.

In una forma semplice si hanno sempre due specie di trasformazioni continue reali: quelle di 1[a] specie, le proiettività, e quelle di 2[a] specie, le antiproiettività. In un piano si hanno due specie di corrispondenze continue: le collineazioni e le anticollineazioni, come anche le reciprocità[206] e le antireciprocità. Segre rimanda opportunamente qui al suo Saggio del 1889-91.

Fra le corrispondenze antiproiettive di una forma semplice hanno particolare interesse le antinvoluzioni, poiché sono i punti uniti (che o non esistono o se esistono

---

[204] Poiché la varietà Σ può essere rappresentata analiticamente da $X_{lm}=x_l y_m$ (l,m=1,2,3), i suoi punti X possono essere rappresentati dalle coppie di punti x, y presi rispettivamente sui due piani π, π'. Σ contiene allora due schiere di piani (ognuna contiene ∞^2 piani): la prima ottenuta tenendo fisso x, la seconda tenendo fisso y; per ogni punto di Σ passano un piano della prima schiera e un piano della seconda schiera (cfr. (Segre 1891, pag. 194 e segg.) e (Segre 1892, pag. 421)).

[205] Cfr. (Segre 1891, pag. 203).

[206] Esse mutano punti in rette e punti di una retta nelle rette che passano per quel punto.

sono ∞^1) di queste che danno le più semplici varietà iperalgebriche: le catene (semplici), che sul piano σ di Gauss sono rappresentate da un cerchio.

Sia un'antinvoluzione sul piano π. Essa sarà rappresentata su Σ da una collineazione reale di 2ª specie involutoria i cui punti uniti (cioè i punti in cui si tagliano i piani omologhi delle due schiere) sono ∞^2 (esattamente quanti i piani di una schiera) e formano una catena piana; e determinano una superficie del 4° ordine F^4 di uno spazio S_5, luogo di ∞^2 coniche, cioè una superficie di Veronese.

Così resta determinata una catena doppia (cioè piana o di 2ª specie) dagli ∞^2 punti uniti di un'antinvoluzione piana, catena che corrisponde alla superficie F^4 di Veronese. Si dicono *corde* della catena doppia le ∞^2 rette unite: una retta qualunque del piano interseca la catena doppia in un unico punto (il punto d'intersezione con la retta che le corrisponde nell'antinvoluzione), una corda interseca la catena doppia in ∞^1 punti che formano una catena semplice che corrispondono alle coniche di F^4.

Il tutto può essere generalizzato per un S_n, le cui antinvoluzioni determinano quindi *catene n-ple* (luoghi degli ∞^n punti uniti dell'antinvoluzione), che si possono proiettivamente trasformare in catene costituite dai punti reali di un S_n reale.

Analiticamente un'antipolarità è rappresentata dall'equazione $\sum a_{lm} x_l \bar{y}_m = 0$ fra i punti reciproci *x* e *y*, con $a_{ml} = \bar{a}_{lm}$. Essa può essere espressa in forma canonica con $\sum a_l x_l \bar{y}_l = 0$ con a_l reali, i cui punti uniti soddisfano l'equazione $\sum a_l x_l \bar{x}_l = 0$. L'antipolarità può anche non avere punti uniti, ma se li ha essi saranno: ∞^1 sulla retta, e quindi formano una catena semplice; ∞^3 nel piano, e quindi formano un'iperconica; ∞^5 nello spazio, e quindi formano un'iperquadrica.

Se l'antipolarità è degenere (per esempio essere una reciprocità), la catena rettilinea (semplice) si riduce a un solo punto (catena nulla o catena-punto), oppure l'iperconica si riduce a una catena semplice di rette di un fascio, ecc. …; analiticamente si avrà che qualche (opportuno) coefficiente nella forma canonica è uguale a zero[207].

Segue una lunga trattazione sugli enti iperalgebrici in generale: essi sono fili (o monovarietà), tele (o bivarietà), trivarietà, cioè immagini reali rispettivamente dei punti complessi di una varietà ∞^1, ∞^2, ∞^3. Così le catene rettilinee sono fili rettilinei, le catene

[207] Cfr. (Segre 1892, pag. 433).

piane sono tele, le iperconiche sono esempi di trivarietà piane, le iperquadriche esempi di pentavarietà dello spazio.

> *In generale gli ∞^2, ∞^4, … punti complessi di una curva, superficie, … costituiscono delle particolari bivarietà, tetravarietà, ecc. Mentre gli ∞^1, ∞^2, … punti reali di un'ordinaria curva, superficie, … reale formano dei particolari fili, tele, ecc.* (ibidem, pag. 437).

Le catene rettilinee sono esempi di fili rettilinei, le iperconiche di trivarietà piane, le iperquadriche di di pentavarietà dello spazio; le catene piane sono invece delle tele.

La dimensione di una varietà qualunque corrisponde al numero dei parametri reali indipendenti; quindi le varietà ordinarie rappresentanti reali di elementi complessi avranno dimensione doppia rispetto alla dimensione (complessa) dell'ente iperalgebrico. Quindi, in generale la rappresentazione dei punti complessi di un S_n avviene tramite i punti reali di un S_{2n}.

Studiando le rappresentazioni reali si ottengono delle esemplificazioni della teoria e molte proprietà che per altri versi sarebbero state astruse da derivare.

> *Ad esempio essa* [la rappresentazione reale] *permette di risolvere subito la questione delle rette, piani, … tangenti* (ibidem, pag. 437).

L'insieme degli enti iperalgebrici contiene quelli algebrici (intesi come casi particolari essendo immagini reali di enti reali) e può essere tanto una varietà di punti, rette, ecc., come le catene, i fili, le tele, ecc., quanto un connesso, una corrispondenza, ecc., come le antiproiettività. Il fatto che nei lavori di Segre un ente iperalgebrico, inteso come *nuovo concetto*[208], è un ente complesso la cui rappresentazione reale è un ente algebrico[209], ha notevole importanza, giacché non sempre nelle rappresentazioni reali degli enti iperalgebrici *si bada che le imagini siano ancora algebriche*; per esempio spesso si rappresenta una curva algebrica coi punti reali di una superficie di Riemann, mentre le rappresentazioni di Segre

> *danno invece per imagine reale di una curva algebrica una superficie reale algebrica* (ibidem, pag. 438 in nota).

---

[208] Cfr. (Segre 1892, pag. 438).

[209] Il che equivale a dire che l'ente iperalgebrico è formato da elementi le cui componenti reali sono legate da una o più equazioni algebriche date.

Per corrispondenze[210] od operazioni iperalgebriche qualsiasi si ottengono da enti iperalgebrici sempre enti iperalgebrici. Quindi Segre precisa che l'insieme degli enti iperalgebrici forma un corpo (ibidem, pag. 439).

Analogamente, si parla di enti iperanalitici se essi vengono rappresentati con enti analitici, cioè vengono definiti da funzioni analitiche nel senso di Weierstrass[211].

La trattazione di fili, tele e trivarietà prosegue con lo studio del loro indice, del loro grado o ordine, con una loro classificazione secondo l'ordine[212], il tutto in perfetta analogia col suo Saggio del 1889-91. Anzi spesso Segre rimanda a quell'articolo per non doversi perdere in sovrabbondanti ripetizioni.

Si passa quindi alla seconda parte dell'articolo e all'introduzione dei punti bicomplessi, introduzione che rappresenta una notevole novità rappresentando un passo decisivo nell'introduzione di geometrie su algebre con divisori dello zero.

Partendo dal fatto che in matematica si può ovviare a numerosi inconvenienti

> *seguendo quel principio dell'ampliamento delle nozioni, a cui la Matematica deve tanti progressi, e che in particolare per la geometria delle varietà algebriche aveva portato dai punti reali ai punti complessi. Ora si presenta opportuna un'ulteriore estensione. Non sono più sufficienti i punti complessi. Conviene introdurre dei punti bicomplessi, cioè degli enti che abbiano per imagini i punti complessi delle forme rappresentative* (ibidem, pag. 449).

Per definire geometricamente i punti bicomplessi basta "riportare alla forma oggettiva" una delle rappresentazioni geometriche reali dei punti complessi già note, per esempio quella di von Staudt dei complessi definiti mediante involuzioni reali ellittiche congiunte al verso della forma.

Un punto bicomplesso è un ente che ha per immagine complessa un punto complesso nella forma rappresentativa. Ma cerchiamo di spiegare cos'è un punto bicomplesso e darne una definizione diretta.

---

[210] Per corrispondenza algebrica si intende una corrispondenza che ha per immagine reale una corrispondenza algebrica. Il loro insieme costituisce un gruppo (di cui, in generale, fanno parte le antiproiettività).

[211] Cfr. (Segre 1892, pag. 442).

[212] Cfr. (Segre 1892, pagg. 442-443).

Un punto bicomplesso P sta su una retta complessa ben definita che a sua volta ha una rappresentazione reale sul piano di Gauss o sulla sfera, e di cui P farà parte; si considerino i cerchi reali (del piano o della sfera) che passano per un punto P_1 rappresentativo di P sono le immagini di un fascio di catene semplici di cui il punto bicomplesso è un punto base[213] insieme all'altro punto bicomplesso Q che ha per immagine Q_1 coniugati di P_1 e che viene detto *gemello* di P. Quindi, come definizione geometrica diretta di punto bicomplesso P, o della coppia di punti bicomplessi P Q, si considera la seguente: due catene rettilinee prive i punti complessi comuni, ovvero il fascio di catene da essi determinato, e la coppia di punti bicomplessi è l'intersezione di queste catene. Si può anche considerare l'involuzione reale ellittica che ha P_1 e Q_1 per punti doppi, che individua una catena rettilinea (del fascio) e su essa un'involuzione ordinaria che non ha punti complessi, allora tale involuzione sulla catena si dirà «coppia di punti bicomplessi gemelli» (=punti doppi dell'involuzione). Volendo separare i due punti gemelli basterà aggiungere un verso all'involuzione individuata sulla catena.

Naturalmente, un punto complesso è un punto bicomplesso che godrà della proprietà di coincidere col suo gemello.

I punti bicomplessi così definiti si possono studiare accanto i punti complessi di una qualunque varietà iperalgebrica. E così come nella geometria proiettiva reale il concetto di punti complessi coniugati è un invariante, concetto che non lo è più nella geometria proiettiva complessa poiché il coniugio equivale ad un'antinvoluzione qualunque, allo stesso modo si conserva in quest'ultima la nozione di punti bicomplessi gemelli che poi *svanisce* nel passaggio alla geometria proiettiva bicomplessa.

Con l'introduzione dei punti bicomplessi si generalizza il concetto di forma F le cui varietà e corrispondenze complesse non solo più solo quelle le cui immagini sono reali, ma anche quelle bicomplesse (e iperalgebriche) che si rispecchiano nelle varietà e corrispondenze complesse (e algebriche). E le proiettività bicomplesse[214] che mutano punti bicomplessi in punti bicomplessi costituiscono il *gruppo fondamentale* della geometria proiettiva bicomplessa.

[213] Cioè intersezione di tutte le catene del fascio.

[214] Le proiettività complesse mutano punti complessi in punti complesi.

E ancora, così come la geometria proiettiva reale si ottiene dalla geometria proiettiva complessa fissando una varietà costituita da tutti i punti reali, quest'ultima deriva nella geometria proiettiva bicomplessa se si fissa una varietà di punti tutti complessi. E analogamente, tra le varietà bicomplesse si definiranno le due schiere di *protofili* su una retta (complessa), o di *prototele* su un piano, o nello spazio di *protovarietà* a tre dimensioni, e in generale in un S_n avremo protovarietà a *n* dimensioni. Una collineazione (complessa o bicomplessa) della retta muta schiere di protofili in se stesse, quelle di un piano mutano schiere si prototele in sé, ecc., la anticollineazioni scambiano tra loro le due schiere di protofili, di prototele, ecc..

Ma non tutto si mantiene per analogia; per esempio indici e ordini delle varietà iperalgebriche hanno bisogno di ulteriori precisazioni.

Comunque alla fine Segre ottiene che

> lo *studio dei punti bicomplessi di una forma fondamentale F, retta, piano, .., od S_n, equivale a quello delle coppie di punti complessi di due forme fondamentali della stessa specie f, f', cioè di due rette, piani, .., od S_n indipendenti […]*)*[215]*: la geometria proiettiva bicomplessa di F corrisponde alla geometria delle trasformazioni proiettive complesse indipendenti di f e f' (mentre la geometria proiettiva complessa di F si avrebbe fissando una certa corrispondenza antiproittiva tra f e f')* (ibidem, pag. 454).

Il parallelo tra punti bicomplessi e numeri bicomplessi segue immediatamente. Infatti se i punti complessi di una retta sono rappresentati dai punti reali del piano σ, e precisamente il punto che sulla retta ha per coordinata il numero complesso $x+iy$ (x e y reali e $i^2=-1$) ha per immagine nel piano σ il punto di coordinate (x,y). Ora, per ottenere sulla stessa retta i punti bicomplessi, si devono considerare nel piano σ anche i punti complessi (x,y), le cui coordinate sono

$$x=x_1+hx_2 \qquad \text{e} \qquad y=y_1+hy_2,$$

dove x_1, x_2 , y_1, y_2 sono reali e $h^2=-1$, e quindi considerare che il punto bicomplesso della retta abbia coordinata $x+iy$, ossia nel piano

[215] *) *Ne segue che, ad esempio, i punti bicomplessi di una retta o piano trovano la loro rappresentazione reale nelle coppie di punti reali di due sfere (o piani di Gauss, ecc), o varietà Σ, ecc.*

$$x_1+hx_2+i(y_1+hy_2,)= x_1+hx_2+iy_1+hiy_2.$$

In tal modo il punto bicomplesso avrà sulla retta delle coordinate (numeri) bicomplessi del tipo $x_1+hx_2+iy_1+hiy_2$, ove x_1, x_2, y_1, y_2 sono reali e i e h sono due unità immaginarie distinte per le quali $h^2= i^2=-1$ (ma $h\neq\pm\ i$) e che il loro prodotto sia associativo e commutativo.

Proprio perché il prodotto è commutativo essi sono un particolare sistema di numeri a più unità immaginarie (in generale non commutativi rispetto al prodotto), sistemi studiati in quegli anni da Weierstrass che nel 1884 pubblica una memoria sulle *Nachrichten* di Gottinga dal titolo *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildete complexen Grossen*[216] cui seguono altre pubblicazioni da parte di Schwarz (Schwarz 1884), Dedekind (Dedekind 1885) e Hölder (Hölder 1886). Ma la trattazione di Segre sembra essere molto più vicina a quella di Hamilton sui quaternioni: infatti nel testo *Lectures on Quaternioni* del 1853 al n. 644 (pag. 638-9), Hamilton definisce i biquaternioni come le soluzioni di equazioni che hanno per incognite quaternioni, e come nota Segre, essi sono numeri del tipo $x_1+hx_2+iy_1+hiy_2$: a parte la differenziazione di nome per i (versore) e h (numero) dati da Hamilton, tali biquaternioni non sono altro che i bicomplessi di Segre. La particolare caratteristica di questi è che, mentre per i numeri complessi (e per i quaternioni) un prodotto si annulla se è nullo uno dei due fattori, nel campo bicomplesso esistono numeri non nulli che annullano il prodotto: sono i cosiddetti divisori dello zero, che Segre, come Hamilton, chiama *nullifici*.

A conclusione del suo lavoro, Segre è portato *naturalmente a una serie indefinita di successive generalizzazion*i (ibidem, pag. 463). Se ∞^n erano i punti reali di un F e le forme (reali) in esso si dicevano algebriche, ∞^{2n} saranno i suoi punti complessi e le forme in esso si diranno iperalgebriche; se si considerano invece i suoi ∞^{4n} punti bicomplessi le forme verranno dette *biiperalgebriche*:

> *esse si ottengono ponendo legami algebrici fra i coefficienti reali delle coordinate bicomplesse degli elementi di F* (ibidem, pag. 464).

Questa sequenza può essere iterata introducendo in F una nuova specie di elementi, più ampia degli elementi bicomplessi, detti *tricomplessi* (∞^{8n}), i quali

[216] Si veda il capitolo successivo.

verranno definiti mediante elementi bicomplessi, e che avranno tre unità immaginarie i, h, l.

> *In generale, ottenuto il concetto di elementi (s-1)-complessi e di varietà (s-1)-iperalgebriche, a tali elementi ed a tali varietà della forma rappresentativa ϕ corrisponderanno su F nuove specie di elementi e di varietà: elementi s-complessi, e varietà s-iperalgebriche. La forma F di specie n contiene $\infty^{n \cdot 2s}$ elementi complessi, e questi formano corpo rispetto alle operazioni (s-1)-iperalgebriche […]. Fra gli elementi s-complessi stanno quelli reali, complessi, bicomplessi,… (s-1)-complessi. E fra e varietà s-iperalgbriche che si posson fare con s-complessi vi sono in particolare quelle algebriche, iperalgebriche, … (s-1)-iperalgebriche*. (ibidem, pag. 464-465).

Queste successive estensioni appaiono a Segre non solo *naturali* e *spontanee*, ma anche e soprattutto *utili* e *necessarie*: infatti l'introduzione dei numeri complessi si era resa tale nella risoluzione delle equazioni, e una volta adoperata questa scelta (necessaria per il teorema fondamentale dell'algebra), le ulteriori generalizzazioni e lo studio delle

> *varietà iperalgebriche, degli elementi bicomplessi, e così via, non è più un artificio: è, come abbiamo detto una necessità* (ibidem, pag. 464-465).

Tale concetto è in perfetto accordo con quanto affermato da Hamilton a proposito della necessità e dell'importanza dei suoi biquaternioni e la loro introduzione tanto in algebra quanto in geometria per le ricerche future[217].

Le relative complicazioni insite nella teoria così estesa sono da considerare il prezzo della necessità e di vantaggi del loro studio: abbiamo detto *relative*, a proposito delle complicazioni, poiché si può riguardare l'aritmetica dei numeri s-complessi ridotta a quella degli ordinari numeri complessi, come Segre ha insegnato e come hanno fanno anche Weierstrass e Dedekind, ad esempio, nei loro lavori.

[217] Cfr. (Hamilton 1853, n.644 pag. 639).

§ 4.5 Conclusioni sulle memorie di Segre qui trattate

> *Fra tutte le branche della matematica, la geometria è quella che più di ogni altra è andata soggetta ai mutamenti del gusto da un'epoca all'altra* (Boyer 1990, pag. 605).

Esordisce così Carl Boyer nel suo libro *Storia della Matematica* all'inizio del capitolo dedicato agli sviluppi della geometria nel XIX secolo; a nostro parere, la geometria si presta facilmente a studi diversificati, vuoi per la moda del periodo vuoi anche a causa delle scoperte e degli sviluppi che sono stati parte integrante del suo studio. E il secolo XIX ne è un esempio. Le teorie esposte in questa tesi (quelle dei francesi Carnot, Monge, Poncelet e Chasles, dei tedeschi Steiner, Möbius, von Staudt, ecc., e degli italiani Ballavitis, Segre, Pieri, senza considerare quelle di tutti i geometri che si occuparono di geometrie *non*, qui argomento non primario) dimostrano che gli sforzi compiuti dai matematici, in particolare da quelli qui citati, portarono a uno studio sempre più puro e astratto della geometria. A subire più cambiamenti è stato soprattutto il linguaggio della geometria, il modo con cui un determinato concetto è stato espresso. La geometria proiettiva, quella che qui maggiormente ci interessa, e in particolare quella sintetica, ha adottato un linguaggio che oggi, soppiantata dall'algebra lineare, è quasi incomprensibile e richiede una continua traduzione di termini e concetti. Le difficoltà dell'opera di von Staudt, malgrado egli, quale riorganizzatore della geometria, sia stato riconosciuto con qualche esagerazione essere pari a Euclide[218], sono per di più dovute proprio alle espressioni lessicali (forse anche di moda) di quel periodo: anzi molti termini furono coniati proprio da lui, come *Wurf* e *Kette,* e i concetti più studiati in campo sintetico, come quello della geometria della retta, delle forme fondamentali, delle tetradi, delle trasformate proiettive applicate a proiettività, non costituiscono più un interesse di ricerca. Oppure perché

> *Questa estensione, ancorché rigorosa, è laboriosa e molto astratta. … C'è qualcosa un po' artificiale in essa; e lo sviluppo della teoria basata su tali fondamenti è necessariamente complicata. Attraverso*

[218] Cfr. (Segre 1889, pag. XXI). Si veda anche (Darboux 1905, pag. 541): *Von Staudt has sometimes been called " the Euclid of the nineteenth century "; I should prefer to call him "the Euclid of projective geometry"; but is this branch of geometry, no matter how interesting it may be, called on to furnish alone the foundation of the future Elements?* (Darboux 1905, pag. 541).

metodi puramente proiettivi von Staudt stabilì un metodo completo di calcolo con il rapporto anarmonico di elementi immaginari. La geometria proiettiva, come tutto il resto della geometria, usa l'idea di ordine, e l'ordine genera il numero; quindi non deve meravigliare se von Staudt riuscì a creare questo calcolo; e noi dobbiamo ammirare la l'ingegno che egli mostra raggiungendo tale risultato. Malgrado gli sforzi di eminenti geometri che hanno tentato di semplificare la sua presentazione, temiamo che questa parte della geometria di von Staudt, così come la geometria molto interessante del profondo pensatore Grassmann, non possa prevalere di fronte ai metodi analitici, che oggi hanno acquisito un favore quasi universale. La vita è breve, il geometra conosce e applica il principio di minima azione. Nonostante queste paure, che non devono scoraggiare nessuno, ci sembra che sotto la prima forma in cui von Staudt ce l'ha presentata la geometria proiettiva dovrebbe ricevere la compagnia necessaria della geometria descrittiva, che è destinata a rinnovare questa geometria nel suo spirito, nei suoi metodi e nelle sue applicazioni. Ciò è stato già riconosciuto in molti paesi, soprattutto in Italia, dove il grande geometra Cremona non ha disdegnato di scrivere un trattato elementare di geometria proiettiva per le scuole (Darboux 1905, pag. 530-1)[219].

---

[219] *This extension, while rigorous, is laborious and very abstract. …There is something a little artificial in this; and the development of the theory raised on such a foundation is necessarily complicated. By purely projective methods von Staudt established a complete method of reckoning with the anharmonic ratio of the most general imaginary elements. Projective geometry, like all the rest of geometry, uses the idea of order, and order begets number; it is not then astonishing that von Staudt was able to create this calculus of his; and we must admire the ingenuity which he displayed in attaining this end. Despite the efforts of the distinguished geometers who have endeavoured to simplify his presentation, we fear that this part of von Staudt's geometry, as well as the very interesting geometry of the profound thinker Grassmann, cannot prevail against the analytic methods which now have acquired almost universal favour. Life is short, the geometrician knows and practices the principle of least action. Despite these fears, which should not discourage any one, it seems to us that under the first form in which it was presented by von Staudt projective geometry should become the necessary companion to descriptive geometry, that it is destined to renew this geometry in its spirit, in its methods of procedure, and in its applications. This has been already recognized in many countries, notably in Italy, where the great geometer Cremona did not disdain to write an elementary treatise on projective geometry for the schools* (Darboux 1905, pag. 530-1).

E le opere di Segre forse soffrono di una tale eredità, affondando esse stesse le radici su quelle di von Staudt. Bisogna quindi operare una incessante traduzione dei termini e dei concetti, renderli attuali per capire fino in fondo cosa Segre volesse dire. Forse è questo il motivo per il quale gli articoli di Segre non ebbero grande diffusione e nessun giovane, al contrario di quanto sicuramente egli avrebbe auspicato, si occupò di tali questioni.

Anche Francesco Severi (1879-1961), nel testo *Geometria Proiettiva*, malgrado all'inizio del paragrafo 28 dedicato alle involuzioni unite di una proiettività, specifica che le considerazioni svolte in tale paragrafo non servono alla comprensione dell'intero corso, a conclusione dello stesso spera che i pochi cenni di teoria svolta

> *possano servire ad invogliare qualche studioso a consultare queste opere* [quelle di Segre] (Severi 1925, pag. 124).

E Federigo Enriques (1871-1946) stesso si chiede[220] quale sia il valore e il significato degli immaginari e come si possa giustificare a priori il loro uso, mettendo in parallelo la teoria sintetica con quella analitica. Si capisce che in campo analitico l'introduzione degli immaginari è un passaggio obbligato; ma in geometria, sostiene Enriques, la giustificazione del loro studio risulta essere ancora più profonda: lo spazio degli elementi reali si allarga in un nuovo spazio astratto, in cui, per esempio, un punto (immaginario) è un'involuzione ellittica sopra una retta reale e in cui risultano nuovi enti da studiare, rette e piani immaginari, catene e antiproiettività. E la giustificazione della teoria degli immaginari, che si specchia in una geometria (reale) astratta a più dimensioni,

> *risponde al bisogno del pensiero di assegnare qualche oggetto concreto in cui si rispecchiano i simboli; ma non si può disconoscere che essa offre, in generale, uno scarso interesse geometrico, a cagione del carattere astratto degli enti introdotti. Onde la Geometria proiettiva complessa viene prevalentemente coltivata, come una illustrazione dell'Algebra; il cui sviluppo ne riceve valido aiuto. Il vero interesse geometrico … appare al caso (contemplato dal Poncelet) in cui l'immaginario serve solo come elemento ausiliario per l'estensione analogica di proprietà … . Ciò accade …*

[220] Cfr. (Enriques 1920, pag. 439)

quando gli immaginari appaiono a coppie, associandosi gli elementi coniugati (Enriques 1920, pag. 442).

In quest'ottica la memoria di Segre del 1888, in cui la coppia di elementi immaginari è un *unicum* (al contrario di quanto fa von Staudt che introducendo un verso per l'involuzione distingue i due elementi coniugati), risulta fondamentale per una comprensione approfondita del significato dell'introduzione degli elementi immaginari, quale ha posto Enriques.

queste [gli iperspazi] ed altre vedute del Segre, costituiscono una novità relativa che oggi si è disposti ad apprezzare tanto meno perché taluni sviluppi venivano dati in forma un po' complicata, ed invece si sono ridotti a dimostrazioni semplicissime, ritornando alle concezioni di Riemann. Ma sotto l'aspetto storico bisogna rendersi conto della difficoltà che offrivano allora tali idee ad essere assimilate dai geometri italiani (Enriques 1938, pag. 291).

E ancora Enriques tiene a precisare che

la scuola tedesca di Theodor Reye, sviluppando in questo senso la geometria proiettiva sintetica, ha creato, certo, un corpo di dottrina elegante, ma non si è sollevata sullo studio di enti relativamente elementari. (Enriques 1938, pag. 281).

Ciò a parte, le memorie qui esaminate di Segre rappresentano l'anello mancante tra le ricerche di Möbius e quelle di von Staudt. Infatti se quest'ultimo non ha fatto delle sue opere un *nuovo campo di ricerche* surgelando le sue teorie così rigorose e precise[221], cosa che invece Segre riesce a fare iniziando allo studio di nuovi enti complessi, Möbius ha cercato di estendere il suo studio fino alla trattazione delle trasformazioni su quel piano che poi fu detto, per l'appunto, di Möbius .

Segre, invece, da un lato riprende l'opera di von Staudt e le fa fare un gran balzo in avanti, perfezionando concetti come quello di coppie di elementi immaginari, e definendo nuovi enti complessi; dall'altro, con le rappresentazioni reali degli enti complessi, l'introduzione dei punti bicomplessi e le generalizzazioni a sistemi di punti

[221] Si ricordano comunque le critiche mosse per esempio da Klein agli inizi degli anni Settanta in riferimento all'uso inconsapevole del V postulato euclidea e del principio di continuità della retta (a tal proposito si cfr. (Avellone, Brigaglia, Zappulla 2002)).

via via sempre più articolati, intuisce la potenzialità delle riflessioni di Möbius sui quaternioni e guida verso lo studio di geometrie su campi diversi da quello reale e dal complesso ordinario, per estendere lo sguardo verso le geometrie definite su campi con più unità immaginarie e con divisori dello zero.

La necessità di Segre di fornire una rappresentazione reale degli enti complessi introdotti, nasce da subito. In un articolo pubblicato nei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (Segre 1891), quasi in contemporanea dell'ultima nota di (Segre 1889-91), Segre fornisce le varietà che rappresentano le coppie di elementi immaginari e introduce la varietà Σ (un opportuno spazio S_4, anzi che è proiettivo a esso[222]) che passerà alla storia col suo nome. Infatti, se essa è ellittica (cioè tutti i suoi piani sono immaginari e quindi le due schiere di piani[223] sono coniugati), ogni piano incontrerà il suo coniugato in un punto reale di Σ; essendo i punti reali di Σ infiniti, ognuno di essi corrisponderà a un preciso piano di Σ su cui esso sta (ma se sta su un piano di una schiera starà anche sul piano coniugato appartenente all'altra schiera) e quindi agli infiniti punti del piano π (per ogni punto di π passa un piano)[224]. Un esempio ne è la sfera (quadrica ellittica) che serve per rappresentare gli elementi complessi di una forma semplice.

Si deve riconoscere a Segre il pregio di aver fiutato l'indirizzo verso il quale dirigere le sue ricerche, ma l'impiego delle sue energie non fu contraccambiato da alcun discepolo che proseguì i suoi studi[225].

Segre, comunque, per arrivare alle conclusioni da noi qui esposte, parte sì dai lavori di von Staudt e dal quasi non interesse della comunità scientifica per la teoria degli elementi immaginari dei suoi *Beiträge*, ma si accorge che l'insegnamento di tale teoria non viene inserito nella pratica didattica universitaria né alcun trattato di geometria proiettiva sintetica per studenti accenna a quei risultati.

[222] Si veda (Segre 1891, pag. 196)

[223] Poiché la varietà Σ può essere rappresentata analiticamente da $X_{lm}=x_l y_m$ (l,m=1,2,3), i suoi punti X possono essere rappresentati dalle coppie di punti x, y presi su due piani π, π'. Σ contiene allora due schiere di piani(ognuna contiene ∞^2 piani): la prima ottenuta tenendo fisso x, la seconda tenendo fisso y; per ogni punto di Σ passano un piano della prima schiera e un piano della seconda schiera (cfr. (Segre 1891, pag. 194 e segg.)).

[224] Cfr. (Segre 1891, pag. 203).

[225] Tranne qualche rara eccezione; si veda poi.

Molto probabilmente Segre ha in mente sin dall'inizio un progetto di lavoro molto più ampio di quello che a prima vista potrebbe sembrare. Se è vero che da un lato Segre vuol colmare il vuoto lasciato successivamente alla pubblicazione delle opere di von Staudt, dall'altro avvia un programma di diffusione della teoria degli immaginari che porta in sé qualcosa di più ampio respiro che la semplice diffusione della stessa: un totale ripensamento sui fondamenti della geometria proiettiva, secondo il quale nel 1902 E. Study (1862-1930) affermerà[226] (traducendo e parafrasando la sua frase) che la geometria biternaria proiettiva deve molto alle investigazioni di C. Segre, e lo stesso Study nel 1905 pone la geometria delle forme hermitiane di C. Segre come premessa per un suo articolo sul campo complesso[227] e dice espressamente che Segre è il primo ad aver trattato pienamente queste forme[228].

È anche opportuno sottolineare due cose.

1) Per quanto riguarda la geometria proiettiva complessa, Segre non fu l'unico matematico italiano, anche se il più autorevole, ad avere parola sull'argomento. Nello stesso 1888 A. Sannia (1823-1892) pubblicava le sue *Lezioni di Geometria proiettiva*[229] in cui dedicava largo spazio alle coppie di elementi immaginari considerate come inseparabili, mentre F. Amodeo in un articolo, sempre del 1888[230], osservava che

> *la rappresentazione geometrica degli elementi immaginari, separatamente considerati, potrebbe essere resa più generale mediante ognuna delle omografie unite alla involuzione che rappresenta, e che in qualche caso potrebbe utilmente applicare questa rappresentazione* (Amodeo 1888, p.363-364),

riallacciandosi quindi al filone Klein-Lüroth. Vedremo che in seguito (1888) C. Segre generalizzerà la definizione di elemento immaginario come coppia inseparabile (o

[226] „*So sind denn dem Verfasser u. a. Untersuchungen von C. Segre, dem die biternär-projektie Geometrie eine bedeutende Förderung verdank, von grossem Nutzen gewesen*" (Study 1902a, p.122).

[227] "*Wir setzen voraus, daß dem Leser C. Segre Untersuchungen über die Geometrie der Hermiteschen Formen bekannt sind*" (Study 1905, p. 322-323).

[228] "*…C. Segre, der sie wohl zuerst näher betracht hat*" (Ibidem, p. 325 in nota).

[229] Napoli, Pellerano.

[230] (Amodeo 1888).

meglio inseparata) di punti. Anche G. Sforza con una pubblicazione del 1891[231] sviluppa dal punto di vista analitico le principali proprietà delle antinvoluzioni in un campo complesso, ricavando varie rappresentazioni di un campo complesso sopra uno spazio reale a partire dalle catene degeneri ed evidenziando la distinzione staudtiana tra i due elementi immaginari coniugati.

2) Come già evidenziato, c'è una difficoltà di fondo insita nel linguaggio, sebbene estremamente corretto e preciso, di Segre. Essa rende gli scritti di Segre di difficile interpretazione.

Occorre quindi per il lettore moderno puntualizzare che alcuni concetti messi a punto da Segre e portati da lui alla (forse) massima generalizzazione possibile, non sono altro che la sintesi di una profonda riflessione su vari temi allora appena affacciatisi nel panorama matematico; ci riferiamo alla massiccia applicazione dei metodi propri del Programma di Klein[232] e nell'uso dei gruppi fondamentali di trasformazioni[233]; all'importanza dello studio delle funzioni hermitiane; alla rivalutazione dell'opera staudtiana e allo studio della geometria complessa come la geometria più all'avanguardia; all'introduzione dei numeri bicomplessi e, in generale, delle algebre "ipercomplesse". Una visione lungimirante quella di Segre che non è stata colta dai suoi contemporanei, se non per qualche rara eccezione.

Tali eccezioni saranno comunque ben rappresentate da Study che molto scrisse sull'argomento, da J. L. Coolidge (1873-1954) che fece delle ricerche di Segre, anche grazie a Study, il suo campo di studio privilegiato, da L. R. Ford (186-1967) che nel 1929 pose alla base della teoria delle funzioni automorfe i gruppi di trasformazioni lineari sul campo complesso **C**, e da E. Cartan (1869-1951) che nel 1931 pubblicò un testo frutto delle sue lezioni alla Sorbona. Ma al di là di tali nomi, e soprattutto in Italia se si esclude il contributo di Pieri in relazione all'assiomatizzazione della geometria proiettiva complessa del 1904-05, e per G. Fubini (1879-1943) (allievo di Bianchi a Pisa) che comunque svilupperà il punto di vista analitico connesso alle rappresentazioni

---

[231] Contributo alla Geometria Complessa, *Giornale di Matematiche*, vol. XXIX, 1891, pp. 159-187.

[232] Cfr. Segre 1889-91, pag. 293, nota (***).

[233] Segre aveva pubblicato nel 1884-85 (Segre 1884-85), il primo lavoro in Europa nel solco del Programma di Erlangen (cfr. (Hawkins 2000, pag.252). Egli non era, quindi, nuovo a certe considerazioni sui gruppi di trasformazioni e ai loro invarianti.

geometriche[234], in sintonia anche con la maggior parte dei lavori dei matematici d'oltralpe (cfr. p. e.: Sturm, Stolz, Lüroth, Lie, Laguerre), non ci furono studiosi che diedero risonanza tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento agli articoli di Segre, che rimasero quindi isolati sia nella sua produzione scientifica che nel panorama delle ricerche italiane.

In tal senso, questa tesi vuole colmare il deficit di riconoscimento alle ricerche di Segre sulla geometria proiettiva complessa, mettendo in evidenza la risonanza che queste ebbero non solo nel periodo tra le due guerre mondiali, soprattutto a opera di Coolidge e Cartan e con un *ritardo* di circa 40 anni, ma anche a fine Novecento con le trattazioni sui sistemi di numeri 2^n-ioni e le applicazioni alle grafica 3D.

[234] Si vedano ad esempio: (Fubini 1904a), (Fubini 1904b), (Fubini 1904c), (Fubini 1904d), (Fubini 1904e) e (Fubini 1904f).

§ 4.6 Pieri 1904-05[235]

Abbiamo visto che a fine XIX secolo vi è in Italia una riscoperta delle opere di von Staudt: Corrado Segre aveva scritto quattro articoli, uno sulle coppie di elementi immaginari, uno su un nuovo campo di investigazione geometrica (quello della geometria sintetica proiettiva complessa), uno sulle rappresentazioni reali degli enti iperalgebrici e un altro sulle varietà che rappresentano coppie di elementi. Questi articoli, come sempre nel puro stile di Segre, sono molto discorsivi pur restando puntuali, concettualmente completi e non mancando considerazioni analitiche.

La fine del secolo XIX è un'epoca cruciale per un riassetto di tutta la matematica: aritmetizzazione dell'analisi e assiomatizzazione di tutte le teorie in primo luogo. La geometria proiettiva sintetica complessa non ne poteva restare esclusa, e così Mario Pieri (1860-1913), già spinto dallo stesso Segre alla traduzione della staudtiana *Geometria der Lage*, non indifferente agli stimoli che gli erano provenuti da più parti all'interno dell'università torinese[236], si propone di fornire una base assiomatica alla geometria complessa i cui artefici principali erano appena stati von Staudt e Segre.

