CONTENTS

Fractions: conceptual and didactic aspects

Martha Isabel Fandiño Pinilla

NRD Bologna
ASP Locarno

Summary. *In this paper we present the findings of a principally bibliographical long-term research project, concerning "fractions". This is one of the most studied questions in Mathematics Education, since the learning of fractions is one of the major areas of failure. Here we present a way of understanding lack of success based on Mathematics Education studies, rather than on mathematical motivation.*

The teaching-learning process regarding fractions is certainly one of the most studied since the very beginning of research into Mathematics Education, probably because (together with the related question of decimal numbers) it represents one of the most common areas of difficulty in schools the world over.

1. "Mathematical" aspects

Research shows that a number of teachers are unaware of the fact that there is a considerable difference between a fraction and a rational number (this study will deal only with absolute rational numbers Q^a). Few are aware of the purpose of constructing Q^a starting from ordered pairs of $N \times N^+$. The fact that an absolute rational number is a class which contains infinite ordered pairs of equivalent natural numbers (the second of which is not zero) is by no means clear to all.

Let us examine a mathematically acceptable definition of Q^a, starting from N, by considering the pairs $(a; b)$, $(c; d)$ of the set N×(N-{0}), where a, b, c, d are any natural number, with the sole restrictions $b \neq 0$, $d \neq 0$, and taking the following relation (indicated by **eq**):

$$[(a; b)\ \underline{\mathbf{eq}}\ (c; d)] \text{ if and only if } [a \times d = c \times b].$$

This relation belongs to a special category, that of the relations of equivalence, in that is [leaving aside the simple demonstration]:

- *reflexive*: for each pair $(a; b)$ of N×(N-{0}), the following statement is true: $(a; b)$ **eq** $(a; b)$;
- *symmetrical*: for each pair of pairs $(a; b)$, $(c; d)$ of the set N×(N-{0}), the following statement is true: ***if*** $[(a; b)$ **eq** $(c; d)]$ ***then*** $[(c; d)$ **eq** $(a; b)]$;
- *transitive*: for each set of three pairs $(a; b)$, $(c; d)$, $(e; f)$ of the set N×(N-{0}), the following statement is true: ***if*** $\{[(a; b)$ **eq** $(c; d)]$ ***and*** $[(c; d)$ **eq** $(e; f)]\}$ ***then*** $[(a; b)$ **eq** $(e; f)]$.

In this way the initial set N×(N-{0}) can be distributed by subdividing it in equivalence classes via the operation known as “passage to the quotient”, thus described: [N×(N-{0})] / **eq**.
[N×(N-{0})] / **eq** contains infinite classes, which are the elements that constitute it; in each class there are infinite pairs of natural numbers.
[N×(N-{0})] / **eq** is the set Q^a. Each infinite class of equivalent s called an absolute rational number.
Thus an absolute rational number is a class which contains infinite pairs of equivalent natural numbers; normally a representative for each class is chosen and can be expressed through different written forms.
In Q^a the operation of division can be defined, whereas in N it was not: to divide the pair (a; b) (with $b \neq 0$) by the pair (c; d) (with $d \neq 0$), we need only multiply (a; b) by (d; c) (with the same necessary condition $d \neq 0$).

2. The history of fractions

Following the idea of Brousseau that the study of the history of a given discipline helps understand the problems it poses, we find that the history of fractions, while apparently simple, contains many features of interest. First examples can be found in Egypt from around 3,000 B.C., where principally unitary fractions were used in sophisticated problems. The word “fraction” comes from the late Latin “fractio”, “part obtained by breaking”, and thus from the verb “frangere”, “to break”. Thus we should avoid imagining that the original etymological meaning of the term presupposes that the parts obtained by breaking be equal.

The symbol $\frac{m}{n}$ is of uncertain origin , but was certainly used by Leonardo Fibonacci Pisano in his *Liber Abaci*, published in 1202. Numbers which are fractions are called “rupti” or “fracti” e the horizontal line traced between numerator e denominator is called “virgula”, i.e. “little stick” (from “virga”, “stick”). The words “numerator” and “denominator” are also of uncertain origin, but we know that their use became established in Europe during the fifteenth century. The distinction between “proper”, “improper”, and “apparent” fractions dates from the eighteenth century.

The representation of decimal numbers comes from the work of Simone of Bruges, known as Stevin, (1548-1620). He did not, however, use the comma, but rather a quite different symbolism: for example, 34⓪6①5②2③ rather than 34,652.

3. Fractions as an object of "scholastic knowledge"

The passage from "Knowledge" (academic) to "learned knowledge" (of the student) is the result of a long a delicate path leading from the knowledge to be taught to the knowledge actually taught and finally to the knowledge learnt. In this sequence the step of transforming "Knowledge" into "knowledge to teach" can be called "didactic transposition" and constitutes a moment of great importance in which the professionalism and creativity of the teacher are of utmost importance.

As we have already seen, the object of "Knowledge" Q^a cannot simply be transferred to the pupil, neither at primary nor at secondary level. The pupil simply does not possess the critical maturity or cognitive ability to construct such knowledge. Nonetheless, history, tradition and contemporary society all consider it a necessary part, together with the use of the comma, decimal numbers including those between 0 and 1, and so on, of the knowledge to be learnt. Moreover, the monetary system of almost all countries presupposes that citizens should possess a basic ability to handle absolute rational numbers, the international measurement system has made it necessary since the end of the eighteenth century, and in practically all jobs it is at least necessary to grasp the intuitive meaning of 0,5 or 2,5. Thus the handling of rational numbers is considered an ability that all should develop.

At the same time, it is simply not possible to teach Q^a at both primary and secondary level in a mathematical form which is formally correct. Thus an act of didactic transposition is clearly necessary in order to render Q^a accessible to primary and then secondary pupils. The history of Mathematics Education clearly places the path of this transposition within the following line of development: fractions (primary and secondary school), decimal numbers (primary and secondary school), Q^a (upper secondary school or, at times, university).

It would be wrong to suppose that "didactic transposition" is the same as "simplification". Often the concepts to be built pose many problems. For example, with fractions numerous conceptual problems arise concerning objects of knowledge which do not exist in Q^a. If we consider the apparent fractions ($\frac{m}{n}$ with n divisor of m) or improper fractions ($\frac{m}{n}$ with $m>n$), their presence is a complication which causes difficulty, while in Q^a this simply does not exist. Indeed, if it were possible to avoid passing via fractions and go straight to absolute rational numbers things might well be more simple and natural. But this seems impossible. It still seems natural to pass via fractions, even if it is not at all clear that this is the most effective path. What is clear is that it poses difficulties.

Thus fractions, while not a part of academic “Knowledge”, are nonetheless part of the “scholastic” knowledge proposed by Mathematics Education.

4. Theoretical overview of teaching research

Introducing fractions has a common basis the world over. A given concrete unit is divided into *equal* parts and some of these parts are then taken. This intuitive idea of fraction is clear and easily grasped, as well as being simple to apply to everyday life. It is, however, theoretically inadequate for subsequent explanation of the different and multiform interpretations of the idea of fraction. As we shall see, one single “definition” is not sufficient.

When a child of between 8 and 11 years of age has understood that $\frac{3}{4}$ represents the concrete operation of diving a certain unit in 4 *equal* parts, of which 3 are then taken, it would seem that everything is proceeding smoothly. Unfortunately, almost immediately it is clear that the construction of that knowledge is blocking subsequent real learning. This initial knowledge is inadequate for the necessary passage to further correct knowledge. If, for example, we have a unit divided in 4 *equal* parts, what can we make of the fraction $\frac{5}{4}$?

At times it seems that many teachers are unaware of the conceptual and cognitive complexity involved. The following section aims to analyse this complexity. Initially I will attempt to summarise the international research in this field, limiting my summary to works which have been directly influential for my work. My hope is that this painstaking bibliographical research (I shall propose mainly quotations with regard to the period 1970-1990, and a more detailed bibliography with reference to the period 1990-2006) may be of use also to others who wish to pursue research in the same field.

4.1. Basic premises

The idea of fractions is formally introduced at primary school level, in Italy usually in the third year, even though it is already present, in the sense of “half” an apple or “a third” of a bar of chocolate, at a much earlier age. What schooling does is formalise the written form and institutionalise its meaning.

Roughly speaking, we can say that the universal first approach is that of taking a “concrete object of reference” which should be perceived as pleasant and thus fun, clearly unitary and already familiar, thereby not requiring further learning. Normally a round cake or a pizza is chosen.

Situations are then imagined in which this *unit* must be shared between a number of pupils or people in general. In this way the pupils arrive at the idea of a half (dividing by 2), a third (dividing by 3), and so on: the “Egyptian fractions”, which are our first historical example.

For each fraction the written form is established ($\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$) and reading these forms as “a half and “a third” poses few problems. Nor does generalising from these examples the written form $\frac{1}{n}$, which assumes the meaning of an initial unitary object divided into n equal parts. With young pupils various examples are considered, assigning different values to n.
If then the participants have the right to different amounts of the equal parts, this gives rise to different written forms such as $\frac{2}{5}$ (two fifths) and this the meaning that two of the five *equal* parts of the object are taken. A number of characteristics of these written forms are then established:

- the number beneath the horizontal line is called the *denominator* and this indicates the number of *equal* parts into which the unit has been divided;
- the number above the horizontal line is called the *numerator* and this indicates the number of parts taken (in this way, the numerator expresses the number of times the part must be taken, and thus a multiplication);
- the parts of the unit must be *equal*, a point much stressed and to which we will return later.

Unfortunately the understanding of these elements, and in particular those marked by italics, ends up being an obstacle to the construction of the concept of fraction.

4.2 A theoretical overview of research into teaching fractions

4.2.1. From the 1960s to the 1980s.

The years between 1960 and 1980 gave rise to an enormous quantity of studies concerning the learning of fractions by pupils from 8 to 14 years of age, particularly in the United States. These studies principally concentrated on:

- general questions regarding the very concept of fraction (Krich, 1964; Green, 1969; Bohan, 1970; Stenger, 1971; Coburn, 1973; Desjardins, Hetu, 1974; Coxford, Ellerbruch, 1975; Minskaya, 1975; Kieren, 1975, 1976; Muangnapoe, 1975; Williams, 1975; Galloway, 1975; Payne, 1975; Novillis, 1976; Ellerbruck, Payne, 1978; Hesemann, 1979);

- operations between fraction and relative difficulties [Sluser, 1962 (division); Bergen, 1966 (division); Wilson, 1967 (division); Bindwell, 1968 (division); Green, 1969 (multiplication); Coburn, 1973 (addition and subtraction); Streefland, 1978 (subtraction)];
- differing interpretation of the idea of fraction [Steffe, Parr, 1968 (relation); Coburn, 1973 (relation); Suydam, 1979 (relation); Streefland (1979) (measure e relation)].

Within these pioneering studies, those of Kieren (1975, 1976) demonstrate the existence of at least seven different meanings of the term "fraction", showing how this polysemy is the principal reason for learning difficulties, both concerning the general concept and operations.

During the 1980s the following studies appeared:

- learning in general (Owens, 1980; Rouchier et al., 1980; Behr, Post, Silver, Mierkiewicz, 1980; Hasemann, 1981; Behr, Lesh, Post, Silver, 1983; Lancelotti, Bartolini Bussi, 1983; Pothier, Sawada, 1983; Streefland, 1983, 1987; Hunting, 1984a, 1986; Behr, Post, Wachsmuth, 1986; Dickson, Brown, Gibson, 1984; Streefland, 1984a, b, c; Kerslake, 1986; Woodcock, 1986; Figueras, Filloy, Valdemoros, 1987; Hunting, Sharpley, 1988; Behr, Post, 1988; Ohlsson, 1988; Weame, Hiebert, 1988; Centino, 1988; Chevallard, Jullien, 1989);
- learning operations between fractions [Streefland, 1982 (subtraction); Behr, Wachsmuth, Post, 1985 (addition); Peralta, 1989 (addition and multiplication)];
- comparisons between the values of fractions and/or decimal numbers and difficulties in extending natural numbers to fractions or decimals [Leonard, Grisvard, 1980; Nesher, Peled, 1986; Resnik et al., 1989];
- problems connected with the differing interpretations of the term "fraction" [Novillis, 1980a, b (positioning on the line of numbers); Ratsimba-Rajohn, 1982 (measure); Hunting, 1984b (equivalence); Wachsmuth, Lesh, Behr, 1985 (ordering); Kieren, Nelson, Smith, 1985 (partition; use of graphic algorithms); Giménez, 1986 (fractions in everyday language; diagrams); Post, Cramer, 1987 (ordering); Wachsmuth, Lesh, Behr, 1985 (ordering); Ohlsson, 1988 (the semantics of the fraction); Davis, 1989 (the general sense of fractions in everday life); Peralta, 1989 (various graphic representations)].

Particularly significant are the studies of Hart (1980, 1981, 1985, 1988, 1989; with Sinkinson, 1989), based on many of the previously mentioned studies, and in particular the work of (Kieren, 1980, 1983, 1988; with Nelson, Smith, 1985). As we shall see, both Hart and Kieren will be active later, too.

In section 5 I will summarise the various meanings of fraction, basing my description on the seven proposed by Kieren, but also using the work of Hart and the panorama presented by Llinares Ciscar, Sánchez García (1988), and integrating these studies with subsequent developments in Mathematics Education.

In the early Eighties, more precisely in 1980 and 1981, two articles appeared by Guy Brousseau (1980c, 1981), concerning teaching decimal numbers and based on experiences during the 1970s in the Primary school "J. Michelet" in Talence, France, which are considered a milestone in the field.
Mentioned articles are fundamental for the evolution of Mathematics Education and demonstrate a new methodology ("experimental epistemology"), rigorously discussed by the author prior to presenting it to the international community, and give rise to a new idea of research in Mathematics Education.

In these articles, the author defines the set D of decimal numbers as an extension of N which will then enable the passage to the rational numbers Q, studying briefly its history and its algebraic characteristics. He then demonstrates a highly interesting teaching sequence, repeated ten times before publication of the results. The first step involves using the pantograph to analyse fractions, the second an enlarged reconstruction of a given puzzle, and third a problem concerning different thicknesses of sheets of paper. In each step Brousseau analyses aspects now considered standard in teaching but which at the time were absolutely new. He then describes the results of a test. The study proposes in ever-increasing depth an approach to rational numbers based on decimals, and constantly analyses in detail each phase of the experimental process.

The scope of the work is such that it must be considered seminal. The Author himself realized this, and in his later paper about epistemological obstacles (Brousseau, 1983, surely one of the most cited articles by researchers in Mathematics Education) he explicitly remembers his educational study of decimal numbers.

The school is, however, slow to assimilate and absorb the results of teaching research. Even after 20 years, the effect of the articles remains limited. Analysis of classroom practices and textbooks shows how much is still to be understood concerning the difficulties encountered in introducing fractions and decimals.

Another significant contribution is that of a project conducted in the USA from 1979 to 2002, in which a group of researchers (K. Cramer and T. Post (University of Minnesota), M.J. Behr (University of Illinois), G. Harel (University of California) e R. Lesh (Purdue University), launched *The Rational Number Project*, giving rise to more then 90 articles up to 2003. The focus of this research is rational numbers, and all that accompanies them in the field of “proportional reasoning”, includine explicit and significant reference to fractions.

Exhaustive reference to this research is impossible within the scope of this study, but can be found in the internet site which bears the name of the project; in this website the Reader will found the history of the project and the complete bibliography. both in alphabetical and in chronological order.

4.2.2. From the 1990s to the present day

Within this period the research in the area of fractions, decimal numbers and rational numbers (with reference to Primary and Secondary School, pupils aged 6-14 years) is voluminous. The following is merely a list of those studies which have been most useful for my work.

Clemens, Del Campo (1990) begin a trend pursued in different ways by many researchers. The conceptualisation of rational numbers is considered clearly not a natural process, but rather corresponding to a need of human beings (there is a wide agreement about this idea). I shall follow the Authors that do not develop this line of thought.

Weame (1990) criticises the organisation of both procedural and conceptual learning, proposing an example concernine the constructing of sense for decimal numbers.
Saenz-Ludlow (1990, 1992, 1994, 1995) initiate a line of development subsequently much followed, that of “case studies” on learning fractions (already proposed by Hunting 1986), i.e. analyses of the teaching-learning process concerning a single subject focussing on personal strategies employed both for conceptualising fractions and addition involving fractions.

Davis, Hunting (1990) suggest proposing parallel activities for the promotion of different skills, for example in discrete and continuous contexts, continuing in the line of the research by Hunting and Korboski during the 1980s.

Mack (1990, 1993) proposes the idea of “informal knowledge” based on spontaneous activities concerning problems in daily life, demonstrating that this knowledge can permit an initial construction of ideas concerning fractions and rational numbers in which the former are treated as parts of a whole, with each part considered as a number in itself rather than as a fraction.

Bonotto (1991) presents a detailed analysis of various approaches to rational numbers and related experiments.

Basso (1991a, b, 1992) suggest possible teaching paths for fractions, particularly in the 4th and 5th primary school classes, based on the results of research conducted in the 1980s.

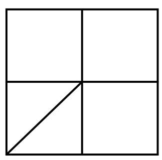
Figueras (1991) presents an interesting and widespread summary of the use of fractions and rational numbers in the real world, providing a number of interesting points of departure for teaching strategies based on socially concrete situations.

Hunting, Davis (1991) emphasize the relationship between the idea of relation and first approaches to fractions, suggesting a development of the two concepts together, a strategy also proposed by Streefland (1991) and Neuman (1993).

Hunting, Davis, Bigelow (1991), provide a critical analysis of teaching experiences and propose a long-term treatment and consolidation of the unitary fraction before any other step, proceeding then to further "fractioning" of the parts, but maintaining constant reference to the original unit. This position is also supported by Kieren (1993a) and Steffe, Olive (1990).

Streefland (1990, 1991, 1993) examines approaches to the teaching-learning of fractions and emphasizes the requirements of daily life that necessitate learning and mastering fractions and rational numbers.

Valdemoros (1992, 1993a, b, c, 1994a, b, 1997, 1998, 2001, et al. 1998) provides a considerable diversity of perspectives on the language of fractions, giving particular attention to the construction of the meaning of fractions via different symbolic systems and with reference to concrete materials and models. Valdemoros (1997) examines the intuitive resources that can help with addition of fractions, often with reference to single case studies. Valdemoros (2004) demonstrates the results of a research project involving 37 pupils aged 8-11, based on the different contents that can be assigned to a fraction. Particularly interesting is the case of students who give the following answer to the question of how to divide a square wall into five equal parts between five painters:



On various occasions, I have myself found the same answer. The author distinguishes between different levels of analysis: semantic, syntactic, "translation" from one language to another, the language of arithmetic, reading.

There are many studies based on classroom experiences concerning pre-school activities. In particular the work of Pepper (1991), Hunting, Pepper, Gibson (1992) will be later mentioned when referring to teaching proposals.

Cannizzaro (1992) analyses the relationship between mathematical, cognitive and curricular levels in the teaching of arithmetic, emphasizing a number of questions to which we shall return, such as the need to distinguish different uses of the term fraction and the risks inherent in the use of concrete models.

Kieren (1992, 1993a, b, c) continues the classic studies of the previous 20 years, insisting on the idea of skills as specific personal facts and proposing and demonstrating the existence of personal mechanisms for the construction of knowledge in this field together with learning processes which begin with the "fractioning" of units.

Behr, Lesh, Post, Silver (1992, 1993) provide a critical discussion of teaching activities, distinguishing between stages in the learning of fractions and rational numbers and analysing the language of fractions in the classroom.

Bonotto (1992) presents the results of a test on fractions and decimal numbers administered with fifth year primary and first year middle school pupils. The study focuses in particular on ordering and shows how knowledge of natural numbers is both an aid and an obstacle to learning, how there are difficulties in handling the passage from fractions to decimal numbers and how knowledge of fractions and of decimals can enter into conflict. There is thus the need for a long-term path of adaptation in the learning of these concepts.

Gray (1993) provides a study of the general problems encountered in the passage from natural numbers to fractions and relative mathematical and learning difficulties.

Davis, Hunting, Pearn (1993a, b) propose the use of diagrams to show the relationship between natural numbers and fractions, after having verified the pupils' ability to move from one to the other. Their study documents a teaching experiment over two school years with pupils of 8-9 and 9-10 years of age.

Ball (1993) presents a personal teaching-learning experience with pupils in the third year of primary school, involving long discussion of everyday uses of fractions in ordinary language and a consolidation of personal representations before moving to the use of symbols, which are openly negotiated.

Bezuk, Bieck (1993) insist on the linguistic mastery of work on fractions as necessary, proposing a brief summary of research conducted in this direction.

Graeber, Tanenhaus (1993) propose an informal approach to fractions designed to give them a concrete sense, using fractions as numbers for measuring sizes and thereby building an informal knowledge.

Brown (1993) emphasizes the necessity to find common theories and models in order to overcome the fragmentation of the research into learning difficulties.

Giménez (1994) proposes a distinction between "divide" in everyday language and "fraction" in Mathematics, using accounts of experiences and various stimuli together with classroom discussion designed to create greater integration between different situations of use of fractions.

Groff (1994) is one of numerous researchers who believe that fractions should be banished from the first years of schooling. Others argue the contrary, sustaining that informal construction of the idea of fraction should begin in the Infants school. I personally believe that the latter position is correct, while it is clearly necessary to proceed with caution.

Mariotti, Sainati Nello, Sciolis Marino (1995) examine the skills that students say that possess at the moment of passage from Middle to Secondary school, discovering that they generally believe that different sets of numbers and unconnected and that the written form used determines the nature of the number.

Kamii, Clark (1995) consider the classic question of the difficulty of understanding the relation of equivalence between fractions, a question which will be of interest when considering teaching approaches.

Pitkethly, Hunting (1996) provide an extremely wide and useful critical summary of many of the directions of research in this field, obviously without explicit educational practical suggestions. The present study is a modest attempt to participate in the construction of a similar summary for the period up to 2005.

Sensevy (1996a) describes a teaching-learning experience with fourth and fifth year primary pupils concerning the constant negotiation of meanings and construction of formal models in the classroom during the handling of problems involving fractions. The objective was that of achieving effective communication. Meanings and formal models were based on appropriate semantic tools designed to enable shared meanings. New social norms give rise to a new form of didactic contract. The study is based on a doctoral thesis (1994).

Sensevy (1996b) is also responsible for an experimental teaching activity called "The Journal of Fractions", conducted over a period of two years in fourth and fifth year primary classes. The study focuses on the temporal constraints which weigh upon the teaching-learning process, constraints which impede the pupil from becoming expert because new input is constantly presented before allowing previous content to be fully assimilated and mastered. The experimental teaching research, in which the pupils play an active role, was designed «to study the temporal conditions that can the pupil build a reflective activity within an epistemological framework» (p. 8). While the research does not directly concern fractions or decimal numbers, but rather general issues, it does however choose an example based on fractions extremely pertinent to our discussion.

Barbero, Carignano, Magnani, Tremoloso (1996) examine concrete data concerning errors which students commit when working with fractions, analysing situations and causes, as do Bonotto (1991, 1993, 1995, 1996), Bonotto, Basso (1994), Bove et al. (1994).

Vaccaro (1998) makes a proposal for teaching fractions during the final years of primary school through using an appropriate fairy story. It is worth noting that this paper explicitly suggests some activities, so it is a contribution in the field of "didactic engineering".

Zazkis (1998) studies the polysemy in scholastic mathematical practice, a widespread theme in current teaching research, focussing in particular on the ambiguities in the use of the terms "divisor" and "quotient" and the negative effects of this on school practice, classroom language and learning (the text is based on interviews with students). Clearly this polysemy causes difficulties in the learning of fractions.

Hahn (1999) illustrates the results of a research study into the real skills which underlie the work of the salesman which shows that "the sole mathematical concept that trainee salesmen master is that of calculating percentages" (p. 229, my translation). The author then studies the same type of skills as possessed by students at different levels. Since the concept of fraction lies at the heart of calculating percentages, I shall return to this theme later. Other studies concerning similar aspects are, for instance, (Noelting, 1980; Karplus, Pulos, Stage, 1994; Adda, Hahn, 1995).

Weame, Kouba (2000) present a discussion of conceptual difficulties in the learning of rational numbers, as highlighted by an evaluation study of the progress in national education in the USA.

Singh (2000) presents a study of relation and proportion, an important theme for our purposes, since relation is one of the possible meanings of the term fraction. As the author states, activities concerning proportions require the ability to handle simultaneously two relations. Karplus, Pulos, Stage (1983); Hart (1988); Lamon (1993);

Resnick, Singer (1993); Karplus, West (1994); Confrey (1994, 1995) have all made important contributions concerning the same field of enquiry.

In the following pages, in order to study the different ideas of "fraction" and general educational problems in the learning of fractions, and in order to supply some educational suggestions, I shall make reference to some results of the following specific works.

Adjiage, Pluvinage (2000) illustrate the results of a test administered in class over a period of 2 years in which the single rather than a two-dimensional geometrical representation is used. Their conclusion is that the classical two-dimensional representation causes notable difficulties whereas a constant, balanced use of both can reduce those difficulties. They also underline the importance of making reference to sizes which are common in the everyday lives of pupils, something already emphasised by Carraher, Dias Schliemann (1991).

Keijzer, Terwel (2001) present a interesting "case study" conducted over a period of 30 lessons in a Primary school in Holland. The objective was to construct a series of basic skills in handling fractions. The authors describe the process of defining objectives, the single lessons, the constructing of learning and the tests used to assess the skills developed, taking account of research into preventing and overcoming difficulties. The study contains interviews between teachers and learners as well as diagrams and drawing produced by the latter. The study is based on the findings contained in Keijzer, Buys (1996) (which also contains a specific proposal for a curriculum).

O'Connor (2001) presents a discussion group of fifth year Primary school children who consider the question: "Can any fraction be transformed into a decimal number?". The objective is to show how the work of teachers often encounters problems arising from individual personal interpretations on the part of students, due both to mathematical complications and difficulties with calculations. The study is particularly useful for the way in which it sheds light on spontaneous constructions of knowledge.

Llinares (2003) (in Chamorro ed., 2003, Chapter 7) examines Mathematics Education at Primary, considering the basic elements of the discipline together with general and specific aspects of teaching research, and thus providing a compendium of this work, based on experiences in the Spanish and Latin American world is certainly of great interest for future developments in the field. Clearly this work will be useful in the last chapter of our paper.

In Spain much research has been conducted in the field, including work published in Castro ed. (2001), chapters on fractions and decimal numbers (Castro, Torralbo, 2001), on proportion (Fernández, 2001), as well as a on decimal numbers in manual for Primary school teaching training (Socas, 2001).