Mario Pieri

Pieri, partendo dal presupposto che, mentre per la Geometria Proiettiva Reale esistono studi[237] che permettono di evidenziare proprietà e *condizioni geometriche* (i postulati) che definiscono in pieno lo spazio proiettivo reale, si rende conto che invece per la Geometria Proiettiva Complessa se da un lato è stata già formulata una teoria[238] che ne descrive le proprietà, dall'altro non si era ancora reso noto un sistema di

[235] (Pieri 1904-04).

[236] Pieri si può paragonare a un ponte tra i due colossi torinesi di fine Ottocento, Giuseppe Peno e Corrado Segre essendo stato allievo di entrambi (cfr. (Avellone, Brigaglia, Zappulla 2002)).

[237] Come il suo stesso (Pieri 1897).

[238] Vedi (Segre 1889-91).

postulati che permettesse di rappresentare i suoi punti tramite coordinate omogenee complesse.

> *Per la varietà lineare complessa non si conosce ancora un sistema di attributi e caratteri intrinseci, atti a qualificarla in maniera, che ne derivi senz'altro la rappresentabilità dei suoi punti per coordinate omogenee complesse.*
>
> *Il presente Saggio si propone appunto l'analisi del concetto di varietà lineare complessa: cercando di istituire su nuovi principî una Geometria Projettiva complessa – o dottrina geometrica degli immaginari – esente non solo da qualsivoglia considerazione algebrica; ma sciolta eziandio da ogni vincolo deduttivo con l'ordinaria Geometria Projettiva reale* (Pieri 1904-05, pag. 190).

È naturale che egli voglia analizzare il concetto di varietà lineare complessa svincolando la Geometria Proiettiva Complessa dalla sudditanza a quella ordinaria Reale. L'opera di Staudt, conosciuta e apprezzata in campo internazionale, ha avuto, da un lato, il pregio di riuscire a costruire un sistema geometrico (proiettivo) in cui si possono interpretare in termini reali tutte le varietà descrivibili a partire da tre o quattro variabili omogenee complesse, dall'altro la pecca di risultare ostica e poco intuiva sì da non farle meritare il giusto riconoscimento e l'inserimento delle sue teorie in ambito didattico (universitario).

Scopo della presente opera di Pieri è non tanto dare una esemplificazione logica all'intero edificio geometrico staudtiano (ma vi riesce anche) quanto innovarne la struttura e il fondamento nel rispetto dell'idea originaria di Staudt, apportandole *qualche sensibile contributo di semplicità e brevità* (Pieri 1904-05, pag. 190): provare a semplificare l'opera di von Staudt seguendo una via diversa da quella dal matematico tedesco, la via dell'assiomatizzazione e della forma rigorosa alla Peano, senza disdegnare di intercalare nel testo confronti e riflessioni in modo tale che *n'esca temperata l'aridità della forma, e resa men grave la lettura* (Pieri 1904-05, pag. 193).

Così, senza alcuna fatica o artificio, la Geometria Proiettiva Complessa può essere introdotta a partire dalle definizioni di punto immaginario, piano immaginario e retta immaginaria di 1ª specie (sulla base di coppie di elementi, considerate come involuzioni ellittiche comprese di senso), di retta immaginaria di 2ª specie e, quindi, di spazio proiettivo complesso (si può anche generalizzare e definire tutte le varietà lineari complesse di qualunque dimensione). Per realizzare ciò, Pieri procede in modo “moderno” a partire da tre nozioni primitive, il punto proiettivo complesso, la congiungente due punti complessi distinti (o allineamento) e la catena di tre punti collineari e distinti (o concatenamento tra punti), che verranno definiti in modo implicito a partire da 30 postulati e deducendo da essi rigorosamente le proposizioni e tutta la teoria della Geometria Projettiva Complessa, che così facendo sarà stabilita su *nuove* basi.

Naturalmente, numerosi sono i confronti e i continui rimandi sia all’opera di Segre (soprattutto in riferimento alle trasformazioni antiproiettive) che ai *Beiträge* di von Staudt.

Pieri riprende il suo lavoro del 1897 e quasi in una sorta di traduzione e/o completamento, aggiunge la parola “complesso/a” a punto proiettivo e retta proiettiva, e rielabora le proprietà armoniche dei punti (reali) di una retta proiettiva in quelle dei punti (complessi) di una catena. Naturalmente, il lavoro di Pieri non si esaurisce con tale trasposizione: l’esistenza di nuovi enti (come p. e. la stessa catena che non ha un riscontro nella geometria proiettiva reale) ha bisogno di essere postulata così come bisogna postulare l’esistenza di gruppi armonici cosa che prima invece veniva dimostrata.

La trattazione di Pieri ha un altro pregio: si può rivedere la Geometria Proiettiva Reale come una determinata varietà iperalgebrica (per esempio una catena doppia o tripla) di punti di un dato spazio proiettivo complesso: in altre parole, desumere la Geometria Proiettiva Reale da quella Complessa.

§4.6.1 Contenuto della memoria (Pieri 1904-05)

Entriamo con qualche dettaglio nell’articolo e nello svolgersi dei postulati.

I postulati I-IX introducono il punto e la retta, il postulato X l’esistenza di piani complessi, e sulla base di questi vengono dati lo spazio proiettivo complesso (Teor. 5) e in generale una qualunque varietà lineare S_n complessa (Teor. 6) dopo aver definito induttivamente il significato del termine S_n così come segue: noti S_0, S_{n-1} e un punto fuori da S_{n-1}, allora si ha S_n (essendo *n* un intero positivo).

Dagli stessi postulati I-X si possono dedurre il Teorema di Desargues, le prime proposizioni circa il quadrangolo piano e le coppie armoniche. Ma per addentrarci nella teoria dei gruppi armonici, bisogna introdurre il postulato XI che porta alla definizione di coniugato armonico di tre punti. Si può a questo punto introdurre il concetto primitivo di catena tramite il postulato XII che ne assicura l'esistenza come un ente composto da una classe di punti di una retta complessa (senza definirla ulteriormente); quindi, per capire com'è fatta una catena si devono dare altri postulati che la definiranno implicitamente:

- ✓ Una catena è definita a partire da tre suoi elementi presi in un ordine qualunque (post. XIV e XV).
- ✓ Due catene appartenenti a due rette proiettive sono a loro volta proiettive (post. XVI).
- ✓ Tutti i punti ottenuti con ripetute costruzioni di quarti armonici a partire da tre dati sono tutti elementi della catena (post. XVII), procedimento che richiama alla memoria le scale armoniche.
- ✓ Se *d* è un elemento della catena definita a partire dai punti *a*, *b*, *c* allora *c* sarà un punto della catena definita da *a*, *b*, *d*; così accade anche per gli altri due *a* e *b*. Si vuole ammettere che la relazione di concatenamento (elementi distinti e collineari) fra 4 elementi è simmetrica e transitiva rispetto a questi (post. XVIII e XIX).

Viene fatta differenza tra catena, il cui simbolo è $|abc|$, e segmento proiettivo complesso, in simboli (*abc*); quest'ultimo (che come la catena ha carattere proiettivo) è la classe dei punti *x* cui si può associare sulla catena $|abc|$ un punto *y* tale che *x* sia il quarto armonico dopo *y*, Arm(*a*,*c*,*y*) e *b*. Mentre nella catena $|abc|$, definita a partire da tre punti complessi *a, b, c,* è contenuto qualunque punto *x* armonico dopo *a, b, c,* cioè appartenente alla scala armonica definita da quei tre punti (in altre parole, tutti i punti *x* che si potranno ottenere per via di successive costruzioni di quarti armonici a partire dai primi tre). Quindi un punto *d* può appartenere alla catena $|abc|$ (essendo un quarto armonico nella suddetta scala armonica) ma non appartenere al segmento proiettivo (*abc*) perché non può essere uno dei due estremi *a, c* (essendo che con b deve separare armonicamente *a, c*).

Da qui, la relazione di due coppie di punti (4 elementi distinti e concatenati) che si separano (o no) se non esiste (o esiste) sulla catena una terza coppia di punti armonicamente coniugati rispetto ad ognuna delle due date.

Pieri continua dando numerose proprietà delle catene tra cui importante risulta essere quella che si evince dai postulati XX e XXI: presi 4 punti distinti e concatenati (appartenenti cioè a una stessa catena), questi si possono sempre, e in un sol modo, distribuire in due coppie che si separano a vicenda sulla catena. Per poter essere sicuri che una catena sia non solo un ente composto da infiniti punti ma anche chiuso (rientrante in se stesso), bisogna introdurre il post. XXII che ci da ancora un'altra proprietà armonica delle catene: se su una catena $|abc|$ vi sono due punti *d* ed *e* distinti fra loro e dai precedenti, se esistono due punti armonici ad entrambe le coppie (*a,c*) e (*b,d*) e due punti armonici ad entrambe le coppie (*a,c*) e (*d,e*), allora dovrà esistere sulla stessa catena una coppia di punti armonici ad ambo le coppie (*a,c*) e (*b,e*)[239].

È sempre chiaro nella mente di Pieri il parallelo tra questa sistemazione assiomatica e quella della Geometria Proiettiva Reale, tant'è che il lettore attento può rendersi conto con un semplice confronto che tutte le proprietà di connessione, ordinamento e senso o versi di una catena si possono ottenere dal suo precedente lavoro (Pieri 1897) sostituendo il termine 'catena' a quello di 'retta proj.', in modo da far discendere le suddette proprietà da soli tre soggetti primitivi: punto, retta e catena.

Stabilito il post. XXIII (Essendo *a,b,c* punti complessi allineati e distinti, *p* e *p'* due punti a piacere nel segmento (*abc*) purché non coincidenti, poscia *i* ed *l* numeri interi positivi o nulli, ma del resto arbitrari; se si pone:

$$\beta_o \equiv b, \text{ e (per i>0) } \beta_i \equiv Arm(a, \beta_{i-1}, c);$$

$$\beta_{i,o} \equiv a, \ \beta_{i,l} \equiv \beta_i, \text{ e (per l>1) } \beta_{i,l} \equiv Arm(c, \beta_{i,l-1}, \beta_{i,l-2});$$

[239] Tale affermazione equivale al teorema di Pappo sull'esagono piano inscritto nella coppia di rette.

Bisognerà che uno dei punti β così definiti cada fuor del segento (*pap'*)) che ci assicura la continuità alla Dedekind per un segmento (*a,b,c*) e la definizione di *trasformazione armonica* come quella trasformazione (univoca) tra punti che conserva la relazione armonica, si arriva a dimostrare il *teorema fondamentale di Staudt*: qualsivoglia trasformazione armonica di una catena in se stessa che determina più di due punti uniti (quindi almeno tre) è una identità. Quindi si può costruire il quadrilatero completo tramite cui determinare di un qualunque punto *x* di una retta *r* l'immagine *x'* (sempre su *r*) dati due punti *a* e *b* su di essa.

Ma a questo punto della trattazione, non si distingue più bene cosa sia una retta complessa e cosa una catena, cioè quando si hanno punti collineari e non concatenati. Si giunge così all'esigenza di introdurre un nuovo postulato, il XXIV, che assicura che una coppia di punti armonici rispetto a due coppie di punti (*a,b*) e (*c,d*) che si separano (armonicamente) su una catena $|abc|$, non appartengono più alla catena ma alla retta complessa *ad*. Da ciò si evince anche che due catene non possono avere più di due punti (distinti) in comune, altrimenti coincidono; e comunque Pieri dimostra che due catene di una stessa retta possono avere un sol punto in comune o essere in esso tangenti fra loro[240]. Inoltre (post. XXV) tre catene di una stessa retta complessa non possono avere in comune più di un punto. Da qui, mentre risulta non proprio difficoltosa la dimostrazione del teorema (Teor. 4) che qualunque trasformazione univoca e reciproca di una retta complessa *r* in un'altra *r'* che conservi il concatenamento conserva anche l'armonicità, quella del suo inverso (qualunque trasformazione armonica tra rette complesse convertirà catene in catene) non esiste in modo rigoroso né nel sistema staudtiano né in ambito algebrico, così come vi richiama l'attenzione anche Segre in (Segre 1889-91, nota I, p. 290, nota (*) alla fine). Per ovviare a ciò, Pieri introduce il concetto di *aliomografia* (dal greco *aliosis*, catena) a indicare una trasformazione tra catene univoca e reciproca.

A questo punto, ed è la prima volta che accade, Pieri vuol dare un *contenuto logico* al sistema di postulati fin ora introdotti (l'indipendenza reciproca dei postulati è, come sempre accade in Pieri, assicurata dall'ordine dell'introduzione dei postulati stessi); per far ciò considera come punti complessi i punti reali di una sfera **R** e come

[240] (Pieri 1904-05, pag. 208).

catena di tre punti complessi il cerchio determinato dai tre corrispondenti punti reali sulla sfera. In tal modo vengono verificati i postulati I-IX e XI-XXX, tramite cui la sfera reale **R**, coi suoi punti reali e i suoi cerchi reali, è vista come l'immagine di una retta proiettiva complessa *r*; e se si proietta stereograficamente rispetto al polo la sfera reale **R** su un piano (quello di Argand-Gauss) le catene di *r* saranno rappresentate da cerchi o rette. Ed è proprio a quest'ultimo modello che Pieri richiama l'attenzione nell'enunciare i due teoremi seguenti: Teor. 6: Qualunque aliomografia che fissa 4 punti di una retta complessa non concatenati sarà un'identità (fig. 9); Teor. 7: Dati 4 punti *a*,*b* e *c*,*d* distinti di una catena e due *e*,*f* fuori di essa che separano armonicamente le due coppie di punti dati, allora l'armonico di ogni punto della catena rispetto e,f starà sulla catena (fig. 10).

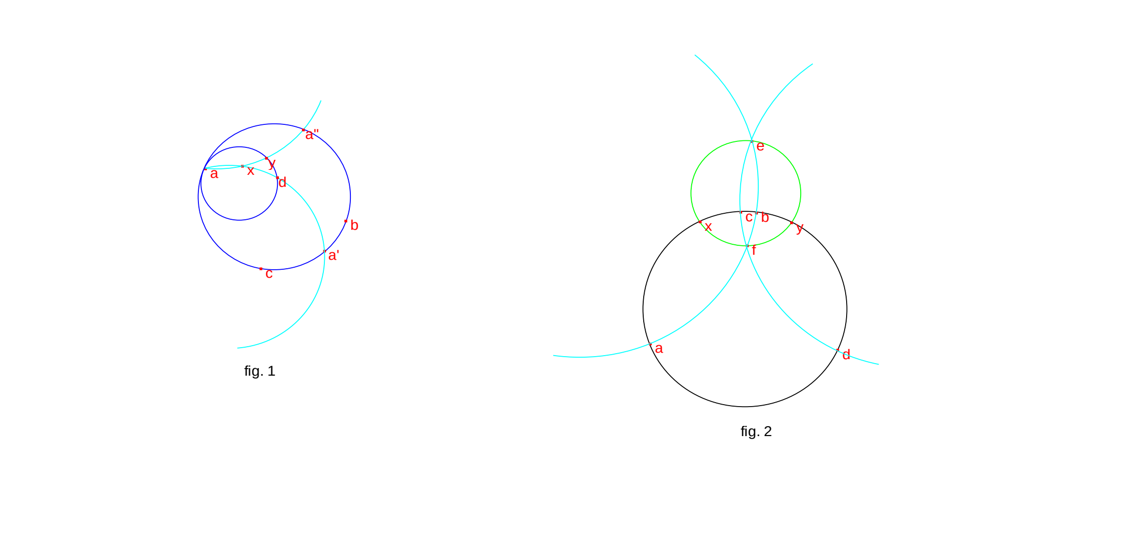


Fig. 9 e Fig. 10

Introdotto il post. XXVI (Dati 4 punti *a*,*b* e *c*,*d* distinti di una catena e due *e*,*f* fuori di essa che separano armonicamente le due coppie di punti dati, qualunque catena passante per *e*,*f* incontrerà la catena) e definito i due punti *e*,*f* armonici rispetto la catena $|abc|$ (o separati armonicamente rispetto la catena in modo quindi che ogni punto della catena sarà armonico a se stesso), si può assicurare (Teor. 9) l'unicità della coppia armonica a due coppie di punti collineari.

Dalle cose dette sin ora, però, non si può desumere, per ogni punto *e* di una retta complessa l'esistenza del punto *f* separato da *e* mediate una catena, quindi urge l'introduzione del post. XXVII (Date due coppie di punti di una catena sono separate da un’altra coppia esterna alla catena, se *g,h* sono due punti della catena $|abe|$ separati armonicamente dai punti *a,b*, l’armonico del punto *c* rispetto *g,h* appartiene alla catena $|abc|$) e dei Teor. 12: Dati 4 punti di una retta fra loro distinti e non concatenati, esisterà uno e un solo punto separato armonicamente da *e* rispetto la catena $|abc|$, e 13: Due coppie, ciascuna di punti armonici rispetto a una stessa catena , sono sempre concatenate o non si separano mai a vicenda. Da ciò si desume che la catena $|abe|$ è il luogo geometrico di ogni coppia di punti armonici sia rispetto alla catena $|abc|$ che rispetto la coppia *a,b*.

Si definisce *catena ortogonale* a una data $|abc|$ nei punti *a* e *b* quella catena che è formata dalle infinite coppie di punti armonici tanto alla catena $|abc|$ quanto ai punti *a* e *b*; in altre parole ogni catena che contiene una coppia di punti separati armonicamente da un'altra catena, è ortogonale a quest’altra nei punti comuni alle due catene (fig. 9). Seguono una serie di teoremi e proprietà sulle catene ortogonali.

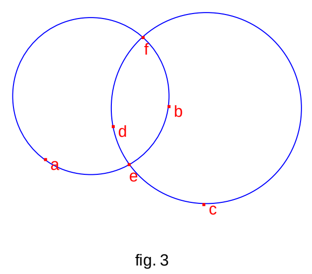


Fig. 11

Si arriva al paragrafo centrale dedicato alle corrispondenze proiettive e antiproiettive, in cui un ruolo fondamentale gioca la definizione di inversione: data in una retta complessa *r* e una catena χ, si definisce *inversione rispetto a* χ la trasformazione univoca e involutoria di *r* in sé che fa corrispondere a ogni punto di *r* il suo armonico rispetto a χ. Una tale corrispondenza fissa ogni punto di χ e nessuno di *r* e trasforma ogni catena ortogonale a χ in se stessa. Ma per potere affermare che una siffatta inversione sia anche una aliomografia (muta catene in catene) si deve introdurre il post. XXVIII: Se *a,b,c* sono punti distinti di una retta complessa *r*, esiste un'aliomografia che li fissa senza fissare altri punti di *r*. Quindi (Teor. 1) l'inversione rispetto a χ è una trasformazione aliomografica della retta *r* in se stessa e (Teor. 2) se fissa i punti *a,b,c* dovrà o fissare ogni punto di *r* o trasformarlo nel coniugato armonico rispetto la catena $|abc|$.

Il post. XXIX assicura che l'inversione rispetto una catena non è una trasformazione omografica, cioè non è ottenibile tramite un numero finito di proiezioni (=non esiste una serie finita di proiezioni che individuano l'armonico di un punto di una retta complessa *r* rispetto una catena $|abc|$). La definizione di omografia, il postulato XXIX, il Teor. 3 (Qualsiasi trasformazione omografica d'una retta *r* in sé stessa, per cui siano tautologici tre punti distinti a, b, c di essa retta, dovrà convertire ciascun punto di *r* in sé stesso) e il Teor. 4 (Qualunque aliomografia è o un'omografia o il prodotto di un'inversione per un'omografia) risultano molto più semplici che in Staudt, poiché quest'ultimo fa uso della nozione di *verso* o *senso* di una forma semplice che rende più complicata la deduzione delle dimostrazioni dei teoremi; resta il fatto che le due definizioni di omografia, quella dello Staudt e quella del Pieri (che ricava da Cremona), e le teorie discendenti sono equivalenti.

Si introduce adesso il concetto di antiproiettività tra due rette complesse *r* e *r'*così definita: essa è la corrispondenza composta mediante un'omografia tra le rette *r* e *r'*, preceduta o seguita da un'inversione di *r*, o rispettivamente di *r'*, in sé stessa. Il Teor. 5 assicura l'unicità (l'esistenza era assicurata dal Teor. 4) di un'antiproiettività (come di una proiettività) che dati tre punti distinti *a,b,c* su una retta *r* e altri tre punti distinti *a',b',c'* sulla *r'*, faccia corrispondere *a, b, c* ad *a', b', c'*. Seguono una serie di teoremi e definizioni che specificano ulteriormente le proprietà e i legami tra aliomografie, antiproiettità tra rette e tra fasci di spazi lineari complessi (cfr. def. 4), sì da generalizzare il Teor. 3 nel Teor. 10: Se uno spazio lineare complesso di dimensione n, σ_n, è riferito *omograficamente* a se stesso in modo che presi n+2 suoi punti, di cui almeno n+1 linearmente indipendenti, essi risultano fissati, allora ogni altro punto di σ_n corrisponderà a se stesso. Si arriva così nuovamente al concetto di catena, a quello di antinvoluzione e di antinvoluzione ellittica, per i quali si fa espressamente riferimento all'opera di Segre.

Pieri, in più, definisce la *zona proiettiva* come l'analogo del segmento proiettivo della Geometria Proiettiva Reale: Essendo r una retta complessa, χ una sua catena, ed e un punto arbitrario di r che non appartiene χ, si definisce *zona di χ intorno a e*, indicato con χ_e, il luogo d'ogni punto armonico del punto e rispetto una qualunque coppia di punti armonici rispetto a χ e non coincidenti tra loro (=la classe di tutti quei punti x di r per ognuno dei quali esiste una coppia di punti l'un l'altro distinti separati armonicamente dalla catena χ e armonici anche rispetto la coppia e,x). Si deduce che il punto e appartiene alla zona χ_e (Teor. 1), i punti della catena χ sono esclusi dalla zona χ_e, che comunque continua a conservarsi sotto qualunque trasformazione aliomografica (così come il segmento proiettivo) e detto f l'armonico di e rispetto la catena χ, se x appartiene a χ_e allora e apparterrà alla zona χ_x e se un punto y della retta non appartiene né alla catena χ né alla zona χ_e, allora dovrà appartenere alla zona χ_f (Teor. 3). Seguono altri teoremi giungendo all'ultimo del paragrafo sulle zone proiettive, il Teor. 15: Se in una retta complessa r sono dati una catena χ e due punti e e p separati l'un l'altro da questa, si avrà che un qualunque punto della retta appartenga a una delle due zone χ_e o χ_p oppure alla catena χ, sicché $r=\chi_e\cup\chi_p\cup\chi$ (=ogni catena divede la retta che la contiene in due parti ognuna delle quali non ha punti in comune e che prese insieme alla catena stessa esauriscono tutta la retta).

Pieri adesso può concludere (con Segre) che il concetto di catena, <u>uno</u>, si confonde con quello di un'antinvoluzione iperbolica, poiché una catena $|abc|$ di una retta complessa è l'insieme di tutti gli infiniti punti doppi (quelli appunto della catena) della retta tautologici di un'antiproiettività involutoria, e <u>due</u>, si può generalizzare il concetto di catena di n[esima] specie o catena n-pla $|a_1a_2a_3...a_{n+2}|$ composta da tutti i punti doppi di un'antinvoluzione iperbolica di uno spazio S_n in se stesso.

Pieri, come Segre, si limita a considerare catene doppie o triple, sicché non va oltre uno spazio σ_3 complesso. Detta Γ la catena tripla fondamentale (cioè individuata come luogo dei suoi elementi doppi) di un'antinvoluzione iperbolica $\mathfrak{A}$ di uno spazio proiettvo complesso σ_3, se svolgendo la teoria che ne discende si sostituisce a "punto proiettivo complesso di Γ" le parole "punto proiettivo", a "catena rettilinea di Γ" si sostituisce "retta proiettiva" e a " catena piana di Γ" si sostituisce "piano proiettivo" e si considerano tutti i postulati (I-XXX) introdotti, si mostra come la Geometria Proiettiva Ordinaria Reale discende da questi stessi postulati già introdotti per la Geometria Proiettiva Complessa *senza bisogno di concepire lo spazio come una varietà numerica* purchè (come abbiamo detto) si facciano opportune restrizioni ai concetti di punto proiettivo complesso e retta proiettiva complessa e al maggiore contenuto della geometria proiettiva complessa[241]. Ecco che

> *le ordinarie metriche proiettive si possono intendere come particolari dottrine proiettive intorno a coniche o a quadriche date,* così che *la Geometria Proiettiva Reale del piano e dello spazio ordinario apparirà come uno studio proiettivo della catena doppia o tripla* (Pieri 1904-05, vedi p. 229).

A conclusione dell'articolo, Pieri mostra come il segmento proiettivo (*abc*) sia un ente continuo i cui punti si possono mettere in relazione biunivoca con l'insieme $\mathfrak{R}$ dei numeri reali; vediamo come. Punto di partenza è il post. XXIII: se a ogni punto $\beta_{i,l}$ si coordina la frazione $\frac{l}{2^i}$ si stabilisce una corrispondenza univoca e reciproca fra tali punti β e tutti i numeri razionali positivi o nulli per i quali è possibile una rappresentazione frazionaria essendo il denominatore una potenza di 2; si trova che *a*,*b*,c sono rispettivamente 0,1,∞ e il segmento (*abc*) è una classe di punti ordinata e compatta (alla Cantor). Con l'aggiunta del post. XXX (e ultimo) Pieri se ne assicura la continuità; infatti esso afferma che qualunque *progressione* del tipo β_{1,l_1}, β_{2,l_2}, β_{3,l_3}, …, β_{n,l_n}, … di punti β definiti dal post. XXIII ammette sempre un limite superiore. Quindi il segmento (*abc*) è un *continuo lineare*, cioè un insieme isomorfo alla classe di tutti i numeri reali positivi (0 e ∞ inclusi). Quindi il segmento proiettivo *(abc)* unito ai suoi estremi *a* e *c* è isomorfo all'intervallo [0, +∞[di $\mathfrak{R}$.

Per distendere completamente l'insieme $\mathfrak{R}$ sulla catena $|abc|$, mancano i numeri negativi, allora basta associare a ogni $-k$ (con *k* positivo) il coniugato armonico del punto che nel segmento (*abc*) corrisponde a $+k$ rispetto agli estremi *a* e *c*. Si può

[241] Cfr. (Pieri 1904-05, p. 217).

adesso affermare che i due postulati XXIII e XXX insieme attribuiscono alla catena $|abc|$ una *continuità perfetta* nel senso di Dedekind e Cantor.

Ma ciò che fa Pieri va ancora oltre $\Re$; egli riesce a distendere la variabile complessa $x+\sqrt{-1}y$ sulla retta complessa *r* e ad assegnare a 4 punti (di cui almeno 3 distinti fra loro) di una retta complessa il loro birapporto[242] come coppia di valori complessi coniugati, che resta così individuato come invariante assoluto della tetrade rispetto qualunque aliomografia.

E così come fa von Staudt, Pieri conclude dando, sulla scorta dei suoi postulati I-XXX ma seguendo *in tutto e per tutto i ragionamenti di C. von Staudt*, una *determinazione metrica Euclidiana* della catena tripla fondamentale Γ, che porta ugualmente a sviluppare tutta la teoria dei birapporti con la sua definizione e le sue proprietà, la rappresentazione della variabile complessa sulla retta complessa, l'espressione aritmetica del valore di una tetrade in funzione delle coordinate interne dei suoi 4 punti, fino ad arrivare all'equazione di una qualunque omografia sulla retta complessa.

Due anni dopo Pieri torna[243] a considerare il post. XXVIII ed effettivamente dimostra che esso (già nella memoria originaria aveva espresso qualche dubbio[244] può essere dimostrato a partire dai I-XXVII postulati precedenti, la qual cosa gli fa esprimere all'inizio della breve aggiunta:

> *il desiderio che di codesta semplificazione deduttiva rimanga traccia negli Atti Accademici mi spinge a chiedere ancora ospitalità per la dimostrazione seguente* (Pieri 1905-06, pag. 339).

---

[242] Pieri lo introduce similmente a Segre, ma in modo differente da Staudt, che comunque resta equivalente e non differente da quella che ne dà Pieri.

[243] In (Pieri 1905-06).

[244] Si veda (Pieri 1904-05, p.217-29).

§4.7 Pieri 1911-12

Nel 1911 Pieri ritorna sull'argomento della geometria complessa, esaminandolo però da un altro punto di vista: quello delle trasformazioni ciclo-affini o affinità circolari (le *Kreisverwandtschaft* di Möbius), cioè della geometria dei cerchi (o delle inversioni).

Pieri scrive due Memorie (1911 e 1912) che pubblica sul *Giornale di Matematiche*[245]; esse si sviluppano attorno a un modo diverso di intendere la geometria dei cerchi, diverso rispetto ai due filoni principali di ricerca che fino ad allora avevano operato. Il primo è quello che si può far risalire alla monografia di Möbius del 1855 e al trattato di Theodor Reye del 1879[246]; in essi la geometria dei cerchi è svolta a partire da quella elementare (euclidea usando, specialmente coordinate cartesiane) con particolare attenzione alle conseguenze aventi carattere invariantivo rispetto la trasformazione per raggi vettori reciproci. Il secondo è quello che fa risalire la geometria dei cerchi allo studio della geometria proiettiva reale sopra una determinata varietà quadratica di punti dello spazio lineare a 4 dimensioni; in essa le ciclo-affinità non sono altro che le collineazioni reali fra i punti di una sfera (reale a 3 dimensioni) e gli strumenti sono di tipo analitico, come in Klein.

Né l'uno, né l'altro dei metodi vuol perseguire Pieri: egli vuol dare *nuove* basi alla geometria delle inversioni e renderla dottrina autonoma facendola appoggiare sopra nozioni invarianti per affinità circolari e non per un gruppo di trasformazioni geometriche più ampio; in altre parole calibrare nozioni primitive e postulati alle esigenze proprie della geometria delle inversioni, e di essa sola[247], indipendentemente dalla geometria elementare, di posizione o da qualunque altro supporto analitico e geometrico.

La novità apportata da Pieri risiede tutta nell'assetto dato alla disciplina, poiché tutto ciò di cui tratta è argomento ben noto e acquisito da tempo dai geometri. Come sempre nello stile di Pieri, egli risulta preciso e rigoroso, esaustivo, non introduce nulla per caso, mai sovrabbondante.

---

[245] (Pieri 1912).

[246] (Reye 1879).

[247] Cfr. (Pieri 1911-12, pag. 50-51).

Pieri parte ponendo soltanto due enti primitivi, il punto e il cerchio (individuato da tre punti), e venti postulati che gli servono da base per il sistema deduttivo. Un ruolo importante giocheranno anche qui, come in von Staudt, i gruppi armonici di 4 punti (distinti) concatenati. Dalla loro definizione, basata sul concetto di tangenza tra cerchi, discendono le varie specie d'inversione (rispetto a due punti, a un cerchio e a una sfera) e di antinversione (l'inversione rispetto a una sfera di raggio immaginario). Queste insieme alle precedenti esauriscono tutti i tipi di affinità circolari involutorie.

L'ultimo capitolo è dedicato alla dimostrazione della sufficienza del sistema deduttivo dei venti postulati (essi bastano per gli scopi della geometria dei cerchi), e alla deduzione della geometria elementare da quella di cui qui Pieri pone il fondamento. Infatti fino ad allora le uniche trattazioni di geometria dei cerchi avevano ricavato questa a partire da concetti di geometria elementare: così avevano fatto, per esempio, Steiner in (Steiner 1826), Bellavitis in (Bellavitis 1836) e Möbius in (Möbius 1855).

Si può concludere dicendo che le due memorie di Pieri costituiscono un esauriente e compiuto trattato di geometria inversiva, e che, malgrado si limitino a svolgere solo i fondamenti della materia, risultano completi e di chiara comprensione. Con esse si è definitivamente compiuta la dimostrazione dell'indipendenza della geometria dei cerchi da quella euclidea o da quella proiettiva.

E non bisogna dimenticare che questo lavoro di Pieri rientra a pieno titolo all'interno dello studio della Geometria Proiettiva Complessa. Si pensi, infatti, che esiste un isomorfismo tra i punti e i cerchi del piano inversivo e i punti e le catene della retta proiettiva complessa. Nel passaggio da quest'ultima al piano proiettivo complesso si sostituisce il cerchio con una conica e si possono dedurre relazioni tra proprietà non euclidee e proprietà delle inversioni.

CAPITOLO 5

La Geometria Proiettiva Complessa in Europa da Lie a Study

§5.1 Introduzione

Nello stesso periodo in cui Segre pubblicava le memorie esaminate nel precedente capitolo, vi furono alcuni matematici che, soprattutto in Germania, studiarono *alcuni* aspetti della Geometria Proiettiva Complessa.

Lie, Laguerre, Stolz, Klein e Lüroth pubblicarono sull'argomento prima di Segre: i loro scritti riguardano, comunque, solo segmenti di quella che fu la teoria svolta da von Staudt, mentre, come abbiamo visto, Segre sviluppa a fondo l'argomento delle antiproiettività e quello delle rappresentazioni reali degli enti immaginari. In più il matematico torinese non solo tratta la geometria proiettiva su domini diversi dal campo reale, ma pone problematiche nuove, non si limita a *sistemare* von Staudt ma fonda nuovi campi di ricerca, che ancora oggi possono essere considerati basilari in varie branche della matematica.

Lo stesso discorso, come vedremo, si può fare per differenziare le memorie di Hermann Wiener e Christian Juel da quelle di Segre: i primi due pubblicarono prima, anche se di poco, ma i loro scritti risultano più limitati di quelli del matematico torinese.

Un discorso a parte andrà fatto per Eduard Study, il quale almeno a partire dalla sua *Geometrie der Dynamen* (1903) dà alla geometria proiettiva una veste nuova, che comunque, vedremo, si riconnette in qualche modo agli stessi studi di Segre.

Inizieremo l'analisi di dette opere partendo, cronologicamente, da quella di Sophus Lie.

§ 5.2 Sophus Lie

Sophus Lie

L'interesse di Lie per questioni riguardanti la rappresentazione geometrica dei numeri immaginari risale al 1869, quando pubblica una memoria sul *Journal* di Crelle[248], nella quale fornisce una possibile rappresentazione geometrica di punti, curve, rette, ecc… immaginari a partire però dalla loro forma analitica.

È importante partire da questa memoria poiché il pensiero analitico-geometrico del matematico norvegese influenzò ben presto anche l'ambiente matematico tedesco. Study (1862-1930) e Klein, cui lo legò una duratura amicizia e con cui lavorò a stretto contatto[249], furono coinvolti nelle ricerche di Lie, come anche Stolz, Lüroth e Sturm.

Anche l'Italia non resta indifferente alle teorie di Lie. In generale esse ebbero grande influsso sulla generazione di matematici italiani che si formarono in quegli anni: esse erano spesso argomento dei corsi di Cremona (forse il massimo sponsor di Lie in Italia); Luigi Bianchi (1856-1928) fece sue, dal punto di vista della ricerca, molti degli argomenti di Lie; Segre scrisse il necrologio di Lie e un articolo sui suoi scritti[250]. E non solo; la teoria dei gruppi di trasformazioni di Lie era già a quell'epoca considerata da Battaglini e Cremona una nuova e feconda linea di ricerca. Quindi i suoi scritti erano tenuti in forte considerazione dai matematici suoi contemporanei.

In (Lie 1869) l'autore rappresenta un punto immaginario attraverso $Z=z+pi$ e $X=x+yi$, essendo x, y, z, p reali con x, y, z coordinate (cartesiane) spaziali del punto e p il suo peso ($p=0$ individua l'assenza del punto); i punti x, y, z che soddisfano la relazione $F(Z,X)=0$ stanno su una stessa curva immaginaria. Una retta immaginaria è una curva immaginaria che soddisfa la relazione (lineare) $X=BZ+A$, cove A e B sono

[248] (Lie 1869).

[249] Cfr. tra gli altri (Bottazzini 1990, pag. 227).

[250] Cfr. (Segre 1899a) e (Segre 1899b).

due numeri immaginari (rispettivamente $A=a_1+a_2i$, e $B=b_1+b_2i$). Se, al contrario, consideriamo Z e X costanti e A e B variabili, la relazione anzidetta definisce le rette immaginarie che passano dal punto immaginario (Z,X). Segue la definizione di curva immaginaria di grado n, di distanza tra due I-punti (punti immaginari, nel gergo di Lie), del concetto di I-tangente a una I-curva, di birapporto di 4 punti di una I-retta e di 4 I-rette, di I-cerchio e in conclusione quella di omografia.

Vedremo che questi concetti si ritrovano nei matematici tedeschi che guardarono a von Staudt con occhio analitico.

§5.3 Edmond Nicolas Laguerre

Edmond N. Laguerre

È il 1870 quando Laguerre (1834-1886) decide di dare alle stampe le prime lezioni del corso di Geometria Superiore che egli tiene presso la sala *Gerson* a Parigi[251]. Vediamo quale rappresentazione geometrica fornisce Laguerre per un punto immaginario.