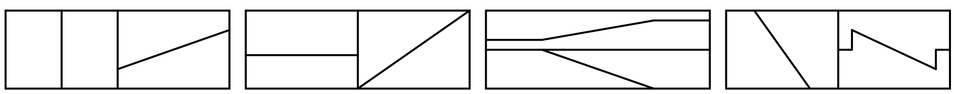
We can found a similar approach in Cid, Godino, Batanero (2003), which contains chapters on fractions and positive rational numbers (Chapter 4, pp. 159-196) and decimal numbers (Chapter 5, pp. 197-232), once again with many interesting and useful teaching suggestions and reflections on learning processes. These studies, too, will be very useful to our reflections, later.

Gagatsis (2003) is a collection of articles on teaching research in Greece and Cyprus, with a preface by Raymond Duval. Chapter 2 is dedicated to representations and learning and Chapter 3 (pp. 82-95) to fractions. The author poses the following research question: «Is there a form of representation of the concepts of equivalence and addition between fractions and is there a mode of translation of representations which students tend to handle with greater ease?» (pp. 83-84). A research study involving 104 fifth form primary pupils shows limited flexibility in moving from one representation to another and thereby difficulty in choosing a representation which facilitates addition and equivalence between fractions. Other references to the same question can be found in Marcou, Gagatsis (2002).

We mentioned a lot of works, and this points out the large number of studies devoted to the field. In conclusion, some reference must be made to the use of new technologies in the teaching of fractions, decimal and rational numbers. As the field is beyond the scope of this study, here I will limit reference to Chiappini, Pedemonte, Molinari (2004), one of the most recent works dedicated to this area, containing an ample bibliography for those interested in pursuing further research.

5. Different ways of understanding the concept of fraction

Something which often strikes teachers on training courses is how an apparently intuitive definition of fraction can give rise to at least a dozen different interpretations of the term.
1) A fraction as part of a whole, at times continuous (cake, pizza, the surface of a form) and at times discrete (a set of balls or people). This unit is divided into “equal” parts, an adjective often not well defined, with often embarrassing results such as the following, concerning continuous forms:



discrete sets: how to calculate $\frac{3}{5}$ of 12 people.

Providing students with concrete models and then requesting abstract reasoning is a clear indicator of a lack of awareness on the part of the teacher and a sure recipe for failure.

2) At times a fraction is a quotient, a division not carried out, such as $\frac{a}{b}$, which should be interpreted as $a{:}b$; in this case the most intuitive interpretation is not that of part/whole, but that we have *a* objects and we divide them in *b* parts.
3) At times a fraction indicates a relation, an interpretation which corresponds neither to part/whole nor to division, but is rather a relationship between sizes.
4) At times a fraction is an operator.
5) A fraction is an important part of work on probability, but it no longer corresponds to its original definition, at least in its ingenuous form.
6) In scores fractions have a quite different explanation and seem tot o follow a different arithmetic.
7) Sooner or later a fraction must be transformed into a rational number, a passage which is by no means without problems.
8) Later on a fraction must be positioned on an inclined straight line, leading to a complete loss of its original sense
9) A fraction is often used as a measure, especially in its expression as a decimal number.
10) At times a fraction expresses a chosen quantity in a set, thereby acquiring a different meaning as an indicator of approximation.
11) It is often forgotten that a percentage is a fraction, again with particular characteristics.
12) In everyday language there are many uses of fractions, not necessarily made explicit, e.g. for telling the time ("A quarter to ten") or describing a slope (a 10% rise"), and often far from a scholastic idea of fractions.

In this respect the studies of Vergnaud are illuminating. I am personally convinced that conceptual learning is the first stage of mathematical learning. So many different meanings for the concept of fraction require an attempt to find some unifying principle Following Vergnaud, we can consider a *concept* C as three sets C = (S, I, *S*) such that:

- S is the set of situations that give sense to the concept (the referent);
- I is the set of the invariants on which is based the operativity of the schemata (the meaning);
- *S* is the set of linguistic and non-linguistic forms that permit symbolic representation of the concept, its procedures, the situations and ways of working with the concept (the signifier).

Thus it is evident that the choice of a single meaning of fraction cannot possible encompass its multiple features.
As we have seen:

- Behind the same term "fraction" are hidden may different situations which give sense to the concept
- Each of these situations contains invariants on which are based the operativity of the schemata,
- Various linguistic forma can be used to represent the concept.

Thus it is necessary to conceptualise the fraction via all of its meanings, since a choice of teaching only one or two is quite inadequate.

Vergnaud proposes a theory of conceptual fields: "a set of situations, concepts and symbolic representations (signifiers) closely interdependent which cannot be analysed separately" … "a set of problems and situations the handling of which requires concepts, procedures and representations which are strictly interconnected".

On the one hand, it is impossible to imagine an approach to teaching fractions in isolation from the mathematical context which gives then sense: fractions, relations, proportions, multiplications, rational numbers, are but a few of the salient features all of that which gives sense to fractions. These concepts must not be separated, but rather should flow together in one sole learning process. On the other, all the different ideas of fractions must explored and compared, since there are considerable differences between many of them.

Gérard Vergnaud's schema is important and useful, but other approachs have been proposed for the conceptualization. More recently, Raymond Duval has proposed a binary representation containing the pair "meaning-object" or "sign-object", thereby expressing the idea that conceptualisation passes through the sign which expresses its own object of reference. The occurrences of the mathematical object "fraction" are multiple and each one belongs to an appropriate system of signs.

6. The noetics and semiotics of fractions

The term "noetics" refers to conceptual acquisition and thus to conceptual learning at school.
The term "semiotics" refers to the representation of concepts through systems of signs.
Both are of extraordinary importance in Mathematics. Any form of mathematical activity requires the learning of its concepts and the use of semiotic systems.

It is important to bear in mind that the concepts of Mathematics do not exist in concrete reality. The point P, the number 3, addition, parallelism between straight lines, are not concrete objects which exist in empirical reality. They are pure concepts, ideal and abstract, and therefore cannot be "empirically *demonstrated*" as in other sciences. In Mathematics concepts can only be *represented* by a semiotic register.
As a matter of fact, in Mathematics we do not work directly with objects (i.e. with concepts), but with their semiotic representations. So semiotics, both in Mathematics and in Mathematics Education, is fundamental.

A given concept can have different semantic registers. Passing from one representation to another within the same register is called "transformation by treatment", while a change of representation and register is called "transformation by conversion". In 1993 Duval called attention to a cognitive paradox hidden within these transformations. The objective is conceptual learning. The teacher (who knows the concept) proposes semiotic representations to the student (who does not yet know the concept), in the hope that the student will be able to construct the desired conceptual learning (noetics) of the concept. The student therefore possesses semiotic representations, objects (words, formulae, drawings, diagrams, etc.), but not the concept itself. If the student already knew the concept, he could *recognise it in those* semiotic representations, but since he does not know it, *he sees only* its representations, concrete objects, ink marks on sheets of paper, chalk marks on a blackboard, etc.

The teacher who is unaware of noetics and semiotics may well cherish the illusion that, if the student manipulates the representations, then he is manipulating the concepts and thus the cognitive construction has taken place. In reality, it may well be that the student has learnt to manipulate the representations but has not at all constructed the concept and that the teacher is suffering from an illusion.

In this respect, there are no miraculous recipes, only the awareness of the problems necessary to enable the teacher to help students with the noetics of learning and not only the semantic manipulation.

The fraction is a concept and, as such, cannot be concretely demonstrated. We can operate with a whole, an object, a cake, dividing it and obtaining a part. But the result is not the mathematical "fraction", only the "fraction" of that object. Working with the semantic register of concrete operations, we have demonstrated a semiotic representation, not the concept.

We can use words to describe what we have done to the cake, thereby changing register and demonstrating another representation, but not the concept.

We can pass to other examples, abstracting from a cake to a rectangle, but once again we demonstrate representations, not the concept.

At this point the teacher normally goes beyond the object (cake, rectangle, etc.) to its abstraction and the concept of fraction is supposed to have been constructed independently from the concrete point of departure of a whole or unit. But often this is not all the case.

Up to this point the units are continuous objects: a cake or the surface of a rectangle. Passing to discrete units – e.g. 12 balls which must, however, be considered as one unit – the register has been completely changed but it is taken for granted that the conversion spontaneously takes place. Indeed, an appropriate mathematical formalism is introduced, a written form of fractions, together with the terms "numerator" and "denominator": a new semiotic representation in a different register, and thus a new kind of conversion.

…

All this, and more, normally takes place within a lesson of 30-40-50 minutes. On the basis of the characteristics of the chosen objects – the act of dividing, the continuous cake, the continuous surface of a rectangle, the discrete set of balls, the written form with its specific names – a few examples of passages and many examples of conversions are carried out, taking for granted that, if the student is capable of reproducing them, the teaching has been successful and the concept constructed.

If, however, we recognise that semiotics and noetics are not the same thing and that manipulating semiotic representations is not noetics, we can understand how, some time after apparent initial success, students may be in grave difficulty, having learnt to manipulate a few passages and registers but not construct a concept.

7. Teaching fractions and learning difficulties

Teaching research has illustrated many errors which are typical in students the world over. The following is a list of some of the most important.

1) Difficulty in ordering fractions and written decimal numbers.
2) Difficulty with operations between fractions and between rational numbers.
3) Difficulty in recognising even the most common diagrams.
4) Difficulty in handling the adjective "equal".
5) Difficulty in handling equivalences.
6) Difficulty in handling the reduction to minimum terms.

7) Difficulty in handling non standard figures.
8) Difficulty in passing from a fraction to the unit that has generated it.
9) Difficulty in handling autonomously diagrams, figures or models.

The need now faced is that of using the results of the copious research that has been conducted over the past 40 years in to create a Mathematics teaching which is indeed a true epistemology of learning with reference to fractions. The following list considers but a few of the issues involved.

1) Teaching-learning contract

(a) The "sum" of fractions: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ is not something the student proposes to the teacher because he believes it to be true, but because he thinks it may be acceptable in terms of its form …
(b) In the context of a problem involving fractions, it is illusory to imagine that the student reasons in order to choose, when it is well known that, by contract, his objective is that of receiving a nod of approval and so is perfectly capable of producing a series of proposals often quite contradictory. The apparent absurdity (from the mathematical point of view) of the series gains a logic from the point of view of the teaching-learning contract.

Many studies about the didactical contract have demonstrated how students are frightened of taking risks, abdicate responsibility for their own learning and act only in terms of the contract. With reference to fractions this is rather evident.

2. Excessive semiotic representations

Opening any textbook shows immediately the immense number of semiotic representations available for expressing fractions. Choosing and handling these registers is by no means automatic and learning to do so is a process which must be guided and in which the teacher must render the student co-responsible. Teachers often underestimate this aspect, ignoring the warning of Duval and passing from one register to another, believing that the student follows, while in fact the student does so at the level of semantic representation but not meaning.

3. Prematurely formed images and models

Often an image can be transformed too quickly into a mental model, when it should still remain an image. Let us take some examples.

(a) The image of a whole divided into equal parts, taking *equal* to be identity, congruency, superimposability, creates an effective and durable idea of fraction which then has to be respected on all occasions and thus impedes the noetics of the fraction.
(b) The image of dividing a whole in equal parts and taking some of them suggests that this “some” cannot be “all”. The model is easily reinforced, given that it coincides with a strong intuition, but then impedes the passage to a unit as $\frac{n}{n}$ and to improper fractions.
(c) The use of geometric figures is seen by students to be specific and meaningful, whereas for the adult it is random and generic. The continuous use of rectangles of circles leads to an image which, instead of being open, ductile and modifiable, becomes a persistent and stable model. If the figures proposed are different (triangle, trapezium,…) the student no longer grasps the noetics of the fraction because the situation is not a part of his model

4. Misconceptions

There are numerous examples of misconceptions concerning fractions, many of which then become premature models instead of provisional images. Examples are those of misconceptions linked to order between fractions, based on that between natural numbers, the simplification of fractions, the handling of equivalences between fractions, operations between fractions, the choice of figures on which to operate with fractions …

5. Ontogenetic, didactic and epistemological obstacles

Many of the things to be learnt concerning fractions can be considered as true epistemological obstacles and are easily recognisable in the history and in the practice of teaching.
(a) The reduction of fractions to minimum terms has for long been a specific object of study, as is shown by the fact that the Egyptians for centuries used only fractions with unitary numerators
(b) The passage from fractions to decimal numbers required over 4,500 years.
(c) The handling of zero in fractions has often created enormous problems even for illustrious mathematicians.

6. Excess of didactic situations and lack of a-didactic situations
Situations proposed to students are almost always those constructed for teaching purposes, so didactic situations, and rarely correspond to a-didactic situations. The result is of almost total failure in the learning of fractions and rational numbers, and this is clarly pointed out in the international literature. Today we may say that the construction of meaningful learning must also pass through a-didactic situations, but that these are by no means the most used in teaching practice.

Bibliography

Adda J., Hahn C. (1995). Pourcentage et sens commun. In: Keitel C., Gellert U., Jablonka E., Müller M. (eds.) (1995). *Mathematics education and common sense*. Actes de la 47ème rencontre CIEAEM. Freie Universität Berlin. Berlino: Müller.

Adjiage R., Pluvinage F. (2000). Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels. *Recherches en didactique des mathématiques*. 20, 1, 41-88.

Arrigo G., D'Amore B. (1992). *Infiniti*. Milano: Angeli.

Arrigo G., D'Amore B. (1999). "Lo vedo, ma non ci credo". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22B, 5, 465-494.

Arrigo G., D'Amore B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo…", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-57.

Arrigo G., D'Amore B., Sbaragli S. (in press). *Gli infiniti*. Bologna: Pitagora.

Bachelard G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.

Bagni G.T. (1996-'97). *Storia della matematica*. 3 volumes. Bologna: Pitagora.

Ball D. (1993). Halves, pieces and twoths: costructing and using representational contexts in teaching fractions. In: Carpenter T.P., Fennema E., Romberg T.A. (eds.) (1993). *Rational numbers: as integration of research*. Hilsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum. 157-195.

Barbero R., Carignano I., Magnani R., Tremoloso G. (1996). Una ricerca sulle frazioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 19B, 351-376.

Basso M. (1991a). Un possibile itinerario didattico sulle frazioni nella scuola elementare. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 14, 7, 678-698.

Basso M. (1991b). Un possibile itinerario didattico sulle frazioni nella scuola elementare: classe quarta. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 14, 9, 877-897.

Basso M. (1992). Un possibile itinerario didattico sulle frazioni nella scuola elementare: classe quinta. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 15, 1, 73-96.

Behr M.J., Harel G., Post T., Lesh R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In: Grouws D.A. (ed.) (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan. 296-333.

Behr M.J., Harel G., Post T., Lesh R. (1993). Rational numbers: towards a semantic analysis-emphasis on the operator construct. In: Carpenter T.P., Fennema E., Romberg T.A. (eds.) (1993). *Rational numbers: as integration of research*. Hilsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum. 13-47.

Behr M.J., Lesh R., Post T., Silver E.A. (1983). Rational-number concept. In: Lesh R.A., Landau M. (eds.) (1983). *Acquisition of mathematics concepts and processes*, New York: Academic Press. 92-126.

Behr M.J., Post T. (1988). Teaching rational number and decimal concepts. In: Post T. (ed.) (1980). *Teaching mathematics in grades k-8*. Boston: Allyn and Bacon. 190-231.

Behr M.J., Post T., Silver E., Mierkiewicz D. (1980). Theoretical foundations for instructional research on rational numbers. *Proceedings PME 1980*. 60-67.

Behr M.J., Post T., Wachsmuth I. (1986). Estimation and children's concept of rational number size. In: Shoen H.L., Zweng M.J. (eds.) (1986). *Estimation and mental computation. 1986 Yearbook*. Reston (Ma): NCTM.

Behr M.J., Wachsmuth I., Post T. (1985). Construct a sum: a measure of children's understanding of fraction size. *Journal for research in mathematics education*. 16, 120-131.

Bergen P.M. (1966). Action research on division of fractions. *Arithmetic teacher*. 13, 293-95.

Bezuk N.S., Bieck M. (1993). Current research on rational numbers and common fractions: Summary and implications for teachers. In. Douglas T.O. (ed.) (1993). *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics*. New York: MacMillan. 118-136.

Bidwell J.K. (1968). *A comparative study of the learning structures of three algorithms for the division of fractional numbers*. Doctoral thesis. University of Michigan.

Bohan H.J. (1970). *A study of the effectiveness of three learning sequences for equivalent fractions*. Doctoral thesis. University of Michigan.

Bonotto C. (1991). Numeri razionali. Approcci diversi e relative sperimentazioni didattiche. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 14, 7, 607-638.

Bonotto C. (1992). Uno studio sul concetto di numero decimale e di numero razionale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 15, 5, 415-448.

Bonotto C. (1993). Origini concettuali di errori che si riscontrano nel confrontare numeri decimali e frazioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 16, 1, 9-45.

Bonotto C. (1995). Sull'integrazione delle strutture numeriche nela scuola dell'obbligo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 18A, 4. 311-338.

Bonotto C. (1996). Sul modo di affrontare i numeri decimali nella scuola dell'obbligo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 19A, 2, 107-132.

Bonotto C., Basso M. (1994). Analisi di indagini sui numeri decimali rivolti ad allievi ed insegnanti della scuola dell'obbligo. In: Basso M. et al. (eds.) (1994). *Numeri e proprietà*. Università di Parma. 93-98.

Bove D. et al. (1994). Indagine sulla conoscenza e le competenze al passaggio dalla scuola elementare alla media. Proposte di interventi. In. Basso et al. (eds.) (1994). *Numeri e proprietà*. University of Parma. 87-92.

Boyer C. (1968). *Storia della matematica*. Milano: Isedi. 1976. Original edition USA 1968.

Brousseau G. (1972a). Les processus de mathématisation. *Bulletin de l'association des professeurs de mathématique de l'enseignement public*. Numéro Spécial: *La Mathématique à l'école élémentaire*. (Text edited for the Acts of the Conference held in Clermont Ferrand in 1970).

Brousseau G. (1972b). Vers un enseignement des probabilités à l'école élémentaire. *Cahier de l'IREM de Bordeaux*. 11.

Brousseau G. (1974). L'enseignement des probabilités à l'école élémentaire. *Comptes Rendus de la XXVIe Rencontre de la CIEAEM*. Irem de Bordeaux.

Brousseau G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Comptes Rendus de la XXVIIIe Rencontre de la CIEAEM*. Louvain la Neuve. 101-117.

Brousseau G. (1980a). Les échecs electifs dans l'enseignements des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rhinologie*. 101, 3-4, 107-131.

Brousseau G. (1980b). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques*. 41, 177-182.

Brousseau G. (1980c). Problèmes de l'enseignements des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*. 1, 1, 11-59.

Brousseau G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*. 2, 3, 37-127.
Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactiques des mathématiques*. 4, 2, 165-198.
Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.
Brown C.A. (1993). A critical analysis of teaching rational number. In: Carpenter T.P., Fennema E., Romberg T.A.. (eds.) (1993). *Rational numbers: as integration of research*. Hilsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum. 197-218.
Bunt L.N.H., Jones P.S., Bedient J.D. (1987). *Le radici storiche delle matematiche elementari*. Bologna: Zanichelli.
Cannizzaro L. (1992). La prima educazione matematica nel settore aritmetico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 15, 3, 236-248.
Carraher D.W., Dias Schliemann A.L. (1991). Children's understanding of fractions as expressions of relative magnitude. *Proceedings of PME XV*. Assisi. 184-191.
Carruccio E. (1958). *Matematica e logica nella storia e nel pensiero contemporaneo*. Torino: Gheroni.
Cassina U. (1961). *Dalla geometria egiziana alla matematica moderna*. Roma: Cremonese.
Castro E. (2001). Números decimales. In: Castro E. (ed.) (2001). *Didáctica de la Matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis. 315-346.
Castro E., Torralbo M. (2001). Fracciones en el currículo de la educación primaria. In: Castro E. (ed.) (2001). *Didáctica de la Matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis. 285-314.
Centeno J. (1988). *Los números decimales. ¿Por qué?, ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.
Chace A. et al. (1927). *The Rind mathematical papyrus*. Oberlin (Ohio).
Chevallard Y. (1988). L'universe didactique et ses objects: fonctionnement et dysfonctionnement. *Interactions didactiques*. 9-37.
Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'acitivité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble.* LSD2, IMAG, University J. Fourier, Grenoble.
Chevallard Y., Jullien M. (1989). *Sur l'enseignement des fractions au collège. Ingénierie, recherche, société*. Marsiglia: Publications de l'IREM.
Chiappini G., Pedemonte B., Molinari M. (2004). Le tecnologie didattiche nell'approccio ai numeri razionali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 27 A-B, 479-512.
Cid E., Godino J.D., Batanero C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Granada: Facultad de Ciencias de la Educación.
Clements M.A., Del Campo G. (1990). How natural is fraction knowledge? In: Steffe L.P., Wood T. (eds.) (1990). *Trasforming children's mathematics education: international perspective*. Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum. 181-188.
Coburn T.G. (1973). *The effects of a ratio approach and a region approach on equivalent fractions and addition/substraction for pupils in grade four*. Doctoral thesis. University of Michigan.
Confrey J. (1994). Splitting, similarity and the rate of change: new approaches to multiplication and exponential function. In: Harel G., Confrey J. (eds.) (1994). *The development of*

multiplicative reasoning in the learning of mathematics. State University of New York Press. 293-332.
Confrey J. (1995). Student voice in examining "splitting" as an approach to ratio, proportions and fractions. In: Meira L., Carraher D. (eds.) (1995). *Proceedings of the 19th PME.* Recife (Brasile). 1, 3-29.
Coxford A., Ellerbruch L. (1975). Fractional Number. In: Payne J.N. (ed.) (1975). *Mathematics learning in early chilhood*. Reston (Va): NCTM.
D'Amore B. (1991). logica Logica LOGICA, la didattica della logica fra gli 8 ed i 15 anni. In: D'Amore B. (ed.) (1991). *La Matematica fra gli 8 ed i 15 anni*. Bologna-Roma: Apeiron. 79-90.
D'Amore B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica in attività di problem solving*. Milano: Angeli. Preface by Gérard Vergnaud. [Published in Spanish, Madrid: Sintesis, 1997].
D'Amore B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli – Relational objects and different representative registers: cognitive difficulties and obstacles. *L'educazione matematica*. 1, 7-28. [Artiche republished in Spanish: *Uno*. 15, 1998, 63-76].
D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Prefazione di Colette Laborde. Bologna: Pitagora. [Published in Spanish with prefaces by Colette Laborde and Ricardo Cantoral, 2006, Bogotà: Magisterio ed. In press in Portugese].
D'Amore B. (2001a). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-173. [Artiche republished in various languages].
D'Amore B. (2001b). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-30. [Artiche republished in various languages].
D'Amore B. (2001c). *Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (2002a). Gérard Vergnaud. Item in *Enciclopedia Pedagogica*, Appendix A-Z. Brescia: La Scuola. 1508-1509.
D'Amore B. (2002b). Basta con le cianfrusaglie. *La vita scolastica*. 8, 14-18.
D'Amore B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51.
D'Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Prefazione di Guy Brousseau. Bologna: Pitagora. [Published in Spanish, with prefaces by Guy Brousseau and Ricardo Cantoral. 2005, México DF: Reverté. Published in Portugese, with prefaces by Guy Brousseau and Ubiratan D'Ambrosio. 2005, Sao Paolo: Escrituras].
D'Amore B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. 4, 4-30.
D'Amore B. (2005). Pipe, cavalli, triangoli e significati. Contributo ad una teoria problematica del significato concettuale, da Frege e Magritte, ai giorni nostri. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación matemática*. México DF, México. 14, 1, 48-61.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2003). La formazione iniziale degli insegnanti di matematica in Italia. *La matematica e la sua didattica*. 4, 413-440.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50.

D'Amore B., Godino J.D., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica. Una sfida per il processo di insegnamento – apprendimento*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Marazzani I. (2003). *Problemi di matematica nella scuola primaria*. Prefazione di Gérard Vergnaud. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Matteuzzi M. (1975). *Dal numero alla struttura*. Bologna: Zanichelli.

D'Amore B., Matteuzzi M. (1976). *Gli interessi matematici*. Venezia: Marsilio.

D'Amore B., Oliva P. (1994). *Numeri. Teoria, storia, curiosità, giochi e didattica nel mondo dei numeri*. Milano: Angeli.

D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione": una proposta. *La matematica e la sua didattica*. 2.

D'Amore B., Speranza F. (eds.) (1989, 1992). *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*. Due volumi: vol. I, 1989; vol II, 1992. Roma: Armando, Roma 1989.

D'Amore B., Speranza F. (eds.) (1995). *La matematica e la sua storia. Alcuni esempi per spunti didattici*. Milano: Angeli.

Davis G.E. (1989). Attainment of rational number knowledge. In: Ellerton N., Clements K. (eds.) (1989). *To challenge to change*. Victoria: Mathematical Ass. of Victoria.

Davis G.E., Hunting R.P. (1990). Spontaneous partitioning: preschoolers and discrete items. *Educational studies in mathematics*. 21, 367-374.

Davis G.E., Hunting R.P., Pearn C. (1993a). Iterates and relations: Elliot and Shannon's fraction schemes. In: Hirabayashi I., Nohda N., Shigematsu K., Lin K. (eds.) (1993). *Proceedings of the seventeenth conference of the international group of PME*. Vol. III. Tsukuba: Università di Tsukuba. 154-161.

Davis G.E., Hunting R.P., Pearn C. (1993b). What might a fraction mean to a child and how would a teacher know? *Journal of mathematical behaviour*. 12, 1, 63-76.

Davis R.B. (1988). Is percent un number? *The journal of mathematical behavior*. 7, 3, 299-302.

Desjardins M., Hetu J.C. (1974). Activités mathématiques dans l'enseignements des fractions. Montreal: University of Québec.

Dickson L., Brown M., Gibson O. (1984). *Children learning mathematics*. Londra: Cassell Education.

Douady R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. Tesi di stato, Università di Parigi. The same article appears in: *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 1986, 5-31.

Dupuis C., Pluvinage F. (1981). La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en didactique des mathématiques*. 2, 2, 165-212.

Duval R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 1, 7-25.

Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 1, 57-74.

Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 1, 235-253.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang. [Also published in Spanish, printed in Colombia].
Duval R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en didactique des mathématiques,* 16, 3, 349-382.
Duval R. (1998). Signe et object (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentation et objet. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* 6, 139-163.
Eisenlhor A. (1877). *Ein mathematisches handbuch der alten Aegypter*. Leipzig.
Ellerbruch L.W., Payne J.N. (1978). A teaching sequence from initial fraction concepts through the addition of unlike fractions. In: Suydam M.N., Rey R.E. (eds.) (1978). *Developing computational skills*. Reston (Va): NCTM. 129-147.
Erdos P., Strauss E. (1971). Representation of 1 by egiptian fractions. *American mathematical monthly*. 78, 302-303.
Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica.* Bologna: Pitagora.
Fandiño Pinilla M.I. (ed.) (2003). *Riflessioni sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora.
Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.
Fernández F. (2001). Proporcionalidad entre magnitudes. In: Castro E. (ed.) (2001). *Didáctica de la Matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis. 533-558.
Figueras O. (1991). *Fractions in realistic mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
Figueras O., Filloy E., Valdemoros M. (1987). Some difficulties which obscure the appropriation of the fraction concept. *Proceedings of PME XI*. Montréal. Vol. I.
Fischbein E. (1985). Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: UMI-Zanichelli. 8-19.
Fischbein E. (1992). Intuizione e dimostrazione. In: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienza*. Editor: B. D'Amore. Bologna: Pitagora. 1-24.
Gardiner A. (1997). *La civiltà egizia*. Torino: Einaudi.
Gardner M. (1979). Le curiose frazioni dell'antico Egitto danno luogo a rompicapi e a problemi di teoria dei numeri. *Le scienze*. 126, 100-102.
Galloway P.J. (1975). *Achievement and attitude of pupils toward initial fractional number concepts at various ages from six through ten years and of decimals at ages eight, nine and ten*. Doctoral thesis. University of Michigan. 21-49.
Giacardi L. (1993). La matematica nell'antico Egitto. In: Frosali A., Ottaviani N. (eds.) (1993). *Il pensiero matematico nella ricerca storica italiana*. Ancona: Irrsae Marche.
Giacardi L., Roero S.C.(1979). *La Matematica delle civiltà arcaiche – Egitto, Mesopotamia, Grecia*. Preface and introduction by Tullio Viola. Torino: Stampatori Didattica.
Gillings R. (1972). *The mathematics in the time of the pharaohs*. Cambridge: Mit.
Giménez J. (1986). Una aproximación didáctica a las fracciones egipcias. *Números*. 14, 57-62.
Giménez J. (1994). Del fraccionamento a las fracciones. *Uno*. 1, 101-118.
Giovannoni L. (1996). Misure di estensione superficiale nella scuola dell'infanzia. *La matematica e la sua didattica*. 4, 394-423.
Godino J.D. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de las matemáticas. In: Gutierrez A. (ed.) (1991). *Area de conocimiento: didáctica de las matemáticas*. Madrid: Síntesis.
Godino J.D., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des mathématiques,* 3, 325-355.

Graeber A.O., Tanenhaus E. (1993). Multiplication and division: from whole numbers to rational numbers. In: Douglas T.O. (ed.) (1993). *Research ideas for the classroom. Middle grades mathematics*. New York: MacMillan. 99-117.

Gray E.M. (1993). The transition from whole numbers to fraction. Relazione presentata all'incontro dell'International Study Group on the Rational Numbers of Arithmetic. Athens (Ga): University of Georgia.

Green G.A. (1969). *A comparison of two approaches, area and finding a part of, and two instructional materials, diagrams and manipulative aids on multiplication of numbers in grade five*. Doctoral thesis. University of Michigan.

Groff P. (1994). The future of fractions. *International journal of mathematics education in science and technology*. 25, 4.

Hahn C. (1999). Proportionnalité et pourcentage chez des apprentis vendeurs. Réflexion sur la rélation mathématiques / réalité dans une formation 'en alternance'. *Educational studies in mathematics*. 39, 229-249.

Hart K. (1980). From whole numbers to fractions and decimals. *Recherches en didactique des mathématiques*. 1, 1, 61-75.

Hart K. (1981). Fractions. In: Hart K. (ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics*. 11-16. Londra: Murray. 68-81.

Hart K. (1985). Le frazioni sono difficili. In: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli. 144-166.

Hart K. (1988). Ratio and proportion. In: Behr M., Hiebert J. (eds.) (1988). *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston (Va): NCTM. 198-219.

Hart K. (1989). Fractions: equivalence and addition. In: Johnson D.C. (1989). *Mathematical framework 8-13. A study of classroom teaching*. Windsor: Nfer-Nelson. 46-75.

Hart K., Sinkinson A. (1989). They're useful. Children's view of concrete materials. *Proceedings PME XIII*. Paris. Vol. II.

Hasemann K. (1979). *On the difficulties with fractions*. Osnabruck: Università di Osnabruck.

Hasemann K. (1981). On difficulties with fractions. *Educational studies in mathematics*. 12, 71-87.

Hunting R.P. (1984a). Learning fractions in discrete and continous quantity contexts'. In: Southwell B., Eyland R., Copper M., Collis K. (eds.) (1984). *Proceedings of the eighth international conference for the PME*. Sydney: Mathematical Ass. of New South Wales. 379-386.

Hunting R.P. (1984b). Understanding equivalent fractions. *Journal of science and mathematics education in S. E. Asia*. Vol. VII. 1, 26-33.

Hunting R.P. (1986). Rachel's schemes for constructing fractions knowledge. *Educational studies in mathematics*. 17, 49-66.

Hunting R.P., Davis G. (1991). *Recent research in psychology: early fraction learning*. New York: Springer-Verlag.

Hunting R.P., Davis G., Bigelow J.C. (1991). Higher order in young children's engagement with a fraction machine. In: Hunting R.P., Davis G. (eds.) (1991). *Recent research in psychology: early fraction learning*. New York: Springer-Verlag. 73-90.

Hunting R.P., Sharpley C.F. (1988) Fraction knowledge in preschool children. *Journal for research in mathematics education*. 19, 2, 175-180.

Hunting R.P., Pepper K.I., Gibson S.J. (1992). Preschooler's schemes for solving partitioning tasks. In: Greeslin W., Graham K. (eds.) (1992). *Proceedings of the sixteenth international conference of PME*. Durham: University of New Hampshire. 281-288.

Ifrah G. (1981). *Storia universale dei numeri*. Milano: A. Mondadori. 1983. Original edition France 1981.

Kamii C., Clark F.B. (1995). Equivalent fractions: their difficulty and educational implications. *Journal of mathematical behaviour*. 14, 365-378.

Kaput J.J., West M.W. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: factors affecting informal reasoning patterns. In: Harel G., Confrey J. (eds.) (1994). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. State University of New York Press. 237-287.

Karplus R., Pulos S., Stage E.K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In: Lesh R., Landau M. (eds.) (1983). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press. 45-90.

Karplus R., Pulos S., Stage E.K. (1994). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational studies in mathematics*. 14, 219-233.

Keijzer R., Buys K. (1996). Groter of kleiner. Een doorkijkie door een nieuwe leergang breuken. [Bigger or smaller. A close look at a new curriculum on fractions]. *Willem Bartjens*. 15, 3, 10-17.

Keijzer R., Terwel J. (2001). Audrey's acquisition of fractions: a case study into the learning of formal mathematics. *Educational studies in mathematics*. 47, 1, 53-73.

Kerslake D. (1986). *Fractions: children's strategies and errors*. Londra: Nfer-Nelson.

Kieren T.E. (1975). On the mathematical cognitive and instructional foundations of rational number. In: Lesh R.A. (ed.) (1976). *Number and measurement*. Columbus (Oh): Eric-Smeac. 101-144.

Kieren T.E. (1976). *Research on rational number learning*. Athens (Georgia).

Kieren T.E. (1980). The rational number construct – its elements and mechanisms'. In: Kieren T.E. (ed.) (1980). *Recent research on number learning*. Columbus: Eric/Smeac. 125-150.

Kieren T.E. (1983). Partitioning. Equivalence and the construction of rational number ideas. In: Zweng M., Green M.T., Kilpatrick J. (eds.) (1983). *Proceedings of IV ICME*. Boston. 506-508.

Kieren T.E. (1988). Personal knowledge of rational numbers. Its intuitive and formal development. In: Hiebert J., Behr M. (eds.) (1988). *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston (Va): NCTM-Lawrence Erlbaum Ass. 162-181.

Kieren T.E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge. Implications for curriculum and instruction. In: Leinhardt R., Putnam R., Hattrup R.A. (eds.) (1992). *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum Ass.. 323-371.

Kieren T.E. (1993a). Bonuses of understanding mathematical understanding. Paper presented at the meeting of the International study group on Rational Numbers. Athens (Ga): University of Georgia.

Kieren T.E. (1993b). Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. In: Carpenter T.P., Fennema E., Romberg T.A. (eds.) (1993). *Rational numbers: an integration of the research*. Hillsdale (NJ): Lawrence Erlbaum Ass. 49-84.

Kieren T.E. (1993c). The learning of fractions: maturing in a fraction world. Paper presented at the meeting on the teaching and learning of fractions. Athens (Ga): University of Georgia.

Kieren T.E., Nelson D., Smith G. (1985). Graphical algorithms in partitioning tasks. *Journal of mathematical behaviour*. 4, 1, 25-36.

Kline M. (1971). *Storia del pensiero matematico*. 2 volumi. Torino: Einaudi. 1991. Original edition. USA 1971

Krich P. (1964). Meaningful vs. mechanical methods. *School science and mathematics*. 64, 697-708.

Lamon S.J. (1993). Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. *Journal for research in mathematics education*. 24, 1, 41-61.

Lancelotti P., Bartolini Bussi M.G. (eds.) (1983). *Le frazioni nei libri di testo. Contenuti teorici e strategie didattiche*. Rapporto Tecnico n. 2. Modena: Comune di Modena.

Leonard F., Sackur-Grisvard C. (1981). Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison des nombres décimaux positifs. *Bulletin APMEP*. 327, 47-60.

Llinares Ciscar S., Sánchez García M.V. (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.

Llinares Ciscar S. (2003). Fracciones, decimales y razon. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. In: Chamorro M.C. (ed.) (2003). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Pearson – Prentice Hall. 187-220.

Loria G. (1929). *Storia delle matematiche*. Milano: Hoepli.

Mack N.K. (1990). Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal for research in mathematics education*. 21, 1, 16-33.

Mack N.K. (1993). Learning rational numbers with understanding: the case of informal knowledge. In: Carpenter T.P., Fennema E., Romberg T.A. (eds.) (1993). *Rational numbers: an integration of research*. Hillsdale (NJ): Lawrence Erlbaum As. 85-106.

Marcou A., Gagatsis A. (2002). Representations and learning of fractions. In: Rogerson A. (ed.) (2002). *The humanistic renaissance in mathematics education*. Palermo: Personal publication. 250-253.

Mariotti M.A., Sainati Nello M., Sciolis Marino M. (1995). Con quale idea di numero i ragazzi escono dalla scuola media? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 18A-18B, 5.

Minskaya G.I. (1975). Developing the concept of number by means of the relationship of quantities. *Soviet studies*. VII. 207-261.

Muangnapoe C. (1975). *An investigation of the learning of the initial concept and oral written symbols for fractional numbers in grades three and four*. Doctoral thesis. University of Michigan.

Nesher P., Peled I. (1986). Shifts in reasoning. The case of extending number concepts. *Educational studies in mathematics*. 17, 67-79.

Neugebauer O. (1957). *Le scienze esatte nell'antichità*. Milano: Feltrinelli. 1974. I ed. orig. USA 1957.

Neuman D. (1993). Early conceptions of fractions: a phenomenographic approach. In: Hirabayashi, Nohda N., Shigematsu K., Lin F. (eds.) (1993). *Proceedings of the seventeeth international conference for PME*. Vol. III. Tsukuba: University of Tsukuba. 170-177.

Noelting G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. *Educational studies in mathematics*. 11. Part I: 217-253; Part II: 331-363.

Noss R. (1998). *Nuove culture, nuove Numeracy*. Bologna: Pitagora.

Novillis C.F. (1976). An analysis of the fraction concepts into a hierarchy of selected subconcepts and the testing of the hierarchical dependencies. *Journal of research in mathematics education*. 131-144.

Novillis C.F. (1980a). Seventh grade students' ability to associate proper fractions with points on the number line. In: Kieren T.E. (ed.) (1980). *Recent research on number learning*. Columbus (Oh): Eric-Smeac.

Novillis C.F. (1980b). Locating proper fractions on number line: effect on length and equivalence. *School science and mathematics*. LXXX, 5, 423-428.

O'Connor M.C. (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?". A case study of a mathematical group discussion. *Educational studies in mathematics*. 46, 143-185.

Ohlsson S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantic of fractions and related concepts. In: Hiebert J., Behr M. (eds.) (1988). *Research agenda for mathematics education: number concepts and operations in the middle grades*. Reston (Va): NCTM-Lawrence Erlbaum Ass. 55-92.

Owens D. (1980). The relationship of area measurement and learning initial fractions concepts by children in grades three and four. In: Kieren T.E. (ed.) (1980). *Recent research on number learning*. Columbus (Oh): Eric-Smeac.

Payne J.N. (1975). Review of research on fractions. In: Lesh R.A. (ed.) (1975). *Number and measurement*. Columbus (Oh): Eric-Smeac.

Peano G. (1924). *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*. Torino: Paravia. A more recent edition is: Firenze: Sansoni, 1983.

Pepper K.L. (1991). Preschoolers knowledge of counting and sharing in discrete quantity settings'. In: Hunting R.P., Davis G. (eds.) (1991). *Recent research in psychology: early fraction learning*. New York: Springer-Verlag. 103-127.

Peralta T. (1989). *Resolución de operaciones de suma y multiplicación de fracciones, en su forma algorítmica y su representación gráfica en los modelos continuo y discreto de fracción de la unidad*. Specialisation thesis, Department of Matemática Educativa. Cinvestav. México.

Piaget J., Inhelder B., Szeminska A. (1948). *La géometrie spontanée de l'enfant*. Paris: PUF. [Italian translation 1976, Firenze: Giunti-Barbèra].

Picutti E. (1977). *Sul numero e la sua storia*. Milano: Feltrinelli.

Pitkethly A., Hunting R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational studies in mathematics*. 30, 5-38.

Post T., Cramer K. (1987). Children's strategies in ordering rational numbers. *Arithmetic teacher*. 10, 33-36.

Pothier Y, Sawada D. (1983). Partitioning: the emergence of rational number ideas in youg children. *Journal for research in mathematics education*. 14, 5, 307-317.

Ratsimba-Rajohn H. (1982). Eléments d'étude de deux méthodes de mesure rationnelle. *Recherches en didactique des mathématiques*. 3, 1, 66-113.

Resnik L.B., Nesher P., Leonard F., Magone M., Omanson S., Peled I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions. *Journal for research in mathematics education*. 20, 1, 8-27.

Resnik L.B., Singer J.A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In: Carpenter P., Romberg T.A. (eds.) (1993). *Rational numbers: an integration of research*. Hillsdale (NJ): Lawrence Erlbaum. 107-130.

Rizzi B. (1988). Il calcolo frazionario egiziano. In 3 puntate. *Incontri con la matematica*. 3, 37-52; 4, 59-72; 5, 61-83. [Roma: Armando, editor B. D'Amore].
Roero C.S. (1987). *Numerazione e aritmetica nella matematica egizia*. Bari: Dedalo.
Rouchier A. et al. (1980). Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs. *Recherches en didactique des mathématiques*. 1, 2, 225-275.
Saenz-Ludlow A. (1990). A case study of the role of utilizing operations with natural numbers in the conceptualization of fractions. In: Boker G., Cobb P., De Mendicuti T.N. (eds.) (1990). *Procedings of the fourteenth international conference for the PME*. México D.F: Conacyt. 51-58.
Saenz-Ludlow A. (1992). Ann's strategie to add fractions. In: Geeslin W., Graham K. (eds.) (1992). *Proceedings of the sixteenth international conference fort he PME*. Vol. II. Durham (N.H.): University of New Hampshire. 266-273.
Saenz-Ludlow A. (1994). Michael's fraction schemes. *Journal for research in mathematics education*. 25, 50-85.
Saenz-Ludlow A. (1995). Ann's fraction schemes. *Educational studies in mathematics*. 28, 101-132.
Sbaragli S. (2003). Le convinzioni degli insegnanti elementari sull'infinito matematico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. Part I: 26A, 2, 155-186. Part II: 26A, 5, 573-588.
Sbaragli S. (2004). *Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico*. Doctoral thesis. University of Bratislawa. Published in Italian and English by GRIM of Palermo: http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm
Sbaragli S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica*. 1.
Schubauer-Leoni M.L. (1996). Il contratto didattico come luogo di incontro, di insegnamento e di apprendimento. In Gallo E., Giacardi L., Roero C.S. (eds.) (1996). *Conferenze e seminari 1995-1996*. Associazione Subalpina Mathesis - Seminario di Storia delle Matematiche "T. Viola", Torino 17, 1, 7-27.
Sensevy G. (1994). Institutions didactiques, régulation, autonomie. Une étude des fractions au cours moyen. Doctoral thesis in Education. Aix-en-Provence.
Sensevy G. (1996a). Fabrication de problèmes de fraction par des élèves à la fin de l'enseignement élémentaire. *Educational studies in mathematics*. 30, 261-288.
Sensevy G. (1996b). Le temps didactique et la durée de l'élève. Étude d'un cas au cours moyen: le journal des fractions. *Recherches en didactique des mathématiques*. 16, 1, 7-46.
Sethe K. (1916). Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägypten. *Schriften der Wissenschaftlichen Gesellschaft in Strassburg*. XXV.
Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflection on processes and objects as differents sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*. 22, 1-36.
Singh P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational studies in mathematics*. 43, 271-292.
Sluser T.F. (1962). *A comparative study of division of fractions in which an explanation of the reciprocal principle is the experimental factor*. Doctoral thesis. University of Michigan.
Socas M. (2001). Problemas didácticos entre el objeto matemático y su representación semiótica. In: AA. VV. (2001). *Formación del profesorado e investigación en educación matemática*. Vol. III. La Laguna: University of La Laguna. 297-318.

Steffe L.P., Olive J. (1990). Constructing fractions in computer microworlds. In: Booker G., Cobb P., De Mendicuti T.N. (eds.) (1990). *Proceedings of the fourteenth international conference for the PME*. México DF: Conacyt. 59-66.

Steffe L.P., Parr R.B. (1968). *The development of the concepts of ratio and fraction in the fourth, fifth and sixth year of elementary school*. Washington D.C.: Department of Health, Education and Welfare.

Stenger D.J. (1971). An experimental comparison of two methods of teaching the addition and subtraction of common fractions in grade five. *Dissertation abstracts*. 32A. University of Cincinnati.

Streefland L. (1978). Subtracting fractions with different denominators. Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction. *Educational studies in mathematics*. 9, 51-73.

Streefland L. (1979). Young children – ratio and proportion. *Educational studies in mathematics*. 10, 403-420.

Streefland L. (1982). Subtracting fractions with different denominators. *Educational studies in mathematics*. 13, 233-255.

Streefland L. (1983). Aanzet tot een nieuwe breukendidactiek volgens wiskobas. [Impuls for a new pedagogy on fractions according to wiskobas]. Utrecht: Owoc.

Streefland L. (1984a). *How to teach fractions and learning fractions*. Utrecht: Owoc.

Streefland L. (1984b). Basic principles for teaching and learning fractions. In: Bell M. et al. (eds.) (1984). *Theory, research and practice in mathematical education*. Nothingam: Shell Center for Mathematical Education.

Streefland L. (1984c). Search for the roots of ratio: some thoughts on the long term learning process (toward… a theory). *Educational studies in mathematics*. 15, 327-348; 16, 75-94.

Streefland L. (1987). Free production of fraction monographs. In: Bergeron J.C., Herscovics N., Kieran C. (eds.) (1987). *Proceedings of the XI PME*. Montreal. Vol. I. 405-410.

Streefland L. (1990). *Fractions in realistic mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Streefland L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: a paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer.

Streefland L. (1993). Fractions: a realistic approach. In: Carpenter T.P., Fennema E., Romberg T.A. (eds.) (1993). *Rational numbers: an integration of research*. Hillsdale (NJ): Lawrence Erlbaum Ass. 289-325.

Struve W.W. (1930). Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museum der Schönen Künste in Moskau. *Quellen und studien zur Geschichte der Mathematik*. Parte I. *Quellen*. 1, 30.

Suydam M.N. (1979). Review of recent research related to the concepts of fractions and the ratio. *Critical reviews in mathematics education*.

Tahan M. (1997). *L'uomo che sapeva contare. Le mille e una notte dei numeri*. Firenze: Salani.

Vaccaro V. (1998). Un mondo fantastico per le frazioni. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 21A, 4, 321-335.

Valdemoros M. (1992). *Análisis de los resultados obtenidos a través de un examen exploratorio del 'Lenguaje de las fraciones'*. Part I. México: Department of Matemática Educativa. Cinvestav.

Valdemoros M. (1993a). *La construcción del lenguaje de las fracciones y de los conceptos involucrados en él*. Doctoral thesis. Department of Matemática Educativa. Cinvestav, México.

Valdemoros M. (1993b). The language of fractions as un active vehicle for concepts. *Proceedings of XV Annual meeting of the North American Chapter of the PME*. I, 1233-1239.
Valdemoros M. (1993c). La construcción de significados a través de distintos sistemas simbólicos. *Memorias de lV Simposio internacional sobre investigación en Matemática Educativa*. 273-284.
Valdemoros M. (1994a). Various representations of the fraction throught a case study. *Proceedings of the XIX PME*. II, 16-23.
Valdemoros M. (1994b). Fracciones, referentes concretos y vínculos referenciales. *Memorias de la VIII Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de profesores e Investigación en Matemática Educativa*. 21-30.
Valdemoros M. (1997). Recursos intuitivos que favorecen la adición de fracciones. *Educación matemática*. 9, 3, 5-17.
Valdemoros M. (1998). La constancia de la unida en la suma de fracciones: un estudio de caso. In: Hitt F. (ed.) (1998). *Investigaciones en Matemática Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamerica. 465-481.
Valdemoros M. (2001). Las fracciones, sus referencias y los correspondientes significados de unidad: studio de casos. *Educación matemática*. 13, 1, 51-67.
Valdemoros M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Relime*. 7, 3, 235-256.
Valdemoros M., Orendain M., Campa A., Hernández E. (1998). La interpretación ordinal de la fracción. In: Hitt F. (ed.) (1998). *Investigaciones en Matemática Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamerica. 441-455.
Van der Waerden B. (1954). *Science awakening*. Groningen: Noordhoff.
Van der Waerden B. (1980). The 2:n tale in the Rhind papyrus. *Centaurus*.
Vergnaud G. (1983). Multiplicative structures. In: Lesh R., Landau M. (eds.) (1983). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press. 127-174.
Vergnaud G. (1984). Interactions sujet-situations. Comptes rendus 3ème école d'été en didactique des mathématiques. Orléans.
Vergnaud G. (1985a). Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche. In: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: UMI-Zanichelli. 20-45.
Vergnaud G. (1985b). Il campo concettuale delle strutture moltiplicative e i numeri razionali. In: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: UMI-Zanichelli. 86-121.
Vergnaud G. (1988). Moltiplicative structures. In: Hiebert J., Behr M.J. (eds.) (1988). *Number concepts and operations in the middle grades*. Hillsdale (NJ): Lawrence Erlbaum Ass. 141-161.
Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactiques des mathématiques*. 10, 133-169.
Vergnaud G. (1992). Concetti e schemi in una teoria operatoria della rappresentazione. In: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. Editore B. D'Amore. Bologna: Pitagora. 103-124.
Vygotskij L.S. (1962). *Thought and language*. Cambridge, MIT Press.
Viola T. (1985). Le opinioni che gli antichi Greci avevano sulla matematica delle culture precedenti. *Scienza e filosofia. Saggi in onore di L. Geymonat*.

Vogel K. (1958). *Vorgriechische mathematic*. Vol. 1. *Vorgeschichte und Ägypten*. Hannover: Hermann Schroeder.
Wachsmuth I., Lesh R., Behr M. (1985). Order and equivalence of rational numbers: a cognitive analysis. *Journal of research in mathematics education*. 16, 18-36.
Weame D. (1990). Acquiring meaning for decimal fraction symbols: a one year follow-up. *Educational studies in mathematics*. 21, 545-564.
Weame D., Hiebert J. (1988). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: testing a local theory using decimal numbers. *Journal for research in mathematics education*. 19, 371-384.
Weame D., Kouba V.L. (2000). Rational numbers. In Silver E., Kenney P.A. (eds.) (2000). *Results from the 7th mathematics assessment of the national assessment of educational progress*. Reston (Va): NCTM. 163-192.
Williams H.B. (1975). *A sequential introduction of initial fraction concepts in grades two and four and remediation in grade six*. Research Report. University of Michigan: School of Education.
Wilson J.A. (1967). The effect of teaching the rationale of the reciprocal principle in the division of fractions through programmed instruction. *Dissertations abstracts*. 23A. University of Pittsburg.
Woodcock G.E. (1986). Estimating fractions: a picture is worth a thousand words. In: Shoen H.L., Zweng M.J. (eds.) (1986). *Estimation and mental computation*. Reston (Va): NCTM.
Zazkis R. (1998). Divisors and quotients: acknowledging polysemy. *For the learning of mathematics*. 18, 3, 27-29.

Martha Isabel Fandiño Pinilla

Le frazioni, aspetti concettuali e didattici

Prefazione di Athanasios Gagatsis

2005 - Bologna: Pitagora editore

Indice

Prefazione

Athanasios Gagatsis

È ancora lecito, al giorno d'oggi, interessarsi alle frazioni?
Le frazioni sono state, nel passato, un soggetto di ricerca e di insegnamento privilegiato, ma il grande sviluppo dei mass media e le ricerche in Didattica della Matematica hanno contribuito a pesanti modifiche dei programmi scolastici ed all'approccio didattico della matematica scolastica. Questo grande sviluppo e queste modifiche hanno posto il problema che si esprime con la mia domanda di esordio: alcuni si chiedono se davvero valga la pena interessarsi alla didattica delle frazioni.
Questo libro è la prova migliore che, ancora al giorno d'oggi, una riflessione sulle frazioni ha molto da offrire alla comunità dell'Educazione matematica. L'Autrice coglie questa necessità, presentando in uno stesso volume differenti approcci di studio delle frazioni, riuniti in un insieme coerente e potente, di grande impatto. Queste diverse dimensioni sembrerebbero costituire, ed hanno in passato determinato infatti, domini di ricerca indipendenti. Al contrario, l'Autrice compie un'opera di coesione di grande efficacia sia nel presentarli separatamente, sia nel mostrarne le intime connessioni. Le sue fonti di riflessioni sono moltissime ed a dimostrarlo c'è l'enorme bibliografia costituita dai soli testi citati e spesso commentati nel libro.