L'equazione di un cerchio di centro un qualunque punto A(α,β) (reale o complesso) del piano cartesiano e di raggio nullo è $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0$. Questa si spezza nelle due rette $y-\beta=i(x-\alpha)$ e $y-\beta=-i(x-\alpha)$, che sono dette *rette isotrope* di due sistemi di rette parallele (ciascuno con coefficiente angolare *i* o *–i*) che passano per il punto A; ogni retta di un sistema passa per il punto all'infinito, si considerino allora i due punti all'infinito I e J, che Laguerre chiama *ombelichi* del piano; le due rette isotrope per A, una del primo sistema e l'altra del secondo sistema formano un cerchio. Se A è punto reale esso è l'unico punto reale di tali rette; se A è immaginario, allora ciascuna retta avrà un (solo) punto reale, che Laguerre chiamerà *a* (per la retta del primo sistema) e *a'* (per la retta del secondo sistema). Il segmento *aa'*, con punto iniziale *a* e finale *a'* (cioè orientato) viene detto *segmento rappresentativo* del punto immaginario A; esso è indipendente da ogni riferimento cartesiano e dipende esclusivamente dalla posizione di A (cambiando assi coordinati non si altera il segmento rappresentativo). Si può determinare il punto immaginario coniugato di A invertendo il verso del segmento *aa'*. In tal modo, Laguerre indica un punto immaginario A con la notazione (*a*, *a'*), con (*a'*, *a*) il suo coniugato. Per un punto reale, le due estremità del segmento coincideranno, cosicché i punti reali sono compresi nel caso generale immaginario.

Si trova che:

251 (Laguerre 1870). La numerazione di pagina che noi seguiremo in questa tesi segue la pubblicazione dei volumi delle opere di Laguerre: (Laguerre 1898-1905).

1. la retta reale che unisce due punti immaginari coniugati sarà perpendicolare al segmento che rappresenta tali due punti e passerà per il suo punto medio;
2. se A (punto immaginario) sta su una retta reale *r* e si conosce la posizione di *a*, per trovare l'altro estremo del segmento rappresentativo di A, basta calare la perpendicolare da *a* a *r* e prolungare di un segmento uguale.

A questo punto Laguerre introduce le *coordinate isotrope* nel modo seguente. Sia *O* un punto del piano e sia *w* una qualunque retta per esso; siano α e β rispettivamente le intersezione delle rette isotrope per *A* del primo e del secondo sistema: allora i segmenti $O\alpha=u$ e $O\beta=v$ saranno le coordinate isotrope di *A*. Per tale via si può definire il quadrato della distanza di due punti immaginari *A* e *B* (i cui segmenti rappresentativi sono rispettivamente *aa'* e *bb'*) come una quantità immaginaria il cui modulo è il prodotto delle lunghezze *ab* e *a'b'* e il cui argomento è l'angolo di rotazione della retta *ab* attorno al punto *a* finché *b* si trova sulla retta parallela a *a'b'*, in notazione $\overline{AB}^2 = ab.a'b'.e^{\mu i}$ (ibidem, pag. 97).

Laguerre tiene precisare che l'uso di punti immaginari in geometria non comporta un aumento tangibile di difficoltà, poiché essi vengono giustificati e legittimati continuamente dal loro significato analitico[252].

Nella seconda parte della memoria (che costituisce la seconda lezione di Laguerre alla sala *Gerson*) è dedicata alla rappresentazione di un punto immaginario se questo appartiene a una curva data. Anche in questo caso, attraverso l'impiego delle coordinate isotrope, verrà fornito il segmento rappresentativo del punto immaginario. Laguerre mostra che un punto immaginario *P* situato su una qualunque curva può essere rappresentato da un punto reale: quest'ultimo è il punto reale della retta isotropa del primo sistema che passa per *P*; se *P* è reale il punto rappresentativo *se confond avec lui*[253]. Laguerre indica che tale metodologia è derivata da Cauchy nel determinare l'integrale di una curva algebrica, la cui

> *variabile sia rappresentata dalla posizione di un punto che si muove sulla curva. … se il punto è immaginario, egli* [Cauchy] *lo rappresenta come noi attraverso il punto reale situato sulla retta*

[252] Cfr. (Laguerre 1870, II, pag. 98).

[253] (ibidem, pag. 104).

isotropa del primo sistema che passa per il punto dato (ibidem, pag. 104)[254].

Inoltre, Laguerre studia come varia la posizione di un segmento rappresentativo se un punto immaginario si muove su una curva immaginaria; in particolare dimostra che se i segmenti aa', bb', cc', … sono rappresentativi dei punti A, B, C, … di una retta, il poligono abc… formato dalle origini dei segmenti e il poligono *a'b'c'*… dato dalle estremità di esso sono simili e posti inversamente. A conclusione della seconda parte della memoria si dedica alla rappresentazione di un punto se questo si trova su una retta.

La terza parte della memoria è dedicata all'uso degli immaginari nella geometria dello spazio: Laguerre trasporta dal piano allo spazio la precedente trattazione, adattando simboli, nomi e linguaggio e fondando il tutto su considerazioni analoghe. Ma c'è qualcos'altro; nel suo metodo per rappresentare geometricamente una varietà complessa attraverso un'applicazione di essa su una varietà reale è chiaramente espresso che la dimensione di quest'ultima deve essere doppia rispetto a quella della prima. Quindi una coppia di punti complessi coniugati *a, a'* dello spazio viene rappresentata da un *cerchio rappresentativo* reale che giace nel piano perpendicolare alla retta *aa'* e il cui centro coincide col punto medio del segmento *aa'*, cerchio nel quale si secano i due coni isotropi (cono formato da tutte le rette isotrope che passano per lo stesso punto; tutti i coni isotropi tagliano il piano all'infinito secondo una stessa conica, detta ombelicale) che hanno per vertice rispettivamente *a* e *a'*; i due punti immaginari si possono distinguere l'un dall'altro considerando insieme al cerchio il senso di percorrenza di un punto mobile preso su di esso (ibidem, pag. 240).

Bisogna sottolineare come la trattazione di Laguerre non fa alcun cenno alla teoria che von Staudt aveva espresso più di dieci anni prima nei *Beiträge* sulla rappresentazione reale di un punto immaginario: certamente lo studio di Laguerre risulta più semplice e immediato di quello del tedesco suo contemporaneo, eppure al n. 410 del II *Heft* dei *Beiträge* von Staudt sembra anticipare la rappresentazione di Laguerre nel caso in cui si ha a che fare con punti (immaginari) che giacciono su una

[254] *la variable soit représentée par la position d'un point mobile sur cette courbe.*
… lorsque ce point est imaginaire, il le représente comme nous par le point réel situé sur la droite isotrope du premier système que l'on peut mener par le point donné (Laguerre 1870, pag. 104, trad. it. nostra).

retta (reale), la quale risulta perpendicolare al segmento rappresentativo nel punto medio di questo[255]. L'unico riferimento a geometri tedeschi fatto da Laguerre consiste nella considerazione che essi (Laguerre dice alcuni) non avrebbero fatto altro che applicare nella loro teoria gli argomenti svolti da Abel Transon[256], e pubblicati nel 1868, in relazione all'algebra direttiva in geometria[257].

Inoltre, malgrado lo svolgimento faccia intervenire solo questioni di geometria pura, Laguerre cerca una giustificazione continua sia in campo algebrico che, soprattutto, in quello analitico. E, si deve riconoscere, Laguerre espone gli argomenti in modo chiaro senza lasciar spazio a fraintendimenti o lacune, pronto a richiamare nozioni introdotte precedentemente (o altrove) pur di rendere più fluida la lettura e la comprensione al lettore.

Laguerre non parla di trasformazioni di enti immaginari: queste verranno prese in considerazione solo alla fine della terza parte di (Laguerre 1870) per il riferimento in essa alle trasformazioni per raggi vettori reciproci. In un'altra memoria[258], Laguerre trattando di birapporti di 4 punti o di 4 rette, dice che se si hanno due fasci omografici di rette isotrope di uno stesso sistema, il *rapporto anarmonico* di 4 rette del primo fascio è *propriamente uguale* (stesso modulo e stesso argomento) al rapporto anarmonico delle corrispondenti 4 nell'altro fascio; se invece nell'omografia, un fascio è composto da rette (isotrope) del primo sistema e l'altro da rette (isotrope) del secondo sistema, i due rapporti anarmonici saranno *impropriamente uguali* (stesso modulo e segno dell'argomento opposto)[259]. In questa memoria Laguerre non tratta in modo diverso il caso in cui 4 punti appartengono a una stessa circonferenza o a una stessa retta: evidentemente, ma non lo dice, ha a che fare con proiettività e antiproiettività.

---

[255] Cfr. (von Staudt 1857, II Heft, pagg. 264-5).

[256] (Trason 1868).

[257] Una sorta di algebra vettoriale geometrica; cfr. (Laguerre 1870, pag. 101-2).

[258] (Laguerre 1872-73).

[259] Cfr. (Laguerre 1872-73, pag. 246).

§5.4 Otto Stolz

Otto Stolz

Il primo matematico tedesco a dare risalto all'opera di von Staudt fu Otto Stolz (1842-1905), che l'aveva sicuramente letta a fondo, tanto da rendere partecipe il suo coinquilino Felix Klein[260] del suo entusiasmo e introdurlo al suo studio.

L'idea di Stolz era quella di tradurre analiticamente i risultati ottenuti da von Staudt, i cui *Beiträge* non erano stati ancora debitamente apprezzati, augurandosi che

> *il presente lavoro, che illumina l'altro da un altro punto di vista, serva a sottolineare maggiormente la sua importanza fondamentale e a mostrare segnatamente la completa concordanza coi metodi analitici* (Stolz 1871, pag.417)[261].

Vediamo in che senso.

Se su una retta, sulla quale si sia fissato un punto *O*, si può esprimere analiticamente l'involuzione ellittica (priva, cioè, di punti doppi reali) tra due serie di punti le cui coordinate sulla retta sono x e x', con l'equazione

$$(x-a)(x-a)+b^2=0 \quad \text{con } a,b\in\Re \text{ e } b\neq 0,$$

da questa si ottengono per i due punti doppi i due valori $x=a\pm bi$, che non essendo reali non potrebbero rappresentare alcun punto geometrico, ma che verranno chiamati complessi e aggiunti ai punti reali quali punti ideali. Il significato geometrico dei punti complessi $x=a\pm bi$ è proprio l'involuzione considerata, poiché viceversa per ogni coppia di punti complessi resta determinata una e una sola involuzione della retta. Per

---

[260] Stolz e Klein trascorsero molto tempo insieme a Berlino nell'a.a. 1869-70 e nell'estate del 1871 vissero insieme a Gottinga (proprio a giugno 1871 (cfr. (Stolz 1871, pag. 441)), quando Stolz terminava di scrivere la memoria di cui parleremo).

Si veda a tal proposito (Klein 1926, pag. 133).

[261] *Der vorliegende Aufsatz, der dieselben von einer anderen Seite beleuchtet, dazu dienen, ihre fundamentale Wichtigkeit neuerdings zu betonen und namentlich ihre Übereinstimmung mit den Ergebnisse der analytischen Methode herzuheben* (Stolz 1871, pag. 417, trad. it. nostra).

completare l'identificazione di ciascuno dei due punti complessi $x=a\pm bi$, bisogna associare alla retta un verso, fatto plausibile

> *poiché nella Geometria Euclidea la retta viene trattata come infinita e chiusa* (Stolz 1871, pag.418)[262].

Infatti se M_1 e M_2 sono i due punti complessi, per individuare sulla retta per essi un verso occorre un ulteriore punto M_3. La posizione di quest'ultimo dà il verso dell'involuzione. E delle sei posizioni reciproche dei tre punti sulla retta ($M_1M_2M_3$, $M_1M_3M_2$, $M_2M_1M_3$, $M_2M_3M_1$, $M_3M_2M_1$, $M_3M_1M_2$), Stolz mostra che sono solo due le fondamentali ($M_1M_2M_3$, $M_1M_2M_3$) e le altre coincidono con queste due.

> *Allora per rappresentare geometricamente in punto complesso $x=a+bi$, si associa (connette) all'involuzione (1) il verso della successione dei punti –b, 0, +b. Poi si prende per il punto coniugato $x=a-bi$ il verso opposto +b, 0, –b. Per b>0 il verso del punto complesso $x=a+bi$ coincide con la direzione positiva della retta data. – Se b=0, il verso è indeterminato; i punti complessi passano (diventano) punti "neutrali" o reali* (Stolz 1871, pag.419)[263].

Per dare ancora maggior credito alla sua impostazione Stolz asserisce che la sua interpretazione analitica di punto complesso è *l'unica possibile* sotto la condizione posta per il campo delle grandezze *x* e che la stessa non ha un carattere più ipotetico di quello dell'Algebra.

Dopo aver tradotto analiticamente i punti complessi, Stoltz fa la stessa cosa con

---

[262] *da in der Euklidischen Geometrie die Gerade als Unendlichen geschlossen betrachtet wird* (Stolz 1871, pag. 418, trad. it. nostra).

[263] *Um also den complexen Punkt x=a+bi geometrisch darzustellen, verbinde man mit der Involution (1) den in der Aufeinanderfolge der Punkt –b, 0, +b enthaltenen Sinn. Dann erhält man für den conjugierten Punkt x=a-bi den entgegengesetzten Sinn +b, 0, -b. Für b>0 stimmt der Sinn des complexen Punktes x=a+bi mit der positiven Richtung der gegebenen Geraden überein. –Ist b=0, so wird jeder Sinne unbestimmt; die complexen Punkte gehen in den „neutralen" oder reellen Punkt x=a über* (Stolz 1871, pag.419, trad. it. nostra)

1) le rette immaginarie, cui viene associata l'espressione analitica: $p+qi=0$, con p, q funzioni omogenee lineari delle coordinate x_1, x_2, x_3[264]. Infatti su ogni retta giace un solo punto complesso, il cui significato geometrico è dato dalla retta complessa di prima specie di von Staudt[265];
2) le catene;
3) i punti complessi appartenenti a curve del 2° ordine;
4) le forme complesse dello spazio, cioè piani complessi e rette di 2ª specie.

Dalla trattazione di Stolz si nota come egli non badasse completamente alle difficoltà insite nell'opera di von Staudt in riferimento alla separazione di una coppia di punti complessi in singoli punti l'un l'altro coniugato.

L'anno successivo, nel 1872, ciò verrà evidenziato da Klein.

[264] In realtà per individuare una retta bastano due punti; qui si fa riferimento a tre coordinate (corrispondenti ai tre punti M_1, M_2 e M_3) poiché si stanno considerando i due punti complessi coniugati come un unico punto.

[265] si veda capitolo 3 il paragrafo dedicato all'opera di von Staudt.

§5.5 Felix Klein

Sempre riconoscente all'amico Otto Stolz (1842-19) per averlo iniziato allo studio dell'opera di von Staudt[266], nel 1872, anno per lui ricco di pubblicazioni, prima fra tutte il suo celebre Programma di Erlangen, Klein si preoccupò[267] di dare un'alternativa esemplificata alla rappresentazione tramite un'involuzione reale ellittica di coppia di punti immaginari del matematico che lo precedette a insegnare a Erlangen, alternativa che, se si considerano le prime due pagine dell'articolo come un'introduzione, sta in appena due paginette.

Per Klein la maggiore difficoltà insita nella rappresentazione di von Staudt risiedeva nell'aver dotato la retta, sulla quale definire l'involuzione e con lo scopo di poter distinguere i due punti immaginari coniugati, di un verso.

> *L'introduzione e lo studio del verso appaiono innanzitutto arbitrari. … E non si capisce perchè lo studio del verso debba avere a che fare con la separazione dei due punti complessi* (Klein 1883, pag. 403)[268].

Insomma, Klein non vedeva il motivo di una tale introduzione, a maggior ragione se da essa scaturiva una ulteriore complicazione della teoria. Egli suggerisce così un'altra interpretazione dell'elemento complesso, che comprende quella di von Staudt come caso particolare e che deve essere vista come un perfezionamento di quella. Analizziamola nel dettaglio in riferimento, così come si limita Klein, ai punti complessi di una retta.

Il concetto chiave è una *determinazione metrica* sulla retta in cui giacciono i due punti immaginari coniugati O e O'. La distanza tra due punti A e B della retta è data dal logaritmo del birapporto che tali due punti formano con O e O', logaritmo che viene moltiplicato per una qualunque, ma fissata, costante c. Quindi, una volta decisa la costante c, resta fissata anche la determinazione metrica fino nel segno: quest'ultima

[266] Si veda (Klein 1926, pag. 133).

[267] Cfr. (Klein 1883).

[268] *Diese Einführung und Untersuchung des Sinnes scheint zunächst sehr willkürlich. …Und es ist gar nicht zu sehen, weshalb die Untersuchung des Sinnes mit der Trennung der beiden komplexen Punkten zusammenhängt* (Klein 1883, pag. 403, trad. it. nostra).

rappresenta i due punti *O* e *O'*. Il cambio del segno indica uno scambio delle posizioni di *O* e *O'*. A questo punto, Klein considera sulla retta una scala di punti equidistanti che insieme a (e a partire da) un punto fissato *a* (sempre sulla retta) soddisfi la determinazione metrica. Se si ripete tale costruzione per *n* volte, con $n>2$, si ottiene la cosiddetta *successione ciclica proiettiva di n punti*. Tale successione di punti unitamente al senso sostituisce pienamente la determinazione metrica (se $n=2$ si ha la rappresentazione di von Staudt, poiché si ottiene una coppia di punti; se $n<2$ (cioè $n=1$), non si ottiene alcuna successione (ho il solo punto *a*)).

Consideriamo invece il caso $n=3$; si ottengono tre punti (qualunque) sulla retta il cui punto immaginario (considerato come quarto punto) è equianarmonico[269].

Klein conclude affermando:

> *Così rappresentiamo in conclusione il punto complesso attraverso tre punti qualunque, ma in un determinato senso, su una retta* (Klein 1872, pag. 405)[270].

Tale pubblicazione di Klein, segue una prima memoria in cui egli studia i rapporti equianarmonici[271] di 4 punti. Molto probabilmente le radici di questo articolo, che poggia l'interpretazione geometrica dei punti complessi sull'impiego di proiettività cicliche, si basano su (Klein 1871), nella quale memoria, Klein ha introdotto la rappresentazione più semplice (*einfachsten Darstellung*[272]) geometrica degli immaginari alternativa a quella di von Staudt.

---

[269] *Chiameremo equianarmonico un sistema di quattro punti, i cui rappresentanti anarmonici fondamentali sono eguali, ossia un sistema di quattro punti aventi per rapporti anarmonici le radici cubiche immaginarie di -1* (Cremona 1862, pag. 22).

[270] *Wir repräsentieren also schließlich den komplexen Punkt durch drei beliebige in bestimmtem Sinne zu nehmende Punkte einer Gerade* (Klein 1972, pag. 405, trad. it. nostra).

[271] Cfr. (Klein 1871).

[272] cfr. (Klein 1883, pag. 405).

§5.6 Jacob Lüroth

Jacob Lüroth

È il 1875 quando J. Lüroth (1844–1910) pubblica una memoria del titolo *Das Imäginare in Geometrie und das Rechnung mit Würfe*. Il titolo suddetto e il sottotitolo (*Darstellung und Erwaiterung der v. Staudt'schen Theorie*) non lasciano dubbi: l'intento di Lüroth è chiaro.

L'articolo pubblicato sui *Mathematische Annalen* comincia con il famoso inizio della prefazione dei *Beiträge*[273]. E pur essendo consapevole del progresso compiuto da von Staudt in campo complesso, con l'introduzione degli elementi immaginari in geometria, Lüroth lamenta la mancata introduzione dei quaternioni in geometria.

La lunga memoria[274] di Lüroth, seguita da una seconda parte pubblicata due anni dopo[275], forse è l'unica, tra tutte quelle della seconda metà del XIX secolo in Germania che *vorrebbe* allargare la teoria di von Staudt, anche se solo per quanto riguarda il calcolo coi *Würfe*. E diciamo vorrebbe, poiché il vero merito di Lüroth risiede nel fatto che egli riprende la teoria complessa così come era stata presentata da von Staudt cercando di mantenere la sua terminologia, di migliorarla e, conseguentemente, semplificarla. Né T. Reye né F. August (il primo nel 1868 nella sua *Geometrie der Lage* dedica solo poche pagine alla teoria complessa, il secondo si limita a trattare gli elementi immaginari e le loro combinazioni senza fare alcun riferimento alla teoria delle proiettività[276]) riuscirono a sviluppare la teoria del loro predecessore; della qual cosa si premurerà invece Lüroth. Vediamo come.

I primi tre paragrafi danno l'usuale definizione di von Staudt di elemento complesso di prima specie e le relazioni tra di essi. Col paragrafo 4 viene introdotto il

[273] Vedi il paragrafo §4.4 Segre 1892.

[274] Prima e seconda parte insieme raggiungono quasi le 100 pagine.

[275] (Lüroth 1877**)**.

[276] (August 1872). Cfr. a tal proposito (Ramorino 1898, pag. 336) e (Lüroth 1875, pag. 147).

concetto di polare di un'involuzione, propedeutico, nel paragrafo 5, alla determinazione della retta complessa di seconda specie, che Lüroth definisce non come fa von Staudt, ma, seguendo l'impostazione di August, come intersezione di due piani che non hanno punti (reali) in comune. Il sesto paragrafo è dedicato alla teoria dei *Würfe*[277] (=tetradi) di 4 punti, trattazione che viene completata anche con le tetradi neutre[278]; infatti non considerando queste, von Staudt veniva meno al requisito di continuità della retta. Come Klein ha dimostrato in (Klein 1873b)[279], bisogna supporre la forma di prima specie essere continua; quindi Lüroth è sì costretto a considerare tetradi neutre (cioè di valore reale, congeniali, tra l'altro, a definire l'appartenenza di un punto a una catena), ma riesce a mantenere il linguaggio di von Staudt. Tale presupposto viene esteso nei paragrafi 7 e 8 anche alle tetradi di 4 elementi qualunque (rette, piani, ecc.). Il paragrafo 9 tratta delle tetradi armoniche, mentre il decimo esamina i rapporti proiettivi tra forme (reali o immaginari) e dimostra che tutte le proprietà introdotte per elementi immaginari continuano a valere se essi sono reali. Considerando gli elementi immaginari di una sezione conica reale, cui è dedicato l'undicesimo paragrafo, viene dimostrato come ottenere essi (tangenti, polari, intersezioni, ecc.) in modo usuale. Il paragrafo 12 contiene la teoria delle involuzioni, e con questo si chiude la prima parte della memoria (non la presente pubblicazione). I paragrafi dal 13 al 17 trattano del calcolo coi Würfe; tramite esso Lüroth cerca di ampliare e sviluppare la teoria di von Staudt guardando alla variabilità delle tetradi (cioè a quella dei loro valori numerici) come incognite di equazioni, e quindi trovare le radici di un equazione algebrica che si lascia tradurre con una equazione in cui è da determinare la soluzione (=la tetrade incognita x)[280]. Il paragrafo 18 introduce le coordinate di punti e rette di un piano.

---

[277] Si ricorda che per von Staudt un *Wurf* non è il valore numerico di una tetrade di punti, ma è una particolare configurazione di 4 punti del piano, cui poi si può associare un numero che è il valore del birapporto delle proiezioni di quei 4 punti su una retta.

[278] Si ricorda che sono neutre le tetradi di 4 punti se il valore del relativo birapporto è un numero reale.

[279] Lüroth aveva molto chiara in mente la problematica; infatti in (Klein 1873b) Klein riporta la dimostrazione di Lüroth-Zeuthen della seguente proposizione (supposta la continuità): *qu'il n'existe pas dans une série fondamentale complète**) des segmentes ou des angles où l'on ne puisse entrer par des constructios successives du quatrième harmonique, les trois premiers éléments étant donnés* (Klein 1873b, pag. 535).

[280] Lüroth parla di *funzioni intere* (*ganze Functionen*) di tetradi; cfr. (Lüroth 1875, pagg. 200-207).

Nell’ultimo paragrafo (il diciannovesimo) Lüroth si chiede se tutte le considerazioni fatte circa gli elementi immaginari nella forma datagli da von Staudt può essere applicata alle curve algebriche superiori e se esse portino a interessanti risultati così come succede in analisi. Dal punto di vista analitico ciò venne fatto da Stolz; abbiamo infatti visto che gli elementi immaginari possono venire rappresentati analiticamente con sistemi di numeri complessi e che proposizioni del tipo ”un punto giace su un piano” possono facilmente essere tradotte in termini di relazioni (=equazioni) tra numeri complessi. La via che suggerisce Lüroth è quella di partire dalla definizione di curva algebrica data da Hermann Günther Grassmann (1809-1877) nell’*Audehnungslehre*[281].

La seconda memoria di Lüroth, sempre dallo stesso titolo pubblicata due anni dopo, consiste di due parti; nella prima Lüroth cerca di porre rimedio a una mancanza della prima memoria: si tratta di imporre l’unicità della coppia (reale o immaginaria) che separa armonicamente due coppie di punti[282]; nella seconda parte invece ripropone il lavoro di Klein (Klein 1872) dotandolo di una veste di geometria pura, visto che le argomentazioni di quest’ultimo seguivano una via prettamente analitica. In essa Lüroth propone una rappresentazione degli immaginari in geometria con l’aiuto di gruppi ciclico-proiettivi, così come erano stati chiamati da Clebsch[283] i gruppi di punti definiti da Klein.

---

[281] Cfr.: (Grassmann 1862, pagg. 189-205: §6 *Besondere Gesetze fuer ein gleich Null gesetztes planimetrisches Produkt. Ebene Kurven*).

[282] Cfr. (Lüroth 1875, pag. 175).

[283] Cfr. (Klein 1872a) e (Clebsch 1868, pag. 167).

§5.7 Altri matematici

Uno degli autori è F. August di cui però qui non esamineremo il lavoro del 1872[284], ma che richiameremo se necessario.

Nei primi anni settanta, anche F. O. Rudolf Sturm (1841-1919) si interessò ai lavori di von Staudt. Risultato ne è stato la pubblicazione del 1875 nei *Mathematishe Annalen* di un articolo, la cui fonte ispiratrice è (Lüroth 1875). Sturm formula dimostrazioni più geometriche (*mehr geometrische*, pag. 333, di quelle date prima di lui) delle proprietà associative e distribuitive dell'addizione e della moltiplicazione fra tetradi, della divisione. Il "più geometriche" si riferisce molto probabilmente all'idea precedente alla sua di concepire i *Würfe* come birapporti e quindi, al contrario di quanto aveva posto von Staudt, dimostrazioni analitico-aritmetiche. Infine, Sturm propone

> *uno sviluppo puramente geometrico dell'equazione di un piano (o di un punto) in tetracoordinate* (Sturm 1875, pag. 342)[285].

Ciò implica anche la possibilità di porre, in modo differente da von Staudt, una tetrade complessa sotto la forma $\alpha+i\beta$, con α e β tetradi reali.

Cyparissos Stephanos (1857-1917) pubblica un lavoro nel 1883, ancor prima di diventare Dottore in scienze matematiche all'Università di Parigi[286], dove si era recato nel 1878 dopo aver completato i suoi studi all'Università di Atene. Stephanos sottolinea che la teoria di von Staudt non è ancora abbastanza conosciuta, malgrado molti lavori fossero stati già consacrati alla teoria di von Staudt. Ma Stephanos non introduce particolari novità: esprime von Staudt con altre parole, ma che nella sostanza non differiscono dalla rappresentazione geometrica reale di una coppia di punti immaginari coniugati che giacciono su una retta reale attraverso una involuzione quadratica avente questi per punti doppi; considerando un determinato cammino (verso) della retta, si ottiene che *l'involuzione supposta* [e] *descritta in un senso determinato*[287] corrisponde a uno dei due punti suddetti. Così, considerato un sistema di coordinate sulla retta reale

[284] Cfr. (August 1872).

[285] *eine rein geometrische Entwickelung der Gleichung einer Ebene (oder eines Punktes) in Wurfcoordinaten* (Sturm 1875, pag. 342).

[286] Lo diventerà un anno dopo discutendo una tesi dal titolo *Sur la theorie des formes binaires et sur l'elimination.* Egli studiò a Parigi con Hermite, Darboux e Jordan.

[287] *l'involution supposée décrite dans un sens déterminé* (Stephanos 1883, pag. 209).

determinato da tre punti base $P_0P_1P_\infty$, tramite cui ciascun punto immaginario coniugato *P'* e *P''* avrà per coordinate il parametro $\lambda'=a+bi$ e $\lambda''=a-bi$, si può dire che se *b* è positivo il senso associato al punto immaginario è $P_0P_1P_\infty$, se b è negativo il senso sarà P_∞ P_1P_0. Tale maniera di associare un senso al punto immaginario non è arbitrario in quanto la determinazione del senso è indipendenta alla scelta del sistemadi coordinate[288]. Se invece di considerare un'involuzione priva di punti doppi reali quale rappresentante della coppia i punti immaginari della retta reale sulla quale l'involuzione è definita, si prende una qualunque altra omografia avente quella coppia di punti come punti fondamentali, quest'ultima sarà trasformata nella sua inversa da tutte le involuzioni che scambiano i suoi due punti fondamentali. Se l'omografia di partenza è ciclica, cioè si ripete un certo numero *k* di volte (k>2), essa darà l'omografia identica che fa corrispondere ciascun punto a se stesso; quindi si potrà definire la coppia di punti immaginari non più attraverso l'omografia, ma attraverso un qualunque gruppo di *k* punti ottenuti tramite l'applicazione ripetuta di quest'omografia a uno stesso punto reale; prendendo i punti successivi di un gruppo in un senso o nell'altro, si avrà la rappresentazione di un punto o dell'altro punto immaginario coniugato così come indicato in (Klein 1872) e in (Lüroth 1877).

[288] Cfr. (Stephanos 1883, pagg. 209-210).

§5.8 Hermann Wiener

Hermann Wiener

Come si è già detto, Segre[289] dopo aver terminato di scrivere (Segre 1888), era venuto a conoscenza di un opuscolo[290] pubblicato nel 1885, quindi tre anni prima della sua memoria, a Darmstadt da Hermann Wiener (1857-1939) dal titolo *Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden* (=Teoria geometrica pura della rappresentazione di forme binarie attraverso gruppi di punti su rette)[291].

Da quanto si apprende da Segre, tale lavoro di Wiener che, almeno nella sua prima parte, costituisce la sua tesi di abilitazione, ha a che fare coi suoi risultati soltanto per alcuni concetti introduttivi di (Segre 1888). Infatti i punti di contatto tra le due trattazioni sono appena 5, precisamente solo in principio della memoria di Segre e in riferimento:

1. alla definizione di involuzioni armoniche che Wiener però pone quando il loro prodotto è sempre un'involuzione[292], mentre Segre ricorre agli elementi doppi dell'involuzione: se dati 4 elementi di una forma A, B, C, D se ne fissa uno, per esempio A, e si considerano le involuzioni I_1(AB,CD) e I_2(AC,BD) allora la terza (e unica) involuzione possibile I_3(AD,BC) è l'involuzione armonica alle due precedenti[293]; Wiener dimostra invece ciò come proprietà di due involuzioni armoniche[294];

[289] Si veda qui, il § 4.1 Segre 1888

[290] Si veda (Segre 1888, pag. 5, nota (**)).

[291] (Wiener 18859).

[292] (Wiener 1885, pag. 29, n. 55).

[293] Si ricorda che Segre identifica un'involuzione con la coppia dei suoi punti doppi.

[294] (Wiener 1885, pagg. 30-31, nn. 57-58).

2. all’importanza dell’involuzione unita di una proiettività[295]; Wiener però ne dà una dimostrazione dell’esistenza molto più complicata di Segre passando per le successioni cicliche di una proiettività[296];
3. all’uso delle involuzioni armoniche alla involuzione unita di una proiettività: in Segre tutte e sole quelle che trasformano la proiettività nella sua inversa, mentre in Wiener sono quelle che formano un sistema polare[297];
4. alla definizione di proiettività a partire della sua involuzione unita[298];
5. alle serie proiettive di elementi[299], che sono definite in modo analogo[300].

A parte queste somiglianze, intento, scopo e metodologia differiscono nei due matematici.

Lo scopo principale di Wiener è quello di sviluppare la teoria degli invarianti di gruppi di punti (o forme binarie) di una retta tramite soprattutto sistemi polari (analogamente a quanto aveva fatto con successo H. Thieme[301]), senza badare attenzione alla natura reale o immaginaria dei punti, e fare in modo che tutto ruoti attorno alle serie cicliche, gruppi di punti di una proiettività costruiti a partire da uno[302]. Tutti i punti della serie ciclica sono diversi tra loro, eccetto nel caso delle serie cicliche alla Klein o alla Lüroth, nelle quali dopo un certo numero di costruzioni si ritrovano punti già appartenenti alla serie.

---

[295] Per involuzione unita *U* di una proiettività *P*, Segre definisce l’unica involuzione che sia permutabile con la proiettività, cioè tale che sia trasformata in se stesa dalla proiettività, in formula *UP=PU* (Segre 1888, pag. 9).

[296] Cfr. (Wiener 1885, pagg. 19, n. 30; pag. 22 e segg., n. 36 e segg.).

[297] Cfr. (Wiener 1885, pagg. 31-32, n.59). Wiener chiama un’involuzione anche sistema polare del secondo ordine, nel quale un gruppo di punti (o forma binaria) è la coppia di due punti doppi dell’involuzione (un punto del gruppo è il polare dell’altro).

[298] Cfr. (Segre 1888, pag. 11) e (Wiener 1885, pag.24, n.41).

[299] Se dati due elementi arbitrari A e B di un’involuzione, a partire da essi si determinato tutti i coniugati armonici $A_1A_2A_3$… e $B_1B_2B_3$…, le due serie $AB_1B_2B_3$… e B $A_1A_2A_3$… sono proiettive (Segre 1888, pag. 13).

[300] Cfr. (Segre 1888, pag. 13) e (Wiener 1885, pag. 39, n. 74).

[301] Hermann Thieme, Die Definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, XXIV, 1879, 221-229, 276-284.

[302] Sia dato A_0 punto di una proiettività, da esse si determini il corrispondente A_1, e poi il corrispondente A_2 di questo e il corrispondente A_3 di A_2, ecc. nella proiettività sempre con lo stesso verso, e poi si costruisca l’A_{-1} corrispondente di A_0 nella proiettività con senso opposto, A_{-2} corrispondente di A_{-1} in questa stessa proiettività, ecc.; si ottiene la serie …$A_{-3}A_{-2}A_{-1}A_0A_1A_2A_3$… detta serie ciclica della proiettività (Wiener 1885, pag. 17, n. 26).

Il metodo seguito da Wiener è quindi quello di definire un sistema polare di ordine n (cioè costruito a partire da n punti) e

> *cercare da esso di sviluppare un metodo che appaia appropriato alla trattazione della teoria degli invarianti delle forme binarie* (Wiener 1885, pag. 2)[303].

Da notare che la teoria connessa al concetto di punto limite di una serie armonica (quel punto D armonico a tutti i punti della serie rispetto ai due che gli stanno accanto[304]) non è portata avanti; forse ciò è dovuto perché pensata come competente a un altro campo della geometria, quello della teoria delle funzioni[305].

Altra constatazione da fare è che Wiener sviluppa la teoria delle involuzioni unite (=*Involutionen harmonisch zugeordneter Punkten*) di una proiettività senza tirare in ballo il concetto di immaginari, al contrario di quanto fanno von Staudt e lo stesso Segre: tutte le proposizioni valgono indifferentemente quanto per punti reali tanto per punti immaginari[306].

Cinque anni dopo, Wiener torna sull'argomento con la pubblicazione sul primo volume dello *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* di un articolo in due *trances*: *Grundlagen und Aufbau der Geometrie* (=Fondamenti e costruzione della Geometria)[307]. In esso, dopo una prima parte in cui egli esamina quale sistema (minimo) di assiomi (tra cui quello di continuità), oggetti (enti primitivi) e operazioni (per esempio, connessioni e intersezioni) è opportuno scegliere per far dipendere da esso la geometria proiettiva, Wiener analizza lo stato della geometria in quel tempo. Egli individua due modi di fare geometria: il primo si connette alle ricerche di Riemann e Helmholtz, in cui il punto dello spazio viene dato attraverso numeri, le sue coordinate analitiche, il secondo si riferisce a von Staudt e

> *alla sua rinuncia a ogni considerazione di tipo metrico per considerare gli elementi dello spazio (punti, rette, piani) e i loro*

---

[303] *versuche von ihr aus Methode zu gewinnen, die zur rein geometrischen Behandlung der Invariantentheorie binärer Formen geeignet erscheinen* (Wiener 1885, pag. 2, trad. it. nostra).

[304] Cfr. (Wiener 1885, pag.10).

[305] Cfr. (Wiener 1885, pag. 4).

[306] Cfr. (Wiener 1885, pag. 3).

[307] (Wiener 1892-93).

collegamenti (connessioni e intersezioni) come concetti base, dai quali derivare formalmente i teoremi, in modo geometrico puro (Wiener 1892-93, pag. 70) [308].

Per il primo modo di intendere la geometria, Sophus Lie mise un punto fermo a tali ricerche; per il secondo, dopo che Felix Klein sollevò obiezioni contro la *Geometrie der Lage* di von Staudt soprattutto in riferimento all'esigenza di esplicitare un assioma di continuità, Lüroth e Zeuthen (e poi anche De Paolis) posero, quale premessa alla dimostrazione del Teorema Fondamentale della Geometria Proiettiva di von Staudt, alcune considerazioni appunto sulla continuità.

Stabilito ciò, nel prosieguo dell'articolo Wiener si propone di dimostrare che non solo la geometria proiettiva ma gran parte dei teoremi dell'usuale geometria (la Euclidea), può fare a meno del concetto di numero, e che

> *si deve trasmettere la concezione di Staudt alla Geometria euclidea* (Wiener 1892-93, pag. 71)[309].

In altre parole, il matematico di Halle dimostra che la costruzione della geometria alla von Staudt è possibile anche quando si considera il parallelismo e non i concetti di infinito (nel senso di un punto, di una retta o del cerchio all'infinito) e perpendicolarità. Infatti una qualunque relazione affine tra due rette o tra due piani può essere dimostrata attraverso l'impiego del teorema di Desargues. Mentre, il teorema che due successioni di punti prospettivamente simili sono contemporaneamente affini, presuppone la configurazione relativa al teorema di Pappo nel caso in cui una delle *nove* rette è all'infinito. E in tal modo quelli che erano considerati teoremi conclusivi della teoria ora vengono a essere delle semplici conseguenze di semplici proposizioni.

---

[308] *…also vom Begriff der Masszahl absieht, und die Raumelemente selbst (Punkt, Gerade, Ebene) und deren Verknüpfungen (Verbinden und Schneiden) als diejenigen Grundbegriffe annimmt, aus denen die Sätze formal abzuleiten sind, sie ist also rein geometrisch* (Wiener 1892-93, pag. 70, trad. it. nostra).

[309] *Es sollen damit die Staudt'schen Anschauungen auf die Euklidische Geometrie übertragen werden* (Wiener 1892-93, pag. 71, trad.it. nostra).

§5.9 Sophus Christian Juel

Christian Juel

Con due note a piè di pagina, la prima nella prima delle quattro note di (Segre 1889-91), la seconda all'inizio della terza nota, Segre constata che nel numero di dicembre dell'anno precedente alla pubblicazione della sua memoria, è comparsa una recensione sul *Bulletin des Sciences Mathématiques* di un lavoro in danese, dal titolo impronunciabile[310], di Christian Juel (1855-1935). Dalla traduzione in italiano del titolo (*Contributo alla geometria delle rette immaginarie e dei piani immaginari*) si capisce che esso è di particolare interesse per il nostro discorso.

Dalla recensione Segre afferra che Juel ha studiato (prima di lui),

> *sotto il nome di simmetrali, le corrispondenze fra punteggiate e fra piani che io chiamo rispettivamente antiprojettività ed anticollineazioni; come pure le catene piane. Lo scopo di quello scritto sembra però affatto diverso dal mio; né da quella recensione (su cui soltanto posso ora basarmi) appare che fra le due pubblicazioni vi sia molta affinità (Gennaio 1890)* (Segre 1889-91, nota I, pag. 285, nota(*)).

Nella seconda nota invece, Segre ha letto, comunque dopo aver già dato alle stampe la sua seconda nota, la memoria che Juel pubblica nel volume XIV (1890) degli *Acta Matematica* dal titolo *Über einige Grundgebilde der projectiven Geometrie* (=Su alcune forme fondamentali della geometria proiettiva)[311]. Come Juel stesso afferma nell'introduzione all'articolo,

[310] Cfr. (Juel 1885). La traduzione del titolo in inglese è: *Contribution to the geometry of the imaginary line and the imaginary plane*.

[311](Juel 1890-91).

i principali risultati di queste ricerche, sebbene a volte sotto altre premesse, si trovano già nella mia dissertazione dottorale dell'anno 1885 (Juel 1890, pag. 3)[312].

È indubbio che il lavoro di Juel, che studia per via puramente sintetica le catene semplici e piane, le antiproiettività fra forma semplici e le anticollineazioni fra due piani (comunque sotto il nome di *Symmetralität* (=simmetralità)), ha alcuni punti in comune coi risultati che Segre ottiene nelle sue prime due note e che dunque gli spettano su ciò *diritti di priorità*[313]; ma altrettanto vero che, al contrario di quanto fa Segre, Juel non si occupa affatto di enti iperalgebrici nello spazio, quindi, per esempio, neanche di iperconiche né di iperquadriche.

Ma forse, come osserva Segre, *il suo indirizzo e il suo scopo sono essenzialmente diversi*[314] dai suoi. Vediamo perché.

Innanzitutto va rilevato che le due pubblicazioni di Juel del 1885 e del 1890 non sono la seconda la traduzione in tedesco della prima. Indi, né Segre, né tanto meno noi che questa tesi scriviamo, abbiamo avuto modo, non conoscendo il danese, di leggere direttamente (Juel 1885). Le sole notizie sulle quali si può fare affidamento sono quelle inserite nel database dello *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* a firma di Gino Loria[315].

Stando alle parole di Loria, Juel considera in due spazi due congruenze (r_1) e (r_2) di due rette immaginarie r_1 e r_2, e prende tre rette qualunque della prima congruenza, e tre rette qualunque della seconda; così si possono ottenere in infiniti modi una trasformazione proiettiva o reciproca. In entrambi i casi, però, essa soddisfa la condizione che le tre rette, prese in un certo ordine, corrispondono alle altre tre in un ordine altrettanto determinato. Si dimostra che una tale trasformazione fa corrispondere ogni retta di (r_1) con una retta di (r_2), e ogni punto di r_1 con uno di r_2, e che essa stessa è una proiettività o una reciprocità, che Juel chiama simmetralità. Essa è l'unica che fa corrispondere catene a catene e che è possibile determinare attraverso tre coppie di

[312] *…die Hauptresultate dieser Untersuchungen obgleich zum Theil mit anderei Begründung, schon in meiner Doctordissertation v. J. 1885 zu finden sind* (Juel 1890-91, pag. 3)

[313] Cfr. (Segre 1889-91, nota III, pag. 592).

[314] Vedi nota precedente.

[315] JFM 21.0595.01, http://www.emis.de/cgi-bin/jfmen/MATH/JFM/quick.html.

punti corrispondenti. La simmetralità però possiede particolari proprietà, che di seguito elenchiamo:

1) fra i punti di due catene di una simmetralità esiste una proiettività;
2) una simmetralità qualunque contiene in generale o due punti doppi o due punti reciprocamente corrispondenti; se in particolare essa è involutoria, contiene o nessuno o ∞^1 punti doppi;
3) una simmetralità qualunque contiene infinite coppie di catene reciprocamente corrispondenti. Se essa ha due punti doppi allora essa possiede anche catene unite (che corrispondono a esse stesse); se invece essa ha due punti reciprocamente corrispondenti, allora essa conterrà solo una tale catena. Se essa è (*endlich*) involutoria, allora ci sono ∞^2 di tali catene.

Si deve notare che mentre una proposizione sulle simmetralità vale in generale, ciò non accade per una proiettività, poiché quest'ultima è trasformata sempre in una proiettività qualunque sia in numero di proiettività che le si applica; mentre un numero dispari di trasformazioni involutorie simmetrali danno una simmetralità e un numero pari di esse danno una proiettività.

Dopo avere trattato tali argomenti per via puramente geometrica, Juel deriva le stesse cose analiticamente partendo dalle coordinate proiettive della teoria dei *Würfe* di von Staudt. Innanzitutto egli deriva le regole di calcolo in modo nuovo e più generico[316], e chiama le due principali operazioni (entrambe associative, commutative e distributiva l'una rispetto l'altra in casi particolari) pseudoaddizione e pseudomoltiplicazione; esse comunque coincidono con quelle introdotte da von Staudt.

Juel, come von Staudt,:

i) pone che il birapporto delle ascisse di 4 punti come il valore numerico del Wurf di quei 4 punti[317],

ii) dimostra che il birapporto di 4 punti di una catena è reale,

iii) trova le equazioni di una catena, di una simmetralità e di una proiettività e i loro invarianti.

---

[316] Loria dice espressamente che Juel *crede* che il suo metodo sia generale. Loria prosegue dicendo che in realtà Juel dà l'Analisi dei problemi, mentre von Staudt mostrava la Sintesi; Loria dimostra il suo asserto al lettore.

[317] (von Staudt 1857, Heft II, n.405, pag. 262).

Dalle catene di ∞^1 punti di una retta, forma di prima specie, Juel passa alle catene di ∞^2 punti di un piano (catene piane o bidimensionali).

Ma ciò che forse rende la memoria di Juel vicina a quella di Segre è (come dice Loria nella recensione su JFM) l'introduzione dei quaternioni in modo simile a quanto fatto con l'associazione di un numero ai *Würfe*. Infatti Juel fornisce, in modo analogo alla rappresentazione sul piano di un punto complesso (a coordinate reali) di Argand, la rappresentazione dei quaternioni in punti (a coordinate complesse) di un qualunque piano complesso.

Secondo Loria, comunque, questa rappresentazione, di cui parla anche Stephanos[318], è ancora *in fieri* e il giudizio finale sul valore pratico della scoperta di Hamilton deve essere ancora espresso.

A differenza da quanto preannunciato in (Segre 1889-91, nota III, pag. 592), Juel sviluppa anche parte della teoria nello spazio; Loria infatti parla di superfici, sezioni coniche e curve del terzo ordine.

In conclusione alla sua lunga relazione, Loria richiama l'attenzione del lettore sulle relazioni che intercorrono tra la teoria esposta e quella delle funzioni algebriche, tra le superfici di Riemann, connesse alle curve algebriche, e i relativi sostegni di curve.

Passiamo alla memoria del 1890.

Lo scopo principale di Juel è quello di indagare quale sia il grado di distinzione da operare tra le proprietà degli elementi reali e quelle degli immaginari. Così, mentre i risultati principali sono gli stessi, qui non vi saranno considerazioni di tipo algebrico (presenti invece nella tesi di dottorato). I primi enti da studiare sono le catene bidimensionali (doppie in Segre) di un piano immaginario, soprattutto in riferimento a quante proiezioni centrali servono per mandare 4 punti reali di un piano immaginario in 4 punti reali di un altro piano. Dopo aver stabilito alcune proprietà delle catene bidimensionali, Juel è in grado di rispondere alla questione anzidetta. Infatti partendo dal presupposto che esiste una proiezione che fa corrispondere catene di una specie di un piano a catene della stessa specie in un altro piano immaginario, il numero è al massimo tre se le proiezioni centrali sono reali, due se non lo sono.

[318] (Stephanos 1883).

Nella seconda parte, applicando le proprietà trovate precedentemente, vengono innanzitutto determinate le coppie di punti (reali o immaginari coniugati) di una trasformazione di un piano reali in sé. Indi, si studiano le relazioni simmetrali, poiché

> *fino a ora queste sono state investigate poco, e per quanto io sappia, da nessuna parte in modo sistematico* (Juel 1890, pag. 2)[319].

Dunque Juel studia le trasformazioni che Segre chiama antiproiettive. Ricordiamo che le prime due note della memoria (Segre 1889-91) escono in contemporanea a (Juel 1890).

La questione principale di Juel è determinare le proprietà di una simmetralità, considerato il fatto che è già noto, grazie a von Staudt, che in generale essa trasforma un gruppo armonico di 4 elementi ancora in un gruppo armonico di 4 elementi della stessa specie; ciò che resta da fare è capire è cosa succede a due *Würfe* omologhi; Juel *scopre* che

> *tetradi corrispondenti, per ciò che riguarda il senso, non sono della stessa specie* (Juel 1890, pag. 12)[320],

in accordo con quanto già supposto da von Staudt, che suppone che i due *Würfe* omologhi abbiano senso opposto ma non indaga ulteriormente[321].

Quindi, in realtà, lo scopo di Juel coincide con quello di Segre, almeno per quello che consiste lo studiare le trasformazioni di forme fondamentali che non sono proiettive[322], ma sono simmetrali per Juel e antiproiettive per Segre: nomi diversi per lo stesso tipo di trasformazione. Le proprietà trovate da Juel per le simmetralità di un piano in se stesso sono le stesse di quelle delle antiproiettività di Segre; ma mentre il matematico torinese portò lo studio di questi enti avanti fino a considerare tutti gli elementi iperalgebrici da essa determinati anche in dimensioni superiori e le loro rappresentazioni reali, Juel si limita allo studio delle simmetralità del piano

---

[319] *Es sind diese bisher ziemlich wenig untersucht, und soviel ich weiss, nirgends in systematischem Aufbau* (Juel 1890, pag. 2, trad. it. nostra).

[320] *entsprechende Würfe, was den Sinn anbelangt, nicht von derselben Art sind* (Juel 1890, pag. 12, trad. it. nostra).

[321] (Staudt 1857, pag. 142, n. 215; pag. 147, n. 225).

[322] Come trova von Staudt in (Staudt 1857, pag. 147, n. 225).

immaginario e alle catene bidimensionali (=doppie) in esso[323], cosa che tra l'altro aveva già fatto nella sua tesi di dottorato.

[323] *Ich gehe jetzt zur näheren Untersuchung der Symmetraltransformatio einer Ebene über* (=*adesso passo a più strette indagini sulle trasformazioni simmetrali di un piano*) (Juel 1890-91, pag. 17).

§5.10 Eduard Study

Eduard Study

Eduard Study (1862-1930) è stato forse il primo matematico, nella fattispecie tedesco, a dare un effettivo risalto e un alto riconoscimento alle ricerche di Corrado Segre nel campo della Geometria Proiettiva Complessa. Nel 1902, infatti, 10 anni dopo (Segre 1892) viene pubblicato sullo *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, un articolo di Study dal titolo *Einer neue Zweig der Geometrie* (= Un nuova branca della geometria). Esso descrive brevemente la *geometria duale radial-proiettiva* (è questa la nuova branca), la cui trattazione viene definita un anno dopo nel suo celebre *Geometrie der Dynamen* (1903; Teubner, Leipzig), in cui studia *la teoria della rappresentazione del sistema di forze attraverso figure geometriche*[324]. Cosa vuol dire? Queste forze sono le trasformazioni geometriche applicate a un sistema di elementi (figure geometriche composte da punti, rette, piani); nel caso euclideo sono i movimenti rigidi, se passiamo al caso proiettivo abbiamo le trasformazioni proiettive.

> *La nostra geometria delle proiettività duali nello spazio euclideo è forse non la più interessante fra tutte le discipline geometriche, delle quali essa apporterà nuovi metodi alla teoria delle congruenze di raggi e ai complessi, ma essa ha la più estesa linea di contatto con le ricerche che hanno fino a ora attirato l'interesse dei geometri. La geometria euclidea, come quella proiettiva, è in essa contenuta. La nuova geometria lineare può essere vista come la seconda di un'infinita serie di geometrie algebrico-geometriche, di cui quella euclidea è la prima. Essa può inoltre venire intesa, per quanto intervengono figure reali, come un caso limite della geometria*

[324] …*die Lehre von der Darstellung der Systeme von Kräften durch geometrische Figuren* (Study 1900, pag. 204).

proiettiva piana, se come suoi elementi spaziali vengono presi punti immaginari e rette immaginarie, o anche come caso limite di una geometria proiettiva che ha a che fare con figure di due piani indipendentemente l'una dall'altra trasformabili (Study 1903, pag. 229).[325]

Una geometria che è analoga alla teoria delle affinità cicliche di Möbius[326] e che

prenderà in prestito termini come anticorrelazione e anticollineazioni, introdotti in essa da Corrado Segre (Study 1903, pag. 233)[327].

Essa, inoltre, è un ampliamento della geometria dei cerchi di Möbius e di Lie[328]. La definizione, comunque di geometria radial-proiettiva è la seguente[329]:

La geometria radial proiettiva comprende tutte le trasformazioni di raggi [=proiettività] *che mandano reti normali* [catene bidimensionali di ∞^4 elementi] *di un fascio sempre in altre reti normali* (Study 1903, pag. 236)[330].

[325] *Unsere „Geometrie der dualen Projectivitäten" im Euklidischen Räume ist von den gemeinten geometrischen Disciplinen, deren jede der Theorie der Strahlencongruenzen und Complexe neue Methoden zuführen wird, vielleicht nicht die merkwürdigste, -aber sie hat wohl die ausgedehnteste Berührungslinie mit Untersuchungen, die bisher schon das Interesse der Geometer gefesselt haben. Die Euklidische Geometrie ist in ihr ganz ebenso enthalten, wie in der projectiven Geometrie. Die neue Liniengeometrie kann ferner (wie wir zeigen werden) angesehen werden als das zweite Glied einer unendlichen Reihe algebraisch-geometrischer Disciplinen, in der die Euklidische Geometrie des Raumes das erste Glied darstellt. Sie kann außerdem, soweit reelle Figuren in Frage kommen, aufgefasst werden als ein Grenzfall der ebenen projectiven Geometrie, wenn als deren Raumelemente der imaginäre Punkt und die imaginäre Gerade angesehen werden, oder auch als Grenzfall jener projectiven Geometrie, die es mit Figuren zweier unabhängig von einander transformierbarer Ebenen zu thun hat.* (Study 1903, pag. 229, trad. it. nostra).

[326] Cfr. (Study 1903, pag. 230).

[327] *Auch diese Ausdrücke sind der ebenen Geometrie entlehnt, in die sie von Herrn C. Segre eingeführt worden sind* (Study 1903, pag. 233, trad. it. nostra).

[328] *Wir erwähnen unter diesen Disziplinen, deren Begründung, ebenso wie der Ausbau der radial-projektiven Geometrie selbst, eine dankbare Aufgabe künftiger Forschung sein wird, Erweiterungen der Möbiusschen und Lieschen Kreisgeometrie* (=noi consideriamo sotto queste discipline, il cui fondamento, così come la costruzione della geometria radial-proiettiva stessa, sarà compito di una ricerca futura, ampliamenti della geometria dei cerchi di Möbius e Lie) (Study 1902, pag 123, trad. it. nostra).

[329] Facendo propria la lezione del Programma di Klein (cfr. (Study 1903, pag. 228)).

[330] *Die radialen Projectivitäten umfassen alle Transformationen von Strahlen, die aus dem Normalennetz eines eigentlichen Strahls immer wieder ein solches hervorgehen lassen* (Study 1903, pag. 233, trad. it. nostra). Si noti che le catene semplici, o rettilinee, di ∞^1 punti di una retta vengono dette da Study *Normalketten*, cioè catene normali.

Nell'articolo del 1902 Study aveva in realtà descritto già questa *nuova branca della geometria*[331]; essa è appunto quella geometria, che, malgrado faccia uso di una terminologia prettamente studyana[332], deve una significativa promozione a Corrado Segre e alla sua geometria biternaria proiettiva[333].

Ma i punti in comune con Segre non si esauriscono con questo obbligo di riconoscimento verso le teorie sviluppate da Segre. Study ravvisa altresì che lo studio di alcune relazioni di tale geometria introducono a sistemi di numeri complessi e

> *precisamente non solo le usuali quantità complesse, ma anche altre, specificatamente quelle date da due unità dall'autore chiamate quantità duali (ipercomplesse), le cui regole di moltiplicazione sono date attraverso le formule: $\varepsilon^2=+1$, $\varepsilon^2=0$, $\varepsilon^2=-1$. Però queste quantità duali hanno altre proprietà rispetto alle usuali quantità complesse e ciò non deve essere mai dimenticato* (Study 1902, pag. 122)[334].

Ma la memoria che più richiama alla mente Segre è quella del 1905, *Kürzeste Wege in komplexen Gebiet* (= I più brevi *cammini* nel dominio complesso)[335]. Che intende per cammini? Seppure la geometria proiettiva complessa era stata sviluppata in modo prettamente geometrico da Segre[336], e altri matematici da lui influenzati come Fubini la avevano approfondita anche dal punto di vista analitico, nessuno aveva esplicitato questioni riguardanti il calcolo delle variazioni, in particolare quelle

---

[331] Cfr. (Study 1902).

[332] Study, per descrivere le figure geometriche, usa termini come *Stab* (=bastone, coppia di punti), *Quirl* (=frullino, un punto e un piano che non si appartengono), *Keil* (=cuneo, due piani che si tagliano non perpendicolarmente), *Motor* (=motore, due rette incidenti non perpendicolarmente), *Impulsor* (=impulsore, due rette non complanari). A esse applica delle *forze* (=trasformazioni) che possono essere sommate, oppure *movimenti* che possono essere di tipo *lineare*, *correlativo* e *stereometrico*. Quest'ultimo tipo costituiscono le collineazioni di una retta la cui caratteristica è quella di mandare sempre reti normali (=catene) di una retta in reti normali (cfr. (Study 1900)).

[333] Cfr. (Study 1902, pag. 122).

[334] *zwar nicht nur gemeinen komplexen Größen, sondern auch andere, namentlich die aus zwei Einheiten gebildeten vom Verfasser sogenannten dualen (hyperkomplexen) Größen, deren Multiplikationsregeln durch die Formeln bezeichnet sind: $\varepsilon^2=+1$, $\varepsilon^2=0$, $\varepsilon^2=-1$. Aber diese dualen Größen haben andere Eigenschaften, als die gemeinen komplexen Grössen, und dies darf nie außer Augen gelassen werden* (Study 1902, pag. 122, trad.it. nostra).

[335] (Study 1905).

[336] Study cita (Segre 1889-91), (Segre 1891) e (Segre 1892), anzi, precisamente rimanda il lettore a tali memorie per tutto ciò che riguarda la teoria delle anticollineazioni e delle antiproiettivita (cfr. (Study 1905, pag. 323, nota *)).

riguardanti i problemi di massimo e minimo. Se l'uso di variabili complesse e trasformazioni immaginarie avevano facilitato la soluzione di problemi relativi all'integrazione, restava tagliato fuori qualunque ampliamento della teoria che trovava espressione attraverso equazioni analitiche. In particolare restava escluso il problema di quale fosse il cammino più breve tra due punti di una retta complessa.

Stabilito che tra due punti a coordinate complesse si può definire il concetto di distanza esprimibile attraverso l'impiego di forme hermitiane[337], si possono anche porre questioni riguardanti superfici e volumi, quindi fondare una geometria metrica.

In altre parole, l'intento di Study è quello di derivare le metriche proiettive dalle forme hermitiane, secondo quanto aveva già scritto G. Fubini in un articolo del 1904[338] e di cui Study riconosce la priorità[339].

Study definisce la forma quadratica hermitiana in uno spazio con dimensione n-1 come

$$\sum a_{ki}\bar{x}_i y_k = 0 \text{ (oppure } \sum a_{ik}x_i\bar{y}_k = 0 \text{) con } \begin{cases} a_{ki} = \bar{a}_{ik} \\ |a_{ik}| \neq 0 \end{cases},$$

e chiama l'insieme delle collineazioni e delle anticollineazioni, per le quali la forma resta invariata, il gruppo dei movimenti e dei ribaltamenti hermitiani (*hermitische Bewegungen und Umlegungen*). Dopo aver sviluppato la *metrica iperbolica hermitiana*, definita stabilendo una *iperconica* di equazione $(x\bar{x}) = x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2 - x_3\bar{x}_3 = 0$[340] che divide il sistema complesso ternario (il piano complesso) in due parti in modo tale la forma assuma valore positivo al suo interno, Study determina per ogni coppia di punti di ciascuna parte una distanza reale[341] e dimostra che ogni due punti sono collegati da una sola *catena normale* di ∞^1 punti: questa catena normale costituisce il cammino più breve (curva geodetica) tra quei due punti. Se essa viene proiettata su una sfera di

[337] Per punti reali la distane si trova attraverso l'uso di forme quadratiche.

[338] (Fubini 1904).

[339] Cfr. (Study 1905, pag. 377).

[340] In realtà Study la chiama *complesso lineare hermitiano*, ma altro non è che l'iperconica di Segre (cfr. (Study 1905, pag. 325)).

[341] La distanza in uno spazio hermitiano iperbolico tra i due punti x e y è data da: (x,y)=2 arcos *h* $\frac{\sqrt{(x\bar{y})(\bar{x}y)}}{\sqrt{(x\bar{x})}\sqrt{(y\bar{y})}}$ (cfr. (Study 1905, pag. 328)).

Riemann apparirà, così come ogni catena, un cerchio. Si trova anche che in un dominio binario (o retta complessa) la misura delle curvatura è costante e pari a -1[342].

Nei paragrafi successivi Study sviluppa la *metrica hermitiana di tipo ellittico*. In essa l'iperconica fondamentale avrà equazione canonica $(x\bar{x}) = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 = 0$. Una proiezione sulla sfera di Riemann risulta essere un'inversione reale (cioè senza elementi doppi reali); la curvatura in questo caso sarà uguale a +1, mentre la distanza tra due punti non coniugati[343] assumerà sempre un valore minore di π, se i due punti sono coniugati (stanno su una stessa catena) la distanza sarà proprio π. Il minor cammino (curva geodetica) tra due punti non coniugati è una catena della retta (del dominio ternario, cioè del piano complesso) nella quale giacciono i due punti.

La trattazione di Study prosegue seguendo un'impostazione attinente la geometria non euclidea differenziale, di cui il maggior risultato è quello che lo spazio hermitiano di tipo ellittico può essere contenuto in uno spazio ellittico usuale o euclideo o iperbolico, e venire rappresentato attraverso una varietà reale quattro volte estesa.

In conclusione, Study relaziona sulla metrica hermitiana parabolica a partire da un lavoro di Fubini (vedi inizio paragrafo). Essa si ottiene come caso limite da quelle di tipo iperbolico ed ellittico e costituisce un tramite per generalizzare la geometria euclidea. In essa la misura della curvatura sarà costante e uguale a zero, la distanza di due punti è proprio il segmento di retta (sulla quale giacciono i due punti) che ha per estremi i due punti, le trasformazioni sono conformi e non sono altro che i movimenti euclidei.

---

[342] (Study 1905, pag. 325-326).

[343] La distanza in uno spazio hermitiano ellittico tra i due punti x e y è data da: (x,y)=2 arcos $\frac{\sqrt{(x\bar{y})(\bar{x}y)}}{\sqrt{(x\bar{x})}\sqrt{(y\bar{y})}}$ (cfr. (Study 1905, pag. 333)).

§ 5.11 Conclusioni

Così come si è visto, i volumi di von Staudt ebbero una certa eco in Germania. Molti matematici tedeschi dedicarono tempo alla comprensione delle teorie in essi svolte, ma ciò che si può concludere è che, vuoi per darne una giustificazione, vuoi per darne una esemplificazione, vuoi per darne un'applicazione, tutti (forse con l'unica eccezione di Lüroth) ne fecero motivo di proprie investigazioni in capo analitico-geometrico, perdendo quel sapore originario che volle imprimere alla sua opera von Staudt: la purezza del metodo proiettivo geometrico.

Imputare questo fatto solo all'astrusità degli scritti di von Staudt non ci pare l'unico motivo per il quale nessun matematico ha continuato nel solco di una ricerca di geometria complessa proiettiva pura. Molto probabilmente non si erano accorti del potenziale che si nascondeva dietro quei teoremi o delle considerazioni successive che ne potevano scaturire. In altre parole, non videro l'opera di von Staudt come un serbatoio di nuove ricerche, ma la considerarono come (forse) l'unica opera rigorosa (*sic!*) che aveva riportato la Geometria al suo significato primario: svincolata da considerazioni metriche e poggiante solo su basi geometriche.

Le memorie dei matematici tedeschi successivi a von Staudt si preoccuparono solo di aggiustare qua e là la teoria staudtiana, di perfezionarla, di semplificarla, di dare rappresentazioni geometriche alternative al punto complesso (o meglio alla coppia dei complessi coniugati), ma in fin dei conti non riuscirono ad andare più in là. Come abbiamo visto fu Segre il primo[344] matematico ad aver capito la portata della teoria svolta da von Staudt, soprattutto nei suoi *Beiträge*. Ed è proprio per questo motivo che nel XX secolo le teorie di Segre vennero riprese sotto più punti di vista. Qui sta anche un ulteriore differenza con Juel: Segre parte dalla definizione di von Staudt di elemento immaginario e approda alle antiproiettività, Juel ci arriva, chiamandole come abbiamo visto simmetralità, attraverso la considerazione che una trasformazione tra due spazi proiettivi può essere collineare (allora si ottengono le proiettività tra i loro punti) o reciproca (e ottenere una simmetralità).

Un posto a parte meritano le ricerche di Eduard Study. Egli ha un'impostazione che esula da quella dei suoi predecessori, partendo da concezioni fisiche (è questa la

[344] Lasciando da parte Juel, che ne fece sì sue ricerche, ma molto meno avanzate di quelle di Segre.

base del suo *Geometrie der Dynamen*) determina una geometria (la radial-proiettiva) da cui si può derivare, scegliendo opportunamente il gruppo di trasformazioni, la geometria proiettiva complessa di Corrado Segre; anzi a essa Study si riconnette col lavoro del 1905, mostrando come le ricerche del geometra torinese sono considerate fondamentali e pionieristiche in un campo che, proprio con le ricerche di Segre, si sono aperte le porte a molteplici studi successivi.

CAPITOLO 6

I sistemi *ipercomplessi*

§6.1 Introduzione

Sin dalla fine degli anni 60 del secolo XIX, era chiaro che attraverso la teoria delle forme quadratiche si potevano generare nuovi sistemi di numeri. È quello che fa per esempio Weierstrass nell'articolo 1868[345], dal quale si viene a conoscenza che egli aveva tenuto delle lezioni su tale argomento già durante il semestre invernale del 1861-62[346]. Ma i germogli di tale teoria sembrano addirittura risalire a Gauss; in effetti alla fine della sua *Theoria residuorum biquadraticorum. Comm. II*[347], Gauss sembra suggerire ulteriori sviluppi verso la determinazione di sistemi numerici con più di due dimensioni:[348]

> *L'autore si è riservato di trattare in futuro alcune cose che qui sono state appena sfiorate, tra le quali vi è anche la domanda perché relazioni fra cose che rappresentano varietà di dimensione maggiore di due, non possono ancora trovare nell'Aritmetica generale delle quantità un posto, cui verrà trovata una risposta* (Gauss 1831, Werke, Bd. II, 169-178; ultima pagina).

Ma si dovette aspettare gli anni 80 dell'Ottocento per vedere *sistemata* l'aritmetica di tali numeri e solo successivamente vedere applicate queste cose alla geometria in uno spazio a n dimensioni. Adesso sappiamo che essa può essere descritta dalle algebre di Clifford, introdotte come estensioni dei numeri complessi, e che per n>2 si ottengono geometrie diverse (non commutative, non associative, ecc.) da quelle euclidea a n dimensioni. In tal senso, alla fine del XIX secolo, la loro investigazione era un campo che si apriva a nuove applicazioni.

A tutto ciò si aggiunse l'estensione della teoria delle funzioni di ordinaria variabile complessa al caso di funzioni viste nelle algebre ipercomplesse, che possono

---

[345] (Weierstrass Karl 1868).

[346] Cfr. (Lützen 2001, pag. 231 e pag. 249). Vedi anche (Weierstrass 1884, pag. 396 in nota).

[347] (Gauss 1831, ultima pagina).

[348] *Der Verf. hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können, ihre Beantwortung finden wird* (Gauss 1831, Werke, Bd. II, 169-178; ultima pagina; trad. it. nostra) .

essere usate per studiare alcuni casi di equazioni differenziali: tale proprietà, per esempio, risulterà rilevante all'inizio del secolo scorso in relatività generale e nella teoria dei campi.

E se si considera che proprio in quel periodo l'algebra (astratta) viene ad assumere un ruolo fondamentale nel panorama degli studi matematici, si capisce come venisse spontaneo sviluppare *nuove* geometrie su *nuove* algebre, come quelle degli ottonioni o semplicemente dei bicomplessi.

Così, nel settembre 1932, al congresso internazionale dei matematici di Zurigo, al quale presero parte 247 delegati ufficiali tra cui H. Weyl (1885-1955), che rappresentava il DMV[349], E. Landau (1877–1938**)** per l'Accademia di Gottinga, R. Courant (1888-1972) per l'Università di Georg August di Gottinga, E. Hasse (1898-1979) per l'Università di Marburg, W. Krull (1899-1971) per quella di Erlangen, Emmy Noether (1882-1935) fu l'unica donna a tenere una delle 21 conferenze principali: il 7 Settembre parlò sui "Sistemi ipercomplessi in relazione con le algebre commutative e con la teoria dei numeri". Molti legami tenevano uniti più campi della matematica, e certamente parte dell'origine della qual cosa deve essere rintracciato nelle memorie di Segre (Segre 1889-91), (Segre 1892) e (Segre 1911).

Proprio dalle ultime due memorie appena citate vogliamo cominciare questo capitolo e mostrare come costruire geometrie su campi diversi da quello reale era naturale e fonte di nuove ricerche nell'opera di Corrado Segre, studi che forse Segre stesso considerava accessori al suo filone privilegiato di ricerca, ma che senza ombra di dubbio, costituiscono una pietra miliare nell'approfondimento delle questioni inerenti lo sviluppo della geometria a n dimensioni su di un'algebra.

I primi paragrafi di questo capitolo, comunque, daranno una descrizione sommaria dell'evoluzione della teoria algebrica dei sistemi numerici a più unità, senza pretendere di fornire anche le loro applicazioni geometriche, le quali puntualmente ritorneranno non appena torneremo a parlare dei matematici italiani.

[349] Deutsche Mathematiker Vereinigung (=Associazione dei matematici tedeschi).

§6.2 La teoria delle quantità complesse a *n* unità

Questo titolo, che richiama quello di alcune delle pubblicazioni di cui tratteremo, ci introduce in quel dominio ipercomplesso, che dal 1868 ha rappresentato un ampio campo di ricerche matematiche che spaziano dall'algebra alla geometria, dall'analisi alla teoria dei numeri.

Dalla lettura di (Weierstrass 1884), articolo che in realtà è una lunga lettera indirizzata l'anno prima a H. A. Schwarz e successivamente pubblicata sui *Göttinger Nachrichten* con alcune precisazioni finali, tre cose emergono all'inizio:

1) che Weierstrass suppone far risalire l'idea di sistemi numerici con più unità a Gauss e, precisamente, a (Gauss 1831, frase finale);

2) che Weierstrass interpreta il pensiero di Gauss nel senso di voler dare una definizione delle operazioni di sistema numerico a più unità che

> *continuano a valere per le leggi aritmetiche del campo delle cosidette grandezze numeriche reali (le grandezze con una unità)* (Weierstrass 1884, pagg. 395-396)[350];

3) che Weirstrass già da una ventina di anni pensava, anzi teneva dei seminari su tale argomento[351].

In esso, comunque, Weierstrass stabilisce le operazioni aritmetiche della somma e della moltiplicazione per i sistemi numerici aventi $n>2$ unità, e alcune leggi cui essi sottostanno. Ma non tutte le leggi che regolano i reali ($n=1$ unità) o gli ordinari complessi[352] ($n=2$ unità) valgono in generale; per esempio nota

> *Nelle quantità complesse* [la legge commutativa ab=ba] *non vale in generale; si perviene piuttosto alla dimostrazione delle uguaglianze (A.) attraverso algoritmi, nei quali ab non è uguale a ba. Tra questi*

---

[350] *im Gebiete der sogenannten reellen Zahlgrößen (der Größen mit einer Haupteinheit) bestehenden arithmetischen Gesetze ihre Gültigkeit behalten* (Weierstrass 1884, pagg. 395-396, trad. it. nostra).

[351] Cfr. (Weierstrass 1884, pagg. 395-396).

[352] Weierstrass chiama tutti i sistemi numerici a più unità complessi. Quindi, quando si deve riferire a quelli con 2 unità, li chiama i numeri complessi ordinari. Ciò è comune a molti dei suoi contemporanei.

algoritmi vi è p. e. il calcolo dei quaternioni di Hamilton, per i quali la legge commutativa non vale (Weierstrass 1884, pag. 412)[353] .

Con lo stesso titolo, ma un anno dopo, anche Dedekind si occupa dell'argomento. Proprio all'inizio egli puntualizza che chiamerà *Körper* (=corpi) quegli insiemi numerici chiamati genericamente *Zahlgebiete* (=domini numerici) da Weierstrass, e che, poiché la trattazione analitica che richiede la teoria dei corpi infiniti, si lascia facilmente applicare alla teoria delle quantità complesse a *n* unità, gli sembra più opportuno seguire questa via analitica che, per i più, già è stata seguita da Dirichlet nel § 158 della seconda edizione, datata 1871, nelle *Vorlesungen über Zahlentheorie*.

Seguendo questa linea Dedekind suppone di non creare nuovi sistemi numerici. Egli, infatti, vede il problema posto da Weierstrass sotto un altro punto di vista. Mentre quest'ultimo studia i domini numerici a *n* unità come insiemi di numeri complessi *a*, *b*, *c*, … definiti come combinazione lineare tra le n unità e_1, e_2, e_3, …, e_n e le *n* coordinate (reali) ξ_1, ξ_2, ξ_3, …, ξ_n, cioè direttamente come numeri del tipo $a = \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha e_\alpha$, Dedekind interpreta

un sistema di n unità come un sistema di n numeri complessi ordinari o piuttosto come rappresentante collettivo di n tali sistemi (Dedekind 1885, pag. 142)[354].