Le frazioni

Storia delle frazioni

La trasposizione didattica

Difficoltà nell'apprendimento
delle frazioni

Quadro teorico delle ricerche didattiche sulle frazioni

Noetica e semiotica delle frazioni

L'idea di presentare in un unico volume un insieme coerente di questi diversi domini di ricerca e di studio relativi alle frazioni, dunque, appare come un compito molto difficile e perfino velatamente provocatorio. Come appare evidente dalla presentazione stessa dei diversi domini, che ho schematizzato nel precedente grafico, l'Autrice affronta questa sfida presentando un libro completo dal punto di vista scientifico e didattico. In tutto il libro appaiono in maniera precisa e scientifica dei metodi e dei concetti della Didattica della Matematica che sono al centro delle ricerche attuali; la trasposizione didattica, la semiotica, il contratto didattico, gli ostacoli epistemologici, didattici ed ontogenetici, le situazioni didattiche, sono solo alcuni esempi di tali concetti che l'Autrice utilizza in modo scientifico e fecondo per conseguire il suo obiettivo finale che è dunque lo studio multidimensionale delle frazioni.
In più, l'Autrice non si accontenta affatto di presentarci delle considerazioni teoriche relative alle frazioni: una parte significativa del suo libro fornisce infatti dei saperi matematici molto importanti per la riflessione sull'insegnamento delle frazioni. Il capitolo 5 è un buon esempio di ciò; esso contiene vari modi di intendere il concetto di frazione; la frazione come quoziente, la frazione come rapporto, la frazione come operatore sono solo alcuni degli esempi che caratterizzano questo capitolo.
L'ultimo capitolo del libro, l'8, è un altro esempio di informazioni molto utili relative all'insegnamento delle frazioni: osservazioni e raccomandazioni introduttive, puntuali e generali, si combinano ad arte, creando un insieme coerente e dando un'immagine della grande potenza dell'intero libro.
Ricerca ed insegnamento, concetti di Didattica della Matematica e osservazione della classe, sapere matematico e sapere scolare si combinano nei diversi capitoli e danno come risultato un libro unico nel suo genere, indispensabile per gli insegnanti in servizio e per quelli in formazione, così come per i ricercatori in Didattica della Matematica che lavorano nel campo. L'unità di visione che caratterizza aspetti apparentemente diversi è un nuovo modo di vedere le cose; e la bibliografia è davvero prestigiosa, raccolta con puntiglio.

Un libro da leggere, dunque, un libro da studiare e meditare.

Athanasios Gagatsis
Docente di Didattica della Matematica
Vicepreside della *Scuola di scienze sociali e dell'educazione*
Nicosia, Università di Cipro

Premessa

Avevo in mente da vari anni di scrivere quel che penso a proposito del processo di insegnamento – apprendimento delle frazioni perché ho accumulato una grande esperienza in questo settore. Prima di diventare docente universitaria, infatti, sono stata maestra elementare, passando poi alla scuola secondaria. E, come spesso capita in America Latina, anche da docente universitaria ho avuto quasi tutti gli anni incarichi di docenza anche nella scuola secondaria, incarichi che ho sempre accettato di buon grado, dato che mi occupavo di ricerca in didattica e dunque avere a disposizione delle classi reali era una fonte inesauribile di informazioni.
Fra tutti gli argomenti di Matematica che ho avuto modo di insegnare e di far apprendere ai miei allievi, posso sicuramente dire che uno dei più ostici sono sempre state le frazioni.
Mi spiego. Ho insegnato anche Analisi (che da noi si chiama Calcolo) ed ho constatato che le vere difficoltà degli studenti nel gestire questi sofisticati strumenti non erano dovute a particolari lacune nell'apprendimento del Calcolo stesso, ma in argomenti precedenti, in formalismi o in concettualizzazioni apparentemente banali che avrebbero dovuto apprendere talvolta addirittura nella scuola primaria. Queste lacune, nonostante le quali gli studenti avevano ugualmente potuto proseguire negli studi, si rivelavano mortali al momento di doverle dare per scontate in situazioni considerate da noi docenti assai più complesse.

Se non ho iniziato prima a scrivere questo libro è perché le obiettive condizioni del mio Paese sono ancora tali che raggiungere e disporre di una bibliografia significativa supera spesso qualsiasi sforzo; ma io volevo costruire un testo che tenesse conto di "tutta" la ricerca; per non peccare di vanità, diciamo "almeno della massima quantità possibile"...
Questo mi è stato possibile vivendo in Italia, entrando a far parte del Nucleo di Ricerca Didattica di Bologna, accedendo alla sterminata bibliografia messa a nostra disposizione da una certosina e capillare opera di raccolta tematica avvenuta in oltre 30 anni. È stato utile anche confrontare le mie esperienze con quelle di decine di altri insegnanti non solo in vari Paesi dell'America Latina, ma pure in Italia, Spagna, Cipro, Grecia,… e soprattutto Svizzera, dove da qualche anno tengo corsi regolari presso l'Alta Scuola Pedagogica di Locarno, per la formazione degli insegnanti di scuola primaria.

Questo libro, che ora vede la luce, raccoglie le mie esperienze e quelle di molti altri ricercatori, con una completezza che non sarà certo il 100% degli studi internazionali, ma che certo è abbastanza vasta (basta guardare la bibliografia). Ho cercato di compiere un lavoro di servizio sia per i ricercatori che volessero proseguire sia e soprattutto per gli insegnanti che si giudicano insoddisfatti di come i propri allievi costruiscono il concetto di frazione.
Mi auguro che questo obiettivo sia stato almeno in parte raggiunto.
Il libro è risultato molto più lungo di quanto avessi preventivato, ma è colpa della ricerca bibliografica; più mi avventuravo nelle riviste, più le citazioni crescevano.
Tanto che, per non scrivere altre centinaia di pagine, ho deciso di evitare di spiegare nei dettagli le parole oggi più in uso nella Didattica della Matematica, rimandando per questo a D'Amore (1999). Ogni volta che farò uso di una parola tecnica della Didattica, per evitare continue citazioni, appare un asterisco.
Per esempio: contratto didattico* significa che il termine non è quello che potrebbe apparire in un suo uso comune colloquiale, ma è termine tecnico dell'attuale Didattica della Matematica. In un capitolo (il **7.**) dovrò spiegare un po' alcuni di questi termini, ma mi sono limitata al minimo indispensabile. Dunque, il Lettore curioso è invitato a proseguire consultando la mia stessa fonte; ma per poter leggere questo libro, le mie considerazioni nel capitolo **7.** dovrebbero essere sufficienti.
Ancora, per non eccedere nella vastità del tema ho dovuto fare delle rinunce; per esempio, non mi occupo qui della didattica assistita dalle nuove tecnologie, anche se nel mio Paese ho avuto responsabilità notevoli in questo senso (anche ministeriali) ed ho accumulato molta esperienza. Dovevo fare una scelta e l'ho fatta, drasticamente.

Voglio anche far subito notare che uso sempre il simbolo $\frac{a}{b}$ e mai ${}^{a}\!/\!_{b}$ per motivi che rivelerò solo nel paragrafo **7.2.2.**

È divertente come la gente comune a volte parla di frazioni o di termini ad esse legati; con una certa sorpresa ho scoperto che in Italia, in TV, giornalisti e politici usano la locuzione "ridurre ai minimi termini" come sinonimo di "ridurre al minimo". Recentemente, in TV, un politico ha detto: «Bisogna ridurre i pericoli delle linee ferroviarie ai minimi termini»; se non fosse stata un'occasione tragica, l'avrei trovato ridicolo; nel mio Paese questo non ha l'analogo. In realtà, se una frazione viene ridotta ai minimi termini, infatti, il suo valore non cambia, dunque…
Ho così pensato di dedicare un po' della mia attenzione all'uso che della frazione si fa nel linguaggio ordinario colloquiale, il che non mi pare privo di interesse, anche per motivi didattici.

Ed ora, i ringraziamenti.
Il mio "itagnolo" scritto (un miscuglio di italiano e spagnolo) non mi avrebbe mai permesso di giungere ad un libro pubblicabile, se non avessi avuto un aiuto molto concreto e speciale, quello di Bruno D'Amore. Spesso le mie frasi venivano a lungo

discusse con lui, per capire fino in fondo che cosa volevo dire, prima che lui le trasformasse in italiano accettabile; questo esercizio di chiarimento estremo mi è stato di grande utilità perché mi ha costretto a riflettere sempre molto in profondità.
Bruno mi ha quotidianamente assistito per vari mesi, con una premura e con una dedizione che ancora mi stupiscono e mi onorano. Mi ha anche aiutato parecchio nella ricerca di citazioni bibliografiche e nella lettura di moltissime fonti autentiche. Mi ha dato una mano nel reperimento delle illustrazioni (alla cui realizzazione ha contribuito anche mio figlio Oscar).
Infine, Bruno mi ha aiutato a fare chiarezza in certa terminologia di Didattica che a volte sembra ancora controversa, permettendomi di discuterne personalmente con Guy Brousseau, sempre prodigo di tempo, con Raymond Duval, con Athanasios Gagatsis, con Juan Godino, con Salvador Llinares, con Ubiratan D'Ambrosio, con Luis Radford e con altri ricercatori con i quali sono entrata in contatto in questi anni, in Italia ed altrove. Di tutto ciò voglio ringraziare esplicitamente Bruno.

Voglio anche ringraziare i miei lettori parziali, coloro che mi hanno ascoltato parlare di queste cose durante seminari, corsi di aggiornamento, conferenze, convegni etc. Le loro osservazioni, le loro riflessioni sono state per me preziose.

Non posso dimenticare e mi fa piacere anzi ricordare l'amicizia personale e la stima reciproca che mi legano ad Athanasios Gagatsis che ha accettato immediatamente di scrivere la Prefazione; e l'editore Franco Stignani che ha accettato subito, di buon grado, la pubblicazione di questo lavoro quando ancora la sua stesura non era del tutto terminata.

1
Dai numeri naturali ai razionali assoluti e dai numeri interi ai razionali

In un libro come questo, agile ed essenziale ma critico, che vorrebbe essere uno strumento dapprima di riflessione culturale e solo dopo di lavoro professionale, non si può dire tutto; d'altra parte, a volte, è anche bene non dire tutto; traggo questa convinzione dalle frasi di due grandi:
«Nulla egli sappia per averlo udito da voi, ma solo per averlo compreso da sé: non impari la scienza: la scopra. Se nella sua mente giungerete a sostituire l'autorità della ragione, non ragionerà più; non sarà che lo zimbello dell'opinione altrui» (Jean-Jacques Rousseau);
«Non vi spiego tutto, per non privarvi del piacere di apprenderlo da soli» (René Descartes).
D'altra parte, però, forse a volte è bene accompagnare il Lettore per mano, a rischio di annoiarlo ripetendogli cose che sa già. Dunque, prima di entrare nel tema *didattica delle frazioni*, vediamo un po' di Matematica al proposito.

1.1. DUE PAROLE SUI NUMERI NATURALI

Diamo per scontato che tutti i Lettori di questo libro sappiano che cosa intendere con *numero naturale* (si noti bene: non dico "definire", ma "che cosa intendere con"…).
I numeri naturali sono 0, 1, 2, 3, 4, … ed il loro insieme si indica di solito con N. [C'è chi non ama iniziare da 0, ma questo poco cambia la sostanza; io metterò lo 0 in N; c'è anche chi ama usare ω al posto di N, ma la cosa è troppo raffinata per stare qui a spiegarla; i curiosi potranno presto vedere: Arrigo, D'Amore, Sbaragli (cds)].

La cardinalità di N è infinita; anzi, costituisce l'infinità "più piccola" possibile e si chiama: "cardinalità del numerabile" [per motivi diversi, tale cardinalità si può indicare con **n** o con $\aleph_0$ (si legge: alef zero)].[1]
In N si possono dare vari ordinamenti; è chiamato *ordinamento naturale* quello che viene più spontaneo immaginare: 0<1<2<3<4<5<… ("<" si legge "è minore di"); diciamo che, se a e b sono naturali, allora è vera l'affermazione $a<b$ (ordine stretto) se e solo se esiste un naturale $c\neq0$ tale che $a+c=b$ (per esempio 2<5 dato che esiste 3 tale che 2+3=5).
Se c è 1, allora b (che in questo caso si può ovviamente scrivere a+1) si chiama *successivo* [o *successore*] *di a* (per esempio, 3 è successivo di 2 dato che 2+1=3).
Se si ammette anche il caso in cui c sia 0, allora, invece di usare il segno <, si deve usare ≤ (ordine largo) che si legge "è non maggiore di" o "è minore o uguale a". Dunque, per esempio, è vero che 3≤4 ed è vero anche se al posto di ≤ si mette <; è vero che 3+1≤4, ma è falso se al posto di ≤ si mette <.
L'insieme N non solo è infinito, ma è anche illimitato, nel senso che non esiste un numero in N più grande di tutti gli altri; in altre parole, dato un numero naturale m grande a piacere ne esiste senz'altro un altro più grande (per esempio: m+1).[2] [In realtà, N è *superiormente* illimitato, per quanto detto; ma è invece *inferiormente* limitato dato che 0 costituisce ovviamente il suo limite inferiore].

Diamo anche per scontato che tutti i Lettori di questo libro sappiano che cosa intendere con addizione e moltiplicazione, operazioni binarie definite per coppie ordinate di elementi di N cioè, come si dovrebbe dire in linguaggio matematico, definite nel prodotto cartesiano N×N.
Questo significa che, se con + e × si indicano le usuali operazioni rispettivamente di addizione e moltiplicazione, allora, prese coppie qualsiasi di numeri naturali (a; b), tanto $a+b$ quanto $a\times b$ sono ancora numeri naturali.

Le cose vanno assai peggio con la sottrazione e con la divisione, operazioni utili assai, ma non definibili in generale in N, per motivi tra loro del tutto analoghi:
- a volte parrebbe anche lecito eseguire una sottrazione in N; per esempio 7-2 dà 5 che ancora sta in N; ma in generale no, il risultato di una sottrazione tra naturali non sta in N; per poter parlare in generale di sottrazione in N tra due numeri naturali qualsivoglia a e b (cioè scrivere a-b) bisogna porre una condizione molto restrittiva: $b\leq a$;

[1] Trattare questa questione non riguarda il mio tema; rimando dunque i curiosi a D'Amore, Matteuzzi (1975) o ad Arrigo, D'Amore (1992) o ad Arrigo, D'Amore, Sbaragli (cds).
[2] È su questa osservazione che si gioca il fantastico finale del famoso divertentissimo racconto di Cesare Zavattini: *La gara mondiale di matematica*, adatto ad essere letto e commentato anche in aula di scuola primaria. Questo racconto fa parte della opera prima di Zavattini, quel *Parliamo tanto di me* che gli diede immediata fama quando ancora non aveva 30 anni (Milano: Bompiani; 1931; ristampa più recente: 2003; in questa ristampa, il racconto si trova nel capitolo XVI, alle pagine 68-70).

- a volte parrebbe anche lecito eseguire una divisione in N; per esempio 8:2 dà 4 che ancora sta in N; ma in generale no, il risultato di una sottrazione tra naturali non sta in N; per poter parlare in generale di divisione in N tra due numeri naturali qualsivoglia a e b (cioè scrivere a:b o, come si fa nel mio Paese di origine ed in quasi tutto il mondo, $a \div b$) bisogna porre una condizione molto restrittiva: che a sia un multiplo di b (cioè che esista un naturale c tale che $a=b\times c$).

Siccome queste condizioni sono piuttosto forti e dunque assai limitative, siamo costretti ad ammettere che sottrazione e divisione non sono operazioni definibili in N.
Abbiamo interessanti conseguenze matematiche:

- per esempio, non possiamo risolvere in N l'equazione $x+3=2$ perché questo ci porterebbe a prendere in considerazione la "sottrazione" 2-3 che in N non è ammessa e dunque, in realtà, non si può né scrivere né pensare;
- per esempio, non possiamo risolvere in N l'equazione $3x=2$ perché questo ci porterebbe a prendere in considerazione la "divisione" 2:3 che in N non è ammessa e dunque, in realtà, non si può né scrivere né pensare.

Per poter eseguire

- l'operazione di sottrazione, si deve passare dall'insieme N dei numeri naturali all'insieme Z dei numeri interi (quelli che spesso, a scuola, in Italia, si chiamano "relativi"); si dice che si "amplia" N passando a Z; in Z l'operazione di sottrazione a-b è definibile senza restrizioni;
- l'operazione di divisione, si deve passare dall'insieme N dei numeri naturali all'insieme Q^a dei numeri razionali assoluti; si dice che si "amplia" N passando a Q^a; in Q^a l'operazione di divisione a:b è definibile senza restrizioni (o, meglio, con la sola inevitabile restrizione $b\neq0$ che discuteremo tra poche righe).

In questo libro, in diverse modalità ed accezioni, mi occuperò proprio di quest'ultimo insieme Q^a.

1.2. COME SI PASSA DAI NUMERI NATURALI N AI NUMERI RAZIONALI ASSOLUTI Q^a

Se abbiamo i numeri naturali 2 e 3, a volte ci farebbe comodo poter scrivere 2:3, come abbiamo visto, ma in N ciò non è neppure pensabile. L'idea geniale è allora quella di non parlare di 2:3 ma di tutte le coppie che, in N, *potrebbero* avere lo stesso significato, qualora l'operazione *potesse* essere eseguita.
Bisogna però stare molto molto attenti ad uno spauracchio tipico di questi argomenti. Affrontiamo l'argomento con calma.
Che cosa significa dividere a per b (a:b)? Significa trovare un numero c tale che $b\times c$ sia proprio a.
Ora, se b è 0 ma a è diverso da 0 (per esempio 5:0), qualsiasi c si prenda (per esempio 7), $b\times c$ è *sempre* 0 (per esempio 0×7=0) e dunque non darà *mai* un a diverso da 0;

d'altra parte, però, se non solo b è 0, ma anche a è 0 (dunque $a=b=0$), la "divisione" 0:0 è ancora più… stravagante: qualsiasi numero c moltiplicato per il divisore b darebbe il dividendo a.
Ridicolo, assurdo, mostruoso, dunque da evitare. È per questo che, nella definizione di divisione $a:b$, si impone che il divisore b sia non nullo, cioè diverso da zero.

Torniamo all'inizio. La divisione dunque non va definita tra coppie di numeri naturali o, come si usa dire in Matematica, nell'insieme prodotto cartesiano N×N, ma piuttosto in N per N privato dello zero, cioè in N×(N-{0}) [qualcuno scrive $N\times N^+$]. Dunque, nella coppia ordinata (a; b), a è un naturale qualsiasi, ma b ha una restrizione: non può essere zero.

Ora che abbiamo stabilito l'àmbito numerico nel quale muoverci, torniamo al problema necessario di ampliare N per poter eseguire le divisioni. Sappiamo che eseguire 2:3, se fosse possibile, sarebbe come eseguire 4:6 oppure 12:18 oppure 200:300; sarebbe come dire che, rispetto a quel che vogliamo ottenere, si possono identificare tutte queste scritture. Notiamo che affermare «2:3 è come 12:18» aritmeticamente significa che «2×18=12×3».
Il Lettore noti la finezza: la scrittura 2:3 non esiste in N per i motivi detti sopra, e quindi non potremmo mai scrivere un'uguaglianza come 2:3=12:18; ma questa la possiamo scrivere come moltiplicazione 2×18=12×3, che ha lo stesso significato ed è lecita.

In Matematica si esprime tutto ciò nel modo seguente [se il Lettore non avvezzo alle cose matematiche si perde o si spaventa alle prossime righe, non si preoccupi e passi pure direttamente a dove troverà di nuovo il segno ➔]:

Consideriamo le coppie (a; b), (c; d) dell'insieme N×(N-{0}), dove a, b, c, d sono naturali qualsiasi, con le sole restrizion $b\neq0$, $d\neq0$; consideriamo la seguente relazione (che indichiamo con **eq**): [(a; b) **eq** (c; d)] se e solo se [$a\times d = c\times b$].
Questa relazione appartiene ad una categoria privilegiata, le relazioni di equivalenza, in quanto è [tralascio le dimostrazioni o le affido al Lettore volonteroso e curioso; in ogni caso, si trovano in qualsiasi testo di algebra]:

- *riflessiva*: per ogni coppia (a; b) di N×(N-{0}), vale la seguente affermazione: (a; b) **eq** (a; b);
- *simmetrica*: per ogni coppia di coppie (a; b), (c; d) dell'insieme N×(N-{0}), vale la seguente affermazione: ***se*** [(a; b) **eq** (c; d)] ***allora*** [(c; d) **eq** (a; b)];
- *transitiva*: per ogni terna di coppie (a; b), (c; d), (e; f) dell'insieme N×(N-{0}), vale la seguente affermazione: ***se*** {[(a; b) **eq** (c; d)] ***e*** [(c; d) **eq** (e; f)]} ***allora*** [(a; b) **eq** (e; f)].

Stando così le cose, l'insieme N×(N-{0}) di partenza si può ripartire, suddividere in classi di equivalenza con una operazione che si chiama "passaggio al quoziente" e che si usa indicare così: [N×(N-{0})] / **eq**.
Tale insieme di classi è più o meno fatto come segue:
[N×(N-{0})] / **eq** = {[(2;3), (4; 6), (12; 18), (200; 300), ….], [(1; 2), (3; 6), (9; 18), (10; 20), …], […], […], …}.
Per essere più espliciti: [N×(N-{0})] / **eq** contiene infinite classi, quelle indicate con le parentesi quadrate, che ne sono gli elementi; dentro ciascuna classe ci sono tutte quelle infinite coppie di numeri naturali che, se avessero potuto essere divisi tra loro, avrebbero dato lo stesso risultato…
In questo modo abbiamo evitato di scrivere e dunque definire l'operazione di divisione **:** in N×(N-{0}), visto che è vietato, ma abbiamo comunque individuato tutte le coppie di naturali che sono tra loro in quella relazione definita sopra.
[N×(N-{0})] / **eq** è proprio l'insieme che volevamo ottenere, proprio Q^a. Ogni classe di coppie equivalenti si chiama numero razionale assoluto.
Ecco dunque che siamo riusciti a definire in modo sufficientemente corretto l'insieme Q^a dei numeri razionali assoluti che amplia N.
Volendo, visto che, per esempio, (2;3), (4; 6), (12; 18), (200; 300), … sono tutte coppie tra loro equivalenti, possiamo prenderne una sola come "rappresentante" di quella classe, e non stare sempre a scrivere tutta la classe; per esempio, scegliamo (2; 3) che è quella che ha i due elementi minori (c'è chi la chiama "ridotta ai minimi termini"). Tale coppia si può scrivere così: (2; 3) oppure $\frac{2}{3}$ oppure $0,\overline{6}$ (dato che $3\times 0,\overline{6}$ =2).
Dunque, un numero razionale assoluto è una classe che contiene infinite coppie tra loro equivalenti di naturali; ma, per poterlo indicare, essendo un po' troppo … ingombrante scrivere infinite coppie, si sceglie un rappresentante che si può esprimere in differenti scritture.

➔
Il Lettore abituato alle cose matematiche non si sarà certo spaventato, anzi: troverà mille e più lacune in quanto ho scritto nelle righe precedenti; a lui chiedo solo che apprezzi lo sforzo divulgativo e riassuntivo.
Ma il Lettore poco avvezzo al linguaggio matematico probabilmente si è spaventato ed ha fatto ad un certo punto un bel salto fin qui. Come capirà tra poco, può stare tranquillo: volevo infatti proprio mostrare che questa *non* può essere la strategia didattica per introdurre i numeri razionali nella scuola primaria o nella scuola media. Questa strategia, adatta alla Matematica ed ai matematici, non è percorribile neppure nella scuola media superiore… Molti di noi l'hanno incontrata solo negli studi universitari, casomai assai più formalmente corretta e completa.

Fatto tutto ciò, finalmente in Q^a è definibile l'operazione di divisione in generale: per dividere la coppia (a; b) (con $b \neq 0$) per la coppia (c; d) (con $d \neq 0$), basta moltiplicare (a; b) per (d; c) (con la solita e necessaria condizione aggiuntiva $d \neq 0$).

1.3. IL PASSAGGIO DAI NUMERI INTERI Z AI NUMERI RAZIONALI Q

Il Lettore certo ricorderà che a scuola non si usavano solo le scritture $\frac{2}{3}$ oppure $0,\overline{6}$, ma anche quelle dotate di segno, come $\frac{-2}{+3}$ che poi si riassumeva in $-\frac{2}{3}$. Se ampliamo l'insieme Q^a (razionali assoluti) includendo anche quelli dotati di segno, si passa a Q, l'insieme dei razionali.
Da un punto di vista matematico rigoroso, la cosa non è affatto più complicata; invece di definire una relazione di equivalenza <u>**eq**</u> in N×(N-{0}) se ne definirà una del tutto analoga in Z×(Z-{0}); non cambia molto e le cose non si complicano affatto.
Poiché però lo studio proposto in questo libro riguarda la scuola primaria e media, possiamo limitarci ai soli numeri razionali assoluti Q^a; le cose che qui dirò sarebbero facilmente adattabili, ma la problematica didattica è di maggior interesse e vastità così.

1.4. UNO SGUARDO A Q^a

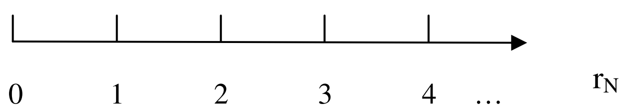
Anche i numeri razionali hanno la cardinalità del numerabile come N, il che è abbastanza semplice da provare. A prima vista, l'insieme Q^a sembra avere molti elementi in più di N, ma non è vero. Qualcuno potrebbe pensare ingenuamente: «Va bene, sono tutti infiniti e l'infinito è sempre uguale»; in verità, le cose non stanno così, perché esistono insiemi infiniti di diversa cardinalità: il numerabile, il continuo etc. Siccome però questo argomento esula dalla presente trattazione, mi limito a rinviare i curiosi a: D'Amore, Matteuzzi, 1975; Arrigo, D'Amore, 1993; Arrigo, D'Amore, Sbaragli, cds.

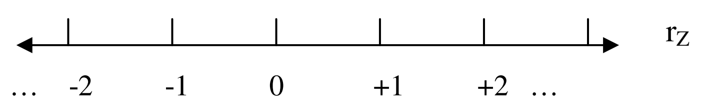
[Se il Lettore non avvezzo alle cose matematiche si perde o si spaventa alle prossime righe, non si preoccupi e passi pure direttamente a dove troverà nuovamente il segno ➔].

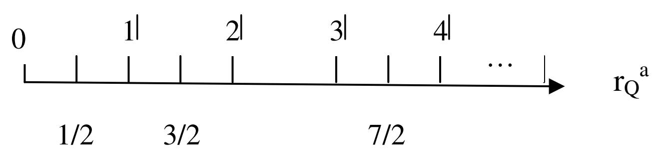
In Q^a sono definibili tanti ordini, ma qui ci limitiamo all'estensione dell'ordine naturale che avevamo conosciuto in N e che continuiamo ad indicare con <.
Per esempio, tutti i lettori sanno già che $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$. Perché vale questa disuguaglianza? La risposta è analoga a quella data per N: troviamo un numero razionale $\frac{a}{b}$ (diverso da 0)

tale che $\frac{1}{2}+\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$. La cosa è più immediata se invece di $\frac{1}{2}$ e di $\frac{2}{3}$ si prendono altri rappresentanti della stessa classe di equivalenza, più comodi, per esempio, rispettivamente, $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{6}$, così si vede subito che $\frac{a}{b}$ deve essere $\frac{1}{6}$.
Qui, però, in Q^a succede una cosa nuova e straordinaria: Q^a è *denso*; vediamo che cosa significa: se si prendono due numeri razionali anche molto molto vicini tra loro, si trova sempre un numero razionale compreso tra essi.
Per esempio $\frac{998}{1000}$ e $\frac{999}{1000}$ sono "vicinissimi" tra loro, eppure $\frac{9985}{10000}$ è compreso tra quei due. Anzi, come il Lettore avrà già notato per suo conto, l'operazione di inserimento si può ora ripetere tra $\frac{998}{1000}$ e $\frac{9985}{10000}$ (per esempio: $\frac{998}{1000}<\frac{9982}{10000}<\frac{9985}{10000}$) e dunque: tra due numeri razionali, per quanto vicini, ce ne sono infiniti altri.
Questo fatto è nuovo; non vale né in N né in Z: tra due numeri "vicini" di N (per esempio 2 e 3) non ce n'è affatto un altro; così, per Z: tra due numeri "vicini" di Z (per esempio –2 e –3) non ce n'è affatto un altro.

A volte si rappresentano N, Z, Q^a come se fossero punti su una retta o su una semiretta orientate; ovviamente si tratta solo di schemi:

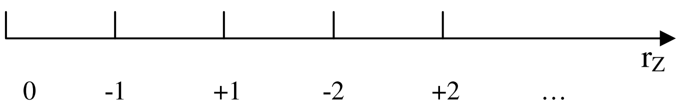






r_N: il primo schema si chiama *semiretta naturale*; i numeri naturali che si riesce ad evidenziare sono rappresentati da circoletti neri o tacche sulla semiretta; tra un numero ed il suo successivo, c'è il vuoto; anche se nello schema usiamo la semiretta continua, questa è solo un sostegno, un appoggio visivo.

r_Z: il secondo schema si chiama *retta intera*; i numeri interi che si riesce ad evidenziare sono rappresentati da circoletti neri o tacche sulla semiretta; tra un numero ed il suo successivo, c'è il vuoto; anche se nello schema usiamo la semiretta continua, questa è solo un sostegno, un appoggio visivo. Se è vero che questa è la rappresentazione più diffusa di r_Z, non si deve però credere che sia obbligatoria ed unica; per molti motivi, a volte è comodo far uso di una semiretta, invece che di una retta, ed allora l'ordine non è più quello "naturale" ma uno dei tanti altri possibili:



r_Q^a: il terzo schema si chiama *semiretta razionale assoluta*; i numeri razionali assoluti che si vogliono evidenziare sono rappresentati da circoletti neri o tacche sulla semiretta; non ha più senso parlare del "successivo" di un numero dato (per esempio, il successivo di $\frac{2}{5}$ non esiste, anche se qualche studente tende ingenuamente a rispondere $\frac{3}{5}$, come vedremo più avanti). È impossibile rappresentare con circoletti e tacche *tutti* i razionali compresi tra $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, per esempio, dato che essi sono infiniti (ricordare la densità). Ma non ci si illuda, infittendo le tacche, di poter *riempire,* di poter *completare* la semiretta; ci sono numeri (i cosiddetti irrazionali positivi) che hanno diritto al loro posto sulla semiretta, ma che non sono razionali. Per esempio $\sqrt{2}$ non è un razionale,[3] ma certamente sta tra 1,4 ed 1,5, che sono razionali assoluti. L'unione tra razionali assoluti ed irrazionali positivi dà luogo ai reali non negativi (si scrive R^+, compreso 0); quelli sì che riempiono la semiretta. Solo in questo caso si possono finalmente identificare i *punti* delle rette o delle semirette con i *numeri* reali.

[Un qualsiasi buon libro di Matematica, anche un manuale scolastico ben fatto, potrà essere usato per penetrare assai meglio in quanto affermato in queste ultime righe. Io

[3] Dunque, non esistono due numeri naturali *a* e *b* tali che $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

faccio notare solo che l'immagine che a volte si dà agli studenti di segmento come fila ordinata di punti - perline è sbagliata se è data come definitiva, perché impedisce di pensare poi, nella scuola secondaria, alla densità di Q^a ed alla continuità di R^+, come è stato rilevato da numerose ricerche (la letteratura è vastissima; segnalo solo alcune ricerche tra le più recenti, nelle quali il Lettore troverà molte citazioni bibliografiche accurate: Arrigo, D'Amore, 1999, 2002; Sbaragli, 2003)].
Si pensi che, mentre la cardinalità di Q^a è la stessa, numerabile, di N, la cardinalità di R^+ è maggiore (si chiama "cardinalità del *continuo*", appunto perché "riempie" con *continuità* la semiretta).
Le stesse immagini date prima sulle semirette danno idea del fatto che la illimitatezza è proprietà comune di tutti questi insiemi di numeri, N, Z, Q^a, Q, R^+.

➔
Se il Lettore ha fatto il salto, che certamente sarà l'ultimo, non si preoccupi. Potrà rileggere questo paragrafo con calma, anche successivamente. La Matematica di questi insiemi numerici sembra facile ma è, al contrario, assai insidiosa; è per questo, anche per questo, che l'apprendimento di questo argomento è così complesso. Proprio in considerazione di ciò, dobbiamo essere consapevoli che le riflessioni critiche sul processo di insegnamento - apprendimento dei razionali non sono mai sufficienti. Esse hanno una storia che è forse tra le più antiche per quanto concerne il processo di insegnamento – apprendimento, iniziata fin dall'antico Egitto (come testimoniano papiri e rotoli di pelle) e forse prima.

1.5. DALLA SCRITTURA FRAZIONARIA A QUELLA CON LA VIRGOLA

In genere il passaggio da una forma di scrittura all'altra non genera problemi insuperabili.

Dalla scrittura frazionaria a quella con virgola

Se si vuole scrivere per esempio $\frac{2}{5}$ nella forma con la virgola, basta dividere il numeratore per il denominatore; si trova 0,4. Ora $\frac{2}{5}$ e 0,4 non sono altro che due modi diversi di scrivere lo stesso numero razionale: il primo nella forma frazionaria, il secondo nella forma con la virgola.
Possono capitare casi particolari.

Se il numeratore è 0, allora qualsiasi frazione del tipo $\frac{0}{n}$ (ovviamente con $n \neq 0$) ha come scrittura nella forma con la virgola: 0, dato che la divisione 0:n = 0.
Se il denominatore è 1, la scrittura di una frazione nella forma con la virgola coincide con il numeratore.
Se il numeratore è multiplo del denominatore, il risultato della divisione è un numero naturale, caso speciale di numero razionale. Esempio: $\frac{6}{3}$ si scrive 2.
In certi casi, eseguendo la divisione, si ottengono forme con la virgola un po' speciali; per esempio, $\frac{41}{90}$ dà luogo alla scrittura 0,455555555…. con il 5 che si ripete infinite volte. Si usa allora dire che si tratta di un numero razionale "periodico"; 0 è la parte intera, 4 si chiama antiperiodo e 5 si chiama periodo. Invece di scrivere infinite volte il 5, si usa una delle due scritture seguenti: 0,4(5) oppure (più diffusa in Italia) $0{,}4\overline{5}$.

Dalla scrittura con virgola a quella frazionaria
In genere non ci sono problemi; si può considerare quanto scritto nella sezione precedente ed applicare i casi lì ricordati alla rovescia.
In generale, 2,34 si scrive $\frac{234}{100}$ e poi, volendo, si opera una riduzione ai minimi termini; si noti solo che a denominatore si mette 10^n dove n è il numero di cifre che segue la virgola.
Il caso più interessante che si può presentare è quello di un numero che, nella forma con virgola, appare periodico, come $0{,}4\overline{5}$. In tale caso, basta notare che:
$0{,}4\overline{5} \times 100 = 45{,}\overline{5}$
$0{,}4\overline{5} \quad \times 10 = 4{,}\overline{5}$
dunque, sottraendo membro a membro:
$0{,}4\overline{5} \times 90 = 41$
per avere la seguente trasformazione:
$0{,}4\overline{5} = \frac{45-4}{90}$ che dà $\frac{41}{90}$, come già ci aspettavamo.
Procedendo in modo analogo e generalizzando la questione, la "regola" dunque è la seguente:
$m,np\overline{qrs}$ (dome m n p q r s sono delle cifre qualsiasi) si trasforma come segue: $\frac{mnpqrs - mnp}{99900}$.
Si noti che al denominatore vi sono tante cifre 9 quante sono le cifre del periodo e tante cifre 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Applicando la formula appena trovata a casi nei quali appare 9 come periodo, si fa una scoperta entusiasmante; per esempio, scriviamo il numero $0,3\overline{9}$ nella forma frazionaria; seguendo la regola appena appresa, si trova $\frac{39-3}{90}$, cioè $\frac{36}{90}$; operando la semplice divisione, si trova 0,4. Questo fatto dimostra che le due scritture nella forma con la virgola $0,3\overline{9}$ e 0,4 sono rappresentazioni diverse dello *stesso numero*: $0,3\overline{9}=0,4$.
Questo fatto stupisce di solito gli studenti (e non solo) perché molti si aspettano che $0,3\overline{9} < 0,4$ (Arrigo, D'Amore, 1999).
E invece le cose non stanno così; dunque, esistono numeri razionali che si possono scrivere nella forma con la virgola in due modi diversi; sono quelli che hanno 9 come periodo.

2

Storia delle frazioni

Per evitare fastidiosi rinvii bibliografici, che sarebbero continui, elenco qui di seguito una volta per tutte le fonti storiche di cui mi servirò in questo capitolo: Bagni, 1996-‘97; Boyer, 1968; Bunt, Jones, Bedient, 1987; Carruccio, 1958; Cassina, 1961; Chace et al., 1927; D’Amore, Matteuzzi, 1975, 1976; D’Amore, Oliva, 1994; D’Amore, Speranza, 1989-92, 1995; Eisenlhor, 1877; Erdos, Strauss, 1971; Gardiner, 1997; Giacardi, 1993; Giacardi, Roero, 1979; Gillings, 1972; Ifrah, 1981; Kline, 1972; Loria, 1929; Neugebauer, 1957; Picutti, 1977; Rizzi, 1988; Roero, 1987; Sethe, 1916; Struve, 1930; Van der Waerden, 1954, 1980; Viola, 1985; Vogel, 1958.

2.1. I TERMINI

Anche se al Lettore può apparire incredibile, una certa qual confusione permane ancora oggi sui termini che entrano in gioco quando si parla di “frazioni” o di “decimali”. Poiché la cosa, a mio avviso, ha qualche rilievo storico, ho deciso di proporre proprio qui, nel primo paragrafo del capitolo storico, un tentativo di fare chiarezza terminologica.

2.1.1. Frazione

“Frazione” viene dal tardo latino “fractio”, cioè “parte ottenuta spezzando”, dunque dal verbo “frangere”, cioè “spezzare”. Pertanto, è sbagliato pensare che, nel significato originale etimologico di “frazione”, sia già compresa la richiesta (che è specifica per la sola Matematica) che le parti ottenute con l’azione di spezzare siano “uguali”.

Il simbolo $\frac{m}{n}$ ha origine incerta, ma certo fu usato da Leonardo Fibonacci Pisano nel suo *Liber Abaci* del 1202; i numeri frazionari sono ivi chiamati “rupti” o anche “fracti” e il trattino orizzontale posto tra numeratore e denominatore è chiamato “virgula” cioè

“bastoncello” (da “virga”, bastone). Ancora oggi, per indicare per esempio una quantità di euro compresa tra 4 e 5, c’è chi dice “4 e rotti”.
Anche le parole “numeratore” e “denominatore” hanno origine incerta, ma sappiamo che si affermarono nel corso del XV secolo in Europa.
La cosiddetta “riduzione delle frazioni ai minimi termini” (quella che, per esempio, fa passare dalla frazione $\frac{12}{30}$ alla sua equivalente $\frac{2}{5}$) è certo molto antica, ma si trova esplicitamente presentata in Luca Pacioli (1445-1515) ed in Nicolò Fontana da Brescia detto Tartaglia (1499-1557), sotto il nome di “schisare”; il massimo divisore comune dei due termini è detto “schisatore”; la stessa operazione si trova anche denominata, a fine Medioevo, “ultima depressione fractorum” o “ridur li rotti alla sua menor denominatione”. Questa operazione si chiama oggi talvolta “semplificazione”.
Una certa diffusione ha avuto in passato l’operazione contraria, quella che permette di passare, per esempio, da $\frac{2}{5}$ a $\frac{12}{30}$; essa è detta “amplificazione”. In certi Paesi, per esempio in America, ha ancora un diffuso uso scolastico che, in Italia, si è invece perso dal XIX secolo.
La distinzione tra frazioni “proprie”, “improprie”, “apparenti” è solo del XVIII secolo; questa distinzione, così poco intuitiva, che pone alcuni problemi dal punto di vista didattico, pare non esistere in precedenza. Alla “frazione impropria” $\frac{8}{3}$, per esempio, si preferiva la scrittura equivalente $2\frac{2}{3}$ cioè 2 interi e $\frac{2}{3}$. In questo caso, però, è evidente che i “rotti” sono i $\frac{2}{3}$ e non certo le 2 unità. Dunque la “frazione” $\frac{8}{3}$ doveva apparire come innaturale giacché in effetti non rappresenta “rotti” ma “interi e rotti”.

2.1.2. Decimali

Una parola che s’incontra spesso nell’insegnamento - apprendimento delle frazioni è l’aggettivo “decimale”; sui libri di testo appaiono parecchie interpretazioni di questo termine, a volte anche piuttosto diverse tra loro.
La derivazione etimologica è latina: proviene dall’aggettivo “decimalis”, cioè “ripartito” (o “ordinato”) “a dieci a dieci”.
Vediamo di seguito vari usi di questo aggettivo in diversi contesti in Aritmetica.
“Calcolo decimale” è quel sistema nel quale si trattano le operazioni scritte nel sistema decimale.
“Frazione decimale” è una frazione che ha per denominatore una potenza di dieci; per esempio $\frac{3}{10^2}$ cioè $\frac{3}{100}$.

"Unità decimale" è una frazione decimale con numeratore uno; per esempio $\frac{1}{10^3}$ cioè $\frac{1}{1000}$.
"Numero decimale" è una frazione decimale, quando viene scritta nella forma con la virgola; per esempio 7,53 al posto di $\frac{753}{100}$. Qui si hanno varie convenzioni di scrittura, a volte piuttosto complicate, necessarie quando il numeratore è minore del denominatore; per esempio, 0,43 sta per $\frac{43}{100}$.
"Sistema decimale" è un sistema posizionale che ha come base il dieci.
Credo sia ben noto il fatto che i sistemi posizionali hanno storia assai antica; nel mondo europeo si affermò il sistema indiano, che ha origine nel VI secolo, portatovi dagli Arabi nel IX. Ma vi sono precedenti illustri presso i Sumeri (con basi miste, dieci e sessanta) e presso Aztechi e soprattutto Maya (con base venti). Solo nel corso del XIII secolo, però, in Europa, si diffuse un sistema posizionale a base dieci.

La rappresentazione delle frazioni con numeri decimali à dovuta all'opera di Simone di Bruges detto Stevin (1548-1620). Costui, però, non usava la virgola ma tutt'altro simbolismo; scriveva per esempio 34⓪6①5②2③ per indicare 34,652.
Il segno della virgola "," per separare la parte intera da quella decimale, è stato proposto da John Wallis (1616-1703), il maestro di Isaac Newton (1642-1727), e fu definitivamente generalizzato in Francia e Italia solo alla fine del XVIII secolo, quando venne introdotto il Sistema Metrico Decimale.

2.2. EGIZI

In Egitto, a partire dal 3000 a. C., si sviluppò una notevole competenza in Matematica, competenza solitamente riservata alle caste più potenti, i sacerdoti e gli scriba.
Le fonti considerate più autentiche ed autorevoli per queste ricerche sono costituite da alcuni famosi papiri e rotoli; se ne sente sempre parlare e per ciò vale forse la pena dedicare qualche riga a quelli più noti.

Il più citato documento matematico dell'antico Egitto è certo il cosiddetto "papiro di Rhind"; esso fu rintracciato nel 1858 dall'antiquario scozzese Alexander Henry Rhind (1833-1863) a Luxor (l'antica Tebe). Il papiro si trova in eccezionale stato di conservazione, è lungo 550 cm ed alto 33. Dalla morte di Rhind si trova esposto nella III sala egizia nel British Museum di Londra. Il papiro è datato 1650 a. C., firmato dallo scriba Ahmes; si tratta però di una copia di un papiro scritto circa 2 secoli prima, come dichiara lo stesso scriba. Contiene, tra l'altro, 87 problemi di Matematica e varie questioni aventi a che fare proprio con le frazioni. Può essere interessante conoscere il titolo di questo papiro che si trova proprio al suo inizio: *Norme per investigare nella Natura e per conoscere tutto ciò che esiste, ogni mistero (…), ogni segreto*.

Anche il cosiddetto "papiro di cuoio" o "rotolo di pelle" fu comprato da Rhind ed è conservato nello stesso museo; secondo molti studiosi è ancora più antico del precedente, dato che è noto che l'abitudine di scrivere sul papiro sostituì quella di scrivere sulla pelle, troppo costosa e deperibile. Per questo si considera che esso consenta di analizzare conoscenze precedenti degli Egizi sulle frazioni.

Altro famoso documento storico della Matematica egizia è il cosiddetto "papiro di Mosca", acquistato da W. Golemisschaff a Luxor e conservato ora nel Museo delle Belle Arti di Mosca. Le sue dimensioni curiose sono di 560 cm di lunghezza per 8 di altezza. Anche in questo caso si tratta di una ricopiatura di un testo precedente, pare contemporaneo a quello di Rhind, in base ai contenuti. Nel secolo XX fu quasi interamente tradotto da R.A. Tusejeff e A.T. 'Tsinlerling; la traduzione fu poi completata da W.W. Struve.

Disponiamo poi del "papiro di Kahun", così detto perché fu ivi ritrovato da W.M. Flinders Petric nel 1891; pure questo si trova nel Museo di Londra. La Matematica in esso contenuta risale al 1800 a. C. Fu tradotto da F.L. Griffith.

Importante è anche il "papiro di Berlino", sempre del 1800 a. C., conservato al Museo di Berlino e tradotto da H. Schack-Schackenburg alla fine del XIX secolo.

Un papiro importante per i segni ieratici, come vedremo, è il "grande papiro Harris" (dal nome del suo scopritore), oggi al Museo di Londra; risale al periodo di Ramsete III (1192-1153 a. C.) e fornisce l'inventario dei beni contenuti nei vari templi al momento della sua morte.

Oltre ai detti papiri e rotoli, possiamo fare affidamento su varie tavole matematiche conservate soprattutto al Museo del Cairo.
Interessanti reperti a carattere matematico sono presenti anche al Museo Egizio di Torino.

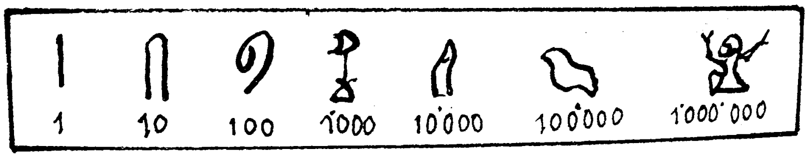
Dunque, la documentazione Matematica egizia a nostra disposizione è piuttosto ricca.
Bisogna distinguere però due diverse modalità di scrittura, la scrittura geroglifica e quella ieratica.

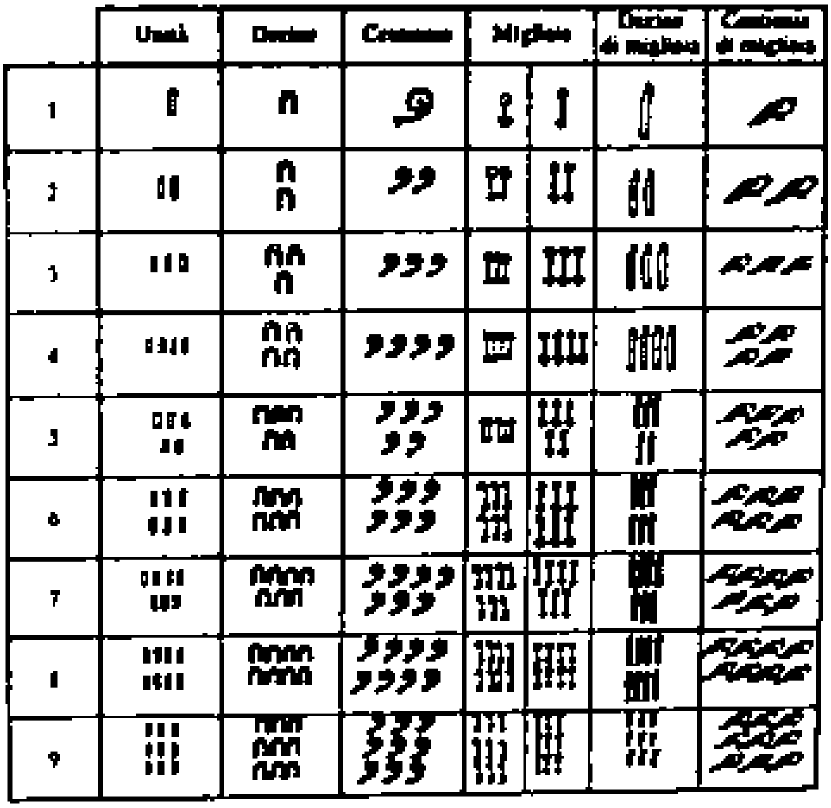
2.2.1. Scrittura geroglifica

Originariamente "geroglifico" significa "forma specifica dell'antica scrittura fondamentale dell'Egitto faraonico"; ma ha poi assunto il senso più generico di "carattere di scrittura con forma pittorica incisa, scolpita o dipinta". Per gli Egizi, i geroglifici erano "l'espressione della parola degli dei", per cui i Greci li chiamarono "grammata iera" cioè "caratteri sacri" o, meglio ancora, "grammata ieroglyphica", cioè "caratteri sacri scolpiti", da cui deriva il nome moderno "geroglifici".

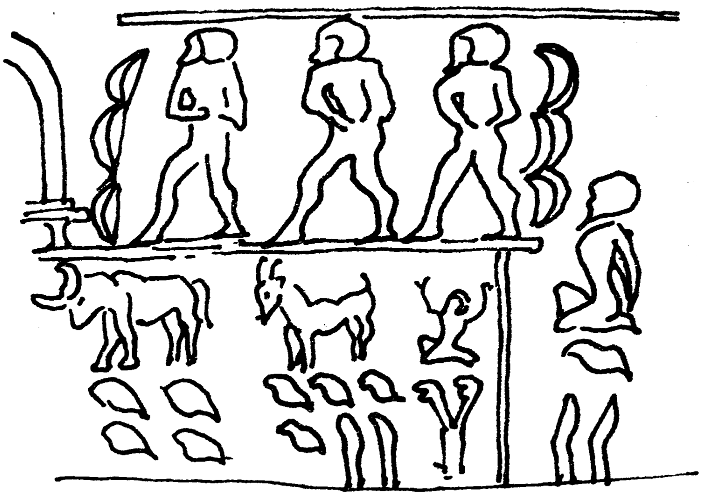
Nella seguente tavola sono riportati i principali segni geroglifici egizi in uso tra il 3000 ed il 2000 a. C.

Molto interessanti sono gli elementi di lettura geroglifica, ma il carattere breve e divulgativo di questo testo non mi permette di approfondire.
In quella stessa epoca, anche i segni dei numerali egizi erano dunque di tipo geroglifico.

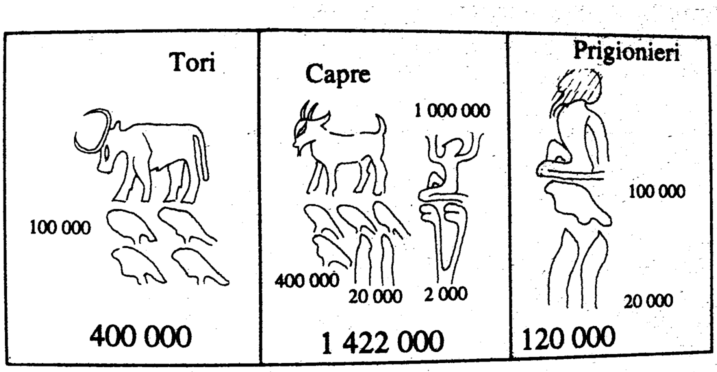




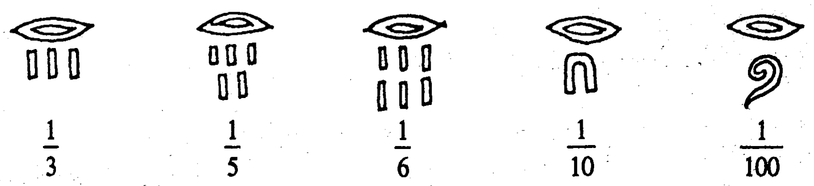
Per indicare un numero naturale, si scrivevano dapprima le unità del massimo ordine decimale, e poi via via quelle di ordine minore, fino alle unità.
Per esempio, riporto qui l'immagine della cosiddetta "mazza del faraone Narmer", che quantifica il bottino di guerra del faraone stesso:



Questo documento è uno dei più antichi conosciuti, non solo della Matematica, ma anche della scrittura egizia; troviamo indicato ben chiaramente che il faraone conquistò 400 000 bovini, 1 422 000 ovini e fece 120 000 prigionieri.