Oltretutto, sottolinea che tale idea è già insita nella *loro* Algebra Superiore da molto tempo[355], tanto che l'affermazione di Gauss la ritiene piuttosto una conferma di questa sua impostazione[356].

---

[353] *Bei complexen Grössen gilt* [das commutative Gesetz ab=ba] *nicht mehr allgemein; man kommt vielmehr bei Zugrundelegung der Gleichungen (A.) zu Algorithmen, bei denen ab nicht gleich ba ist. Unter diesen Algorithmen ist z. B. Hamilton's Quaternioncalcul enthalten, in welche das commutative Gesetz nicht gilt* (Weierstrass 1884, pag. 412).
Con (A.) Weierstrass si riferisce alle seguenti uguaglianze:

$$a(b+c)=ab+ac,$$
$$(a+b)c=ac+bc,$$
$$a(bc)=(ab)c.$$

[354] *Jedes System von n Haupteinheiten e_1, e_2, e_3, …, e_n kann immer aufgefasst werden als ein System von n gewöhnlichen complexen Zahlen oder vielmehr als Collectiv-Repräsentant von n solchen Systemen* (Dedekind 1885, pag.142).

[355] Molto probabilmente si riferisce alla *Theorie der compexen Zahlensysteme* (1867, Leipzig) di Hermann Hankel (1839-1873), nel quale si intravede che la struttura algebrica più generale che obbedisce alle regole fondamentali dell'aritmetica è l'algebra dei complessi (cfr. (Freguglia 1992, pag. 29)).

Nel 1885 Otto Stolz (1842-1905) pubblica in due volumi le *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* (=Lezioni di aritmetica generale); la seconda sezione del secondo volume è dedicata alla *Arithmetik der complexen Zahlen* (=Aritmetica dei numeri complessi). In essa, oltre agli usuali numeri complessi, vengono introdotti i numeri complessi con *n* unità, inizialmente secondo il metodo di Weierstrass che implica una scelta (nuova) delle *n* unità, in disaccordo invece con la posizione di Dedekind[357] solo accennata.

Sull'argomento ritorna nel 1887 Dedekind rimarcando il suo punto di vista, il quale vede chiaramente in tali sistemi di numeri a *n* unità nessuna caratteristica di novità:

> *Esse formano, come detto, nessun nuovo o –per dirla letteralmente come Gauss- altro sistema di quantità, ma esse sono proprio identiche agli usuali numeri che possono assumere diversi valori e usati dovunque in algebra* (Dedekind 1887, pag. 2)[358].

per concludere che anche Gauss sarebbe stato della sua stessa idea, e cioè

> *che ognuna delle quantità ipoteticamente complesse non sono altro che le usuali ma polivalenti quantità* (ibidem, pag. 7)[359].

Nella disputa Weierstrass-Dedekind si intravede, e ci si rispecchia, la più ampia rivalità tra Berlino e Gottinga come capitali della matematica tedesca.

Negli stessi anni e sulla stessa rivista (i *Göttinger Nachrichten*), altri matematici contribuirono alla definizione della struttura algebrica dei domini numerici a più unità. Hermann A. Schwarz (1843-1921)[360], Otto Hölder (1859-1937), Julius Petersen (1839-

---

[356] Cfr. (Dedekind 1885, pag. 142): *…derartige mehrwerthige Größen-Systeme sind aber in unserer höheren algebre längst eingebürgert. Mit diesem Resultate begnügte ich mich, weil ich ihm die Bedeutung und die volle Bestätigung der bekannten Bemerkung von Gauss gefunden zu haben glaubte* (= *questi meravigliosi sistemi di grandezze sono già da molto tempo nella nostra algebra superiore. Di questo risultato io fui soddisfatto poiché credetti di aver trovato il suo significato e la piena conferma della famosa osservazione di Gauss*).

[357] Cfr. (Stolz 1886, vol. 2, pag. 23).

[358] *sie bilden, wie gesagt, keine neue oder – um buchstäblich genau mit Gauß zu reden- keine andere Art von Größen, sondern sie sind geradezu identisch mit den überall in der Algebra eingebürgerten mehrwerthigen gewöhnlichen Zahlen* (Dedekind 1887, pag. 2, trad. it. nostra).

[359] *daß jene hypothetischen complexen Größen auch nicht Anderes sind als gewöhnliche, aber mehrwerthigen Größen* (ibidem, pag. 7, trad. it. nostra).

[360] Cfr. (Schwarz 1884), (Hölder 1886) e (Petersen 1887).

1910) diedero il proprio apporto al dibattito, generalizzando, formalizzando e indirizzando i loro studi forse più verso l'impostazione di Weierstrass che verso quella di Dedekind.

Leggermente diversa l'impostazione di Friedrich Schur (1856-1932). Sulla scia della memoria di Lie[361], Schur indirizza la ricerca delle proprietà di addizione e moltiplicazione tra due numeri appartenenti a domini con n unità, verso la teoria delle funzioni di variabile complessa, che associando a un punto del dominio un altro dello stesso, non si fa altro che definire delle trasformazioni di un dominio n-dimensionale[362]; in tal modo le due operazioni elementari di addizione e moltiplicazione definiscono in questo dominio numerico due schiere di ∞^n trasformazioni del dominio stesso, quindi basterà studiare che forma hanno queste due schiere se vale la proprietà associativa o la commutativa, o se queste due sono legate dalla proprietà distributiva.

Il nostro discorso ci riporta a Study. Nel 1889, e sempre sui *Göttinger Nachrichten*, egli pubblica un articolo che pone, in un certo qual modo, un punto alla questione. Nella memoria *Über Systeme von complexen Zahlen* (=Sui sistemi di numeri complessi)[363] già dall'incipit è chiaramente espresso il filone di studi d'appartenenza e come egli stesso sia entrato in contatto con tali domini numerici. La via è quella dello studio dei gruppi di trasformazione lineari. Anche se Weierstrass preferisce studiare i domini le cui operazioni stanno in stretta continuità con quello del più usuale insieme dei numeri reali, è chiaro che la generalizzazione ai complessi e alle quantità con più di due unità comporta la perdita di qualcosa in termini di proprietà delle operazioni. È proprio da questa considerazione che Study vuole partire per giungere

> *a stabilire, se non la più generale possibile, comunque una definizione di sistema di numeri complessi, la quale sia sufficientemente generale da comprendere tanto i quaternioni quanto anche i sistemi considerati da Weierstrass* (Study 1889, pag. 238)[364].

[361] (Lie 1880); cfr. (Schur 1889, pag. 50).

[362] Cfr. (Schur 1889, pag. 49).

[363] (Study 1889).

[364] *wenn auch nicht die allgemeinste Definition, so doch eine Definition eines Systems von complexen Zahlen zu Grunde legen, welche allgemein genug ist, um sowohl die Quaternionen, als auch die von Weierstraß betrachteten Systeme zu umspannen* (Study 1889, pag. 238).

Quindi, per sistema di numeri complessi, Study intende il sistema di tutte le possibili quantità ottenute come combinazione lineare dei numeri fondamentali e_1, …, e_n che soddisfino le seguenti condizioni:

1) il prodotto $e_i e_k$ di due qualunque dei numeri fondamentali e_i ed e_k sia sempre un numero del sistema $\Sigma\gamma_{iks}e_s$ (dove i coefficienti γ_{iks} sono usuali numeri reali o complessi);
2) deve essere soddisfatta la formula $(ab)c=a(bc)$, detta legge associativa della moltiplicazione;
3) nel sistema esiste una quantità $a°$ che soddisfi le uguaglianze $a°x=x$, $xa°=x$ indipendentemente da x.[365]

Study mostra che queste condizioni bastano a descrivere un qualunque sistema di numeri complessi; in più elenca (fissato un numero intero k con $2\leq k\leq n$ per il quale la k-esima potenza di un qualunque numero complesso a risulta essere combinazione lineare delle precedenti potenze $a°$, a^1, a^{k-1}, mentre queste sono indipendenti tra loro), per i casi con n=2,3,4 unità, i diversi tipi di numeri complessi che si possono ottenere, fornendo per ciascun tipo le tabelle di moltiplicazione delle unità. Così dimostra che (se $k=n$) per n=2 ci sono due diversi tipi di sistemi (i numeri duali (per i quali $i^2=0$) e quelli per cui $i^2=\pm1$ che comprendono i numeri complessi e i numeri doppi), per n=3 ce ne sono cinque, per n=4 sono sedici (di cui uno risulta essere il sistema dei quaternioni). Sempre se $k=n$, il procedimento predisposto nei predetti casi si lascia generalizzare per un qualsiasi valore di n (intero), secondo il seguente teorema (che Study non dimostra formalmente ma ne schizza soltanto la possibile dimostrazione) che permette di definire tutti i possibili sistemi, a due a due diversi, di numeri complessi:

> *Per trovare tutti i sistemi con n unità fondamentali, nei quali le potenze $A°A^1…A^{n-1}$ siano linearmente indipendenti da qualunque numero A, si ponga il numero n in tutte le fattorizzazioni possibili; si ordinino poi le n unità fondamentali in gruppi di α, β, …μ, e si indichino con $a_0…a_{\alpha-1}$, $b_0…b_{\beta-1}$, $m_0…m_{\mu-1}$. Si ponga poi il prodotto di due unità di gruppi diversi uguale a zero, e si prenda per moltiplicazione di due numeri dello stesso gruppo la regola, che*

[365] Cfr. (Study 1889, pagg. 238-239).

per il primo gruppo sarà: $a_i a_j = a_{i+j}$*, se* $i+j \leq \alpha-1$*;* $a_i a_j = 0$*, se* $i+j > \alpha-1$

(Study 1889, pag. 262)[366].

Ovvi i legami con gli scritti dei matematici che lo hanno preceduto nelle pubblicazioni su tale argomento, da Weierstrass a Dedekind, da Schwarz a Hölder, a Petersen, e alla teoria delle trasformazioni lineari e a quella delle forme bilineari.

[366] *Um alle verschiedenen Systeme mit n Grundzahlen zu finden, in welchen die Potenzen* $A^{\circ}A^{1}\ldots A^{n-1}$ *irgend einer Zahl A im Allgemeinen von einander linear unabhängig sind, stelle man die Zahl n auf alle mögliche Zerlegung von n; so ordne man die n Grundzahlen in Gruppen zu* α, β, $\ldots\mu$, *und bezeichne sie durch* $a_0\ldots a_{\alpha-1}$, $b_0\ldots b_{\beta-1}$, $m_0\ldots m_{\mu-1}$. *Man setze dann die Producte von je zwei Grundzahlen verschiedener Gruppen gleich null, und nehme für die Multiplication von zwei zahlen derselben Gruppe eine Regel an, die etwa für die erste Gruppe ausgesprochen lautet:* $a_i a_j = a_{i+j}$*, wenn* $i+j \leq \alpha-1$*;* $a_i a_j = 0$*, wenn* $i+j > \alpha-1$ (Study 1889, pag. 262, trad. it. nostra).

§6.3 Quaternioni

Più volte, nel corso di questa tesi, abbiamo accennato ai quaternioni, numeri (iper)complessi con 4 unità (*1, i, j, k*), che, come estensione dei numeri complessi godono delle stesse loro proprietà ad eccezione per il prodotto che risulta essere non commutativo.

Nota è la storia della loro scoperta da parte di William Rowan Hamilton (1805-1865) nel 1843, e la disputa con John T. Graves (1806-1870) che li scoprì nello stesso periodo insieme agli ottonioni (estensione non associativa dei quaternioni), argomento

William Rowan Hamilton

che, comunque, qui non verrà sviluppato.

Anche i matematici italiani entrarono a pieno titolo nel dibattito internazionale sui quaternioni. E il nostro discorso ci riporta ancora una volta a Giusto Bellavitis, questa volta però al saggio del 1858[367].

Nella breve introduzione a tale saggio, Bellavitis puntualizza come le oltre 900 pagine del testo di Hamilton del 1853[368] lo abbiano interessato a tal punto che ha ritenuto indispensabile ripercorrere i principali argomenti lì svolti, dato anche le somiglianze tra il suo calcolo delle equipollenze e quello dei quaternioni. Ed è soprattutto sul significato geometrico di questi ultimi che Bellavitis si sofferma, poiché, se in relazione al piano

> *Il metodo delle equipollenze esprime tutto intero il soggetto geometrico, ed è la maniera più semplice e diretta di rappresentare le relazioni di grandezza e di posizione; ma il metodo perde gran parte del suo pregio quando si dee applicare alle figure a tre dimensioni, …; al mio desiderio corrisponde il calcolo coi*

[367] (Bellavitis 1858).

[368] (Hamilton 1853).

quaternioni, ma soltanto in parte, perché un'equipollenza a quaternioni è ben lungi a determinare la retta incognita (Bellavitis 1858, pag. 126).

L'idea che Bellavitis ha del calcolo coi quaternioni rispecchia le sue convinzioni sul calcolo delle equipollenze, e cioè che, pur essendo i metodi algebrici, i significati devono restare geometrici, seppur con le dovute differenze tra i due metodi[369]:

> *il metodo delle equipollenze e quello dei quaternioni sono due algoritmi, che avendo molta rassomiglianza coll'algoritmo algebrico hanno un significato geometrico* (Bellavitis 1858, pag.126).

Ripercorriamo quindi il saggio di Bellavitis (Bellavitis 1858), soffermandoci, con lui, sul rapporto tra il metodo delle equipollenze e il significato geometrico dei quaternioni[370].

Dopo avere definito la *somma fra rette* (cioè la somma geometrica tra segmenti orientati), Bellavitis introduce il concetto di *biradiale,* oggetto geometrico che ha *per iscopo di rappresentare* appunto i quaternioni (ibidem, pagg. 129-130). Vediamo come. Il biradiale è individuato da due rette (cioè segmenti orientati) che hanno la stessa origine, quindi dal rapporto delle lunghezze dei due radii[371] *OB:OA* (indicato anche con gr($\frac{OB}{OA}$)), e dall'angolo che essi formano. In modo analogo, nel 1873 anche William Kingdon Clifford (1845-1879), in accordo a Hamilton, definisce un quaternione come *rapporto di due vettori, o l'operazione necessaria per applicare l'uno all'altro*[372].

William Kingdon Clifford

[369] Ciò poiché risolvere un'equipollenza vuol dire determinare la retta incognita, mentre un'equipollenza a quaternioni no.

[370] Si veda anche (Freguglia 1992, pag. 74 e segg.).

[371] Si noti che per *radio* Bellavitis intende una qualunque retta nello spazio (ibidem, pag. 130).

[372] *ratio of two vectors, or the operation necessary to make one into the other* (Clifford 1873, pag. 183).

Per la precisione, Clifford, come Hamilton, pensa al quaternione come la combinazione tra un ordinario rapporto numerico e una rotazione[373] (quella che porta un vettore a coincidere con l'altro).

Ma torniamo a Bellavitis. Egli definisce inoltre: il *raggio* come quel radio di lunghezza unitaria, il *biradiale rettangolo* se l'angolo è di 90°, *equipollenti* due biradiali se, posti sullo stesso piano, hanno stesso rapporto e formano angoli di ugual ampiezza, *inversi* se il rapporto di uno per l'inverso dell'altro fa 1 e se gli angoli che formano sono uguali e opposti, *coniugati* due biradiali che hanno lo stesso rapporto e angoli posti sullo stesso piano ma direzioni opposte. Due biradiali si possono sommare e moltiplicare, tenendo conto che

> *il prodotto di due biradiali è differente secondo l'ordine con cui questi si prendono* (ibidem, pag.132);

un biradiale si può esprimere mediante i suoi tre assi *i*, *j*, *k*, rispettivamente orientati verso est, verso nord e verso zenit. Si dimostra che

> *la seconda potenza di un raggio qualunque equivale all'unità presa col segno meno* (ibidem, pag. 137).

Si ha quindi che ogni radio (=segmento orientato) *OM* si potrà esprimere con la relazione

> *ix+jy+kz essendo x, y, z i valori numerici positivi o negativi delle projezioni della retta OM sulle tre direzioni i, j, k; alla predetta espressione daremo il nome di trinione* (ibidem, pag. 139).

Il prodotto fra due trinioni è tale che se si mutasse l'ordine dei due trinioni il prodotto differirebbe dal precedente soltanto pel segno dei coefficienti di *i, j, k* (ibidem, pag. 141). Se un trinione *OM* (=*ix+jy+kz*) si divide per un altro *OM'* (=*ix'+jy'+kz'*), cioè un biradiale *MOM'*, si ottiene un espressione della forma *w+ix+jy+kz* (la quantità *w* più il trinione), ossia un *quaternione* (ibidem, pag. 141-142); in altre parole il quaternione non è altro che l'espressione della grandezza del biradiale, ossia *OM'.OM*= *w+ix+jy+kz*. Bellavitis procede definendo il *coniugato* di un quaternione, il *prodotto* e

---

[373] Se AB e AC sono due vettori, entrambi per la stessa origine (arbitraria) A, facendo ruotare AB attorno un asse perpendicolare al piano BAC e portando AB a coincidere con AC, si ottiene che AC=q·AB (poiché B deve coincidere anche con C); quindi q $=\dfrac{AB}{AC}$ è il quaternione definito numericamente dal rapporto numerico fra i due vettori e vettorialmente dalla rotazione.

il *rapporto* fra due quaternioni. A conclusione della prima parte del saggio, Bellavitis sottolinea che

> *dal confronto di quanto detto prima dei radii e dei biradiali, poscia dei trinioni e dei quaternioni, apparisce che gli uni e gli altri sono soggetti alle stesse leggi, e che i secondi servono a rappresentare i primi* (ibidem, pag. 145).

Nella successiva seconda parte Bellavitis mostra alcune applicazioni geometriche del calcolo dei quaternioni. Essi, infatti, poiché possono rappresentare lo spazio

> *senza bisogno di ulteriore considerazione geometrica* (ibidem, pag 148),

forniscono le proprietà di un triangolo sferico, della composizione dei moti rotatorii, di un tetraedro (in riferimento alle sue altezze). La terza, e ultima, parte del saggio fornisce le equazioni necessarie per esprimere determinati superfici e solidi in uno spazio, nonché le equipollenze delle curve, ottenute come luoghi geometrici del punto *M*

> *quando il vettore variabile OM dipende da radii fissi e da una quantità t suscettibile di tutti i valori reali* (ibidem, pag. 175).

Inoltre se si considera t il tempo, si può definire la derivata del vettore *OM*, *dM* (velocità di *M*, giacché *O* è fisso), descrivibile in grandezza e direzione, la derivata seconda d^2M, ossia la turbazione del movimento, cioè la misura e la direzione della forza acceleratrice necessaria perché abbia luogo il movimento (ibidem, pagg. 175-176). E per tal via si può definire anche il raggio di curvatura, le normali a una superficie e le geodetiche.

Tutti questi concetti, come detto all'inizio del paragrafo, vengono considerati da Hamilton nelle sue *Lectures on Quaternions*, se non per il rapporto degli stessi col calcolo delle equipollenze. Bellavitis non può non sottolineare la qual cosa insieme alla constatazione che le *risoluzioni delle equipollenze relative allo spazio* (cioè in cui le incognite sono quaternioni), *meritano lo studio dei Geometri Italiani* (ibidem, pagg. 182-183), poiché il loro calcolo è diverso da quello condotto su un piano.

§6.4 Bicomplessi

Come abbiamo visto (vedi §4.4), nel 1892 Segre introduce un sistema di numeri che chiama bicomplessi. Questi ultimi nascono dalla considerazione che se un numero complesso è univocamente individuato da una coppia di numeri reali, analogamente, una coppia di numeri complessi può definire un nuovo numero: il bicomplesso appunto. E così come nella definizione di un numero complesso c'era bisogno di introdurre una nuova unità, i tale che $i^2=-1$, anche per il bicomplesso risulta inevitabile tale introduzione: ecco che viene definita l'unità h, con $h^2=-1$, il quale venendo moltiplicato per i, fornisce, all'interno dei numeri bicomplessi, una terza unità k, sempre con la proprietà che $k^2=-1$. Ma il prodotto ih viene definito da Segre commutativo per motivi d'uniformità (come Segre stesso recita), nello stesso modo per il quale nel passaggio da R a C, tutte le proprietà di R continuano a valere in C. Essi sono quindi quelli che Hamilton chiama *quaternioni immaginari* o *biquaternioni*[374], e non gli usuali quaternioni (reali) per i quali si sa non valere la proprietà commutativa.

Ma, seguendo il discorso di Segre, dal punto di vista geometrico egli è costretto a introdurre nuovi elementi, accanto ai reali e ai complessi, poiché parlando di intersezioni di varietà iperalgebriche esse potrebbero incontrarsi in un numero finito di punti non reali. Per tal motivo, agli occhi di Segre è importante non limitare la trattazione degli elementi rappresentativi a quelli reali, ma estenderle anche a quelle (iper)complesse: si ha così anche l'introduzione degli *elementi bicomplessi*, la cui rappresentazione avviene in campo complesso, analogamente a quanto avviene per gli elementi complessi la cui rappresentazione è reale. Di questi elementi bicomplessi

> *naturalmente, spontaneamente sorti sul cammino progressivo della geometria* (Ramorino 1898 II parte, pag. 345),

Segre dà anche una definizione oggettiva, cioè in termini di elementi complessi: una coppia di punti bicomplessi *gemelli* (corrispondente al termine *coniugati* dei complessi) viene individuata mediante una determinata involuzione fra elementi complessi di una

[374] Si veda a tal proposito in particolare i nn. 637 e 644 di (Hamilton 1853, rispettivamente pagg. 633 e 638-639), in cui Hamilton introduce i biquaternioni come radici immaginarie di un'equazione di secondo grado $q^2=aq+b$ a coefficienti in H e la cui incognita q viene cercata in H.

catena semplice, alla quale se si aggiunge un verso si può distinguere il punto bicomplesso dal suo gemello.

Mediante questa introduzione, che comunque si riallaccia alle ricerche di Weierstrass, Dedekind, ecc. sui numeri complessi a più unità,

> *la Geometria proiettiva viene evidentemente ad acquistare una nuova e potente generalizzazione* (ibidem)

e nuove trasformazioni proiettive (le bicomplesse) che costituiscono il gruppo fondamentale della Geometria Proiettiva Bicomplessa.

Lo spirito generalizzatore di Segre non si ferma a queste considerazioni. Egli prosegue e vede la possibilità di dare nuove e infinite estensioni, introducendo varietà *n*-iperalgebriche ed elementi *n*-complessi (tricomplessi, quadricomplesii, ecc.). Il tutto facendo fede all'incipit della prefazione dei *Beiträge* di von Staudt, che possiamo definire l'ideatore della Geometria immaginaria.

Lo sviluppo della teoria dei numeri bicomplessi non si è esaurisce con Corrado Segre. Altre considerazioni si possono fare in riguardo alla teoria dei frattali; infatti sin dal 1918, cioè da quando Gaston M. Julia (1893-1978) e P. J. Louis Fatou (1878-1929) cominciarono a studiare le iterazioni complesse, si aprì la strade verso la costruzione di nuovi insiemi (i cui elementi per l'appunto erano ipercomplessi), insiemi che dal 1975 in poi, con Benoît Mandelbrot (1924-), sarebbero stati chiamati frattali.

§6.5 Numeri duali: le memorie (Grünwald 1906) e (Segre1911-12)

I numeri duali, introdotti per la prima volta da William Kingdon Clifford come estensione dei quaternioni[375], vennero chiamati così da Eduard Study in (Study 1902, pag. 122)[376], il quale ne fece poi oggetto di studio in (Study 1903).

Molte sono anche le applicazioni di tali numeri in fisica: per esempio come un semplice modello di superspazio, cioè lo spazio delle configurazioni utilizzato in relatività generale; anche in cinematica, le trasformazioni di Galileo possono essere rappresentate mediante i numeri duali: dato il sistema di riferimento *O'(x',t')*, che si muove con velocità relativa *v* rispetto al sistema di riferimento *O*(*x*,*t*), la trasformazione delle coordinate tra i due sistemi è data dalla matrice del numero duale $1+\upsilon\varepsilon$[377]: $(t',x')=(t,x)\begin{pmatrix}1 & \upsilon\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ovvero: $\begin{cases} t'=t \\ x'=\upsilon t+x\end{cases}$.

Quindi i duali, introdotti da Clifford nel 1873, furono ripresi da Study nel 1891 (Study 1891, pag. 520-521) sempre in relazione ai biquaternioni. Egli infatti scrive:

> *Il sistema richiesto di numeri complessi è uno di quelli trovati da Clifford e chiamato bi quaternione. La sua tavola di moltiplicazione comprende $e_0...e_3$, $\varepsilon_0...\varepsilon_3$, se si considerano le otto unità in due gruppi di quattro*

[375] Cfr. (*Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften*, III.1.2, pag. 1557 nota 202). Infatti a pag. 186 di (Clifford 1873), Clifford introduce una nuova unità ω per la quale $\omega^2=0$ e che porterà all'introduzione dei biquaternioni (o quaternioni immaginari nella terminologia di Hamilton o bicomplessi in quella di Segre).

[376] *Beim Studium mancher, aber durchaus nicht aller, der erörterten Beziehung lassen sich Systeme komplexer Größen verwenden, und zwar nicht nur die gemeinen komplexen Größen, sondern auch andere, namentlich die aus zwei Einheiten gebildeten vom Verfasser sogenannten dualen (hyperkomplexen) Größen, deren Multiplikationsregeln durch die Formeln bezeichnet sind: $\varepsilon^2=+1$, $\varepsilon^2=0$, $\varepsilon^2=-1$* (=*Nello studio di alcune, ma sebbene non di tutte, discusse relazioni si lasciano applicare sistemi di quantità complesse, e precisamente non solo le usuali quantità complesse, ma anche altre, cioè le cosiddette quantità duali costruite dall'autore a partire da due unità, le cui moltiplicazioni sono date dalle formule: $\varepsilon^2=+1$, $\varepsilon^2=0$, $\varepsilon^2=-1$*) (Study 1902, pag. 122).

[377] I numeri duali sono identificabili con le matrici reali 2×2 della forma: $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$ che rappresentano il numero a+bε. In questo modo, le usuali operazioni di somma e prodotto tra matrici coincidono con la somma e il prodotto di numeri duali; l'elemento nilpotente è dato dalla matrice $\varepsilon=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

	e_0	e_1	e_2	e_3	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	ε_1	$-\varepsilon_0$	ε_3	$-\varepsilon_2$
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1	ε_2	$-\varepsilon_3$	$-\varepsilon_0$	ε_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$	ε_3	ε_2	$-\varepsilon_1$	$-\varepsilon_0$
ε_0	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	0	0	0	0
ε_1	ε_1	$-\varepsilon_0$	ε_3	$-\varepsilon_2$	0	0	0	0
ε_2	ε_2	$-\varepsilon_3$	$-\varepsilon_0$	ε_1	0	0	0	0
ε_3	ε_3	ε_2	$-\varepsilon_1$	ε_0	0	0	0	0

(Study 1891, pag. 520)[378].

Study, quindi, li suddivide in ellittici, parabolici (o euclidei) e iperbolici (rispettivamente $i_0=1,\ i_1^2=i_0;\ i_0=1,\ i_1^2=0;\ i_0=1,\ i_1^2=-i_0$, in cui la terza unità è data dal prodotto delle suddette due).

Nel 1885, Arthur Buchheim[379] in (Buchheim 1885), rintraccia anch'egli l'origine dei duali in Clifford e si sofferma sulla (sostanziale) differenza tra l'introduzione dei biquaternioni in Hamilton e in Clifford, il primo dei quali li introduce come $q+\sqrt{-1}\,q'$ con q e q' quaternioni a coefficienti reali, e il secondo come $q+\omega q'$ dove q e q' sono quaternioni ordinari e ω un operatore il cui quadrato è uno scalare (nella fattispecie =0) (Buchheim 1885, pag. 293).

Nel 1898 Eduard Study scrive, fra l'altro, un articolo (in tedesco) sui numeri complessi nell'*Encyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften*, cui fa seguito una traduzione in francese, rivista e aggiornata, di Èlie Cartan del 1908 nell'edizione francese dell'enciclopedia, i quali forse precorrono i tempi definendo un'applicazione tra punti dello spazio ed elementi di un anello.

Ciò è anche quello che fa nella memoria del 1906[380], in perfetto accordo alle teorie esposte in (Study 1903), Joseph Grünwald (1876 - 1911). Egli introduce i numeri

---

[378] *Das fragliche system complexer Zahlen ist eines der von Clifford aufgefundenen und als Biquaternionen bezeichneten Zahlensysteme. Seine Multiplikationstafel sieht, wenn man die acht Haupteinheiten in zwei Gruppen von je vieren, $e_0...e_3$, $\varepsilon_0...\varepsilon_3$* (Study 1891, pag. 520, trad. it. nostra)[378].

[379] Arthur Buchheim fu un matematico morto precocemente, ma dalle grandi promesse. Frequentò la City of London School nello stesso periodo in cui lì insegnava Edwin A. Abbott (l'autore di Flatlandia). Buchheim si laureò ad Oxford. Passò un periodo di studio con Felix Klein a Lipsia. Al suo ritorno accettò la posizione di matematico presso il Manchester Grammar School. Nell'arco di sette anni, e in pessime condizioni di salute, pubblicò 24 memorie su vari argomenti matematici.
Da: http://www.cms.math.ca/Events/summer05/abs/pdf/hpm-jt.pdf

[380] (Grünwald 1906).

duali come $u+v\varepsilon$, dove u e v sono numeri complessi e $\varepsilon^2=0$; essi si lasciano facilmente associare ai punti reali e immaginari di un cono del secondo ordine immerso in uno spazio proiettivo tridimensionale la cui equazione è $x_1x_2-x_3^2=0$ nel seguente modo. Si sezioni un cono con un piano E non passante per il vertice P_ω e si prenda sulla sezione ottenuta tre punti distinti, P_0, P_1 e P_∞. Sulla generatrice del cono per P_1 si prenda un ulteriore punto $P_{(1+\varepsilon)}$, diverso da P_1 e P_ω; i 4 punti P_0, P_1, P_∞ e $P_{(1+\varepsilon)}$ si definiscano come i punti fondamentali. Scelto un sistema di coordinate proiettive (per il quale i piani fondamentali siano $x_0=0$, $x_3=0$, $x_1=0$ e $x_2=0$, rispettivamente il piano E, il piano su cui giacciono P_0, P_∞ e P_ω, il piano tangente alla generatrice per P_∞ e P_ω, il piano tangente alla generatrice per P_0 e P_ω; nel sistema così univocamente determinato, il punto fondamentale $P_{(1+\varepsilon)}$ avrà coordinate $(1,1,1,1)$. Le coordinate dei 4 punti fondamentali e del vertice del cono sono esplicitate dalla seguente tabella:

	x_0	x_1	x_2	x_3
P_0	0	1	0	0
P_1	0	1	1	1
P_∞	0	0	1	0
$P_{(1+\varepsilon)}$	1	1	1	1
P_ω	1	0	0	0

Il cono quindi avrà equazione $x_1x_2-x_3^2=0$. Per associare la varietà dei numeri duali ai punti (reali e immaginari) del cono numerico $x_1x_2-x_3^2=0$, bisogna associare ogni numero duale $u+v\varepsilon$ con un punto le cui coordinate sono determinate dalla proporzione $x_0:x_1:x_2:x_3=v:1:u^2:u$. Attraverso questa corrispondenza numeri duali e punti del cono vengono univocamente associati[381]. Le trasformazioni che caratterizzano questa geometria sono le trasformazioni lineari fratte (univoche, invertibili e continue)[382] del tipo $\omega' = \frac{a\omega+b}{c\omega+d}$, con ω numero duale del tipo u+vε e i coefficienti

[381] Cfr. (Grünwald 1906, pagg. 83-84).

[382] In altre parole sono delle collineazione che trasformano il cono in se stesso (ibidem, pag. 91).

$\left\{\begin{matrix} a=\alpha+\alpha'\varepsilon, b=\beta+\beta'\varepsilon \\ c=\gamma+\gamma'\varepsilon, d=\delta+\delta'\varepsilon \end{matrix}\right\}$ tali da avere il determinante della loro parte scalare non nullo, cioè $D=\begin{vmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{vmatrix}\neq 0$ [383]. Per tali trasformazioni si può fornire una rappresentazione stereografica in modo del tutto analogo alla proiezione stereografica della retta complessa sulla superficie di Riemann (la sfera) se si considera una superficie cilindrica su cui si proiettano i punti del piano duale[384].

L'anello dei numeri duali *D* diede quindi l'opportunità a Grünwald di costruire nel 1906 una geometria proiettiva *P*(*D*). Ma l'edificazione di nuove geometrie non si esaurì con quella pubblicazione, né con l'importante memoria di Corrado Segre sulla geometria proiettiva sui duali (si veda a tal proposito il prossimo paragrafo), perché la storia dell'algebra e della Geometria è piena di costruzioni geometriche fatte su algebre diverse da quella reale (o complessa).

Nel 1947 la costruzione di nuove geometrie anche su H (i quaternioni) fu avanzata da P.G. Gormley in (Gormley 1947). E nel 1968, I. M. Yaglom (1921-1988) diede alle stampe *Complex Numbers in Geometry*, nella sua versione in inglese, tradotto dal russo, testo nel quale il matematico scrive *P*(*D*) per descrivere la geometria della retta nel piano euclidea e *P*(*M*)[385] per descrivere la stessa sul piano di Lobachevski. Anche il successivo libro di Yaglom, *A Simple Non-Euclidean Geometry*, apparve in inglese nel 1979 (l'originale russo era del 1969); in esso vi sono una trentina di pagine (pagg. 174-200) nelle quali egli sviluppa la geometria di Minkowski e descrive *P*(*M*) come il piano inversivo di Minkowski. Tra le due pubblicazioni di Yaglom, nel 1973 Walter Benz pubblicò le *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, che prevedono la possibilità di introdurre coordinate omogenee su *M* e sviluppare un anello commutativo per la geometria inversiva.

Ma torniamo a ciò che più interessa questa tesi: la relazione tra variabile duale e geometria proiettiva nell'opera di Corrado Segre.

---

[383] Cfr. (ibidem, pag. 89 e pag. 94).

[384] Cfr. (ibidem, pagg.103-105).

[385] *M* è l'insieme dei numeri doppi $z = x + y$ j dove $j^2 = +1$, e *x* e *y* sono numeri reali.

§6.5.1 Corrado Segre e i numeri duali

L'articolo che Segre pubblica nel 1911[386] prende le mosse dall'idea di estendere ciò che aveva fatto Pilo Predella (1863-1939) in un suo articolo[387] pubblicato appena prima di (Segre 1911) e che consisteva nel porre le basi per lo sviluppo di una geometria i cui elementi (o punti in un nuovo senso) sono le *omografie paraboliche* (trasformazioni con punti uniti coincidenti) di rette punteggiate; lo scopo di tale articolo era quello di sviluppare in modo nuovo le geometrie non archimedee di Veronese.

Il richiamo è a geometrie in puro stile plückeriano ed è chiaro che Segre ne intuisce la novità, pur essendogli essa stessa non nuova. Ricordiamo, infatti, che Segre era avvezzo a simili interpretazioni avendo egli stesso guardato ai punti complessi della retta (complessa) come a trasformazioni geometriche (nella fattispecie come a antiinvoluzioni ellittiche); quindi, in sintonia con quanto già fatto, gli venne spontaneo definire un'altra geometria "diversa" che permetteva in modo naturale l'introduzione di numeri del tipo $a+b\eta$ con a e b reali e η unità tale che $\eta^2=0$: i cosiddetti numeri duali.

Segre confronta l'idea di Predella con quella che era stata circa 60 anni prima di Staudt: introdurre gli elementi immaginari come involuzioni ellittiche di punti sopra forme di prima specie che, rammentiamo, portavano *spontaneamente* all'introduzione dei numeri immaginari, numeri del tipo a+b*i* per cui, si sa, valere la relazione i^2=-1.

Tale accostamento porta Segre a chiedersi se esistono *altre e diverse proiettività* che portano alla costruzione di nuove geometrie e a sistemi più generali di numeri complessi. Era ovviamente noto a Segre che la *geometria delle dinami* (quella di Study del 1903) faceva uso dei numeri duali, e che essi erano stati oggetto di alcuni lavori di Grünwald.

L'articolo che Segre scrisse nel 1911 è diviso in due note; la prima introduce la teoria dei numeri duali *generalizzati* (vedremo cosa si intende) che viene estesa ai punti duali, ai piani duali e alle rette duali; nella seconda viene sviluppata la teoria delle rappresentazioni geometriche dei punti del campo binario duale (la retta duale) sui punti di una quadrica, quindi definisce i protofili (generalizzazione del concetto di *filo* (ente

[386] (Segre 1911).

[387] Si veda (Predella 1911).

composto da ∞^1 punti già definito da Segre in (Segre 1892), i legami lineari fra punti duali, le proiettività e le antiproiettività nel campo duale.

§6.5.1.1 Contenuto della memoria (Segre 1911-12)

L'articolo si apre con uno studio della struttura dell'algebra dei numeri duali.