Questa era la forma geroglifica di scrittura dei numerali più diffusa, ma non univoca. In diverse epoche, in diversi luoghi e su diversi materiali, si sono trovate anche forme di scrittura assai diverse.
Gli Egizi dedicarono molta passione allo studio delle frazioni.
Anche in questo caso, le scritture geroglifiche sono molteplici, ma propongo qui la più nota.
Ecco come rappresentavano alcune frazioni:



Il segno superiore che appare in tutti è il segno geroglifico “bocca” che si legge “èr” e che significa “parte”; esso funge dunque da numeratore unitario del tipo $\frac{1}{}$. Il numerale che appare sotto la bocca è il denominatore.
Si afferma sempre che gli Egizi avevano solo frazioni “unitarie” (che, infatti, spesso sono dette “frazioni egizie”). Ciò non è del tutto esattamente vero. Essi avevano anche altre due frazioni, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, alle quali riservavano simboli particolari:

per $\frac{2}{3}$

per $\frac{3}{4}$

Anche la frazione $\frac{1}{2}$, per la sua peculiarità indiscutibile, aveva un geroglifico a parte:

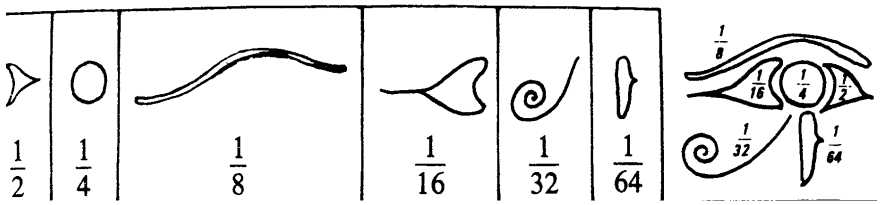
 o 

che si chiamava “ges” cioè proprio “metà”.
È vero, però, che gli Egizi non considerarono mai $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ come vere e proprie frazioni, ma come simboli divini; e dunque, affermare che le “uniche” frazioni egizie *considerate come tali* sono quelle con numeratore 1, è tutto sommato vero.
Una delle problematiche sulle frazioni che più appaiono dibattute è quella relativa alla riduzione di frazioni complesse in frazioni unitarie; in questo, i papiri rivelano che gli Egizi furono veri e propri maestri.
Per esempio, si trova, tra mille altri esempi, le seguenti uguaglianze:

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}, \qquad \frac{47}{60}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

(naturalmente i primi membri delle uguaglianze erano espressi o dal contesto o a parole o tramite esempi concreti).
Un riguardo aritmetico particolare veniva riservato alle misure di capacità (era molto importante conservare a lungo, in un Paese in prevalenza desertico, cereali e agrumi, una volta raccolti, o liquidi, come la birra, una volta prodotta).
L’unità di capienza era espressa in “heqat” equivalente circa a 4,785 litri). La notazione geroglifica dell’heqat, di nome “udjat”, che significa contemporaneamente “occhio umano” e “occhio di falco”, era la seguente:

Era talmente importante dividere un heqat in parti che, non disponendo del sistema decimale, gli Egizi usavano dividerlo in metà, quarti, ottavi, sedicesimi, trentaduesimi e sessantaquattresimi, dunque le frazioni unitarie $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ avevano un ruolo speciale nella vita quotidiana egizia; tanto che, nel geroglifico udjat erano rappresentate implicitamente:



Attorno a queste misure ruotavano esercizi mnemonici di tipo scolastico e, stante la loro importanza, anche miti, come quello famoso dell'occhio di Horus, disperso nel deserto per vendetta.
Quest'ultimo, in particolare, serviva a mostrare come la somma di tutte le precedenti frazioni unitarie non dà l'unità, dato che le manca $\frac{1}{64}$, il che, forse, voleva essere una spinta a non sottovalutare le parti anche minime di un heqat.

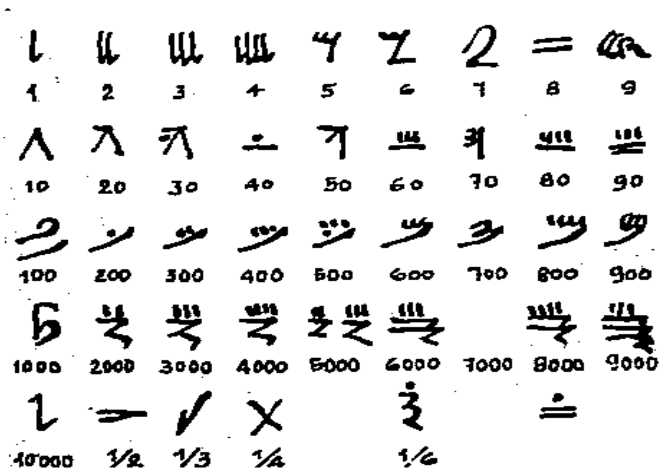
Va detto che gli Egizi ebbero notevoli rapporti con altre civiltà africane, asiatiche e di tutto il Mediterraneo, per cui furono influenzati dalle, ed influenzarono certo le, aritmetiche di quei popoli. Tali influenze costituiscono oggi uno dei campi di studio più fecondi degli archeologi matematici.

2.2.2. Scrittura ieratica

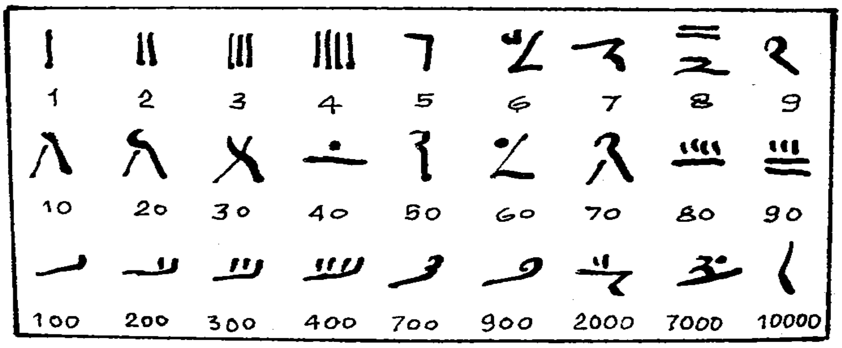
Come ho già detto all'inizio di questo paragrafo **2.2.**, alla scrittura geroglifica, ingombrante, difficile, lenta e faticosa, si contrapponeva l'assai più snella scrittura "ieratica".
"Ieratico" viene dal greco "hieratikós", cioè "sacerdotale", a sua volta da "hierós", cioè "sacro"; attualmente ha, in italiano, il significato di "grave, solenne", riferito ai gesti lenti e pieni di significato. Il termine riferito alla scrittura sacerdotale egizia è stato coniato dallo scrittore greco cristiano Tito Flavio (150 – 215 d. C.), più noto con l'epiteto di Clemente Alessandrino, uno dei padri della Chiesa.
Tale scrittura ieratica era usata assai più spesso di quella geroglifica sia dai sacerdoti che dagli scriba, soprattutto per effettuare conti, stendere censimenti, inventari, rapporti, testamenti, in amministrazione etc.
Ecco per esempio una tavola che illustra a sinistra il segno geroglifico ed a destra il corrispondente segno ieratico; siccome con il passare dei secoli questi segni rapidi si

modificavano (com’è accaduto per la scrittura alfabetica cosiddetta “corsiva” in tempi moderni), nella tabella sono mostrati simboli ieratici in evoluzione (ricordo che l’Antico Impero va dal 2052 al 1780, il Medio dal 1780 al 1560, il Nuovo dal 1560 al 1075 a. C.):

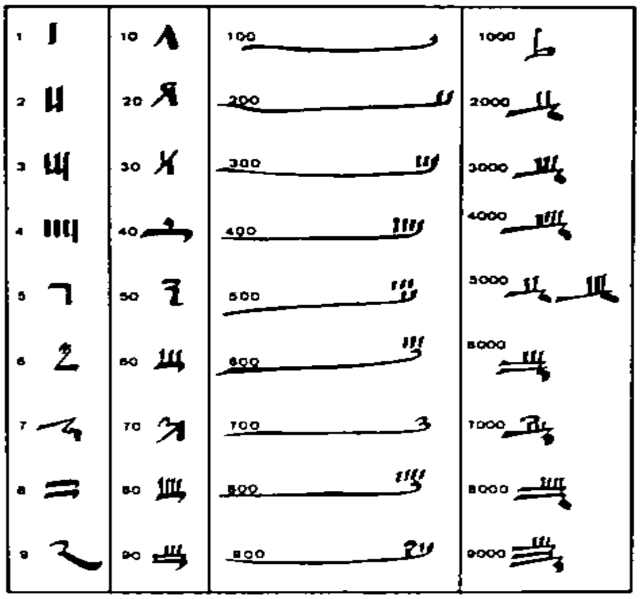
Ecco invece i simboli ieratici che appaiono nel papiro di Rhind:



Qui di seguito riporto i simboli ieratici del papiro di Torino, del XIII sec. a. C.:



Ed ecco i simboli numerali ieratici che si trovano, per esempio, nel papiro Harris, redatto attorno al 1153 a. C.:



Per esempio, ecco due scritture dello stesso numerale (3577) a confronto:

In effetti, però, le scritture notazionali delle frazioni non subirono cambiamenti notevoli e rimasero sostanzialmente le stesse dei geroglifici.

2.3. FRAZIONI EGIZIE ALL'OPERA NEI PROBLEMI

Può essere curioso, per il Lettore, conoscere qualche problema egizio nel quale entrano in scena le frazioni.

Ciò capita assai spesso; scelgo un problema, traendolo dal papiro di Rhind; la sua proposta richiede però una sorta di premessa.

Data la scarsità di cibo, fatto cronico persistente per l'epoca, si fabbricavano pani e birra a "forza" ("pesu") diversa; la "forza" di un pane è il reciproco della densità dei chicchi di frumento usati per la fabbricazione di un pane a grandezza standard; si trova facendo il quoziente tra un dato numero di pani ed il totale del numero dei chicchi di frumento usati per impastarli; l'analogo vale per la birra, considerata a tutti gli effetti un cibo, sostituendo al frumento l'orzo ed ai pani i boccali di birra.

Il problema 72 del papiro Rhind chiede il numero di pani di forza 45 equivalenti a 100 pani di forza 10; non viene dato il procedimento, evidentemente considerato troppo facile, ma solo la soluzione: $\frac{100}{10}\times 45$, dunque 450.

Il problema 63 chiede di distribuire 700 pani della stessa forza fra 4 persone in modo che essi ricevano pani secondo le seguente proporzione: $\frac{2}{3}:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$.

In molti papiri matematici egizi si propongono problemi che, per essere risolti, rimandano ad equazioni; spesso i dati o le radici di tali equazioni sono numeri frazionari.

Una breve premessa: per indicare una variabile numerica, lo scriba egizio usa la parola "mucchio" ("aha") per indicare una quantità non nota di oggetti, un po' come noi oggi usiamo x.

Per esempio, il problema 24 chiede qual è il valore del mucchio, se il mucchio e $\frac{1}{7}$ del mucchio è 19. La nostra attuale risposta porterebbe alla risoluzione dell'equazione lineare $x+\frac{1}{7}x=19$. Ma il metodo tipico egizio consisteva nella "falsa posizione". Per esempio, si supponga che x sia 7 (scelto in modo opportuno per eliminare la frazione che appare a primo membro). In tal caso il primo membro varrebbe 8 e non 19. Per arrivare da 8 a 19, basta moltiplicare 8 per $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$; dunque la risposta non è 7, ma $7\times(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})$. Lo scriba dà la risposta $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$, e poi fa la verifica (operazione molto amata dagli scriba egizi).

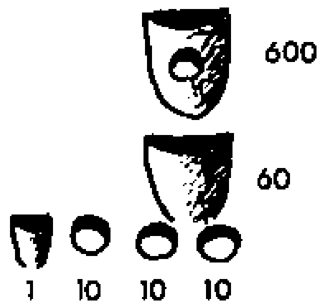
I problemi che appaiono sui papiri sono di diversa difficoltà, tanto da far pensare a veri e propri eserciziari per neofiti, forse per studenti o aspiranti sacerdoti.
Spesso i problemi sono di geometria e coinvolgono frazioni.

2.4. SUMERI, ASSIRI, BABILONESI

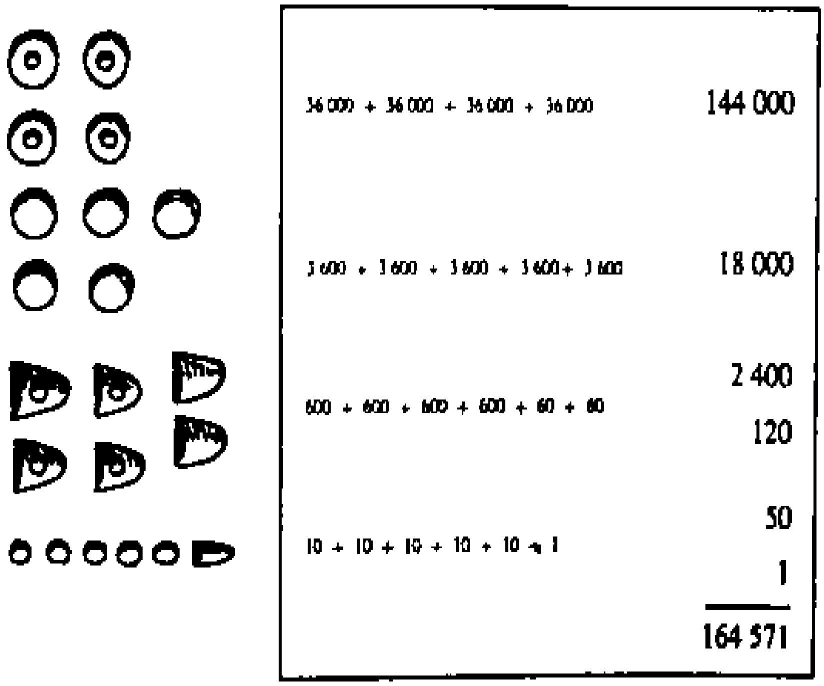
Attorno al 4000 a. C. i Sumeri crearono una grande civiltà nella fertile "terra compresa tra i due fiumi" Tigri ed Eufrate, "Mesopotamia", appunto, l'attuale Iraq.
Nel periodo 4000-3500 le città-stato sumere, in eterna rivalità tra loro, non segnalano predomini particolari; ciò fino al 3500, quando prevalse Uruk, dando vita alla civiltà cosiddetta "sumera", dal nome dell'antica tribù, di origine sconosciuta, che diede il via alla civilizzazione di quelle terre. Vale la pena ricordare che nel 2100 a. C. circa il territorio sumero andava dall'Iran al Mediterraneo; e che la lingua dei Sumeri non appartiene ad alcune delle radici finora note e fu interpretata solo nel 1905 da F. Thureau-Dangin (1872-1944).
Dominati dai Sumeri, gli Assiri conquistarono l'indipendenza nel 2003 a. C. e svilupparono una fiorente attività commerciale di grande cultura artistica e scientifica; nello stesso periodo si stabilì a Babilonia una dinastia (detta "amorrea") proveniente dalla Siria e dalla Palestina. Soprattutto queste due civiltà (Assiri e Babilonesi) si intrecciarono tra loro e, ovviamente, lo fecero con quella dei Sumeri, per cui diventa complesso stabilire i limiti della storia scientifica delle tre civiltà. Ricordo solo il periodo di grande fioritura dei Babilonesi, quando Hammurabi (nel 1700 circa) occupò l'intera Mesopotamia dando luogo al I Impero Babilonese (famoso il suo *Codice*, attualmente conservato al Louvre).

Non sappiamo molto delle origini arcaiche dei loro sistemi numerici, ma restano abbondanti testimonianze del fatto che fin da quell'epoca usarono un sistema posizionale corretto, con base principale 60 e base secondaria 10; in altre parole, i numeri fondamentali del loro sistema furono (scritti con il nostro simbolismo):
1
10
60
600 in quanto 10×60
3600 in quanto 60^2 e $(10\times6\times10)\times6$
36 000 in quanto $60^2\times10$ e $(10\times6\times10\times6)\times10$.
I loro numerali cambiarono spesso forma, ma una certa qual stabilità si ebbe tra il 4000 e il 2500 a. C. Su tavolette di argilla (raccolte oggi in grande quantità presso vari musei in tutto il mondo, ma non ancora tutte decifrate) vengono incisi i seguenti segni:

Per esempio, in una tavola redatta nel 3000 a. C. e trovata ad Uruk, appare scritto il numerale 691 come segue:



mentre in una tavola redatta nel 2650 e trovata a Fara (l'antica Shuruppak), appare il numerale 164 571 come segue:



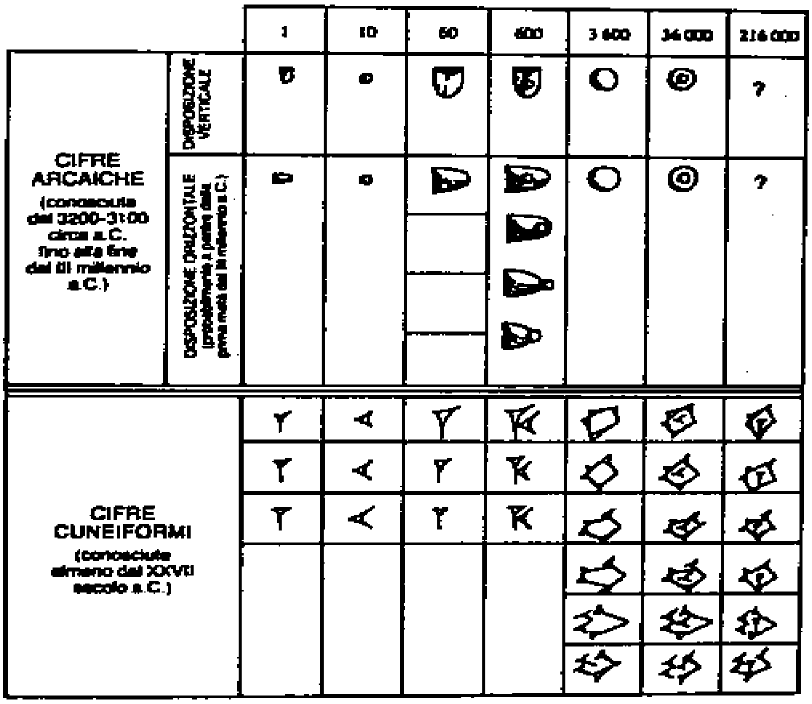
Per eliminare parte delle inevitabili lungaggini, apparve in questo àmbito la scrittura sottrattiva nella quale, invece di scrivere 9, per esempio, usando 9 segni unitari, si scriveva 10-1 usando solo 3 segni: quello per il 10, quello per la sottrazione e quello per l'1.

A volte, il "risparmio" è notevole; per esempio, per scrivere 3599 servirebbero ben 28 cifre, ma usando il sistema sottrattivo ne bastano 3: quello per il 3600, quello per il meno e quello per l'1.

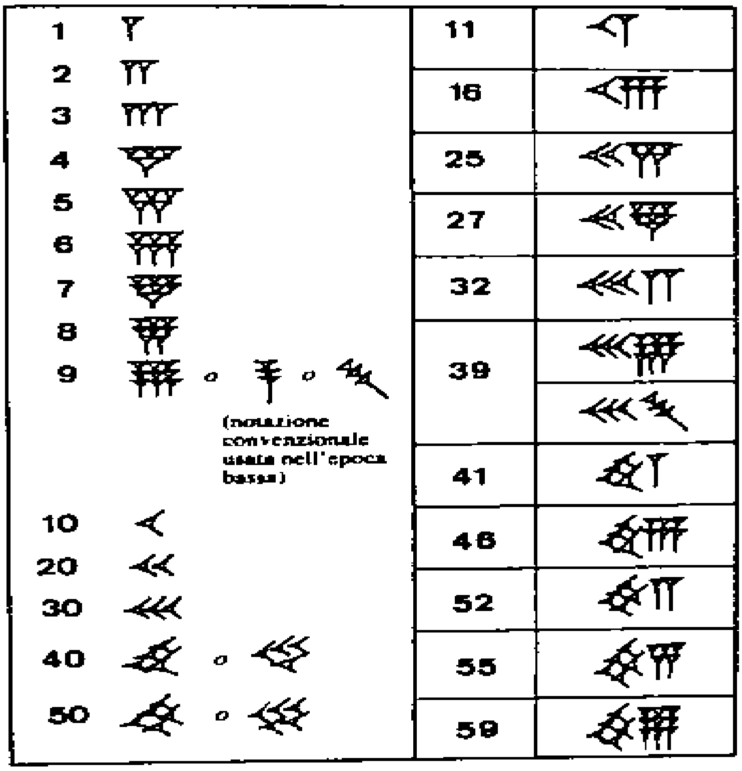
Il segno "-" si denominava "lá" e significava proprio "meno"; i Sumeri lo indicavano con il segno:

Ecco, per esempio, i numerali 2360 e 3110 ritrovati in una stessa tavoletta di creta:

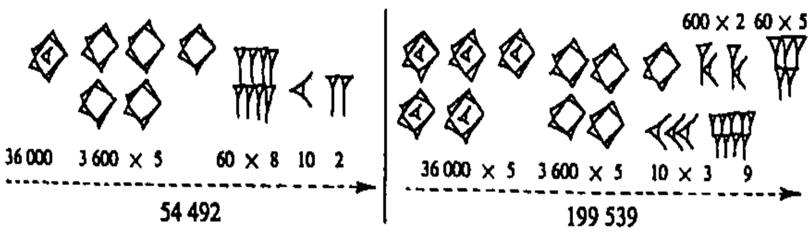
Attorno al 2700 a. C. si fa strada un altro modo di scrivere i numerali, il *sistema cuneiforme*:



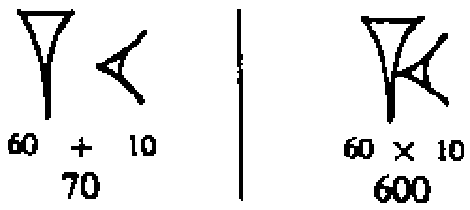
Ecco, per esempio, i numerali da 1 a 59:



Riporto alcuni esempi tratti da una tavoletta del 2000 a. C. scoperta a Drehem:

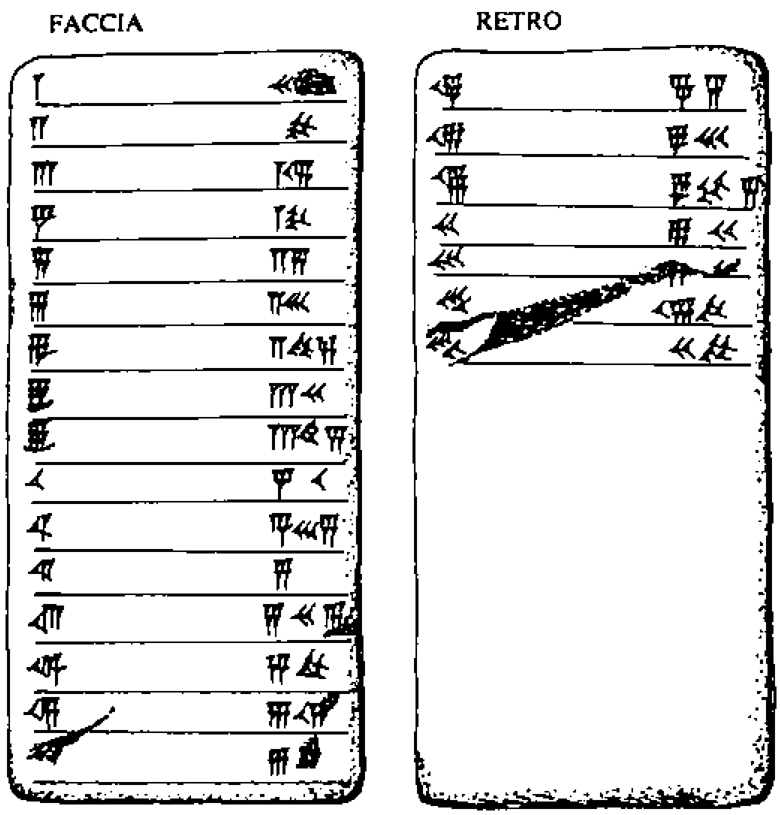


Per oltre 700 anni le due forme di scrittura convissero, fino a quando, attorno al 2100 (III dinastia di Ur), le cuneiformi soppiantarono le arcaiche.
Questa nuova scrittura cuneiforme presenta problemi di interpretazione; per esempio, bisognava stare molto attenti (figuriamoci: nello scrivere con uno stiletto di legno su una tavoletta di creta bagnata, probabilmente in piedi sotto il Sole del deserto!) a decidere se il segno della decina dovesse o no toccare il segno della sessantina, per evitare errori:



Come ho già ricordato, alla civiltà sumera si affiancò e lentamente si sostituì quella assira e poi quella babilonese. Le aritmetiche delle tre popolazioni sostanzialmente si mantennero e, ovviamente, si svilupparono gradualmente con il passare del tempo.

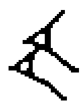
Fare i calcoli non era facile a quell'epoca e dunque, una volta che qualcuno li aveva faticosamente fatti, i risultati venivano riportati su apposite tavolette gelosamente conservate presso la corte o nei templi; sono state ritrovate numerosissime tavole di calcolo, ma la più famosa è senz'altro quella trovata a Susa e datata (circa) 1500 a. C.:



Si tratta della tavola che riporta i prodotti dei numeri da 1 a 50 per 25, naturalmente scritti nella notazione cuneiforme sessagesimale; per esempio, 3×25, cioè 75 (nella nostra scrittura), è scritto 1;15 cioè 1×60+15×1.

Ed è qui, su questo modo di scrivere i numeri, che troviamo finalmente spazio per parlare di numeri decimali e dunque di frazioni.
Non risultano esistere scritture speciali per le frazioni; in effetti, avendo a disposizione un sistema posizionale con una data base, le scritture frazionarie sono inutili.