La definizione di numero duale scaturisce dalle generalizzazione di numero complesso ordinario: un numero duale (generalizzato) è un numero complesso $a+b\varepsilon$, con due unità 1 e ε per cui vale

(1) $$\varepsilon^2=g\varepsilon+h$$

con g e h quantità fisse reali.

Tale definizione permette di fare due osservazioni:

i) avremo tanti sistemi di numeri duali quante sono le possibilità di fare variare di g e h;

ii) se $g=h=0$, si ottiene la tradizionale proprietà dei numeri duali $\varepsilon^2=0$; quest'ultima viene comunque considerata da Segre una restrizione del campo di tutti i numeri duali, e precisamente quella che introduce al caso parabolico come vedremo in seguito.

La moltiplicazione fra due numeri duali definita in modo spontaneo da

(2) $$(a+b\varepsilon)(x+y\varepsilon)=ax+hby+(bx+ay+gby)\ \varepsilon$$

tenendo conto della (1), è commutativa poiché a, b, x, y sono quantità ordinarie.

Considerando la (1) come un'equazione di 2° grado in ε si ottengono da essa due radici e_1 ed e_2 per cui $e_1+e_2=g$, $e_1e_2=-h$, $e=\frac{g\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ con $\Delta=g^2+4h$ nonché

(2') $$e^2-ge-h=0 \quad (e=e_1,e_2).$$

L'intero sistema di numeri duali viene detto parabolico, ellittico o iperbolico a seconda che si verifichi $\Delta=0$, $\Delta<0$, $\Delta>0$.

Potendo scrivere l'equazione (1) come $(\varepsilon-e_1)(\varepsilon-e_2)=0$, Segre precisa che, essendo e ed ε due quantità di natura diversa (e è una quantità ordinaria, mentre ε è un nuovo simbolo), si avrà che il prodotto fra due numeri duali può essere nullo senza che sia nullo uno dei fattori (numeri che lui chiama nullifici e che sono i nostri divisori dello zero).

Dalla definizione (2) si deduce che, affinché il prodotto di due numeri duali non nulli sia nullo, si deve verificare contemporaneamente che:

(3) $ax+hby=0$ e $bx+(a+gb)y=0$

con x e y non entrambi nulli. Ricavando dalla prima equazione la x, sostituendola nella seconda si ottiene un'equazione di secondo grado in a: $a^2+gba-hb^2=0$, da cui si ha che $(a+be_1)(a+be_2)=0$ (poiché le radici dell'ultima equazione di 2° grado sono be). Quindi, se $(a+be_1)=0$ (a e b non possono essere entrambi nulli poiché $a+b\varepsilon$ non è nullo) allora $a=-be_1$ che sostituito in (3), supponendo $b\neq 0$ e tenendo conto che $g=e_1+e_2$, si ottiene $x+e_2y=0$. Allo stesso modo, da $a+be_2=0$ si ottiene $x+e_1y=0$.

Si può quindi concludere che:

> *affinché il prodotto di due numeri duali sia nullo, occorre e basta che uno dei due fattori sia il prodotto di una quantità per* $\varepsilon-e_1$, *e l'altro il prodotto di una quantità per* $\varepsilon-e_2$ (Segre 1911, p.311),

tenendo conto del fatto che, essendo e radice della (1), si ha:

$$a+be_1\approx a+b\varepsilon=b(\varepsilon-e_1).$$

Da questa precisazione scaturisce la definizione di nullifico: Un numero duale viene detto *nullifico di* 1^a o *di* 2^a *specie* se è del tipo $b(\varepsilon-e_1)$ oppure $b(\varepsilon-e_2)$. In altre parole, il prodotto di due numeri duali non nulli è zero se si sostituisce il simbolo ε con e_1 o con e_2 in uno dei due numeri.

Nel caso di numeri duali parabolici, le due schiere di nullifici coincidono, allora il quadrato di un nullifico è sempre nullo.

La divisione, sempre possibile nel campo dei numeri duali, dà un risultato ben determinato solo se il divisore $a+b\varepsilon$ non è nullifico. Così, essendo $c+d\varepsilon$ il dividendo e $x+y\varepsilon$ il risultato, si avrà: $(a+b\varepsilon)(x+y\varepsilon)=c+d\varepsilon$ da cui si ottiene un sistema simile a (3) con i secondi membri rispettivamente uguali a c e d. Da ciò derivano, se $a^2+gba-hb^2\neq 0$, le soluzioni, cioè i valori di x e y ($a^2+gba-hb^2\neq 0$, per quanto precedentemente detto, equivale a dire che a+bε non è un nullifico).

Molto spesso, per semplificare un calcolo, risulta opportuno operare un cambiamento di unità duale, cioè sostituire ε con una nuova unità $\zeta=m+n\varepsilon$. Poiché $\varepsilon=\frac{\zeta-m}{n}$, questo sostituito in (1), operando tutti i passaggi e ponendo

(4) $\quad G=2m+gn \quad$ e $\quad H=-m^2-gmn+hn^2$

si ottiene

(5) $$\zeta^2=G\zeta+H.$$

Se il campo è parabolico, sostituendo ε col nullifico $\eta=\varepsilon-e_1$, si ottiene la più famosa espressione $\eta^2=0$, che è quella che si ricorda come caratteristica dei numeri duali e che Study sfrutta nei suoi lavori.

Invece Segre, e questo fatto rispecchia la maggiore generalità dei suoi contenuti rispetto a quelli di altri matematici, considera $\eta^2=0$ come espressione chre definisce un caso particolare di algebra duale, quest'ultimo definito in modo molto più generale dalla (1).

In alcuni casi, però, la semplice sostituzione di unità duale non basta per agevolare lo studio e gli sviluppi ulteriori si rende necessario cambiare le due unità 1 e ε con forme lineari di due nuove unità, scelte opportunamente nelle due schiere di nullifici (se il campo non è parabolico), in modo da poter rappresentare un qualunque numero duale come somma di tali due nullifici.

Il coniugato di un numero duale $a+b\varepsilon$ viene definito dal numero $(a+gb)-b\varepsilon$. La relazione di coniugio è reciproca, un numero duale coincide col suo coniugato solo se $b=0$, il coniugato di ε è $g-\varepsilon$, il coniugato della somma o del prodotto di due quantità duali è pari alla somma o al prodotto delle coniugate delle singole quantità.

Il prodotto fra un numero duale e il suo coniugato dà $a^2+gba-hb^2$ che è uguale al prodotto $(a+be_1)(a+be_2)$, quantità ordinaria detta *norma* di $a+b\varepsilon$, che si annulla solo se $a+b\varepsilon$ è un nullifico.

Si nota ancora che: il coniugato di un nullifico è ancora un nullifico; e se il campo è parabolico, un nullifico di una schiera ha per coniugato un nullifico dell'altra schiera.

Dopo avere così definito le principali proprietà dei numeri duali, Segre passa alla rappresentazione dei punti duali. Nel campo duale un punto ξ è individuato da una quadrupla di coordinate omogenee $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ dove $\xi_i=x_i+y_i\varepsilon$, $i=1,\dots,4$, non tutti e quattro nullifici della stessa schiera; si dimostra che due quadruple individuano lo stesso punto duale a meno di un numero duale non nullifico.

Per rappresentare geometricamente il punto duale ξ si considerano le x_i e le y_i come coordinate omogenee di punti ordinari x e y in uno stesso sistema di riferimento. Diremo che il punto duale ξ coinciderà con un punto ordinario x se le $\xi_i=x_i$ a meno di un fattore moltiplicativo duale non nullifico e se le $y_i=mx_i$, cioè anche i punti ordinari x e y devono coincidere.

Siano x e y due punti tale che $x\neq y$; se si moltiplicano le ξ_i per un fattore $\rho=a+b\varepsilon$, si otterranno due punti x' e y', che al variare di ρ varieranno sempre sulla retta individuata da x e y.

Introducendo una coordinata proiettiva non omogenea ω derivante dalle espressioni delle x' e y' e supposto che $ab\neq 0$, si avrà $\omega=hb/a$, $\omega'=a/b+g$ e

(6) $$\omega\omega'=g\omega+h.$$

Da ciò si deduce che affinché i punti duali $x+y\varepsilon$ e $x'+y'\varepsilon$ coincidano (il che equivale a dire che i punti x' e y' stanno sulla retta che passa per x e y) si deve verificare che x' e y' siano omologhi in una proiettività che ha per equazione la (6) e per discriminante $-h$[388]. Tal fatto, impone a Segre di porre d'ora innanzi $h\neq 0$, il che significa che la proiettività deve essere non degenere.

Ponendo nella (6) $\omega=\omega'$ si ottiene un'equazione analoga alla (2') che ha due punti uniti

(7) $$z=x+e_1y \qquad t=x+e_2y,$$

che Segre chiama *1° e 2° punto unito*, ottenuti ponendo l'ε di $\xi_i=x_i+y_i\varepsilon$ una volta uguale a e_1, una volta uguale a e_2. Essi coincidono se la proiettività è parabolica, quindi se il sistema di numeri duali è parabolico.

[388] In generale l'equazione di una proiettività si può scrivere nella forma $a_0\omega\omega'+a_1\omega+a_2\omega'+a_3=0$, quindi il suo discriminante è $a_0a_3 - a_1 a_2$.

Il birapporto (invariante) dell'omografia, cioè il birapporto tra i due punti uniti e due punti omologhi è $k=e_1/e_2$; un altro invariante è dato dal rapporto $I=g^2/h$[389].

Viceversa, data una omografia con birapporto $k=e_1/e_2$ e invariante $I=g^2/h$, si può sempre trovare un punto duale che la rappresenti. Quindi:

> *I punti duali, che non si riducono a punti ordinari, son rappresentati geometricamente dalle omografie, col birapporto fisso k, fra i punti ordinari delle varie rette dello spazio* (Segre 1911, p.316).

Ciò permette a Segre di ottenere una corrispondenza biunivoca tra le involuzioni rettilinee con $g=0$ e $k=-1$ e un sistema di numeri duali in cui $\varepsilon^2=h$, $g=0$ e $h\neq 0$ (allora si può scegliere $k=-1$ e $h=1$ oppure $h=-1$).

Invece, le omografie rettilinee paraboliche sono da considerarsi rappresentanti di un sistema di numeri duali parabolici, cioè del tipo $(\varepsilon-l)^2=0$ dove $l\neq 0$.

Si vede che la rappresentazione dei punti duali tramite proiettività rettilinee dipende dalla scelta dell'unità ε posta a base del sistema di numeri duali (che implica la scelta di g e h).

Cambiando unità duale cambieranno le omografie corrispondenti ai punti duali. Infatti se sostituiamo ζ, così come è stata definita precedentemente[390], al posto di ε, il punto duale $\xi_i=x_i+y_i\varepsilon$ diventerà $X_i+Y_i\zeta$, con X_i e Y_i quantità ordinarie poiché dipendenti da x_i, y_i, m, n, g, h esse stesse già quantità ordinarie.

E visto che ζ e ε non sono altro che "simboli" legati dalla relazione $\zeta=m+n\varepsilon$, potremo anche sostituire la coordinata proiettiva non omogenea ω con un'altra u tale che

$$u=m+n\omega, \qquad n\neq 0 \tag{8}$$

e quindi passare dall'espressione del punto duale $x+\omega y$ alla $X+uY$; ciò vuol significare che il cambiamento dell'unità duale da ε a ζ produce una diversa rappresentazione dei punti ordinari sulla retta passante per x, y, X, e Y, dovuta alla variazione del parametro primitivo ω con u.

---

[389] In riferimento alla nota precedente, in generale un invariante della proiettività è $I=(a_1-a_2)^2/(a_1a_2-a_0a_3)$.

[390] Cfr. (Segre 1911, pagg. 311-312).

Analogamente alla (6), si avrà $uu'=Gu+H$, da cui, se vi si sostituiscono la (8) e la (4), dividendo per n ($n\neq 0$) e raggruppando si ottiene

$$(9) \qquad n(\omega\omega'-g\omega-h)+m(\omega'-\omega)=0$$

che definisce la proiettività che si ottiene sulla retta immagine del punto duale $\xi=X+Y\zeta$ (ottenuto dal cambiamento dell'unità duale). E visto che nella (9) variando m/n si ottiene sempre $\omega'-\omega=0$, si dimostra che

> *al mutar dell'unità $\zeta=m+n\varepsilon$ l'omografia rappresentante di un dato punto duale varia in un fascio di omografie dotato degli stessi punti uniti* (Segre 1911, p. 318).

Escludendo il caso parabolico (cioè il caso in cui i punti uniti coincidono), i punti duali si potranno rappresentare con proiettività aventi invariante fissato e dipendente dalla scelta dell'unità duale. Quindi la corrispondenza tra punto duale e proiettività dipende sì dalle coordinate del punto ma anche dall'unità duale con cui le coordinate vengono espresse. È importante precisare che ciò, pur essendo una novità rispetto ad altre rappresentazioni, è assolutamente analogo a quanto avviene per la rappresentazione di un punto ordinario bidimensionale sul piano cartesiano: essa varia se si cambia unità di misura adottata. Solo i punti uniti, come abbiamo visto, sono fissati indipendentemente dall'unità scelta; e poiché tali punti li abbiamo chiamati z e t[391], si può concludere che a ogni punto duale corrisponde una coppia (z, t) di punti ordinari presi in un ordine fissato, che altro non sono che i punti uniti dell'omografia immagine del punto duale.

Infatti, facendo variare le unità 1 e ε con una combinazione lineare di due nuove unità η_1, η_2 tale che $1=\eta_1+\eta_2$ e $\varepsilon=e_2\eta_1+e_1\eta_2$, e per cui valga $\eta_1^2=\eta_1$, $\eta_2^2=\eta_2$ e $\eta_1\eta_2=0$, si ottiene per il punto duale $\xi=x+y\varepsilon$ la nuova espressione $t\eta_1+z\eta_2$, dove t e z sono i due punti uniti. E rappresentando il punto duale attraverso le due (nuove) unità η_1, η_2 (in luogo di 1 e ε) si avrà una nuova omografia del fascio ma, i cui punti uniti saranno sempre gli stessi due. Quindi si dimostra che un punto duale non parabolico qualunque si può scrivere come a partire dalla coppia di punti uniti (z, t), che per tale motivo si diranno *1° e 2° nucleo* del punto duale, invece che *1° e 2° punto unito dell'omografia*. Nel caso di sistemi parabolici i due nuclei coincidono. La parola "*nucleo*" viene

[391] Si veda (Segre 1911, pag. 315).

adottata direttamente dal lavoro del Predella, anche se quest'ultimo la usa solo nel caso parabolico.

Secondo la definizione di Segre si trova che i punti duali sono ∞^6, sia nel caso di campo di numeri duali parabolici che non, poiché un punto duale si può pensare come la coppia formata da

> *un punto e una retta incidenti: la retta sostegno del punto duale, ed il nucleo di questo* (Segre 1911, pag. 319).

Malgrado ciò, Segre mostra di preferire la rappresentazione del punto duale attraverso una proiettività rettilinea di birapporto k a quella di coppia di punti ordinari.

Se si considerano ordinari i numeri e gli enti geometrici reali e si prende un sistema di numeri duali ellittici ($\Delta<0$), si avrà anche $h<0$, allora le omografie dei punti duali non avranno più punti uniti reali. Infatti, se si sceglie una opportuna unità, per esempio $g=0$ e $h=-1$, da cui $\varepsilon^2=-1$, si ottengono le involuzioni che, come aveva già trovato von Staudt, rappresentano i punti (analitici) immaginari $x+y\sqrt{-1}$.

Se invece che all'unità $\varepsilon=\sqrt{-1}$, riferiamo le coordinate dei punti a una nuova unità $\zeta=m+\sqrt{-1}$, si otterranno come rappresentanti dei punti immaginari non più involuzioni, ma omografie di dato invariante $I=-4m^2/(m^2+n^2)$[392].

Quindi, una volta scelta un'altra proiettività (il che equivale a scegliere un altro I), si possono sempre definire i punti immaginari. Ed è questa l'idea che aveva avuto Felix Klein[393] quando definiva i punti immaginari a partire da proiettività, in modo diverso da come faceva von Staudt che usava le involuzioni. Ma Klein altro non faceva che, così come dimostra Segre, effettuare un banale cambiamento di unità immaginaria.

Se si considerano i numeri duali parabolici per cui $\varepsilon^2=0$, si avrà $h=0$ e quindi la (6) si riduce a $\omega\omega'=0$: così facendo, però, si ottengono omografie degeneri. Si può ovviare a tale inconveniente considerando come unità $\zeta=1+\varepsilon$ ($m=n=1$), tramite cui, malgrado $g=h=0$, l'omografia corrispondente alla (9) diventa $\omega\omega'+\omega-\omega'=0$; quindi ponendo $\omega=1/\nu$ e $\omega'=1/\nu'$ si ottiene $\nu'=\nu+1$. In definitiva, il punto duale $x+y\varepsilon$ avrà per immagine l'omografia data dalla retta per x e y, nella quale al punto $\nu x+y$ corrisponderà

---

392 Se nella (9), equazione della proiettività considerando il cambiamento di unità, si pone $g=0$ e $h=-1$, si otterrà $n\omega\omega'+m\omega'-m\omega+n=0$, da cui per la (10) deriva il particolare valore di I.

393 Cfr. (Klein 1972).

il punto $(\nu+1)x+y$, il che equivale a dire che una omografia, che ha come unico punto unito x, e manda y in $x+y$.

In modo naturale e in sintonia con quanto detto per le coppie di numeri duali coniugati, si possono definire due punti duali *coniugati* se le loro coordinate omologhe sono numeri duali coniugati. Cerchiamo a questo punto di chiarire quale possa essere il legame tra le omografie che rappresentano due punti duali coniugati.

Poiché il coniugato di ε è g-ε, scegliendo come unità proprio $\zeta=g-\varepsilon$ (cioè $m=g$ e n=-1), si ottiene la proiettività (facendo le opportune sostituzioni nella (9)) di equazione $\omega\omega'=g\omega'+h$, che è l'inversa della (6). Quindi si può affermare che

> *Due punti duali coniugati hanno per immagini (fissata una stessa unità duale ε) due omografie inverse l'una dell'altra* (Segre 1911, p.321).

Se il campo è parabolico, si passerà ai coniugati dei punti duali scambiando fra loro le unità η_1 e η_2 (le stesse già definite in (Segre 1911, pagg. 318-319) e i due nuclei; quindi il coniugato del punto duale (z, t) sarà (t, z).

Dati due punti duali distinti ξ e ξ', essi si diranno linearmente dipendenti (Segre dice *legati linearmente*) se esistono α e α' numeri duali non nulli tale che:

(11) $\qquad \alpha\xi_i+\alpha'\xi'_i=0 \qquad i=1,...,4.$

Affinché tali somme di prodotti diano zero, si deve avere che ξ_i e $-\xi'_i$ siano nullifici della stessa schiera. Infatti se così non fosse esisterebbe un punto duale coincidente sia con ξ che con ξ'; ma poiché le coordinate ξ_i e ξ'_i dei punti duali non possono essere tutte nullifiche della stessa schiera (per esempio della prima), dovranno esserlo α e α'; così, ponendo $\alpha=a\eta_1$ e $\alpha'=a'\eta_1$[394], con a e a' quantità ordinarie non nulle, e sostituendo in (11) si ha $\eta_1(a\xi_i+a'\xi'_i)=0$. Quest'ultima espressione ci assicura due fatti:

1) che $a\xi_i+a'\xi'_i$ è nullifico di seconda schiera, essendo $\eta_1^2=\eta_1$ e $\eta_1\eta_2=0$;

2) che $a\xi_i+a'\xi'_i=0$ se nelle ξ_i e nelle ξ'_i si mette e_2 al posto di ε.

[394] Poiché α è un numero duale sarà uguale a una quantità ordinaria a moltiplicata per un'unità duale η_1.

Con tale sostituzione si ottiene $a(x_i+y_ie_2)+a'(x'_i+y'e_2)=0$ cioè $x_i+y_ie_2=x'_i+y'e_2$ (a meno del fattore moltiplicativo a con $a=-a'$); ma tali espressioni sono le coordinate dei secondi nuclei t e t' rispettivamente di ξ e ξ', che così coincidono.

Si può, quindi, affermare che

> *Un legame lineare fra due punti duali distinti significa che questi punti han in comune il 1° nucleo, oppure il 2° nucleo. Quando si verifichi, per esempio, il secondo caso, i fattori α e α' saranno nullifici della prima schiera* (Segre 1911, p.322).

Passiamo adesso, con Segre, a definire i piani e le rette nel campo duale.

L'insieme dei punti duali $x+y\varepsilon$ le cui coordinate soddisfano un'equazione lineare omogenea (in un dato campo di numeri duali) $\sum(u_i+v_i\varepsilon)(x_i+y_i\varepsilon)=0$ in cui i coefficienti $u_i+v_i\varepsilon$ non siano tutti nullifici della stessa schiera, si dirà *piano duale*, e i coefficienti $u_i+v_i\varepsilon$ saranno le coordinate omogenee del piano. Naturalmente se tali coordinate vengono moltiplicate tutte per uno stesso numero duale non nullifico, si otterrà sempre lo stesso piano duale.

Si definisce, invece, *retta duale* l'insieme dei punti duali le cui coordinate sono forme lineari (a coefficienti duali) di due parametri duali variabili non entrambi nullifici λ e λ', cioè $\lambda\xi_i+\lambda'\xi'_i$, per i quali cioè non esistano valori di λ e λ' che possano annullare le forme.

Si può anche dire che i punti di una retta duale sono combinazioni lineari (a coefficienti duali λ e λ') di due punti duali ξ e ξ' non legati linearmente. Ovviamente per due punti duali non legati linearmente passa una sola retta duale su cui stanno ∞^2 punti duali.

I parametri λ e λ' possono essere considerati come coordinate omogenee dei punti di una retta, a meno di un fattore duale non nullifico; infatti se un punto duale di una retta duale corrisponde a due coppie di valori di quei parametri (λ, λ') e (μ, μ') si avrà $\lambda\xi+\lambda'\xi'=\rho(\mu\xi+\mu'\xi')$, cioè $(\lambda-\rho\mu)\xi+(\lambda'-\rho\mu')\xi'=0$, e poiché ξ e ξ' sono linearmente indipendenti si avrà $\lambda=\rho\mu$ e $\lambda'=\rho\mu'$.

Se su un piano duale giacciono due punti duali linearmente indipendenti, allora su esso giaceranno gli ∞^2 punti della retta duale passante per quei due punti duali linearmente indipendenti. Allo stesso modo per una retta duale passano ∞^2 piani duali, allora una retta duale si può anche definire come l'insieme dei punti comuni a due piani duali linearmente indipendenti.

Come si può intuire facilmente

> *in via generale la geometria lineare nel campo duale (ad esempio relazioni fra punti duali e piani duali) è pienamente analoga a quella del campo geometrico ordinario* (Segre 1911, p. 324).

Vediamo adesso cos'è una retta duale dal punto di vista geometrico. Sappiamo che due punti duali possono essere visti come due proiettività (p) e (q) di birapporto dato k, definite tra i punti di due rette ordinarie p e q. Supponiamo dapprima p e q sghembe. Per quanto già visto, una retta si può identificare con una coppia ((p), (q)) di proiettività. Potendo definire tra i punti di p e quelli di q una *collineazione biassiale* Ω, di birapporto k e aventi per assi le due rette che uniscono i primi punti uniti e i secondi punti uniti di (p) e (q)[395], una retta duale può essere perfettamente rappresentata da tale Ω[396]. Quindi p e q possono essere considerate gli assi di Ω e ogni retta unita diversa da p e q è una generatrice di Ω. Tali generatrici di Ω sono ∞^2 poiché ognuna di esse è sostegno di una proiettività tra punti e tra piani di birapporto k, contenute in Ω.

Se le due rette p e q ordinarie sono incidenti esse avranno in comune un punto che avrà due omologhi nelle proiettività (p) e (q). La retta che congiunge questi due omologhi taglierà la retta che congiunge i primi punti uniti di quelle proiettività in un punto O, da cui si può definire, nel piano w definito da p e q, un'omografia avente birapporto k. Tale omografia può essere assunta come rappresentazione geometrica della retta duale al posto di Ω. In altre parole, per dirla con Segre,

> *La retta duale è ora caratterizzata dal giacere in un piano ordinario w, od anche dal contenere un punto ordinario O* (Segre 1911, p. 327).

---

[395] Tali punti uniti sono i nuclei t e z dei due dati punti duali.

[396] Tali collineazioni biassiali erano state già introdotte sia da Staudt che da Predella, ma entrambi nel caso delle rette ordinare immaginarie di 2ª specie e in quello delle proiettività paraboliche.

Se le due rette p e q coincidono i punti duali della retta duale sarebbero gli ∞^2 punti duali di una retta ordinaria; infatti coincidendo le rette p e q, coincidono anche le proiettività (p) e (q) nonché i due punti duali da queste rappresentati, quindi non si dovrebbe più parlare di una retta duale ma di una retta ordinaria.

Con tale rappresentazione si chiude la prima delle due note scritte da Segre; con la seconda, pubblicata sempre nello stesso volume degli *Atti della Reggia Accademia delle Scienze di Torino*, Segre si propone di indagare cosa succede ai punti del campo duale binario se essi si vogliono rappresentare su una quadrica

Abbiamo visto in (Segre 1911, pag. 326) come ricondurre una retta duale, su cui stanno ∞^2, a una collineazione biassiale. Se consideriamo le variabili duali omogenee λ e λ' che individuano una retta duale (λ e λ' si possono assumere anche come coordinate omogenee dei punti duali di una retta duale) e posto $\lambda=z_1+z_2\varepsilon$ e $\lambda'=z_3+z_4\varepsilon$, si può pensare che ogni punto duale è individuato da una quaterna (z_1, z_2, z_3, z_4). E poiché tali z_i sono numeri ordinari, quella quaterna individua un punto ordinario.

Date due quaterne (z_1, z_2, z_3, z_4) e (z_1', z_2', z_3', z_4'), esse individuano uno stesso punto se esiste un numero duale $a+b\varepsilon$ non nullifico tale che

$$z_1'+ z_2'\varepsilon=(a+b\varepsilon)(z_1+ z_2\varepsilon) \qquad \text{e} \qquad z_3'+ z_4'\varepsilon=(a+b\varepsilon)(z_3+ z_4\varepsilon)$$

da cui si deducono, ricordando la (1), le espressioni

$$(12) \qquad \begin{cases} z_1' = az_1 + hbz_2 \\ z_2' = bz_1 + (a+gb)\, z_2 \\ z_3' = az_3 + hb\, z_4 \\ z_4' = bz_3 + (a+gb)\, z_4 \end{cases}$$

che possono essere assunte come le equazioni di una collineazione biassiale, per esempio la Ω già considerata da Segre. Se a e b variano, il punto z' varia su una retta per il punto z appartenente alle ∞^2 generatrici della Ω. Allora le ∞^2 generatrici di Ω possono essere considerate come immagini degli ∞^2 punti duali di una retta duale.

Vediamo adesso come connettere materialmente i punti duali ai punti di una quadrica.

Potendo scrivere le coordinate dei punti z e z' sotto forma di matrice 2×4 di rango 2 (le z_i e le z_i' non sono tutte nulle)

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1' & z_2' & z_3' & z_4' \end{vmatrix}$$

da cui ricavare i minori $p_{ij}=z_i z_j'-z_i' z_j$ con $i<j$, si ottengono 6 numeri non nulli p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34} non indipendenti tra loro ma tali che $p_{13}=-hp_4$ e $p_{23}=-p_3-gp_4$ dove

$$p_{12}=p_1 \qquad p_{14}=p_3 \qquad p_{24}=p_4 \qquad p_{34}=p_2.$$

Questi ultimi 4 numeri indipendenti tra loro vengono assunti da Segre come le coordinate della retta duale passante per i punti z e z', e poiché dalle loro espressioni

$$(13) \qquad \begin{cases} p_1 = z_1^2 + gz_1 z_2 - hz_2^2 \\ p_2 = z_3^2 + gz_3 z_4 + hz_4^2 \\ p_3 = z_1 z_3 + gz_1 z_4 - hz_2 z_4 \\ p_4 = z_2 z_3 - z_1 z_4 \end{cases}$$

si ricava un'equazione di 2° grado in 4 incognite indipendenti

$$(14) \qquad p_1 p_2 - p_3^2 - gp_3 p_4 + hp_4^2 = 0,$$

quest'ultima si può assumere come una relazione quadratica.

Se si guarda alle p_i con $i=1,...,4$ come a coordinate di punto, la (14) risulterà essere l'equazione di una quadrica F, le cui equazioni parametriche sono le (13). Quindi: ogni punto ordinario della quadrica F rappresenta biunivocamente un punto duale della retta duale.

Se si moltiplica la (14) per 2 e si scrive la matrice a essa associata, il discriminante della matrice $\Delta=g^2+4h$ si può assumere come discriminante della quadrica F, discriminante che coincide col valore del Δ dell'equazione (1); quindi, supposto che h e g siano reali si avrà:

1) se $\Delta=0$, la F rappresenterà un cono (il campo è parabolico e i punti uniti z e t coincidono);
2) se $\Delta<0$, la F sarà a punti ellittici;
3) se $\Delta>0$, la F sarà a punti iperbolici.

Considerando il rapporto $\frac{\lambda}{\lambda'}$ tra le due coordinate omogenee dei punti di una retta, si possono esprimere i punti di una retta duale con una sola variabile, che diventa coordinata non omogenea

$$\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{z_1+z_2\varepsilon}{z_3+z_4\varepsilon}=u+v\varepsilon.$$

Moltiplicando ambo i membri per $z_3+z_4\varepsilon$ (tenendo conto di $\varepsilon^2=g\varepsilon+h$) e risolvendo rispetto a u e v si ottiene:

$$u=\frac{z_1z_3+gz_1z_4\text{-}hz_2z_4}{z_3^2+gz_3z_4\text{-}hz_4^2}$$

$$v=\frac{z_2z_3+z_1z_4}{z_3^2+gz_3z_4\text{-}hz_4^2}$$

che per le (13) diventano:

(15) $$u=\frac{p_3}{p_2} \quad \text{e} \quad v=\frac{p_4}{p_2}.$$

Quindi se si pensa la variabile $u+v\varepsilon$ estesa ai punti (p_1, p_2, p_3, p_4) di una quadrica F si ottiene che tale variabile è $u+v\varepsilon=(p_3+\varepsilon p_4)p_2$.

Da notare che se si proietta F sul piano $p_1=0$, si possono considerare i punti di F dipendenti dalle 3 coordinate omogenee p_2, p_3, p_4 o meglio dai 2 rapporti (13), posto u e v coordinate non omogenee. Allora il punto (u, v) è l'immagine del numero duale $u+v\varepsilon$ sullo stesso piano: la stessa cosa avviene per la rappresentazione ordinaria sul piano cartesiano dei numeri complessi $a+bi$, identificati coi punti (a, b).

Se si considerano i punti ordinari (cioè quelli che coincidono coi loro coniugati) di una retta ordinaria e come coordinate non omogenee si scelgono 2 valori coniugati, per esempio

$$u+v\varepsilon \quad \text{e} \quad u'+v'\varepsilon \quad \text{con} \quad u'=u+gv \quad \text{e} \quad v'=-v\,\varepsilon,$$

così come visto al §6, si otterrà:

$$\frac{p_3'}{p_2'}=\frac{p_3}{p_2}+g\frac{p_4}{p_2} \quad \text{e} \quad \frac{p_4'}{p_2'}=-\frac{p_4}{p_2}$$

e quindi si potranno considerare le equazioni

(16) $$p_1'=p_1, \quad p_2'=p_2, \quad p_3'=p_3+gp_4, \quad p_4'=p_4\,.$$

In più, se si considerano i punti p di F soddisfacenti all'equazione (14) e se nell'equazione ottenuta dalla (14) sostituendo ai p_i i p_i', si sostituiscono le (16) si ottiene nuovamente la (14). Ciò significa che la corrispondenza tra i punti coniugati p e *p'* di F risulta *un'omologia armonica* e quindi si può scegliere come piano d'omologia p_4=0 e per centro il suo polo rispetto a *F*.

Si può concludere che

> *I punti ordinari (coniugati di se stessi) han per immagini i punti di F che stanno sul piano $p_4=0$, vale a dire i punti di una conica (irriducibile)* (Segre 1911, p. 389),

poiché la (14) si riduce a $p_1p_2-p_3^2=0$ il cui determinante è ≠0, precisamente è 2.

Se consideriamo il campo parabolico (per il quale vale $g=h=0$) con l'unità duale $\varepsilon^2=0$, l'equazione (14) si riduce a $p_1p_2-p_3^2=0$ (un cono quadratico). Quest'ultima equazione combinata con la (15) darà

$$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 = u^2 : 1 : u : v$$

che sono le formule date da J. Grünwald in (Grünwald 1906, pag. 83) per rappresentare la variabile duale $u+v\varepsilon$ (con $\varepsilon^2=0$) su un cono quadratico.

Se il campo binario duale è dato dalle 2 coordinate omogenee $z_1+z_2\varepsilon$ e $z_3+z_4\varepsilon$, dalle (13) si può ottenere:

(17) $\quad p_1=z_1^2, \qquad p_2=z_2^2, \qquad p_3=z_1z_3, \qquad p_4=z_2z_3-z_1z_4.$

Si deve osservare che i punti della retta duale che hanno lo stesso nucleo, una volta fissato u, cioè $z_1:z_3$, corrispondono ai punti di una stessa generatrice del cono ($p_1:p_2:p_3$), mentre il vertice del cono per cui $p_1=p_2=p_3=0$ è un punto *eccezionale* poiché non ha per omologo un punto duale ben determinato, in quanto se $p_1=p_2=p_3=0$ allora il punto dovrebbe avere ∞ nuclei, il che costituisce una contraddizione.

La trattazione di Segre prosegue con pochi cenni sulla rappresentazione del campo ternario duale, ma suggerisce come ottenere le successive generalizzazioni.

Si tenga conto che la rappresentazione del campo duale binario coi punti di una quadrica può venire generalizzata per campi con un numero qualunque di variabili duali. Nel caso di campi duali non parabolici si possono trovare varietà rappresentative già note e precisamente, poiché i punti duali si possono esprimere come coppie ordinate di punti ordinari, quelle varietà di cui Segre stesso fa ricorso nel suo lavoro del 1891[397], in cui le varietà vengono riconnesse agli ordinari punti complessi del piano o dello

[397] (Segre 1891).

spazio. Nel caso parabolico, invece, al posto di un campo duale ternario si può sfruttare una rappresentazione con una varietà già introdotta da Study nella sua *Geometrie der Dynamen*[398].

Per far ciò basti ricordare che un punto duale si può esprimere come una coppia (ordinata) di punti ordinari (=reali), per capire che si possono rappresentare le coppie di punti di due piani, o di due spazi, come singoli punti di una varietà. Precisamente le varietà che si otterranno sono analoghe a quelle già studiate da Segre in (Segre 1889-91) per la rappresentazione dei punti complessi del piano e dello spazio. Segre scopre quindi che i punti duali di un piano duale vengono rappresentati da una varietà V_4 di ordine 6 di uno spazio S_8, luogo di due schiere di ∞^2 piani. Tale varietà è la stessa studiata da Study, della quale egli dà anche una generalizzazione geometrica, grazie alla quale Segre può affermare che

> *In S_8 sono dati un piano S_2 ed una F^4 di* VERONESE *(in un S_5 non incidente a quel piano). Si riferiscano in modo noto i punti di questa alle rette (non ai punti) di S_2 (cioè non corrispondenza biunivoca, tale che ad ogni sezione iperpiana della superficie corrispondano in S_2 le rette di un inviluppo di 2ª classe). Congiungendo ogni punto della F^4 colla retta omologa di S_2 si otterranno ∞^2 piani costituenti la V_4^6 di* STUDY (Segre 1911, pag. 392).

Detto ciò, risulta opportuno studiare nel dominio duale, così come si era fatto nel campo complesso, gli insiemi formati da infiniti punti duali che avranno come immagini i punti di una linea o di una superficie sulle varietà introdotte, come la quadrica F o la varietà V_4, tenendo conto, tra l'altro delle opportune generalizzazioni.

Segre, così, estende il concetto di *filo* (varietà con ∞^1 punti) e tela (varietà con ∞^2 punti)[399] al campo dei punti duali. Nasce il concetto di *protofilo*:

> *Un protofilo della 1ª schiera (o 2ª) si compone di ∞^1 punti duali aventi in comune il 1° nucleo (o il 2°)* (Segre 1911, pag. 393).

[398] Cfr. (Study 1903, pag. 367 e segg.).

[399] Concetti introdotti nel 1892 in (Segre 1892)

Quindi ogni protofilo di una retta ordinaria contiene sempre un punto ordinario; e poiché i punti duali possono essere rappresentati con proiettività rettilinee mentre la retta duale con una collineazione biassiale (Segre 1911, pag. 326) o con proiettività data da un fascio di rette (Segre 1911, pag. 327), possiamo rappresentare geometricamente i punti di un protofilo della 1ª schiera (per esempio) su una retta duale non ordinaria, sicché essi potranno equivalere

> *alle ∞^1 proiettività che un'omologia piana (di birapporto k) definisce sulle rette passanti pel centro d'omologia* (Segre 1911, pag. 394),

che è il 1° nucleo stesso comune a tutti i punti duali del protofilo.

Da quanto detto deriva che

> *gli ∞^1 punti di un protofilo son comuni ad infinite (∞^2) rette duali* (Segre 1911, pag. 394),

così come viene specificato dal Predella per il caso parabolico.

Grazie all'introduzione del concetto di *protofilo*, possiamo estendere quanto esposto precedentemente, riguardante i punti legati linearmente:

> *Due punti duali legati linearmente sono due punti di uno stesso protofilo* (Segre 1911, pag. 394-395)

e dalla stessa definizione di *protofilo* si avrà che

> *Se due rette duali distinte han comune più di un punto duale, i punti duali comuni costituiranno un protofilo* (Segre 1911, pag. 395).

Un legame lineare tra tre o quattro punti duali ξ, ξ', ξ'',..., cioè $\alpha\xi_i+\alpha'\xi_i'+\alpha''\xi_i''+...=0$ con i=1,...,4 e i coefficienti α, α', α'',... non sono tutti nulli, equivale a stabilire un legame lineare tra i loro primi nuclei (oppure i secondi), il che vuol dire che questi ultimi sono allineati o complanari.

Si deve sottolineare che se si combinano linearmente con coefficienti duali due punti che hanno in comune il 1° (o il 2°) nucleo, non si potranno ottenere tutti i punti duali di una retta, ma solo quelli di un *protofilo*. Se invece abbiamo tre punti linearmente legati, i loro primi nuclei sono allineati su una retta ordinaria ed essi non individueranno più un piano duale. Quindi, dalla combinazione lineare di 3 punti duali aventi il 1° (o il 2°) nucleo allineati, si otterranno, non gli ∞^4 punti duali di un piano duale, ma gli ∞^3 punti duali comuni a ∞^1 piani duali[400].

A conclusione di tutto l'articolo Segre indaga le proiettività e le antiproiettività nel campo duale a partire dal concetto di collineazione.

Una *collineazione duale* fra 2 spazi è una trasformazione lineare fra le coordinate omogenee di 2 punti duali variabili ξ e ξ' tale che $\xi_i' = \sum_j a_{ij}\xi_j$ dove a_{ij} sono coefficienti duali.

Le proprietà delle corrispondenze ordinarie valgono ancora per la collineazione duale che, quindi, per esempio, muterà rette duali in rette duali, piani duali in piani duali, gruppi armonici in gruppi armonici; ma in generale i punti ordinari non verranno trasformati da una collineazione duale in punti ordinari, poiché le collineazioni duali dipendono da un numero di parametri doppio rispetto alle collineazioni ordinarie: le collineazioni duali si riducono a ordinarie se i coefficienti a_{ij} si riducono a numeri ordinari (cioè reali).

Naturalmente il birapporto duale tra le coordinate α, β, γ, e δ di 4 punti duali di una retta cioè $(\alpha\beta\gamma\delta)=(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)/(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)$, resta sempre un invariante per una collineazione duale.

Le *anticollineazioni duali*, invece, seguendo il parallelismo con l'ordinaria geometria complessa ordinaria[401], si definiscono ponendo una collineazione duale tra i punti ξ' e i coniugati dei punti ξ, ricordando che le coordinate del punto ξ' sono definite da forme lineari date da numeri duali coniugati alle coordinate del punto ξ.

I birapporti duali verranno trasformati tramite anticollineazioni duali nei corrispondenti numeri coniugati. In modo del tutto analogo si definiscono le reciprocità duali e le antireciprocità duali, che insieme alle precedenti corrispondenze formano l'insieme delle proiettività duali e quindi delle antiproiettività duali.

Se all'interno delle coordinate dei punti ξ si sostituisce la ε con la quantità ordinaria e (e_1 oppure e_2), la collineazione duale si riduce a una ordinaria tra i primi nuclei dei punti duali omologhi e tra i secondi nuclei degli stessi. Invece,

[400] Cfr. (Segre 1911, pag. 397).

[401] Si veda anche il lavoro (Segre 1889-91).

un'anticollineazione duale tra i punti ξ e ξ' pone una collineazione ordinaria tra i primi nuclei di ξ e i secondi nuclei di ξ'e tra i secondi nuclei di ξ e i primi nuclei di ξ'.

Rappresentato il campo dei punti duali di una retta, ordinaria o duale che sia, su di una quadrica F e considerata una proiettività ordinaria tra le generatrici della stessa retta, tale proiettività determinerà anche una proiettività ordinaria tra le generatrici della prima schiera di F e una tra le generatrici della seconda schiera di F. Quindi (con esclusione del caso parabolico), le ∞^6 proiettività duali della retta saranno rappresentate dalle ∞^6 collineazioni di prima specie di F in sé. Se consideriamo invece le antiproiettività duali della retta, esse saranno rappresentate dalle ∞^6 collineazioni di seconda specie che scambiano tra loro le 2 schiere di generatrici.

Nel caso parabolico, i punti duali della retta verranno rappresentati per esempio su un cono quadratico F, per cui si hanno ∞^7 collineazioni (cioè trasformazioni di F in sé) e ∞^6 proiettività e antiproiettività duali della retta che sul cono quadratico F avranno una determinata rappresentazione analitica.

Se $z_1+z_2\varepsilon$ e $z_3+z_4\varepsilon$ sono le coordinate omogenee duali dei punti della retta, le equazioni della proiettività duale saranno:

$$\begin{cases} z_1' + z_2'\varepsilon = (a_1 + b_1\varepsilon)(z_1 + z_2\varepsilon) + (a_2 + b_2\varepsilon)(z_3 + z_2\varepsilon) \\ z_3' + z_4'\varepsilon = (a_3 + b_3\varepsilon)(z_1 + z_2\varepsilon) + (a_4 + b_4\varepsilon)(z_3 + z_4\varepsilon) \end{cases}$$

da cui, se si sviluppano i prodotti e si tiene in considerazione che $\varepsilon^2=0$, si otterrà che:

$$(18) \qquad \begin{cases} z_1' = a_1 z_1 + a_2 z_3 \\ z_2' = a_1 z_2 + b_1 z_1 + a_2 z_4 + b_2 z_3 \\ z_3' = a_3 z_1 + a_4 z_3 \\ z_4' = b_3 z_1 + a_3 z_2 + b_4 z_3 + a_4 z_4 \end{cases} .$$

Ricordando che le coordinate dei punti p e p' del cono soddisfano le equazioni (17) e che tali punti sono le immagini di 2 punti duali fra loro omologhi sulla retta considerata, si trova [sostituendo le (18) nelle (17)] una collineazione (che trasforma F in sé) di equazioni:

$$(19) \qquad \begin{aligned} p_1' &= a_1^2 p_1 + a_2^2 p_2 + 2a_1a_2p_3 \\ p_2' &= a_3^2 p_1 + a_4^2 p_2 + 2a_3a_4p_3 \\ p_3' &= a_1a_3p_1 + a_2a_4p_2 + (a_1a_4 + a_2a_3)p_3 \\ p_4' &= (13)p_1 + (24)p_2 + [(14)+(23)]p_3 + Ap_4 \end{aligned}$$

dove

$$(ij)=b_ia_j-b_ja_i \;\text{ e }\; A=a_1a_4-a_2a_3 \quad \text{con } i,j=1\ldots4$$

Tali equazioni (19) dipendono dalle 2 quaterne di valori di a e di b, ma dividendole per a_4^2 possiamo scendere a complessivi 6 parametri considerando essenziali i 3 rapporti delle a e i 3 coefficienti della quarta equazione. Quindi otteniamo ∞^6 collineazioni che altro non sono che le immagini delle proiettività duali della retta.

Per ottenere le collineazioni immagini delle antiproiettività duali della retta basta cambiare il segno di A nella quarta equazione, poiché punti duali coniugati hanno come immagini due punti p di F differenti solo per il segno di p_4 .

Queste ∞^6 collineazioni formano un gruppo G_6 descritto appunto dalle (19) di cui è facilmente rintracciabile la caratterizzazione geometrica. Infatti, se una volta trasformato il cono F in un cerchio immaginario all'infinito tramite una legge di dualità nello spazio (una reciprocità), si considera il sottogruppo G_6[402] del gruppo di tutte le similitudini (che sono le ∞^7 omografie che trasformano il cerchio in sé), tale gruppo G_6 sarà il gruppo dei movimenti del cerchio, cioè l'omologo del gruppo G_6 proiettivo cui ci si riferiva prima. In altre parole:

> *Le proiettività duali della retta si rispecchiano nei movimenti dello spazio, quando si assumano come imagini dei punti duali della retta (in luogo dei punti di F) i piani tangenti al cerchio assoluto.* (Segre 1911, pag. 402).

Poiché i moti nello spazio si possono ridurre a rotazioni attorno a rette che a loro volta si possono scomporre in prodotti di un numero pari di simmetrie, che Segre considera come omologie armoniche, si può affermare che:

> *Il gruppo G_6 delle collineazioni del cono quadratico F, che sono imagini delle proiettività duali della retta, si compone di quelle collineazioni che sono prodotti di un numero pari di omologie armoniche trasformanti F in sé, vale a dire proiezioni del cono su se stesso da punti esterni* (Segre 1911, pag. 402).

[402] Quest'argomento era già stato affrontato da Lie ed Friedrich Engel (1861-1941) nel 1893 in (Lie, Engen 1893, III vol., pag. 214-218).

In modo del tutto analogo, le antiproiettività duali della retta corrispondono alle collineazioni del cono quadratico ottenute come prodotto di un numero dispari di proiezioni.

Ciò che si è appena detto, ricordiamolo, vale nel caso parabolico; ma le stesse considerazioni si possono ripetere anche nel caso non parabolico.

Concludiamo col sottolineare che le proiettività e antiproiettività ordinarie di una retta ordinaria sono ∞^3 e vengono rappresentate da quelle collineazioni di G_6 che tengono fisso il piano $p_4=0$.

Segre chiude l'articolo con delle avvertenze finali, in cui tiene a sottolineare che la trattazione di questa geometria duale può essere completata seguendo parallelamente lo sviluppo della geometria ordinaria complessa.

Naturalmente, se il campo dei numeri duali non è parabolico si ottiene qualcosa di molto simile alla geometria delle coppie di punti ordinari, con ulteriore possibilità di estenderla fino ai punti bicomplessi (= coppie ordinarie di punti complessi).

Se il campo è parabolico si avranno profonde differenze poiché

> *Non sempre vengon facilmente le proprietà relative al caso parabolico come limite di quelle del caso generale delle coppie di punti* (Segre 1911, pag. 403),

il che fa pensare che il campo parabolico merita un'investigazione a sé stante e indipendente, e di conseguenza che si può affermare che la geometria duale parabolica ha un'importanza intrinseca e un interesse speciale.

In tal senso, si caricano di notevole significato le ricerche del Predella, anche se egli era giunto alle proiettività paraboliche cercando le immagini geometriche dei numeri non-archimedei (Predella guardava all'ε dei numeri duali parabolici $a+b\varepsilon$ con a,b reali e per i quali vale $\varepsilon^2=0$, come a un infinitesimo rispetto all'unità, poiché tutte le sue potenze maggiori di 1 danno zero).

In conclusione Segre tiene a sottolineare che alcune delle ricerche di cui parla in quest'articolo sono state in parte svolte da Study e da alcuni suoi discepoli come J. Coolidge, E. Davis, H. Beck oltre al già citato Grünwald[403].

[403] Cfr. (Segre 1911, pag. 404 nota 33).

§6.7 Conclusioni

Abbiamo visto come**,** sebbene i numeri complessi e, in generale, gli ipercomplessi siano stati introdotti per ragioni algebriche come semplici estensioni dei numeri reali, le loro applicazioni in geometria sono state fonte di nuove e ulteriori estensioni. La ragione del loro "successo" va quindi ricercata nelle loro applicazioni in geometria e in fisica, applicazioni ed estensioni che andarono ben oltre gli intenti della loro originaria introduzione.

E, come abbiamo visto, Segre fu tra i primi (forse il primo matematico in Europa) a capire la potenza della generalizzazione dello studio della geometria proiettiva su una qualunque algebra.

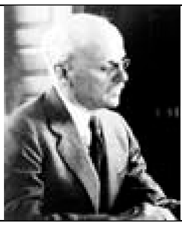
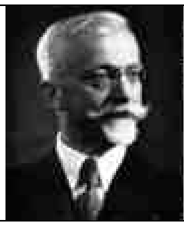
CAPITOLO 7

La Geometria Complessa nel primo Novecento

§7.1 I primi trattati: (Coolidge 1924) e (Cartan 1931)

Nel 1924 veniva pubblicato il primo trattato organico di Geometria Complessa: l'autore, Julian Lowell Coolidge (1873-1954), professore a Harvard, nel 1903/04 aveva trascorso un periodo di formazione in Europa, prima a Torino da Corrado Segre, poi da Eduard Study, passando da Greifswald a Bonn, dove ottiene nel 1904 il dottorato con una dissertazione dal titolo *Die dual-projective Geometrie im elliptischen und sphärischen Raum*.

Qualche anno dopo, precisamente nel 1931, vedeva invece le stampe il primo manuale di Geometria Proiettiva Complessa, nel quale l'autore, Elie Cartan (1869-1951), raccoglieva le lezioni che aveva tenuto nel precedente anno accademico alla Sorbona.

	
Julian Lowell Coolidge	Elie Cartan

Questi due semplici fatti bastano a dimostrare come nel secondo decennio del Novecento vi sia stato un fermento intellettuale attorno alla Geometria Proiettiva Complessa, ritenuta un dominio di ricerca considerevole e indispensabile per la formazione del matematico.

Perché "all'improvviso" tutto questo interesse attorno a questo argomento, se appena trent'anni prima alle ricerche di Corrado Segre sulla Geometria Complessa non era stato tributato alcun riconoscimento? Subito dopo la prima guerra mondiale, in campo matematico le trasformazioni lineari sul campo complesso erano diventate una base importantissima per lo studio di varie branche dell'analisi complessa, come ad esempio quella sulle funzioni automorfe, tant'è vero che nel 1929 Lester R. Ford (1886-1967) pubblicava a New York il suo testo *Automorphic functions* dedicando il primo capitolo alle corrispondenze lineari sul piano complesso e precisando che *the whole theory of automorphic functions depends upon a particolar type of trasformation*[404], per

[404] Cfr. (Ford 1929, pag. 1).

l’appunto quelle lineari fratte a variabile complessa, ovvero la trasformazione $z' = \frac{az+b}{cz+d}$, con *a, b, c*, d costanti e tali che $ad\text{-}bc \neq 0$.

In tal senso, come si è potuto notare, uno degli scopi principali di questa tesi è quello di colmare il deficit di riconoscimento alle ricerche di Segre sulla geometria proiettiva complessa, mettendo in evidenza la risonanza e la diffusione nel mondo accademico (anche se con un *ritardo* di circa 40 anni) che queste ebbero nel periodo tra le due guerre mondiali, soprattutto a opera di Coolidge e Cartan.

Nei successivi paragrafi verranno prima esaminati i due testi su menzionati, e messi in evidenza i molteplici riferimenti all’opera di Segre. Poi, nel prosieguo del capitolo si descriveranno gli argomenti più importanti delle ricerche di Segre e come queste costituirono una base fondamentale nel panorama futuro degli studi in geometria proiettiva complessa e in generale in matematica.

Come già accennato, i maggiori contributi e la maggiore risonanza all’opera di Segre vennero nel periodo tra gli anni venti e trenta del secolo scorso. Coolidge prima e Cartan dopo ne furono le due voci più eminenti, l’uno per quanto riguarda lo studio degli enti complessi e delle loro rappresentazioni reali, l’altro per lo studio precipuo della retta proiettiva complessa e della geometria proiettiva complessa a più dimensioni.

Il presente scritto vuole mettere in evidenza come all’inizio del XX secolo la geometria proiettiva complessa venne introdotta, come venne sviluppata, da chi e perché fu pensata, a partire da cosa e soprattutto dalle ricerche di chi.

§ 7.1.1 J. L. Coolidge

Nel 1921[405] Julian Lowell Coolidge (1873-1954) scriveva il primo trattato di Geometria complessa[406] completo dal punto di vista teorico e scritto col preciso intento di presentare "*a consistent account of the whole subject*" (Coolidge 1924, pp.6-7, prefazione). Coolidge, che nel 1903 era stato allievo di Segre a Torino, sottolinea che

> *Ogni studioso di domini complessi si troverà costretto a riferisi continuamente a ricerche di due mirabili geometri contemporanei, il Professor Corrado Segre di Torino e il Professor Eduard Study di Bonn. I loro nomi appaiono continuamente in questo testo; l'autore ebbe il raro privilegio di essere allievo di entrambi. Geografiche separazioni lo divisero dal primo, l'inesorabile logica della storia ha impedito la comunione col secondo. Ma il suo senso di obbligazione non ha mai vacillato, e si pregia di dedicare il presente lavoro come piccolo riconoscimento di ammirazione e stima* (Coolidge 1924, p.7)[407].

Così, già all'inizio degli anni venti del XX secolo si sentiva l'esigenza di sistemare e coordinare una grande mole di lavori (se non in numero, sicuramente in risultati) che avevano visto la luce nei precedenti 30 o 40 anni e che essenzialmente appartenevano a due grandi scuole, quella italiana facente capo a Segre e quella tedesca in riferimento a Study. E nel testo di Coolidge sono soprattutto questi due nomi (Corrado Segre ed Eduard Study), pionieri in questo campo e a cui il libro è dedicato[408], a riecheggiare incessantemente, nonché i concetti fondamentali di catena e di antiproiettività, basilari nell'opera di Segre. Infatti la teoria sviluppata da Coolidge

---

[405] Si veda la data della prefazione a pag. 7.

[406] *The geometry of the complex domain*, Oxford University Perss, 1924.

[407] *Every student in complex domain will find that he is forced to refer continually to the work of two admirable contemporary geometers, Professor Corrado Segre of Turin, and Professor Eduard Study of Bonn. The names of both appear throughout this book; the author had the rare privilege to be the pupil of each of these masters. Geographical separation has cut him off from the one, the inexorable logic of history has impeded his communion with the other. But his sense of obligation has never wavered, and he begs to offer the present work as a small token of admiration and esteem* (Coolidge 1924, p.7, trad. it. nostra).

[408] Si veda nota precedente.

intreccia la geometria proiettiva sintetica di Segre con le considerazioni geometriche di tipo analitico proprie dell'opera di Study, più interessato alle applicazioni delle trasformazioni hermitiane in analisi complessa.

Il testo di Coolidge consta di otto capitoli. I primi 4 sono dedicati allo studio della geometria in un dominio binario complesso[409] (con un breve accenno a quello reale per poi dedicarsi esclusivamente alla retta e al piano complessi); in particolare il primo capitolo permette di ricostruire lo sviluppo dell'idea di rappresentazione di un punto complesso su un piano attraverso elementi reali in accordo alle classiche rappresentazioni che da Wessel a Gauss si sono succedute passando per Argand, Buèe, Mourey e Warren, e specificando le differenze tra l'idea di Gauss, che ha in mente l'identità tra il punto complesso e il punto (x,y) del piano cartesiano, e gli altri, che pensano invece al vettore uscente dall'origine dello stesso piano; per tale motivo, Coolidge preferisce chiamare la rappresentazione reale del suo dominio binario complesso come piano di Gauss.

Il secondo capitolo vede definiti tutti i principali elementi necessari alla trattazione di quello che chiama "dominio binario" che coincide con la geometria proiettiva sulla retta $P_1(C)$: il punto con le sue coordinate, il birapporto, la catena e le anticollineazioni.

Naturalmente la geometria proiettiva della retta complessa corrisponde alla geometria inversiva reale nel piano di Gauss: quindi un cerchio o una retta nel piano di Gauss corrisponde sulla retta complessa a un sistema di punti, che dipendono da un parametro reale, detta catena (cfr. Coolidge pag. 40). La trasformazione (o affinità) circolare diretta del piano di Gauss corrisponde alla collineazione, la trasformazione circolare indiretta della retta all'anticollineazione.

L'introduzione delle antinvoluzioni, che altro non sono che particolari forme hermitiane, è propedeutica allo studio approfondito delle catene e in generale delle forme iperalgebriche (di cui le catene rappresentano l'esempio a dimensione -complessa- uno).

Si passa quindi alla trattazione della teoria algebrica di gruppi di punti che corrisponde alla teoria delle curve algebriche nel piano di Gauss. Preme ricordare che le

---

[409] Il dominio complesso binario è un sistema di oggetti chiamati *punti* in corrispondenza biunivoca con coppie di coordinate omogenee (x_1, x_2) non entrambe zero (cfr. Coolidge pag. 36).

trasformazioni antiproiettive definite da C. Segre e ampiamente trattate da Coolidge non sono altro che le *forme a variabili coniugate iniziate dal sig. Hermite e proseguite … dai sig.i Picard, Bianchi, Fricke, ecc*. (cfr. Segre 1892, pag. 415) cioè le forme hermitiane, cui il testo di Coolidge non solo dedica ampio spazio[410] ma di cui chiarisce l'intima relazione/parentela con le forme bilineari introdotte da Segre.

A fine capitolo, Coolidge fornisce in doppia colonna la corrispondenza tra gli oggetti del dominio binario complesso che ha appena definito e le loro rappresentazioni reali sul piano di Gauss (cfr. pag. 65), cioè:

Dominio Binario	**Piano di Gauss**
Filo algebrico	Curva algebrica reale
Ordine	Ordine
Corrispondenza puntuale	Corrispondenza polare
Classe	Classe
Catene coniugate tangenti a un punto speciale	Tangenti reali coniugate doppie
Catene osculanti in un punto speciale	Tangenti reali inflessionali

Il terzo e il quarto capitolo trattano dei diversi metodi di rappresentazione dei punti complessi rispettivamente su una curva e su un piano (come coppie di punti); così oltre al metodo di C. Segre e a quello di E. Study, vengono riportati i risultati di Abbé Buée (che fu il primo a darne una rappresentazione in un *luogo* diverso dalla retta (cfr. Coolidge 1924, pag. 68)), Jean Victor Poncelet (1788-1867) (ibidem, pag. 68), Duncan Farquharson Gregory (1813-1844) (ibidem, pag. 70), Carl Georg C. von Staudt (1798-1867), E. N. Laguerre (1834-1886) (ibidem, pag. 73, 85-92) e F. Maximilien Marie (ibidem, pag. 77), accanto a quelli accennati di Walton, Appel, Bjerknes, Paulus, Weierstrass, van Uven, Henschell e Vivanti, F. Klein. In particolare, il contributo di Segre (tratto dall'articolo del 1892) viene proposto (insieme a quello, cronologicamente appena precedente, di Sophus Lie) abbastanza dettagliatamente in un paragrafo a parte, poiché

> *Per quanto utile possa essere tale metodo dal punto di vista dell'analista, come metodo geometrico per la rappresentazione di punti complessi esso è sorpassato dagli altri già visti. Non solo ci*

[410] Cfr. (Coolidge, pagg. 44, 133 e segg.).

sono molti elementi eccezionali, ma noi siamo costretti ad andare al di fuori del nostro S_3 (Coolidge 1924, pag.104)[411].

Il quinto capitolo tratta la teoria algebrica del dominio ternario, ossia il piano proiettivo complesso $P_2(C)$ con particolare riferimento alle catene di rette, alle forme hermitiana (in generale alle trasformazioni lineari e alle anticollineazioni) e alla metrica hermitiana, con forte predominanza delle teorie di Segre (articoli 1889-91 e 1892), cui Coolidge si riallaccia incessantemente, meravigliato anche del tributo[412] datogli da Study nell'articolo del 1905[413] e che riconosce essere uno dei pochi geometri che hanno riconosciuto un alto valore alle ricerche di Segre[414]. La rappresentazione reale viene fatta sulla sfera di Riemann.

Il sesto capitolo riguarda la geometria differenziale del piano ed è più che altro una riscrittura di un suo precedente articolo apparso sui *Transactions of American Mathematical Society*[415], (tant'è vero che pochissimi sono i riferimenti ad altri matematici se non a Segre e a Study).

Il successivo capitolo, settimo, vede lo studio dello spazio tridimensionale complesso come naturale ampliamento del piano complesso. Le rappresentazioni reali di un suo punto complesso non seguono così facilmente come lo erano state quelle per un punto di un piano complesso (cioè in dimensione due), poiché si deve associare a ogni punto un sistema di elementi reali con sei parametri.

Considerazione a parte merita l'ultimo capitolo, l'ottavo, dedicato alla teoria di von Staudt. E se tutta l'opera è sviluppata dal punto di vista analitico-differenziale, in quest'ultimo capito Coolidge tenta la strada della geometria proiettiva sintetica e dell'assiomatizzazione. Infatti von Staudt e alcuni dei suoi successori come J. F. Pfaff (1765-1825), J. Lüroth (1844-1910), O. Stolz (1842-1905) e C. Stephanos (1857-1917) (cfr. Coolidge pag. 219 in nota) non avevano a disposizione i moderni metodi e le teorie

---

[411] *However useful this method may be from the point of view of analyst, as a geometrical method for representing complex points it falls behind others which we have seen. Not only are there many exceptional elements, but we are forced to go outside of our own S_3*" (Coolidge 1924, pag.104, trad. it. nostra).

[412] Cfr. (Coolidge 1924, pag. 132-133 in nota).

[413] (Study 1905).

[414] *Few geometers set a higher value on Segre's work than Study did* (Coolidge 1924, pag. 133, in nota).

[415] Cfr. (Study 1921).

astratte della geometria tipici della fine XIX secolo: essi dovevano fare affidamento molto all'intuizione soprattutto in relazione all'idea di retta (complessa). Scopo quindi dell'ultimo capito del testo di Coolidge è mostrare come la teoria di von Staudt può essere rivisitata e sviluppata logicamente a partire da un ben definito insieme di assiomi. In sintonia con quanto sviluppato anche da Cartan[416], Coolidge ha ben presente che tale geometria ha un forte riscontro in geometria non euclidea; a tal proposito risulta chiaro che i contenuti del suo libro del 1908 sull'argomento gli ritornano molto utili[417]. Coolidge divide l'ottavo capitolo in due parti, una preliminare all'altra: nella prima parte getta le basi assiomatiche della geometria proiettiva dello spazio reale a tre dimensioni, nella seconda, una volta a disposizione un sistema generale di assiomi, può dedurre la teoria degli elementi immaginari di von Staudt e sviluppare la corrispondente metrica proiettiva reale definendo gli elementi complessi a partire dalle involuzioni ellittiche (come von Staudt) e aiutandosi con la teoria staudtiana dei *Würfe* (le tetradi nel tradizionale gergo italiano).

> *Definiamo gli elementi immaginari in geometria pura in termini di elementi reali che sono stati già introdotti* (Coolidge 1924, pag. 219)[418],

così affermava Coolidge, lasciando da parte una possibile seconda via, quella che postula l'esistenza degli elementi immaginari, poiché

> *questo metodo è stato seguito con successo da uno o due recent scrittori che hanno posto insiemi di postulati indipendenti sufficienti a costruire la geometria del dominio complesso* (Coolidge 1924, pag. 219)[419],

primo fra tutti Mario Pieri.

La definizione di punto immaginario segue quella di von Staudt, e non quella di Corrado Segre di coppia di elementi immaginari (Segre C. 1888) non separata,

[416] Vedremo che Cartan introduce alle geometrie non; in particolare egli studia tali geometrie non come subordinate alla geometria proiettiva complessa (cfr. (Cartan 1931, cap. III)).

[417] (Study 1909).

[418] *We … define imaginary elements in pure geometry in terms of real elements which have been already admitted* (Coolidge 1924, pag. 219, trad. it. nostra).

[419] *this method has been successfully followed by one or two recent writers who have laid down sets of independent postulates sufficient to build up the geometry of the complex domain* (Coolidge 1924, pag. 219, trad. it. nostra).

identificando un punto immaginario con l'involuzione ellittica comprensiva di verso; la catena, in accordo alla definizione originale di von Staudt, è il sistema di ∞^1 punti di una retta che formano birapporti reali con tre punti dati della retta; la coordinatizzazione della retta viene fatta attraverso la definizione delle tetradi (in tedesco *Würfe*, in inglese *throw*). Coolidge può a questo punto concludere il suo volume affermando che

> *Il nostro sistema di punti complessi e valori complessi è fornito in accordo alle usuali espressioni analitiche* (Coolidge 1924, pag. 242)[420].

Come si è potuto capire, tutto il materiale è opportunamente ordinato, lo stile chiaro e caratteristico, le note storiche frequenti e mai banali, molti dei suoi risultati ottenuti altrove intrecciati alle teorie qui esposte. Il libro rende agevole lo studio della geometria complessa, e rende molti dei suoi risultati meritevoli di un ulteriore sviluppo in un campo ancora non del tutto esaurito per l'epoca.

---

[420] *Our system of complex points and complex values is thus brought in accord with the usual analytic expressions*" (Coolidge 1924, pag. 242, trad. it. nostra).

§ 7.1.2 Elie Cartan

Qualche anno dopo la pubblicazione del testo di Coolidge appare anche il volume (la prima edizione è del 1931)[421] di Elie Cartan (1869-1951) nel quale egli raccoglie le sue lezioni tenute alla Sorbona durante il semestre invernale del precedente anno accademico; tale fatto dimostra come questi argomenti non solo erano oggetto di studio ma erano ormai entrati nella pratica didattica universitaria. Comunque Cartan conosceva certamente bene l'opera di Segre avendo tradotto e rielaborato l'articolo di Fano apparso sull'*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* [422].

Cartan ribadisce l'importanza della Geometria proiettiva complessa come disciplina autonoma e quale ponte-congiunzione con la Geometria non euclidea riemanniana tant'è che egli afferma:

> *In realtà, la geometria proiettiva complessa a un numero qualunque di dimensioni ammette anche un'immagine fedele in uno spazio riemanniano reale, che io chiamo lo spazio riemanniano fondamentale della geometria proiettiva complessa* (Cartan 1931, p. VI)[423].

In questo quadro assumono grande importanza i lavori di C. Segre, soprattutto quello del 1889-90 e quello del 1892 poiché:

> *… la geometria proiettiva complessa, considerata come una disciplina autonoma, si può far ben risalire a von Staudt a cui è dovuta l'introduzione della nozione di catena, si è principalmente sviluppata grazie ai lavori di Juel e soprattutto di C. Segre. Quest'ultimo geometra ha mostrato l'importanza delle trasformazioni antiproiettive (antiomografie, anticorrelazioni)*

[421] (Cartan 1931).

[422] Si veda (Fano 1907) e (Cartan 1915).

[423] *En réalitè, la géométrie projective complexe à un nombre quelconque de dimensions admet aussi une image fidèle dans un espace riemannien réel, que j'appelle l'espace riemannien fondamental de la géométrie projective complexe* (Cartan 1931, p. VI, trad. it. nostra).

> *vicino alle trasformazioni proiettive, le sole che si consideravano prima* (Cartan 1931, pag. V) [424].

Vale la pena quindi ricordare che i lavori di Segre precedono quello di Cartan di più di 30 anni. Dal punto di vista storiografico l'interesse e la ripresa degli studi di Segre coincide con l'emergere e l'affermarsi sia di una geometria complessa più generale di quella sviluppata sui reali sia dell'idea che la Geometria poteva essere sviluppata su un campo diverso da quello dei reali: tale fatto assume un grande interesse e come abbiamo visto, Segre stesso passa addirittura dai complessi ai bicomplessi e ai duali. D'altro canto, il grande passo avanti compiuto dalla geometria differenziale, in particolare gli studi dello stesso Cartan, aveva portato il matematico francese a guardare agli sviluppi di questa geometria complessa e ai suoi rapporti con le geometrie non euclidee; infatti:

> *La teoria delle funzioni kleineiane mostra in maniera analoga che la geometria non euclidea a tre dimensioni di Lobatchewsky è immagine fedele della geometria proiettiva della retta complessa. Finora questa identità di struttura in queste due geometrie era stata considerata una curiosità matematica, di grande interesse senza dubbio, ma isolata all'interno della Geometria* (Cartan 1931, p. VI)[425].

D'altronde, il linguaggio delle forme hermitiane, come notato da Segre e poi da G. Fubini, forniva per altro il substrato matematico per esprimere le idee di Segre in una forma più concisa e moderna.

Il testo di Cartan è diviso in due parti: la prima riguarda la retta proiettiva complessa, la seconda invece vede l'applicazione delle teorie alla geometria proiettiva complessa a più dimensioni. Ruolo importante nella prima parte è rivestito dallo spazio

---

[424] *…la géométrie projective complexe, considérée comme une discipline autonome, bien qu'on puisse la faire remonter à von Staudt à qui est due l'introduction de la notion de chaîne, s'est principalement développée à la suite des travaux de Juel et surtout de C. Segre. Ce dernier géomètre a montré l'importance des transformations antiprojectives (antihomographies, anticorrélations) à côté des transformations projectives, qu'on avant seules considérées auparavant* (Cartan 1931, pag. V).

[425] *La théorie des fonctions kleinéennes montre d'une manière analogue que la géométrie non euclidienne à trois dimensions de Lobatchewsky est une image fidèle de la géométrie projective de la droite complexe. Jusqu'à présent, cette identité de structure entre ces deux géométries avait été regardée comme une curiosité mathématique, d'un très grand intérêt sans doute, mais isolé dans l'ensemble de la Géométrie* (Cartan 1931, p. VI, trad. it. nostra).

riemanniano delle antinvoluzioni di seconda specie. Ma è nella seconda parte che Cartan studia ed elenca le geometrie subordinate alla geometria proiettiva complessa; ed è nel terzo capitolo della seconda parte che Cartan classifica le geometrie a seconda del gruppo di trasformazioni adottato e dei loro invarianti: si ottengono così come sottogeometrie la geometria complessa non euclidea, quella di un complesso lineare, la geometria proiettiva reale, quella iperbolica reale a cinque dimensioni, quella delle sfere orientate reali, quella iperbolica hermitiana e quella a più assoluti (= invarianti), mentre alla geometria ellittica hermitiana è dedicato tutto il successivo capitolo quarto. Nel quinto capitolo Cartan esamina le rappresentazioni reali dello spazio proiettivo complesso, in cui le varietà di Segre si ottengono come casi particolari[426].

[426] Cfr. (Cartan, pagg. 313-314).

CAPITOLO 8

Conclusioni

Tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX vi è in Italia, anche a seguito degli studi di Klein e della scuola tedesca, una riscoperta delle opere di von Staudt a opera di Corrado Segre, che soprattutto coi suoi tre scritti esaminati, rilancia l'idea di una geometria sintetica proiettiva complessa definita (sulla scia del programma di Erlangen) a partire dalle sue trasformazioni[427], propedeutiche alla definizione di nuovi enti geometrici. L'intento di voler rendere di più immediata comprensione i *Beiträge* di von Staudt si evince già nell'articolo del 1888: se aver separato le coppie di elementi immaginari rende la teoria più pesante, l'intuizione di Segre di non separarle porterà una maggiore trasparenza e una minore complicazione, che renderà più agevole l'introduzione di nuovi enti geometrici e nuove trasformazioni (le antiproiettività) che in von Staudt rimangono un po' nascoste.

Quindi, ricapitolando, coi tre articoli qui esaminati Segre presenta tre diversi livelli di investigazione: con l'articolo del 1888 "toglie" la difficoltà intrinseca dei *Beiträge*; con le tre note edite tra il 1889 e il 1891 generalizza la teoria per uno spazio S_n qualunque; con la memoria del 1892 pubblicata sui *Mathematische Annalen* porta avanti la teoria fino alla definizione dei sistemi di numeri ipercomplessi, le geometrie che ne scaturiscono e i relativi gruppi di trasformazioni.

Tutto ciò poiché Segre, come abbiamo già affermato, ha in mente un programma di studi che lo porterà ben oltre la semplice geometria dei cerchi e delle sfere[428]: lo studio di *altre* geometrie complesse e dei suoi enti.

In effetti, se oggi nessuno pone in dubbio l'importanza delle Geometria Proiettiva Complessa nel panorama degli studi matematici, bisogna ringraziare Corrado Segre. Il suo contributo alla Geometria Proiettiva Complessa, il quale è il cuore pulsante di questa tesi, non è da ritenersi limitato alla trattazione sistematica dei suoi argomenti, quanto piuttosto è stato quello di aver saputo individuare il nocciolo della questione, cioè le cose su cui era importante porre attenzione per la ricerca. L'indirizzo quindi dato da Segre, al di là dell'importante sistemazione fondazionale della

---

[427] Le antiproiettività. È naturale che Segre identifichi l'immagine di un'antinvoluzione sul piano o sulla sfera con un'ordinaria inversione (Segre 1892, pag. 430).

[428] Si veda il quaderno 36 dei manoscritti di Corrado Segre proprio dal titolo *Geometria dei cerchi e delle sfere* (1922-23). I Quaderni Manoscritti di Corrado Segre, a cura di Livia Giacardi; per informazioni si consulti la pagina web:
http://www.dm.unito.it/collanacdrom/segre/segre.html

Geometria Proiettiva Complessa (p.e. definizione di coppia di elementi immaginari, definizione di trasformazione antiproiettiva, studio degli enti iperalgebrici), sta nell'aver intrapreso lo studio delle rappresentazioni reali degli enti immaginari e lo studio generalizzato delle Geometria ottenuto simulando (e iterando quindi) il passaggio da R a C, partendo da C.