Ma andiamo con ordine.
In pieno periodo babilonese, attorno al 1700 a. C., in un certo senso venne ideato un "segno" specifico per lo zero. Per poter distinguere, per esempio, 735 da 7305, oggi si usa lo zero per indicare un posto vuoto; più precisamente:
$735 = 7\times10^2+3\times10^1+5\times10^0$
$7305 = 7\times10^3+3\times10^2+0\times10^1+5\times10^0$.
Se non possedessimo la cifra 0, potremmo tentare di scrivere il secondo numerale così: 73   5, lasciando cioè uno spazio vuoto per le decine ed indicare dunque che il 3 rappresenta le centinaia.
È facile capire che ciò sarebbe causa di confusione. Scrivendo in fretta, a mano su carta, su un quaderno, sarebbe difficile essere così precisi da capire se 73 5 sta per 735 o per 7305. Si pensi poi a 73005, a 730005… Un conto è la pagina stampata, o la scrittura elettronica su PC, ben altro la scrittura a mano su carta.
Viene spontaneo pensare a porre un segnale, un'indicazione, che esprima il vuoto, la mancanza cioè di una cifra.
L'idea originale dei Babilonesi fu quella di lasciare uno spazio vuoto, e così si trova infatti in varie tavolette; ma, a causa delle difficoltà di interpretazione che questo fatto comportava, decisero, attorno al 1700 a. C., di mettere un segno:


o


ma non come cifra 0, com'è nel nostro sistema attuale, bensì solo per indicare uno spazio vuoto.
Dunque, in un certo senso i Babilonesi idearono lo 0, ma è falso affermare che lo introdussero come cifra; lo introdussero solo come segnaposto. La vera nascita dello 0 come cifra è degli Indiani nel V-VI sec. d. C.

Ebbene, in una tavoletta babilonese del periodo seleucide, dunque dopo la dominazione di Alessandro Magno, e quindi attorno al III sec. a. C., troviamo la scrittura (che scriviamo nei nostri caratteri attuali): 0; 1. Poiché 1 viene *dopo* lo 0, questa scrittura non può che rappresentare la frazione $\frac{1}{60}$.

Nella stessa tavoletta troviamo anche altre frazioni, tutte aventi al denominatore o 60 o 60^2. Per esempio, la frazione $\frac{30}{3600}$ cioè $\frac{30}{60^2}$ viene scritta (nella scrittura sessagesimale assiro - babilonese):

0; 0; 30 cioè sarebbe: $0\times1+0\times\frac{1}{60}+30\times\frac{1}{60^2}$.

Dunque, gli Assiri ed i Babilonesi non crearono simboli appositi per le frazioni, ma si limitarono all'analogo dei nostri numeri decimali che però, nel loro caso, sono numeri sessagesimali.

La prevalenza del 60 nel sistema posizionale sumero – assiro – babilonese si è conservata fino ad oggi nelle misure angolari (l'angolo giro misura 360°) e nelle temporali (l'ora consta di 60 minuti), segno, questo, di un prevalere di quella Aritmetica in questi due campi rispetto a tutte quelle che seguirono.

Analogamente a quanto avviene nei papiri egizi, anche nelle tavolette di creta sumere, assire e babilonesi appaiono problemi di Aritmetica o di Geometria nei quali si fa grande uso di numeri decimali.

2.5. GRECI

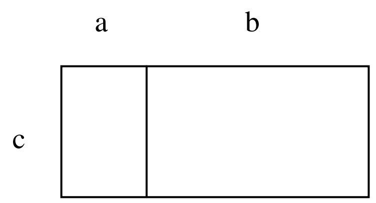
Ancora sorprende la magnificenza della raffinata cultura greca nei confronti dei popoli circostanti ad essi contemporanei, e ciò vale in misura massima per la Filosofia, la Letteratura e la Matematica.

Essi però optarono per un sistema di rappresentazione numerica che si rivelò non molto efficace.

Com'è forse noto, il primo sistema fu quello attico, più o meno databile attorno al 500 a. C.; in esso le prime 4 cifre erano rappresentate da un piccolo segno verticale ripetuto, mentre 5 si scriveva Π, iniziale di "pente", cinque (in realtà, nell'alfabeto attico c'erano diverse varianti di questa cifra). Le cifre da 6 a 9 si scrivevano posponendo a Π da 1 a 4 trattini. 10 si scriveva Δ, iniziale di "deca", dieci; 100: H ("hekaton", cento); 1000: X ("khilioi", mille); 1000: M ("myrioi", diecimila).

Ma nell'epoca alessandrina, III sec. a. C., questo sistema venne soppiantato dal sistema ionico o alfabetico. Si suppone oggi che questo sistema abbia convissuto a lungo con quello attico, addirittura fin dall'VIII secolo, ma si sia affermato solo per la rigidità del primo. Nel sistema ionico si sfruttano le lettere minuscole dell'alfabeto greco, più alcuni segni speciali, a carattere alfabetico ma espressamente ideati per la numerazione. La

prima lettera dell’alfabeto (α) indicava 1 e così via: β stava per 2, γ per 3, δ per 4, ε per 5 etc., fino a θ per 9; a quel punto si passava alle decine e dunque ι stava per 10, κ per 20, λ per 30 etc.; ρ stava per 100, σ per 200, τ per 300 etc.; in questo modo, grazie all’alfabeto più alcuni segni aggiunti, si poteva giungere fino a 999; per passare alle unità di migliaia si ricominciava daccapo: α preceduta da un apice in basso (͵α) stava per 1000, β preceduta da un apice in basso (͵β) stava per 2000 etc.
Qualsiasi numero inferiore a 10 000 poteva essere scritto con al più 4 caratteri (più l’apice). Il fatto di usare lo stesso segno per indicare unità e migliaia avrebbe potuto spingere i Greci verso un sistema posizionale, ma ciò non avvenne mai. Anzi, la evidentemente complessa macchina numerica greca fu un freno agli sviluppi in questo ramo della Matematica, a dispetto del prodigioso sviluppo che invece compirono in Geometria.
Passando ora alle frazioni, così come gli Egizi, anche i Greci predilessero a lungo (anche se non in modo così univoco) le frazioni con numeratore unitario. Per indicarle, scrivevano semplicemente il denominatore seguito da un apice in alto. Per esempio, $\frac{1}{23}$ veniva semplicemente scritto κγ’. Al Lettore attento non sfuggirà come questa scrittura possa venire confusa con la giustapposizione di κ con γ’ il che significherebbe $20+\frac{1}{3}$.
Ma il contesto, che sempre accompagnava le questioni numeriche, avrebbe dissipato l’eventuale dubbio.
I rapporti tra numeri naturali e dunque le frazioni furono molto usati nella Matematica greca, soprattutto in Geometria, ma avevano soprattutto rappresentazioni grafiche, appunto, e quindi non portarono allo sviluppo di uno specifico simbolismo aritmetico.
Quanto all’Algebra, mancando di un simbolismo opportuno, i Greci facevano ricorso a quella che oggi chiamiamo “algebra geometrica” nella quale le relazioni algebriche vengono indicate con figure geometriche.
Per esempio la proprietà distributiva $(a+b)\times c = (a\times c)+(b\times c)$ si rappresentava come segue:



Ciononostante, i Greci svilupparono una teoria delle grandezze, delle proporzioni, conobbero perfettamente i numeri razionali e bene gli irrazionali, il tutto sempre interpretato secondo la Geometria sintetica.

Verso il 200 a. C. (c'è chi dice forse anche un secolo prima) si diffuse lo studio delle frazioni per come oggi le intendiamo, cioè senza la restrizione di avere 1 al numeratore. Può incuriosire il fatto che si cominciarono a scrivere le frazioni nel sistema odierno, un numerale che sovrasta un trattino che sovrasta un numerale; solo che il ruolo di numeratore e denominatore era allora invertito; dunque, per esempio, la frazione "tre quinti" si scriveva $\frac{\varepsilon}{\gamma}$.

Per tutto il periodo greco, che possiamo estendere anche all'inizio del Medioevo, includendo Diofanto (metà del III sec. d. C.), Pappo (suo contemporaneo), Proco (410 – 485), tutti e tre attivi ad Alessandria, le frazioni furono sempre usate, citate nei numerosi trattati di Aritmetica, spiegate rapidamente anche per quanto concerne regole ed operazioni; ma non si ha una vera e propria trattazione teorica, vuoi per la semplicità dell'argomento, vuoi per il fatto che venivano considerate più come strumento di lavoro che non come oggetto specifico di studio.

A proposito di Diofanto, singolare per chi si occupa di frazioni è il racconto in frazioni della sua vita, così come appare nella *Antologia Palatina*, una raccolta di questioni aritmetiche attribuita a Metrodoro (III sec. d. C.): «Questa è la tomba che racchiude Diofanto, meraviglia da contemplare! Per mezzo dell'arte aritmetica insegna la misura della sua vita. Dio gli concesse la fanciullezza per un sesto della sua vita; dopo un altro dodicesimo la barba coprì le sue guance; dopo un settimo accese la fiaccola nuziale e dopo cinque anni ebbe un figlio. Ahimè! Il misero fanciullo, pur tanto amato, avendo raggiunto appena la metà degli anni di vita del padre, morì. Quattro anni ancora, mitigando il proprio dolore colla scienza dei numeri, visse Diofanto, fino a raggiungere il termine della sua vita».

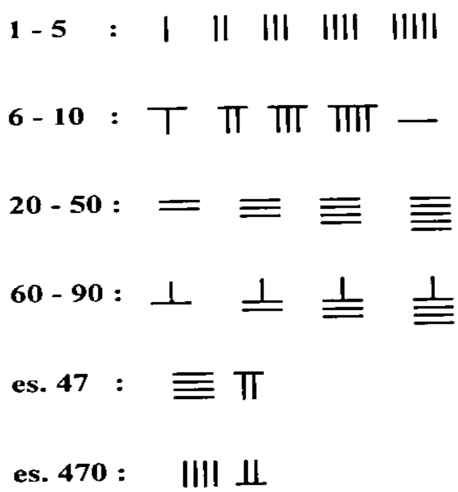
Il Lettore curioso può verificare che la vita di Diofanto fu di 84 anni, ragguardevole assai per quei tempi, cioè quel che si trova risolvendo l'equazione lineare implicita nelle parole di Metrodoro: $x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4$.

2.6. CINESI

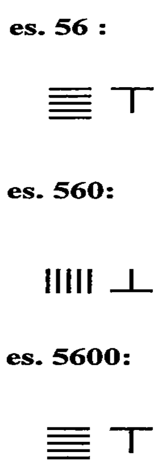
La parola "abaco" deriva dal greco "ábax", con genitivo "ábakos", cioè "tavoletta per fare i conti"; a sua volta l'etimologia greca non è mai stata accertata. Per cui, "abacisti" sta per "coloro che usano l'abaco" oppure "coloro che fanno i conti".

Così come gli abacisti Romani e presumibilmente i Greci portavano con sé sassolini ("calculi") per eseguire operazioni sull'abaco, i funzionari cinesi dei secoli fra il VI ed il I a. C. traevano bastoncini di bambù per eseguire le proprie. Nel sistema cinese più diffuso dell'epoca, infatti, il "sistema a bastoncino", tutto si riduceva a rappresentare gli operandi con questi bastoncini, ruotarli e cambiarli di posto, fino ad arrivare al risultato, esattamente come Greci e Romani facevano sull'abaco con i sassolini. L'analogo latino di "eseguire i calcoli" è in cinese "ordinare i bastoncini". Solo dopo il III sec. a. C. si

costruirono abaci (o abachi) in forma moderna ("suan phan" in Cina, "soroban" in Giappone) che perdurarono indisturbati fino al XVI secolo e furono messi in soffitta solo dall'avvento delle calcolatrici in tempi assai recenti.
Il sistema bastoncino cinese consiste in quanto segue:
le cifre da 1 a 5 si rappresentavano con bastoncini verticali allineati, da 1 a 5;
il 6 con un bastoncino orizzontale (che raggruppava i primi 5) sotto al quale si metteva in verticale il sesto; e così via fino a 9;
un solo bastoncino ma orizzontale (cioè quello dell'1 ruotato di 90°) faceva passare da 1 a 10; ruotando i simboli di 2, 3 etc.; si passava dunque a 20, 30 etc.;
il 60 si otteneva ruotando le parti che compongono il simbolo del 6 di 90° e così via, fino a 90;



Questa notazione aveva ovviamente difetti molto evidenti; dopo alcune rotazioni, i simboli – bastoncino che avrebbero dovuto rappresentare numeri grandi venivano a coincidere con simboli – bastoncino che già rappresentavano numeri piccoli.



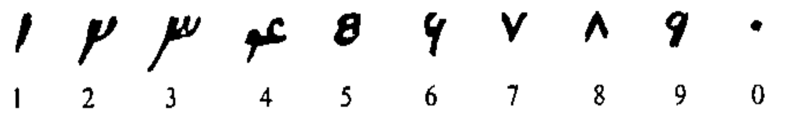
Tuttavia il sistema tenne per molti secoli, stante anche la rapidità con la quale i funzionari riuscivano a fare i calcoli.
I Cinesi svilupparono un adeguato calcolo frazionario, nel quale il numeratore era detto "figlio" ed il denominatore "madre"; non deve stupire il richiamo alla differenza sessuale: spesso i Cinesi davano sessi diversi ai numeri, a seconda della loro funzione (ci sono testimonianze che ciò avvenisse anche nella Matematica greca presocratica e certo ai tempi di Pitagora). Pare certo che questo non solo aiutava nella memorizzazione, ma era in grado di creare regole alle quali era possibile dare un senso diverso da quello esclusivamente interno alla Matematica. I numeri, dunque, per i Cinesi, si accoppiano, generano altri numeri, hanno insomma una vita per certi versi simile a quella degli esseri umani.
Ben presto i Cinesi scelsero per le frazioni il sistema decimale per cui diedero particolare impulso alle frazioni con denominatore 10 o sue potenze. Nel XIII secolo già il sistema decimale dominava tutta la Cina e si tendeva a trasformare le frazioni in frazioni decimali.

2.7. INDIANI, ARABI

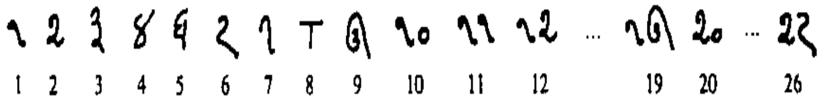
2.7.1. Indiani

Gli Indiani furono maestri in Aritmetica, crearono un sistema posizionale decimale perfetto, idearono lo zero, le funzioni seno e coseno, anche se sembra che molto si sia esagerato nell'attribuire loro una forma autoctona di sviluppo del pensiero matematico. Secondo gli studi più recenti, invece, pare ebbero sugli Indiani grande influenza gli studiosi greci che, da Alessandria di Egitto, elargivano il loro sapere e le loro straordinarie creazioni non tanto al mondo occidentale ma, soprattutto, a quello orientale.
Tipico della mentalità indiana era il vezzo di trasformare spesso la Matematica in poesia o qualsiasi altra forma leggiadra, facendo riferimenti a fiori, amanti, storie varie. Nella famosa opera *Aryabhatyia*, scritta dal matematico poeta Aryabhata nel 499 d. C., per esempio, si dà la seguente indicazione sul come trovare l'incognita x nella uguaglianza di rapporti (che noi scriveremmo oggi a:b=c:x):
Nella regola del tre moltiplica il frutto per il desiderio e dividi per la misura; il risultato sarà il frutto del desiderio.
Molto più prosaicamente: $x=\frac{bc}{a}$.
Vedremo in seguito un altro esempio più tardo.
Per quanto riguarda le frazioni, venne adottata la scrittura alessandrina: denominatore fratto numeratore, ma omettendo il trattino orizzontale.
Ma, mentre per i numeri naturali gli Indiani adottarono un sistema posizionale decimale, per le frazioni la cosa non avvenne, anzi si usavano sistemi complicati poco funzionali.

Nel mondo indiano vennero concepiti algoritmi di calcolo relativamente facili ed accessibili, a causa del fatto che il sistema era finalmente posizionale; molti degli algoritmi che ancora oggi usiamo provengono da quelli indiani.
Le 10 cifre indiane hanno subito varie mutazioni nei secoli; un sistema antico è il seguente:



Nell'anno 875 si avevano invece queste cifre:

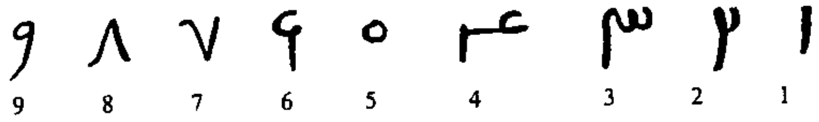


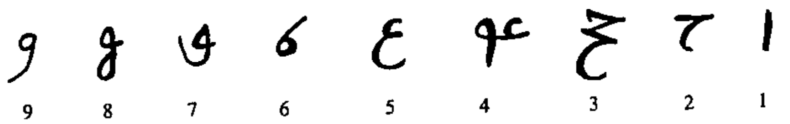
Nel XII secolo, quando la cultura orientale era oramai passata al mondo arabo, ancora vivevano in India matematici di prestigio, tra cui Bhaskaracarya, autore di un curioso e denso trattato di algebra nel quale lo zero è definito come la somma di due numeri opposti. Il titolo di questa opera è *Lilavati*, un nome femminile per il quale ci sono varie interpretazioni; per alcuni è lo spirito (femminile) dell'Algebra stessa, per altri il nome della figlia cui sono dedicati vari semplici giochi matematici e ci sono ancora altre interpretazioni. Il libro inizia così: *Bella fanciulla dagli occhi lucenti…* e seguita rivolgendosi spesso a questa fanciulla, ideale o reale. Alcuni degli indovinelli proposti riguardano le frazioni. Uno di essi è così concepito: uno sciame di api vola sui fiori del giardino; di esse, $\frac{1}{5}$ si posa sui gelsomini, $\frac{2}{3}$ sui lillà, $\frac{1}{15}$ sui gigli mentre due api s'aggirano qua e là senza prendere decisioni… Quante sono in tutto le api dello sciame?

2.7.2. Arabi

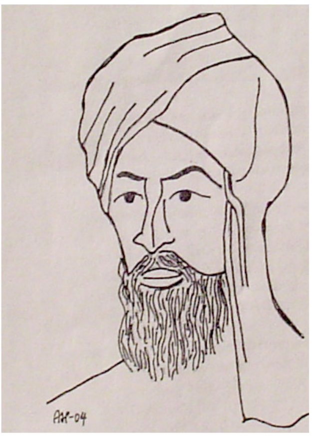
Gli Indiani hanno inoltre il merito di aver affidato la loro Matematica agli Arabi che, dopo averla ulteriormente raffinata, la portarono in Europa, dando uno scossone alla stantìa Matematica del Mediterraneo.
Per diversi secoli, Indiani ed Arabi convissero nella creazione di Matematica, fino a che gli Arabi presero nettamente il sopravvento.
È nel mondo arabo che si concepiscono in modo definitivo le cifre da 0 a 9 (anche se piuttosto diverse da quelle usate oggi, che ebbero origine solo nel XVI sec.), che anche alle frazioni vengono definitivamente applicati i sistemi posizionali, che si strutturano

algoritmi di calcolo sui numeri naturali e sui frazionari, per come li conosciamo noi oggi.
Le dieci cifre cambiarono spesso aspetto nel passare dei secoli nel mondo arabo; ecco come si presentavano nel XIV secolo, in due alternative presentate nello stesso testo:





Molti furono i valenti matematici indiani ed arabi che sistemarono, tra l'VIII ed il XIV secolo, la Matematica che poi si è sviluppata in Europa, a partire dal XIII secolo.
Si cita, solitamente, tra i primi, Abu Ja'far Mohammed ibn Musā detto al-Khowârizmî, vissuto nel IX secolo, attivo certo nell'830.



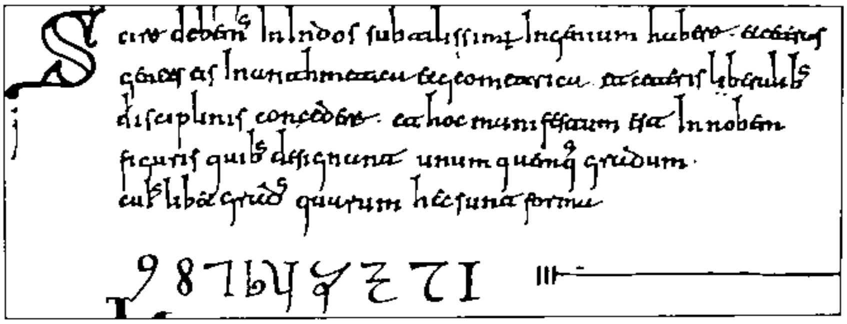
Molti e valenti sono i matematici arabi dopo di lui.
Può essere curioso sapere che, di solito, si attribuiscono al mondo arabo celebri indovinelli matematici che si sono tramandati nei secoli. Uno dei più affascinanti è il seguente che riprendo così come lo propone Giuseppe Peano (1924; nella edizione 1983, pagg. 5-6): «Un Arabo morendo lasciò ai suoi 3 figli 17 cammelli in eredità e ordinò che la metà di essi fosse data al primo figlio, la terza parte al secondo, e la nona al terzo figlio. I tre figli si rivolsero per la divisione al cadì, il quale venne col proprio cammello, che unì agli altri. Diede la metà dei 18 cammelli, cioè 9 al primo, un terzo, cioè 6 al secondo, un nono, cioè 2 al terzo figlio, e poi, ripreso il suo cammello se ne andò ringraziato dai tre figli, ognuno dei quali aveva ricevuto più di quanto gli spettava».

Si noti che $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}<1$, dunque in realtà il padre non aveva diviso tutta l'eredità…
Quella somma fa invece $\frac{17}{18}$, il che spiega il ruolo del cammello del cadì.
Questo singolare indovinello ha avuto molte varianti, riprese poi in Europa da vari Maestri d'Abaco, come Paolo dell'Abbaco (1281-1374) che fu anche maestro a Firenze probabilmente di Jacopo, figlio di Dante; come Dionigi Gori (attivo a Siena del XVI secolo).
Esso è stato oggetto di studi anche assai più recenti (Gardner, 1979) e di narrativa (Tahan, 1997).

Di solito si considera che l'ultimo matematico del mondo arabo di un certo valore, prima della successiva decadenza, fu Al-Kashi (morto verso il 1436) che visse a Samarcanda presso l'imperatore mongolo Ulugh Beg (1393-1449), nipote del grande conquistatore Tamerlano (1336-1405), tanto interessato alle scienze da far costruire un famoso potente telescopio che attrasse gli studiosi dell'epoca, non solo dall'Oriente. Samarcanda, tuttora fiorente città dell'attuale Uzbekistan, era, a quell'epoca, capitale dell'impero mongolo ed una delle capitali mondiali della cultura.
Ebbene, Al-Kashi si autodefinisce in una sua opera "inventore delle frazioni decimali", forse perché le aveva davvero concepite, finalmente, all'interno del sistema posizionale decimale, cosa che non era riuscita a nessuno in modo completo.
Si potrebbe esprimere questo fatto come segue.
Se abbiamo 23 si sa che ciò significa, dal punto di vista posizionale a base dieci, $2\times10^1+3\times10^0$; ma che cosa significa 23,78? Si deve far ricorso alle frazioni decimali: $2\times10^1+3\times10^0+7\times\frac{1}{10}+8\times\frac{1}{100}$; oggi si preferisce addirittura fare ricorso ad esponenti negativi: $2\times10^1+3\times10^0+7\times10^{-1}+8\times10^{-2}$, una scrittura certo assai più elegante e compatta che però si ebbe solo diversi secoli dopo.

2.8. IL MEDIOEVO IN EUROPA

La cultura greca fu ereditata non solo dal mondo arabo, ma pure dall'Europa, tanto che per secoli i cosiddetti "enciclopedisti" europei non fecero altro che tramandare per iscritto le conoscenze create dai Greci (quel che se ne sapeva).
La numerazione a volte è quella greca, a volte è quella romana (che resta molto a lungo quella ufficiale); le frazioni non ricevono particolari impulsi.
Fin dal IX sec. vi furono però contatti stretti tra i matematici del mondo arabo e quelli latini, specialmente della penisola italica (soprattutto grazie ai commerci cui erano dedite le Repubbliche marinare) e gli Stati che allora formavano la penisola iberica.
Il più antico trattato europeo nel quale si fa menzione delle 10 cifre indo-arabe è del 967 (si trova nella Biblioteca dell'Escorial, si tratta del *Codex Vigilanus*):



Un fatto nuovo si ebbe con Leonardo figlio di Bonaccio, da Pisa, detto “bighello” (1180 – 1250).

Costui, attratto dalle cose matematiche e perciò senza un vero mestiere (da cui “bighello”), commerciando forse controvoglia per conto del padre a Bùgia, nell’attuale Algeria, molto fu colpito dalle cifre indiano – arabe, dal sistema posizionale, dalla cifra zero, dagli algoritmi di calcolo che si potevano eseguire a penna senza sassolini ed abaco e dalla quantità immensa di meraviglie matematiche che tale strada apriva: l’Algebra (che gli Arabi, proseguendo la strada aperta dagli Indiani, avevano raffinato), i numeri interi (positivi e negativi), la trattazione delle frazioni in un sistema decimale sempre più elegante e sempre più completo.
Fu così che scrisse giovanissimo l’opera che doveva consegnarlo alla storia, *Liber abaci*, che diffuse in varie copie a partire dal 1202.
A parte il resto, è qui che le frazioni per come le conosciamo noi appaiono; Leonardo dà le regole delle operazioni sulle frazioni, trova massimi comuni denominatori tra frazioni, trasforma le frazioni in somme di frazioni a numeratore 1, risolve le equazioni trovando radici intere, razionali e irrazionali, usa le frazioni sessagesimali etc.

Solo una curiosità; mentre noi oggi scriveremmo $3\frac{1}{2}$ per indicare 3 interi e una metà, Leonardo preferisce la scrittura inversa $\frac{1}{2}3$.

Leonardo, anche in altre opere, dedica molta attenzione alle questioni di contabilità ed al cambio tra monete e si serve spesso di frazioni unitarie, complicando notevolmente, a volte, le cose.