In estrema sintesi ciò che Segre fa è:

1. reinterpreta (sulla base di quanto fatto da von Staudt ma in forma più chiara e precisa) la geometria di Möbius, e quindi quella di von Staudt, in termini di geometria proiettiva sul campo complesso;
2. estende le considerazioni di Möbius limitate al piano e allo spazio circa elementi e trasformazioni ai casi iperspaziali;
3. suggerisce le rappresentazioni reali degli enti immaginari che diventano esse stesse oggetto di studio, come nel caso della varietà che ancora oggi porta il nome di Segre;
4. Crea nuove geometrie ipercomplesse, che stanno all'origine dello studio di nuove geometrie su domini diversi da quello reale.

In riferimento al primo punto Segre comprende che il nocciolo della questione sta nell'introduzione delle trasformazioni antilineari e delle forme hermitiane. Un vocabolario utile per il lettore moderno potrebbe essere il seguente (ci limitiamo alla retta proiettiva complessa e quindi al piano di Möbius):

- quello che Staudt chiama catena viene dimostrato essere l'insieme dei vettori isotropi di una forma hermitiana (e quindi una circonferenza reale o immaginaria);
- le proiettività di Segre diventano le trasformazioni di Möbius (dette anche circolari);
- le antinvoluzioni prive di punti uniti di Segre di un qualsiasi S_n sono le inversioni (rispetto a cerchi reali o immaginari) se pensate nel piano;
- il piano di Argand-Gauss diventa in Segre *un* piano reale σ con il centro C immaginario[429];
- la sfera di Riemann altro non è che *una* quadrica reale a punti ellittici di Segre[430].

---

[429] Si veda (Segre 1892, pag. 416).

[430] (Ibidem, pag.417).

Occorre anche sottolineare che questa impostazione permette di stabilire un ponte tra la geometria proiettiva (e quindi la geometria algebrica) e lo studio delle funzioni automorfe e modulari e le sue applicazioni alla teoria dei numeri. Questa impostazione estremamente moderna non venne colta dai contemporanei, anche se Segre gli dedica una lunga digressione a piè di pagina all'interno della nota III dell'articolo del 1889-91[431].

In altre parole, più dell'impostazione relativa allo studio degli enti iperalgebrici la direzione nella quale le intuizioni di Segre mostrano tutta la loro importanza fu proprio quella dello studio dell'analisi complessa (si veda a tal proposito i primi capitoli del fortunato testo di Ford). Infatti gli studi di Segre vengono ripresi nell'immediato dopo guerra[432] in un contesto diverso da quello in cui Segre forse aveva immaginato ambientate le sue ricerche (si veda Coolidge, Cartan, Ford):

- per esempio la base concettuale per gli studi sulle funzioni automorfe, p.e. nell'articolo del 1951 di H. Kestelman[433] in cui si parla esplicitamente di funzione di Segre come automorfismo del campo dei numeri complessi, le funzioni hermitiane, la geometria differenziale;
- in anni molto più recenti, gli studi di Segre sui punti bicomplessi sono stati ripresi da alcuni matematici soprattutto della scuola americana per sviluppare la grafica 3D di particolari frattali (dinamiche bicomplesse), nuovi sistemi di numeri come gli 2^n-oni (di cui i quaternioni (2^2) e gli ottonioni (2^3) sono casi particolari), i gruppi di Lie o gli spazi e le funzioni multicomplessi[434].

Nel 1925 L. W. Dowling, professore all'Università del Wisconsin, in un suo articolo[435] parla ufficialmente di un programma di Segre e lo affianca per importanza storico-fondazionale nel campo della geometria a quelli di Poncelet, Steiner, von Staudt e Klein. Senza dubbio Segre è da ricordare tra i padri fondatori della geometria algebrica in Italia per le sue ricerche, sicuramente, ma soprattutto per l'indirizzo che ha saputo dare ai suoi studenti e in generale per la sua geniale intuizione geometrica che lo

---

[431] Cfr. (Segre 1889-91, pag. 606).

[432] Prima guerra mondiale.

[433] Vedi anche (Kestelman 1951).

[434] Si veda (Price 1991).

[435] (Dowling 1925).

porta per primo in Europa a utilizzare le teorie del 1872 di Felix Klein e ad affrontare lo studio della geometria per invarianti (p.e. il birapporto).

Lo stile tipico di Segre, i cui lavori restano molto discorsivi pur essendo puntuali e concettualmente completi, non prevede concettualizzazioni di tipo assiomatico. Fu Mario Pieri a dare una solida base assiomatica alla geometria complessa, in due articoli uno del 1904-05 e l’altro del 1912.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA PRIMARIA

AA.VV., *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaft, mit Einschluss ihrer Anwendung* (1898/1904-1904/35), Leipzig, G. B. Teubner.

Amodeo F., Fasci di omografie binarie e rappresentazione geometrica degli elementi immaginari, *Giornale di Matematica*, 26, 1888, pp. 363-368.

Argand J.-R., *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, 1806, Paris. Seconda edizione preceduta da una prefazione di J. Hoüel e seguita da un'appendice contenente gli estratti degli *Annales de Gergonne* relativi alla questione degli immaginari, 1874, Gauthier-Villars, Paris.

Argand J.-R., Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques, *AMPA di Gergonne*, t. IV, 1813-14, pp. 133-147.

August F., *Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie*, Programm der Friedrichsrealschule zu Berlin, 1872.

Bellavitis G., Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica (Calcolo delle equipollenze), *Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto*, 1835, t. V, pp. 244-259.

Bellavitis G., Teoria delle figure inverse, e loro uso nella Geometria elementare, *Annali delle Scienze del Regno Lombardo –Veneto*, Padova, 1836, t . VI, pp. 126-141

Bellavitis G., Memoria sul metodo delle equipollenze, *Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto*, 7, 1837, p. 243-261; idem, 8, 1838, pp. 17-37, 85-121.

Bellavitis G., Saggio di geometria derivata, *Atti dell'Accademia di Padova*, 1838, vol. IV.

Bellavitis G., Saggio sull'algebra degli immaginari, *Memorie del R.Ist.Veneto di Scienze*, *Lettere ed Arti. Venezia*, vol. IV, 1852, pp.243-344..

Bellavitis G., Principi della geometria di derivazione, *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche (di Tortolini)*, 1854, t. 5, pp. 241-256.

Bellavitis G., Calcolo dei quaternioni di W. R. Hamilton e sua relazione col metodo delle equipollenze, *Mem. Soc. Ital.*, 1858, 1, pp. 126-186.

Beltrami E., Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche, *Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, serie II, 1870, t. IX, pp. 607-657. Anche in *Opere Matematiche*, 1904, t. II, Hoepli Milano, pp. 129- 187.

Berzolari L., *Corrado Segre*, "R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Rendiconti", s. 2, 57, (1924), p. 528-532.

Bombelli, *Algebra*, 1572-79, Bologna.

Buchheim A., A memoir on biquaternions, *American Journal of Math.*, 1885, vol. 7, n.4, pp. 294-326.

Buée A., Mémoire sur les quantités imaginaires, *Philosophical Transactions of the Royale Society of London*, vol. 96,1806, pp. 23-88.

Cardano G., *Ars Magna*, 1545, Petrejus, Nürnberg.

Cardano G., *Opus novum de proportionibus,* 1570, Basel.

Carnot L., *Géométrie de position*, 1803, Duprat, Paris.

Cartan E., La théorie des groupes continus et la géométrie, 1915, in Encyclop. Sc. Math., édition française d'après l'article allemand de G. Fano, impression arrêtée par la guerre en 1915. Anche in *Oevres complètes,* partie III, vol. 2, pp. 1727-1861.

Cartan E., *Leçons sur la géométrie projective complexe*, 1931, Paris, Gauthier-Villars.

Cauchy A.-L., *Course d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique,* 1821, Paris.

Cauchy A.-L., *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématiques,* 1844, t. III, Bachelier Imprimeur, Paris.

Cauchy A.-L., *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématiques,* 1847, t. IV, Bachelier Imprimeur, Paris.

Clebsch A., Űber das simultane Formensystem einer quadratischen und einer cubischen binären Form, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 68, 1868, pagg. 162-169.

Clifford W., Preliminary Sketch of Biquaternions, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1873,vol. IV, pagg. 381-395. Anche in *Mathematical Papers,* Paper XX, pagg. 183-200, Edited by Robert Tucker; with an introduction by H. J. S. Smith; London, Macmillan, 1882.

Coolidge J. L., *A Treatise on the Circle and the Sphere*, 1916, Chealsea Publishing company, Bronx, New York.

Coolidge J. L., *The geometry of complex domain*, 1924, Oxford University Press.

Cremona L., Beiträge zur Geometrie der Lage von Dr. G. K. C. V. Staudt, Annali di Matematica pura ed applicata, 1858, T. 1, pp. 125-128.

Cremona L., *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane,* 1862, Bologna, Tipi Gamberini e Parmeggiani.

Dandelin G. P, Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique, *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles,* t. II (1822), pp. 171-202.

Dandelin G. P, Sur le intersections de la sphère et d'un cône du second degré *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, t. IV, 1827a, pp. 1-10.

Dandelin G. P., Mémoire sur l'emploi des projections stéréographiques en géométrie, *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles,* t. IV, 1827b, pp. 11-48.

Darboux M. G., Sur le théorème fondamental de la géométrie projective (Extrait d'une lettre à M. Klein), *Mathematische Annalen,* 1880, 17, pp. 55-61.

Darboux M.G., A survey of the development of geometric methods –Address delivered before the section of geometry of the international congress of Arts and

Science, St. Louis, September 1904, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 11 (10), 1905, pp. 517-543.

Dedekind R., Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen, *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*, 1885, 4, pp. 141-159.

Dedekind R., Erläuterungen zur Theorie der sogen. Allgemeinen complexen Größen, *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*, 1887, 1, pp. 1-7.

Descartes R., *La Géométrie*, 1637, Gallice edita.

Euler L., *Introductio in analysin infinito rum*, 1748, Lousanne.

Euler L., *Institutionum calculi integralis*, 1794, Petropoli.

Euler L., 1796, *Introduction a l'analyse infinitésimale*, Barrois, Paris (prima edizione francese di *Introductio in analysin infinitorum*, Bosquet, Lausanne, 1748).

Euler L., Archivio completo reperibile online alla web site:
http://www.math.dartmouth.edu/~euler/tour/tour_08.html

Fano G., Considerazioni comparative su ricerche geometriche recenti, (traduzione in italiano del "Erlangen's Program" di F. Klein), *Ann. di Mat. pura ed applicata*, 1890, 2, 17, pp. 307-313.

Fano G., Kontinuerliche geometriche Gruppen. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip, 1097, in *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, vol. III A, B 4a, pp. 289-388.

Français J. F., Philosophie mathématiques. Sur la théorie des imaginaires. Extrait d'une lettre adressée au rédacteur des Annales, *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1813-1814, IV, pp. 364-367.

Français J. F., Nouveaux principes de Géométrie de position, et interpretation géométriqe des symboles imaginaires, *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, V, 1813-14, p.61-71.

Freudenthal H., Strambach K., Schließungssätze und Projektivitäten in der Möbius- und Laguerregeometrie, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 143, pp. 213-234.

Fubini G., Sulle metriche definite da una forma hermitiana, *Atti dell'Istituto Veneto di Scienze*, *Lettere e Arti*, 63, 1904, pagg. 501-513.

Gauss C. F., *Über das Wesen und die Definition der Functionen*, Gauss an Bessel 18.12.1811, Werke, Bd. 8, pp. 90-92

Gauss C. F., Anzeige zur Theoria residuorum biquandraticorum, Commentatio seconda, 1831, *Werke*, t. II, p. 169-178.

Gauss C. F., *Werke*, 1866, Georg Olms Verlag.

Giacomini A., Sulla corrispondenza fra la geometria conforme di S_4 e la geometria proiettiva dello spazio ordinario, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 1[a] serie, 1899, T. 8, pp. 1-33.

Gormley P.G., Stereographic projection and the linear fractional group of transformations of quaternions, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, Section A **51**, 1947, pp. 67-85.

Grassmann H. G., *Die Ausdehnungslehre, vollstandig und in strenger Form bearbeitet*, 1862, Berlin.

Grünwald J., Über dualen Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie, *Monatshefte für Mathematik und Phisyk*, 17, 1906, pp. 81-136.

Hankel H., *Theorie der compexen Zahlensysteme*, 1867, Leipzig.

Hermite C., Sur la théorie des formes quadratiques. Premier mémoire, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1854, Vol. 47, pp. 313-342.

Hermite C., Sur la théorie des formes quadratiques. Second mémoire, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1854, Vol. 47, pp. 343-368.

Hölder O., Bemerkung zu der Mittheilung des Herrn Weierstraß: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten, *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*, 1886, 7, pp. 241-244.

Hölder O., Bemerkung zu der Mittheilung des Herrn Weierstraß, Zur Theorie der aus n Haupteiheiten, *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*, 1886, vol. 7, pp. 241-244.

Juel C. 1885, Bidrag til den imaginaere Linies og den imaginaere Plans Geometri, *Kjöbenhavn. W. Prior.*, VIII, 1885, p. 101.

Juel C., Űber eigene Grundgebilde der projectiven Geometrie, *Acta Mathematica*, 1890-91, vol. XIV, pp. 1-30.

Juel C., Über einige Grundgebilde der projectiven Geometire, *Acta Matematica*, vol. XIV, 1890-91, pp. 1-30.

de Kerékjártó B., Sur le groupe des homographies et des antihomographies d'une variable complexe, *Commentarii mathematici Helvetici*, 1940-41, Vol. 13, pp. 68-82.

Klein F., Űber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen, *Mathematische Annalen*, 1871, 4, pp. 346-358.

Klein F., *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, 1872, Andreas Deichert Verlag, Erlangen. Pubblicato poi con aggiunte in *Mathematische Annalen*, 43, 1893, pp. 63-100. Anche in *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Vol. 1, Springer, Berlin, 1921, pp. 460-497.

Klein F., Zur Interpretation der komplexen Elemente in der Geometrie, *Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaftlichen zu Göttingen*, 1872a, pp. 242-245. Anche in *Math. Ann*. t. 22, 1883, pp. 402-405.

Klein F., Zweiten Aufsatze über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie“, *Mathematische Annalen*, Bd. VI, 1873a, p. 112.

Klein F., Nachtrag zu dem „zweiten Aufsatze über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie“, *Mathematische Annalen*, Bd. VII, 1873b, pp. 531-537.

Klein F., Zur Interpretation der komplexen Elemente in der Geometrie, *Mathematische Annalen*, 1883, 22, pp. 402-405.

Klein F., *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, 1926, Verlag von Julius Springer, Berlin.

Klein F., *Il Programma di Erlangen*, a cura di E. Agazzi e A. Bernardo, 1998, La Scuola, Brescia.

Kötter E., *Die Entwickelung der synthetischen Geometrie von Monge bis von Staudt*, 1901, Teubner, Leipzig.

Laguerre E. N., 1870, *Sur l'emploi des imaginaires en Géométrie,* Nouvelles Annales de Mathématiques, serie 2, IX, 1870, pp. 163-175, pp. 241-254.

Laguerre E. N., 1870, *Sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace,* Bulletin de la Société philomathique, 1870, pp. 109-123.

Laguerre E. N., 1872, *Sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace,* Nouvelles Annales de Mathématiques 2, XI, 1872, pp.14-21, pp.108-118, pp. 241-254.

Laguerre E. N., Mémoire sur la géométrie de la sphère, *Bulletin de la S. M. de France,* tome 1, 1872-73, pp. 241-248

Laguerre E. N., *Oeuvres de Laguerre*, Tome II, Géométrie, publ. sous les auspices de l'Académie des sciences; par MM. Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché, Gauthier-Villars & fils (1898-1905), pp. 89-97, 98-108, 109-123

Leibniz G. W., Observatio, *Acta eruditorum*, 1712, Leipzig, pp. 167-169.

Lie S., Űber eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* vol. LXX, 1869, pp. 346-353.

Lie S. 1880, Theorie der Transformationsgruppe, *Math. Ann*., 1880, XVI, pp. 441-528

Lie S. e Engel F., *Theorie der Transformationsgruppen*, III volume, 1893, Leipzig.

Loria G. *Scritti, Conferenze, Discorsi*, Cedam, Padova 1937.

Lüroth J., Das Imäginare in Geometrie und das Rechnung mit Würfen (erste Abhandlung), *Mathematische Annalen,*1875 (8), pp. 145-214.

Lüroth J., Das Imäginare in Geometrie und das Rechnung mit Würfen (zweite Abhandlung), *Mathematische Annalen,*1877 (11), pp. 84-110.

Lüroth J., Űber cyclisch-projectivische Punktgruppen in der Ebene und im Raume, *Mathematische Annalen*, Vol. 13, 1878, pp. 305-319.

Lützen J., Julius Petersen, Karl Weierstrass, Hermann Amandus Schwartz and Richard Dedekind on hypercomplex numbers, in *Around Caspar Wessel and the geometric representation of complex numbers*, Copenhagen 2001, Matematisk-fysiske meddelelser, Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, 46:2, pp. 223-254.

Lützen J., a cura di, *Around Caspar Wessel and the geometric representation of complex numbers*, Copenhagen 2001, Matematisk-fysiske meddelelser, Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, 46:2.

Magnus L. J., Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1832, 8, pp. 51-63.

Mehmke R., Zur Bestimmung des Punktepaares, das im Sinne von Möbius zwei gegebene Punktepaare der Ebene harmonisch trennt, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1834, 37, pp.333-335.

Möbius A. F., D*er Barycentrische Calcul*, 1827, Barth Verlag, Leipzig.

Möbius A. F., Über eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen, *Berichte über die Verhandlungen der Koenigl. Saechs. Gesellschaft d. Wissenschaften, math.-phys. Klasse*, 1852, Bd. 4, pp. 41-54. Anche in *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (von Crelle), Bd. 52, 1856, pp. 229-242.

Möbius A. F., Über eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren, *Berichte über die Verhandlungen der Koenigl. Saechs. Gesellschaft d. Wissenschaften, math.-phys. Klasse*, Bd. 5, 1853a, pp. 14-24. Anche in *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (von Crelle), Bd. 52, 1856, pp. 218-228

Möbius A. F., Ű̈ber die Involutionen von Punten in einer Ebenen, *Berichte über die Verhandlungen der Koenigl. Saechs. Gesellschaft d. Wissenschaften, math.-phys. Klasse*, Bd. 5, 1853b, pp. 176-190

Möbius A. F., Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung, *Berichte über die Verhandlungen der Koenigl. Saechs. Gesellschaft d. Wissenschaften, math.-phys. Klasse*, Bd. II, 1855, pp. 529-595.

Möbius A. F., Ű̈ber imaginaere Kreise, *Berichte über die Verhandlungen der König. Sächs. Der Gesellschaft der Wissenschaften –math. und phys. Klasse*, 1857, 9, pp. 35-48.

Petersen J., Ű̈ber n-Dimensionale complexe Zahlen, *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*, 1887, 17, pp. 489-502.

Pieri M., I principi di Geometria di Posizione composti in sistema logico-deduttivo, *Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino*, 2, t. XLVIII, 1897.

Pieri M., Nuovi Principi di Geometria Projettiva Complessa, *Mem. d. Regia Acc. d. Scienze di Torino*, 2, 55, 1904-05, pp. 189-235.

Pieri M., Breve aggiunta alla memoria Nuovi principii di geometria proiettiva complessa, *Atti delle R. Acc. delle Sc. di Torino*,41, 1905-06, pp. 339-342.

Pieri M., Nuovi Principi di Geometria delle Inversioni, *Giornale di Matematiche*, 49, 1911, pp. 49-96; 50, 1912, pp. 106-140.

Predella P., Saggio di Geometria non-Archimedea, *Giornale di Matematiche di Battaglini*, vol. 49, 1911, pp. 281-299.

Plücker J., Analytish-geometrichen Aphorismen, *Crelle's Journal*, 1833, Bd. 10, pp. 217-227, 293-299; 1834, Bd. 11, pp. 11-32, 117-130, 219-225, 356-360.

Quetelet A., Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques, suivi de différentes applications a la théorie des projections stéréographiques, *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles,* t. IV, 1827, pp. 79-114.

Ramorino A., Gli elementi imaginari nella Geometria, *Giornale di Matematica*, XXXV, 1897, pp. 242-258; XXXVI, 1898, pp. 317-345.

Reye T., *Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsystemen*, 1879, Leipzig.

Reye T., *Geometrie der Lage*, 1886, Baumgärteners, Leipzig.

Reye T., Syntetische Geometrie im Altertum u. Neuzeit, *Jahrber. Deutsc. math-Vereinigung*, 1902, t.11, pp. 343-353.

Sannia A., *Lezioni di Geometria proiettiva,* 1888, Napoli Pellerano.

Scheffers G., Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen, *Mathematische Annalen*, 1890, 39, pp. 293-390.

Schur F., Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen, *Mathematische Annalen*, 1889, 33, pp. 49-60.

Schwarz H. A., Bemerkung zu der in No. 10 dieser Nachrichten abgedruckten Mittheilung des Herrn Weirstrass, *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*, 1884, vol. 13, pp. 516-519.

Segre C., Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta, *Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino* , (2), 37, 1885, pp. 395-425. Anche in Opere, 4, 1963, pp.1-17.

Segre C., Le coppie di elementi immaginari nella Geometria Proiettiva Sintetica, *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino,* serie II, XXXVIII, 1888, pp.3-24.

Segre C., Un nuovo campo di ricerche geometriche, *Atti d. Reggia Acc. d. Scienze di Torino,* XXV, 1889-90 Nota I pp.276-301, 1889-91 Nota II pp. 430-457 e III pp.592-612; XXVI, 1890-91 Nota IV pp.35-71.

Segre C., *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, Rendiconti del Circolo Matematici di Palermo, t. 5, 1891, pp. 192-204

Segre C., Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici, *Mathematische Annalen*, 40, 1892, pp. 413-467.

Segre C., Necrologio [Sophius Lie], *Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche,* a cura di G Loria II, 1899a, pp. 68-71.

Segre C., Sophus Lie, *Atti R. Acc. Sci. Torino*, XXXIV, 1899b, pp. 363-366.

Segre C., La Geometrie d'oggidì e i suo legami coll'Analisi (Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses", in Heidelherg, vom 8. bis 13. August 1904, pp. 109-120), in *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* tomo XIX, 1905, pp. 81-93.

Segre C., Le Geometrie projettive nei campi di numeri duali, *Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino*, XLVII, 1911-12, pp. 308-326, 384-405.

Segre C., Mehrdimensionale Räume, in *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* III.2 7, Leipzig, Teubner, 1921, pp. 769-972.

Segre C., *Opere*, Ed. Cremonese, Roma, 1957-1963, 4 voll..

Severi F., Geometria Proiettiva, 1921(I ed.), Padova.

Sforza G., Contributo alla Geometria Complessa, *Giornale di Matematiche,* vol. XXIX, 1891, pp. 159-187.

Siebeck P., Űber die graphische Darstellung imaginärer Funktionen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1858, 55, pp. 221-253.

Schlote K.-H., Hypercomplex numbers in the work of Caspar Wessel and Hermann Günter Grassmann: Are there any similarities?, in *Around Caspar Wessel and the geometric representation of complex numbers,* Copenhagen 2001, Matematisk-fysiske meddelelser, Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, 46:2, pp.205-221.

Smith H. J. S., Mémoire sur quelques problémes cubiques et biquadratiques, et Appendice, *Annali di Matematica*, serie II, vol. 3, 1869, pag. 112-116, 218-243.

Spampinato N., Sulla rappresentazione delle funzioni di variabile bicomplessa totalmente derivabili, *Annali di Matematica pure ad applicata*, 1936, XIV, pp. 305-325.

von Staudt G. K. C., *Geometrie der Lage,* 1847, Nürnberg Bauer & Raspe.

von Staudt G. K. C., *Geometria di Posizione,* trad. it. a cura del dott. Mario Pieri, 1889, Torino Fratelli Bocca Editori.

von Staudt G.K.C., *Beiträge* zur *Geometrie der Lage,* 1856-57-60, Korn'schen Buchhandlung, Nürnberg.

Steiner J., *Einige geometrische Betrachtungen, Crelle's Journal*, 1826, I, pp. 161-185.

Steiner J., Fortsetzung der geometrischen Betrachtungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1826, 1, pp. 252-288.

Stephanos C., Sur la théorie des quaternions, *Mathematische Annalen*, 1883, Bd. XXII, pagg. 589-592.

Stephanos C., Sur la définition géométrique des points imaginaires, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Serie 2, vol. VII, 1883, pp. 204-213.

Stolz O., Die geometrische Bedeutung der complexen Elementen in der analytischen Geometrie, *Mathematische Annalen*, 1871, 4, pp. 416-441.

Stolz O., *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik,* 1886, Teubner, Leipzig.

Study E., Über Systeme von complexen Zahlen, *Gott. Nachr.*, 1889 (9), pp. 282-268.

Study E., Von den Bewegungen und Umlegungen (I. und II. Abhandlung), *Math. Ann.,* 1891, 39, pp. 442-566.

Study E., *Theorie der gemeinen und höheren complexen Größen;* in Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, 1898, Bd. I A 4, pp. 147-183.

Study E., Die Geometrie der Dynamen, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, (8) 1900, pp. 204-216.

Study E., Ein neuer Zweig der Geometrie, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. XI, 1902a, pp. 97-123.

Study E., Über Nicht-Euklidische und Linien-Geometrie, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1902b, 11, pp. 313-340.

Study E., Nachtrag zu dem Aufsatz: Über Nicht-Euklidische und Linien-Geometrie, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1902c, 11, pp. 340-342.

Study E., *Geometrie der Dynamen*, 1903, Verlag und Druck von B.G.Teubner, Leipzig.

Study E., *Die dual-projective Geometrie im elliptischen und sphärischen Raum*, 1904, Druck von J. Abel, Greifswald.

Study E., Kürzester Wege im komplexen Gebiet, *Mathematische Annalen*, Bd. 60, 1905, pp. 321-378.

Study E., *The elements of non-Euclidean geometry*, 1909, Oxford, At the Clarendon press.

Study E., Differential Geometry of the Complex Plane, *Transactions of American Mathematical society*, vol. XXII, 1921.

Sturm R., Űber die v. Staudt'schen Würfe, *Mathematische Annalen,*1875, Bd. IX, pp. 333-346.

Terracini A., Corrado Segre (1863-1924), *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. XXXV, 1925, pp. 209-250.

Transon A., Application de l'Algèbre directive à la Géométrie, *Nouvelles annales de Mathématiques*, (serie 2) 1868, pp. 193-208,pp. 241-264; (recensione su JFM al n. JFM 01.0149.03).

Wallis J., De Algebra Tractatus, 1685, Anglice editus.

van der Waerden B.L., Smid L.J., Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie, *Mathematische Annalen*, 1935, Vol. 110, pp. 753-776.

Weierstrass K., Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. *Monatshefte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1868, pp. 310-338 (oppure: *Werke*, II, pp. 19-44).

Weierstrass K., Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen, Göttingen Nachrichten, 1884, n.10, pp. 395-419.

Weiss E.A., E. Studys Mathematische Schriften, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1933-34, 43, pp. 108-124, 211-225.

Wessell C., Om directionens analytiske Betegning (=Sulla rappresentazione analitica della direzione), *Mémoires de l'Académie Royale des sciences et des lettres de Danemark*, II series, vol. V, 1799, pp. 469-518. Versione in francese: *Essai sur la epresentation analytique de la direction*, 1897 a cura di Zeuthen Host, Copenhague, 1897.

Wessell, *On the Analytical Representation of Direction*, traslated by Flemming Damhus, edited by Bodil Branner e Lützen Jesper, Copenhagen 1999, Matematisk-fysiske meddelelser, Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, 46:1.

Wiener H., *Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden*, 1885, Verlag von L. Brill, Darmstadt.

Wiener H., Űber Grundlagen und Aufbau der Geometrie (erster Teil), *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1890-91, Bd. I, pp. 45-48.

Wiener H., Űber Grundlagen und Aufbau der Geometrie (zweiter Teil), *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1892-93, Bd. III, pp. 70-80.

Yaglom I., *Complex Numbers in Geometry*, 1968, Academic Press, New York.

Yaglom I., *A Simple Non-Euclidean Geometry,* 1979, Springer-Verlag, New York.

Young J. W., Two-dimensional chains and the associated collineations in a complex plane, *Transactions of AMS*, 1910, vol. XI, pp. 280-293.

BIBLIOGRAFIA SECONDARIA

Archibald T., Priority claims and mathematical values: disputes over quaternions at the end of the nineteenth century, in *Around Caspar Wessel and the geometric representation of complex numbers*, Copenhagen 2001, Matematisk-fysiske meddelelser, Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, pp. 255-269.

Avellone M., Brigaglia A. e Zappulla C., The Foundations of Projective Geometry in Italy from De Paolis to Pieri, Archive for History of Exact Sciences, Volume 56, Number 5, July, 2002, pp. 363-425.

Atzema Eisso J., Review di: B. Brenner & J. Lützen (eds.), *Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers*, *Historia Mathematica* 31, 2004, pp116-119.

Benz W., Űber Möbiusebenen. Ein Bericht, *Jahresberict der DMV*, 1960, Bd. 63, pp. 1-27.

Benz W., Zur Theorie der Möbiusebenen I., *Mathematische Annalen*, 1957/58, Vol. 134 (3), pp. 237-247.

Benz W., Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie auf Grund von Doppelverhältnissen, *Jahresberict der DMV*, 1958, pp. 56 – 90.

Benz W., *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, 1973, Springer Verlag.

Bottazzini U., *Il flauto di Hilbert*, 1990, UTET.

Bourbaki N., *Elementi di Storia della Matematica*, 1963, Feltrinelli Editore.

Boyer C. B., *Storia della Matematica*, 1990, Oscar Saggi Mondadori.

Cannata R., Catoni F., Catoni V. e Zampetti P., N-dimensional Geometry generated by Hypercomplex Numbers, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2005, 15, n.1, pp. 1-25.

Caparrini S., La semplice storia dei numeri complessi, *Conferenze e Seminari 2001-2002*, a cura di E. Gallo, L. Giacardi e O. Robutti, Seminario di Storia delle matematiche, associazione subalpina Mathesis.

Caparrini S., On the Common Origin of Some of the Works on the Geometrical Interpretation of Complex Numbers; in Williams K. e Speiser D., *Two Cultures: Essays in Honour of David Speiser*, 2006, Springer, pp. 139-151.

Coolidge J. L., *A history of geometrical methods*, 1940, Oxford at the Claridon Press.

Coolidge J. L., Corrado Segre, *Bulletin of the American Math. Society*, 33, (1927), pp. 352-357.

Dowling L. W., Projective Geometry-Fields of Research, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 32, No. 10, Dec. 1925, pp. 486-492.

Ellingsrud G, Peskine C., Sacchiero G. e Stromme S. A., a cura di, *Complex Projective Geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series, n. 179, 1992, Cambridge University Press.

Emch A., Cartan on complex projective geometry, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1933, vol. 39, pp. 457-458.

Emch A., Unpublished Steiner Manuscripts, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 36, No. 5, May 1929, pp. 273-275.

Enriques F., *Lezioni di Geometria Proiettiva*, 1920, Zanichelli editore, Bologna.

Enriques F., *Le Matematiche nella Storia e nella Cultura*, 1938, Zanichelli editore, Bologna.

Freguglia P., *Fondamenti storici della geometria*, 1982, Feltrinelli Editore Milano.

Freguglia P., *Dalle equipollenze ai sistemi lineari*, 1992, Edizioni QuattroVenti Urbino.

Freguglia P., I fondamenti dell'algebra degli immaginari secondo Giusto Bellavitis, in *Atti delle 'Giornate di storia della matematica'* (Cetraro CS, settembre, 1988), Editel, Commenda di Rende, 1991.

Freguglia P., Calcolo geometrico e numeri ipercomplessi: origini e primi sviluppi ottocenteschi, *Bollettino della Unione Matematica Italiana-**Sezione A**-La Matematica nella Società e nella Cultura*, Serie VIII, Vol. VII-A, aprile 2004, Zanichelli editore.

Giacardi L., Corrado Segre maestro a Torino. La nascita della scuola italiana di geometria algebrica, *Annali di Storia delle Università italiane*, 2001, Vol. 5.

Giacardi L., *I quaderni manoscritti di Corrado Segre –CD ROM*, 2001, Dipartimento di Matematica, Università di Torino; informazioni alla pagina web: http://www.dm.unito.it/collanacdrom/segre/segre.html

Gray J., *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré*, Birkhäuser, 1986; seconda ed. 2008.

Gray J., “Algebraic Geometry between Noether and Noether”, 1997, *Revue d’Histoire des Mathématiques*, 3.1, pp. 1-48.

Hadamard J, *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, 1954, Dover, New York.

Hamilton, *Lectures on Quaternioni*, Hodges and Smith, Dublin 1853.

Hartshorne R., Publication history of von Staudt’s Geometrie der Lage, *Archive for History of Exact Sciences*, May 2008, Volume 62, Number 3, pp. 297-299.

Hawkins T., The Erlangen Programm of Felix Klein: Reflections on its Place in the History of Mathematics, *Historia Matematica*, 1984, 11, pp. 442-470.

Hawkins T., *Emergence of the Theory of Lie Groups: An Essay in the History of Mathematics, 1869–1926*, Reviewed by David E. Rowe, 2000, New York, Springer-Verlag, 2000.

Hoffman A. J., On the foundations of Inversion Geometry, *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 1951, 71 (2), pp. 218-242.

Jones G., Singerman D., *Complex Fuctions*, 1987, Cambridge University Press.

Karzel H., Kroll H. J., *Geschichte der Geometrie seit Hilbert*, 1988, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt.

Kestelman H., Authomorphisms of the field of complex numbers, *Proceeding of the London Mathematical Society*, 1951, n. S2-53, pp. 1-12.

Kline M., *Storia del pensiero matematico*, 1972, Einaudi.

Kroll H. J., Karzel H., *Geschichte der Geometrie seit Hilbert*, 1988, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt.

Maracchia S., *Storia dell'Algebra*, 2005, Liguori editore.

Marchisotto E. A. C., The projective geometry of Mario Pieri: a legacy of Georg Karl Christian von Staudt, *Historia Mathematica*, 2006, 33, pp. 277-314.

Nahin P. J., *The history of* $\sqrt{-1}$ *-An imaginary tale*, 1998, Princeton University Press.

Palladino F., Palladino N., a cura di, *Dalla "Moderna Geometria" alla "Nuova Geometria Italiana" –Viaggiando per Napoli, Torino e dintorni*, Archivio della corrispondenza degli scienziati italiani, 2006, 17, Leo S. Olschki, Firenze.

Parshall K. H., In Pursuit of the Finite Division Algebra and Beyond: Joseph H. M. Wedderburn Leonard E. Dickson, and Oswald Veblen, *Archives internationales d'histoire des sciences*, 1983, 33, pp. 274-299.

Parshall, K.H., Towards a History of Nineteenth-Century Invariant Theory, 1989, in D.E. Rowe & J. McCleary (eds.), 1989, *The History of Modern Mathematics, Vol*. 1, pp. 157-206, New York, Academic Press.

Patterson B. C., The origins of the geometrical principle of inversion, *ISIS*, 55 vol. XIX, Aprile 1933, pp. 154-180.

Price G. B., *An introduction to multicomplex spaces and fuctions*, 1991 Marcel Dekker, Inc., New York.

Rizza G. B., Sulla struttura delle algebre di Clifford, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 1954, 23, p. 91-99.

Rochon D., Shapiro M., On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers, *Anal. Univ. Oradea,* fasc. math., 2004, vol. 11**,** pp.71-110.

Rowe D. E., In search of Steiner's Gost: Imaginary elements in nineteenth-century geometry, in *Le nombre, une hydre à n visage: entre nombres complexes et vecteurs*, sous la dir. De Dominique Flament, 1997, Ed. De la Maison des sciences de l'homme, Paris.

Rowe D. E., On the role of imaginary elements in 19.thCentury Geometry, in *Around Caspar Wessel and the geometric representation of complex numbers*, Copenhagen 2001, Matematisk-fysiske meddelelser, Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, 46:2, pp. 271-293.

Rowe D. E., Review of Thomas Hawkins, *Emergence of the Theory of Lie Groups*. An Essay in the History of Mathematics, 1869-1926, Springer-Verlag, New York, 2000, in *Notice of the AMS*, Vol. 50, 6, June/July 2003, pp. 668-677.

Schwerdtfeger H., *Geometry of complex numbers*, 1962, University of Toronto, Oliver and Boyd.

Singerman D., Jones G., *Complex Fuctions*, 1987, Cambridge University Press.

Strambach K., Freudenthal H., Schließungssätze und Projektivitäten in der Möbius- und Laguerregeometrie, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 143, pp. 213-234.

Toth I., Essere e non essere. Riflessioni sul significato filosofico della conoscenza matematica. Un' intervista a Imre Toth a cura di Liliana Curcio, *Lettera Pristem, n.45 (settembre 2002).* Anche web: http://matematica.unibocconi.it/toth/toth3.htm.