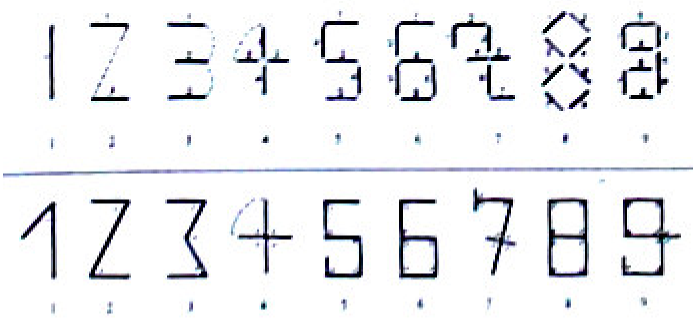
Qui ed in altre opere o in altre occasioni, Leonardo dà prova di grande maestrìa matematica; nell'opera *Flos* (*Fiore*), le cui copie furono distribuite a partire dal 1225, risolve equazioni trovando radici approssimate oltre ogni limite umano; per esempio una di queste radici è, nella scrittura sessagesimale che abbiamo imparato dai Sumeri: 1;22,7,42,33,4,40 cioè, a voler scrivere in modo esplicito:

$$60+22\times\frac{1}{60}+7\times\frac{1}{60^2}+42\times\frac{1}{60^3}+33\times\frac{1}{60^4}+4\times\frac{1}{60^5}+40\times\frac{1}{60^6}.$$

Furono queste opere e questa maestrìa che lo portarono alla corte di Federico II (1194-1250) uno degli imperatori più colti ed amanti della cultura di tutti i tempi, egli stesso poeta, matematico, filosofo. A corte di Federico, Leonardo più volte partecipò come paladino del cristianesimo a disfide matematiche che lo opponevano ai grandi matematici del mondo arabo, a loro volta paladini del mondo islamico, riportando grandi trionfi.

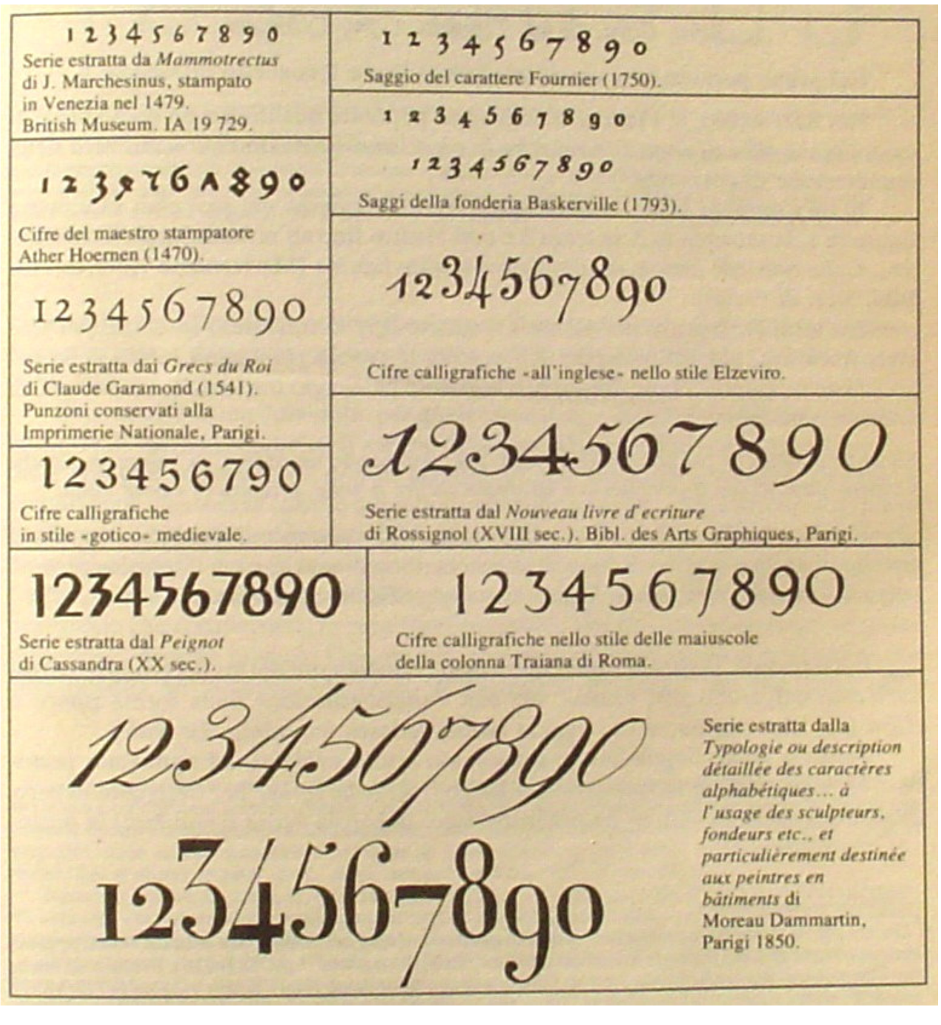
Il che arricchì la sua fama e ci permette di dire che la Matematica era finalmente approdata in Europa, anche se ci vollero altri secoli prima che vi si stabilisse in modo definitivo.

L'Europa tardò parecchio a rendere del tutto spontanee le dieci cifre indo-arabe, tanto è vero che in trattati rinascimentali si dovevano suggerire stratagemmi per memorizzarne la scrittura:



Le forme eleganti delle cifre indiano – arabe furono artisticamente disegnate soprattutto nel corso del XVI secolo e diffuse in Europa definitivamente, in modo stabile ed univoco, dall'invenzione della stampa, cioè la tipografia a caratteri mobili, ideata da

Johann Gutenberg (1400 circa – 1468); le prime opere a stampa di Gutenberg furono del 1450 circa, ma di solito si considera che il primo libro vero e proprio a stampa fu la *Bibbia Mazarina* del 1455.



2.9. CONCLUSIONE

Il resto della storia delle frazioni è solo un insieme di curiosità, in parte già ricordate nella sezione **2.1.1.**:

- le parole “numeratore” e “denominatore” si affermano nel corso del XV secolo;
- la cosiddetta “riduzione delle frazioni ai minimi termini” si trova esplicitamente presentata in Luca Pacioli (1445-1515) ed in Nicolò Fontana da Brescia detto Tartaglia (1499-1557), sotto il nome di “schisare”;
- la distinzione tra frazioni “proprie”, “improprie”, “apparenti” è del XVIII secolo;

solo per ricordare i punti principali.

Una considerazione per concludere.
Si usa da oltre 20 anni distinguere tra "concetto matematico come strumento" e "concetto matematico come oggetto" (Duady, 1984). Usando le parole di D'Amore (1999, pag. 225): «Lo stesso concetto matematico è tanto uno *strumento* che trova la sua funzione nei diversi problemi che permette di risolvere, quanto un *oggetto* poiché è un dato culturale che trova il suo posto in un edificio più vasto, il sapere matematico». Da un punto di vista storico, anche grazie agli studi di Anna Sfard (1991), riconosciamo oggi che certi concetti appaiono dapprima come meri *strumenti* per l'umanità e vengono trattati come tali: essi non vengono studiati, analizzati di per sé stessi, ma solo in funzione ai problemi che permettono di risolvere; solo ad un certo punto essi assumono l'importanza di *oggetto* di studio ed acquistano allora una tale dignità da essere studiati di per sé stessi. Di solito nasce allora una *teoria* di quel concetto e si fanno passi da gigante nella sua conoscenza.
Per esempio, le equazioni sono state usate come strumento per risolvere problemi fin dai tempi dei Sumeri (4000 a. C.), ma solo nel Rinascimento [dapprima italiano, Girolamo Cardano (1501-1576), Nicolò Fontana da Brescia (1499-1557), Rafael Bombelli (1526-1572), e poi francese, François Viète (1540-1603), René Descartes (1596-1650)] vennero studiate di per sé, come vero e proprio oggetto, con piena dignità concettuale, con la nascita di una "teoria delle equazioni". In pochi decenni, la conoscenza che l'umanità raggiunse nel campo delle equazioni fu nettamente superiore a quella accumulata in oltre 5000 anni, tra il 4000 a. C. ed il 1300 d. C.
Ancora un esempio; per molte decine di migliaia d'anni l'essere umano ha usato i numeri come strumento per contare, per indicare, per misurare; ma solo nella Grecia classica, tra il VI ed il III sec. a. C., si è data dignità al concetto "numero", fino a farlo diventare oggetto, con la nascita di una "teoria dei numeri". In pochi secoli, la conoscenza raggiunta sui numeri fu infinitamente maggiore di quella accumulata nel corso di parecchie decine di migliaia di anni.
Le frazioni non sfuggono a questa legge anche se vi si nota qualche piccola incongruenza. Non abbiamo idea di quando nacque il concetto di frazione; ma già nell'Egitto del 2000 a. C. si studiava una vera e propria teoria delle frazioni unitarie. Il carattere strumentale è sempre stato evidente, ma spesso mescolato a quello teorico, certo nel mondo egizio, ma anche in quello greco, indiano, arabo. Nel Medioevo arabo ed europeo si nota un tentativo di teorizzazione, nel quale cioè la frazione è oggetto, ma mai disgiunta dalle sue caratteristiche di strumento. Insomma, la distinzione descritta in precedenza non è così evidente e storicamente scandita. Nella situazione attuale, l'unico luogo di teorizzazione delle frazioni come oggetto è la scuola, primaria e secondaria, luogo anche della loro utilizzazione come strumento dato che, fuori della scuola, la frazione non è presente in modo massiccio come strumento.

3

Triangolo della didattica e trasposizione; le frazioni, oggetto di sapere scolastico

3.1. IL TRIANGOLO DELLA DIDATTICA

Nel nostro ambiente, si usa fare riferimento ad uno schema assai diffuso, detto *triangolo della didattica**, per cercare di racchiudere in un tutt'uno la complessità sistemica del processo di insegnamento – apprendimento.[4] Con questa denominazione si intende la terna degli "enti" che entrano in gioco in tale processo: l'allievo, l'insegnante ed il Sapere accademico (un'analisi molto dettagliata di questo schema appare in D'Amore, Fandiño Pinilla, 2002).
In particolare, si può evidenziare come, mentre ogni "vertice" del triangolo rappresenta un soggetto del complesso rapporto, i "lati" rappresentano relazioni reciproche. Già in Fandiño Pinilla (2002), ho esaminato in dettaglio il lato "allievo - Sapere" e quindi evito di ripetermi a lungo qui.
Faccio solo notare che il passaggio dal "Sapere" al "sapere appreso" dall'allievo è il risultato di un lungo e delicatissimo percorso che si può schematizzare come segue:

Sapere accademico

sapere da insegnare

sapere insegnato

sapere appreso

[4] In verità, sarebbe necessario qui fare ampio riferimento all'idea di *milieu** di Guy Brousseau; ma rinvio per questo a D'Amore (1999).

In tale successione di passaggi, il primo, quello che trasforma il "Sapere" in "sapere da insegnare", si chiama *trasposizione didattica** e costituisce un momento di grande rilevanza, un momento nel quale la professionalità e la creatività dell'insegnante si esprimono al massimo livello.
Riflettere su questi "passaggi" aiuta molto, per quanto concerne la comprensione della realtà scolastica. Sembra tuttavia che una scarsa dimestichezza negli studi di didattica ostacoli tale riflessione, cosicché si ritiene opportuno proporre ogniqualvolta possibile esempi concreti che possano far luce su questa problematica.

3.2. LA TRASPOSIZIONE DIDATTICA

La trasposizione didattica è obbligatoria in aula: stante l'età dell'allievo e la sua situazione cognitiva, non è pensabile, mai o quasi mai, che gli si possa semplicemente "consegnare" un "Sapere" o una sua parte. L'allievo è nella situazione in cui gli si deve invece consegnare un adattamento di tale sapere, una sua reinvenzione, una sua interpretazione, adatta alla sua età, alla sua situazione cognitiva, alla sua capacità.
Anzi, non è escluso che l'insegnante accetti la notevole responsabilità di far costruire un apprendimento non concluso, in via di sistemazione, addirittura non del tutto corretto, in base alle reali possibilità del proprio allievo. [Su questo tema, sarebbe importante inserire idee fondamentali di Didattica della Matematica come misconcezioni*, immagini e modelli*, modelli intuitivi*, modelli parassiti*, per avere un ampio quadro di riferimento teorico. Nel Cap. **7.** farò ampio uso di questi concetti].
La trasposizione didattica diventa così uno dei fenomeni più interessanti di tutto il processo di insegnamento – apprendimento, uno di quelli che, più di altri, mostra in pieno ed implica la professionalità dell'insegnante.
Non si deve credere che la trasposizione didattica riguardi solo la scuola primaria; ingenuamente, si potrebbe credere che l'età e la cultura posseduta dall'allievo di primaria rendano obbligatorie una ricostruzione ed una ridefinizione del Sapere, mentre questo non è necessario più avanti. Ma ciò è un'illusione: questa attività di trasposizione è necessaria in ogni livello scolastico, dato che il "Sapere accademico" di riferimento dell'insegnante deve comunque essere ridefinito per poter essere trasformato in "sapere da insegnare", anche negli studi universitari.

3.3. I NUMERI RAZIONALI E LE FRAZIONI, NECESSITÀ DI UN SAPERE SCOLASTCO

Come ho già messo in evidenza nel Cap. **1.**, non è possibile semplicemente trasferire l'oggetto di "Sapere" "Q^a" all'allievo, né in primaria, né in secondaria; l'allievo non ha la maturità critica o la capacità cognitiva di costruire un "Sapere" come quello.
Tuttavia, tra i "saperi appresi", la storia, la consuetudine e l'attuale società considerano doveroso includere Q^a; ne fanno parte esplicita, per esempio, l'uso della virgola, l'uso dei numeri decimali, i numeri decimali tra 0 ed 1 e così via. Lo stesso sistema monetario

di quasi tutte le nazioni del mondo prevede una certa qual competenza[5] da parte del cittadino comune sui numeri razionali assoluti; il sistema internazionale delle misure lo ha fatto proprio fin dalla fine del XVIII secolo, rendendolo necessario; in qualsiasi mestiere, anche il più umile, è necessario capire il significato intuitivo di 0,5 o di 2,5.
Dunque, Q^a fa parte dei saperi che si auspicano come "saperi appresi" (si veda da questo punto di vista l'interessantissimo Noss, 1998).
Idee quali il fatto che scrivere $\frac{1}{2}$ equivale a scrivere 0,5, che $2{,}3\overline{9} = 2{,}4$, che $\frac{1}{2}$ di $\frac{1}{2}$ è $\frac{1}{4}$, … intervengono in varie occasioni nella vita sociale e quotidiana, in vari mestieri (Noss, 1998); eppure queste competenze sembrano sfuggire a molti attuali cittadini, anche se appartenenti ad un livello sociale elevato, segno del fatto che la trasposizione didattica del loro docente non è stata efficace e che l'apprendimento auspicato, nel loro caso, non è stato raggiunto.
Dunque: i numeri razionali hanno uno statuto sociale che li rende competenze auspicabili per tutti.
Tuttavia, non è possibile insegnare Q^a nella scuola primaria (né in quella secondaria) nella forma matematica formalmente corretta che abbiamo conosciuto in **1.2**.
Si rende così evidentemente necessaria un'azione forte di trasposizione didattica che permetta di trasporre Q^a in qualche cosa che sia accessibile all'allievo di primaria e poi di secondaria. La storia dell'insegnamento della Matematica ha da sempre indicato il percorso di questa trasposizione in uno schema come il seguente:

Q^a

$\Downarrow$ *trasposizione didattica*

frazioni (scuola primaria e secondaria)

$\Downarrow$

numeri con la virgola (scuola primaria e secondaria)

$\Downarrow$

Q^a (scuola secondaria superiore e, talvolta, università)

"Trasposizione didattica" non è sinonimo di "semplificazione", come si potrebbe ingenuamente credere; a volte i concetti attraverso i quali siamo costretti a far passare il nostro allievo sono irti di complicazioni, rispetto al "Sapere".
Per esempio, nelle frazioni sorgono (come vedremo) mille problemi concettuali costituiti da oggetti di sapere che non esistono in Q^a. Per esempio, si pensi alle frazioni

[5] Userò esplicitamente la parola "competenza" in luogo di "conoscenza" per tutto il corso del libro, quando lo riterrò semanticamente opportuno; lo farò senza asterisco, rinviando qui, una volta per tutte, a D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla (2003).

improprie o apparenti; la loro presenza è ingombrante e complessa, irta di difficoltà cognitive, mentre in Q^a questa casistica neppure esiste.
Detto in altre parole, se si potesse evitare il passaggio attraverso le frazioni e puntare direttamente sui numeri razionali assoluti, sarebbe forse più facile e naturale. Ma ciò è impossibile. L'idea di passare attraverso le frazioni sembra ancora il modo più naturale, ma non sappiamo se è davvero il più efficace. Certo, è pieno di difficoltà.
Dunque, le frazioni, pur non facendo parte di un "Sapere" accademico, si presentano all'attenzione della Didattica della Matematica come un oggetto di sapere, un sapere che potremmo chiamare "scolastico".

4

Quadro teorico delle ricerche didattiche sulle frazioni

L'introduzione del concetto di frazione sembra essere tradizionalmente uguale in tutto il mondo; una data unità concreta viene divisa in parti *uguali*, poi di tali parti se ne prendono alcune. Questa accezione intuitiva di frazione dell'unità ha il vantaggio di essere chiara e facilmente acquisibile; ha inoltre il vantaggio di essere facilmente modellizzata nella vita quotidiana; ma ha il difetto di non essere poi teoricamente sufficiente, di fronte alle varie e multiformi interpretazioni che si vogliono dare all'idea di frazione. Come vedremo.
Una sola "definizione" non basta.

Quando lo studente, fra gli 8 e gli 11 anni, ha capito che $\frac{3}{4}$ rappresenta l'operazione concreta di dividere una certa unità in 4 parti *uguali* delle quali se ne considerano 3, si ha l'illusione che tutto stia andando per il meglio; ma, subito dopo, ci si accorge che proprio la facilità di costruzione di quella conoscenza sta bloccando la strada, sta funzionando da ostacolo* per il successivo vero apprendimento. È sì una conoscenza, ma inadeguata per proseguire nella costruzione delle conoscenze corrette considerate successive; per esempio: se abbiamo una unità divisa in 4 parti *uguali*, che cosa significa, da questo punto di vista, prenderne i $\frac{5}{4}$?

Sembra, a volte, che neppure alcuni insegnanti si rendano conto di questa situazione cognitiva e concettuale così complessa; mi pare dunque opportuno dedicare un intero capitolo ai vari modi di intendere il concetto di "frazione" che si vorrebbe far acquisire all'allievo.
Per dare credibilità al lavoro, però, mi vedo costretta a fornire un panorama della ricerca internazionale in questo delicato settore, certo uno dei più coltivati in tutto il mondo. Citare tutte le ricerche è impossibile, vista la vastità che supera ogni immaginazione; userò quindi il criterio seguente: citerò solo quei lavori che hanno influenza diretta sulle mie successive scelte, tralasciando tutti gli altri. Saranno parecchi lo stesso. La mia

speranza è che questa bibliografia (che sarà quasi solo di citazioni per gli anni ’70-’80 ed invece ragionata per gli anni ’90-2000) possa essere utile a chi vorrà proseguire o puntualizzare. Non è stato per nulla banale costruirla.

4.1. PREMESSE DI BASE

Nella scuola primaria, di solito in Italia in terza, s’introduce formalmente l’idea di frazione; essa è già posseduta, nelle sue accezioni più immediate di “mezza” mela, un “terzo” di tavoletta di cioccolata, dividere una manciata di cioccolatini in 4 parti uguali, fin dalla più tenera età.
Ma quel che si fa a scuola è di formalizzarne la scrittura e di istituzionalizzarne* il significato.
Più o meno, l’atteggiamento condiviso in tutto il mondo è quello di considerare un “oggetto concreto di riferimento” da assumere come unità e che abbia i seguenti requisiti:

- deve suscitare gradevolezza e dunque simpatia
- deve essere visibilmente unitario
- deve essere ben presente a tutti gli allievi, cioè non deve richiedere egli stesso un apprendimento.

Si tende a scegliere una torta cilindrica o una pizza in quasi tutti i Paesi del mondo; entrambi questi oggetti verificano i requisiti detti sopra.
A questo punto si ipotizzano situazioni nelle quali questa data *unità* (torta o pizza o simili) debba essere ripartita tra più allievi o persone; nasce così l’idea di un mezzo (se si divide per 2), di un terzo (se si divide per 3) e così via; si tratta delle “frazioni egizie”, le prime che la storia ci tramanda.
Per ciascuna di tali frazioni si stabiliscono scritture che, nei casi precedenti, sono rispettivamente $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$; nessuna difficoltà a leggerle con il loro nome: un mezzo, un terzo; e nessuna difficoltà nel generalizzare le scritture precedenti a $\frac{1}{n}$ che acquista il senso seguente: l’oggetto unitario di partenza è stato diviso in n parti *uguali*. Con allievi di giovane età ci si limita a fare vari casi, dando valori opportuni ad n.
Se poi, per motivi diversi, i commensali hanno diritto a prendere quantità diverse delle parti uguali in cui era stato diviso l’oggetto unitario, allora nascono scritture del tipo $\frac{2}{5}$ (che si legge: due quinti) e che significa: delle 5 parti *uguali* in cui era stato diviso l’oggetto unitario, se ne prendono 2.
Nascono così varie idee e si puntualizzano vari elementi di questa scrittura:

- il numero che si trova sotto il segmentino orizzontale si chiama *denominatore* ed indica il numero di parti *uguali* in cui è stata *divisa* l’unità;

- il numero che si trova sopra tale segmentino si chiama *numeratore* ed indica sempre il numero di parti frazionarie che si sono *prese* (dunque il numeratore indica per quante volte bisogna prendere la parte frazionaria ed esprime dunque una *moltiplicazione*);
- perché tutto ciò abbia senso, occorre che le parti frazionarie dell'unità siano *uguali* e su questo concetto si insiste molto (vi torneremo in maniera critica).

Vedremo come la comprensione di questi elementi ed in particolare di quelli evidenziati con il corsivo finiscano con il costituire ostacoli* alla costruzione del concetto di frazione.

4.2. IL QUADRO TEORICO DELLE RICERCHE DIDATTICHE SULLA "FRAZIONE"

4.2.1. Anni '60-'70-'80

Tra gli anni '60 ed '80, specialmente negli USA, sono fioriti in quantità enorme studi sull'apprendimento delle frazioni da parte degli allievi fra gli 8 ed i 14-15 anni; questi studi erano principalmente dedicati a:

- questioni generali connesse con il concetto stesso di frazione (Krich, 1964; Green, 1969; Bohan, 1970; Stenger, 1971; Coburn, 1973; Desjardins, Hetu, 1974; Coxford, Ellerbruch, 1975; Minskaya, 1975; Kieren, 1975, 1976; Muangnapoe, 1975; Williams, 1975; Galloway, 1975; Payne, 1975; Novillis, 1976; Ellerbruck, Payne, 1978; Hesemann, 1979);
- operazioni tra frazioni e difficoltà connesse [Sluser, 1962 (divisione); Bergen, 1966 (divisione); Wilson, 1967 (divisione); Bindwell, 1968 (divisione); Green, 1969 (moltiplicazione); Coburn, 1973 (addizione e sottrazione); Streefland, 1978 (sottrazione)];
- diverse interpretazioni dell'idea di frazione [Steffe, Parr, 1968 (rapporto); Coburn, 1973 (rapporto); Suydam, 1979 (rapporto); Streefland (1979) (misura e rapporto)].

Tra tutti questi lavori pionieristici, emergono quelli di Kieren (1975, 1976) che trattano tutti i precedenti argomenti, evidenziando l'esistenza di almeno 7 significati diversi del termine "frazione" e mostrando che proprio in questa polisemia si nasconde il problema di apprendimento più notevole, sia per quanto riguarda il concetto generale, sia le operazioni.

Anche gli anni '80 furono ricchissimi di studi specifici:

- apprendimento generale (Owens, 1980; Rouchier et al., 1980; Behr, Post, Silver, Mierkiewicz, 1980; Hasemann, 1981; Behr, Lesh, Post, Silver, 1983; Lancelotti, Bartolini Bussi, 1983; Pothier, Sawada, 1983; Streefland, 1983, 1987; Hunting, 1984a, 1986; Behr, Post, Wachsmuth, 1986; Dickson, Brown, Gibson, 1984; Streefland, 1984a, b, c; Kerslake, 1986; Woodcock, 1986; Figueras, Filloy, Valdemoros, 1987; Hunting, Sharpley, 1988; Behr, Post, 1988; Ohlsson, 1988; Weame, Hiebert, 1988; Centino, 1988; Chevallard, Jullien, 1989);

- apprendimento delle operazioni tra frazioni [Streefland, 1982 (sottrazione); Behr, Wachsmuth, Post, 1985 (addizione); Peralta, 1989 (addizione e moltiplicazione)];
- paragone tra valori frazionari e/o decimali e difficoltà dell'estensione dei numeri naturali a frazioni e/o decimali [Leonard, Grisvard, 1980; Nesher, Peled, 1986; Resnik et al., 1989];
- problemi connessi con le diverse interpretazioni del termine "frazione" [Novillis, 1980a, b (posizionamento sulla linea dei numeri); Ratsimba-Rajohn, 1982 (misura); Hunting, 1984b (equivalenza); Wachsmuth, Lesh, Behr, 1985 (ordinamento); Kieren, Nelson, Smith, 1985 (partizione; uso di algoritmi grafici); Giménez, 1986 (frazioni nel linguaggio comune; schemi); Post, Cramer, 1987 (ordinamento); Wachsmuth, Lesh, Behr, 1985 (ordinamento); Ohlsson, 1988 (semantica della frazione); Davis, 1989 (senso generale da dare alle frazioni nella vita quotidiana); Peralta, 1989 (diverse rappresentazioni grafiche)].

Tra tutti i lavori degli anni '80, spiccano per fama quelli di Hart (1980, 1981, 1985, 1988, 1989; con Sinkinson, 1989) che, pur servendosi di parecchi dei lavori citati in precedenza, riprende in modo critico soprattutto i precedenti lavori di Kieren e quelli degli anni '80 (Kieren, 1980, 1983, 1988; con Nelson, Smith, 1985). Sia Hart che Kieren saranno attivi anche successivamente, come vedremo.
Io seguirò per ora questo filone oramai classico e presenterò più avanti, nel capitolo **5.**, i vari significati della frazione, servendomi dei 7 classici rilevati da Kieren, ma usando anche gli studi di Hart e il panomara di Llinares Ciscar, Sánchez García (1988). Ma, ovviamente, dovrò modernizzare questa visione, per poter sfruttare strumenti che, nel frattempo, sono stati elaborati dalla ricerca in Didattica della Matematica.

Proprio all'inizio degli anni '80, più precisamente nel 1980 e nel 1981, raccogliendo esperienze fatte nel corso dei '70 presso la scuola primaria "J. Michelet" a Talence, Francia, apparve un lavoro che va considerato una pietra miliare nel nostro oggetto di studio, un articolo in due puntate di Guy Brousseau (1980c, 1981) dedicato alla didattica dei decimali.
Tali articoli sono fondamentali nell'evoluzione della Didattica della Matematica non solo e non tanto per l'oggetto studiato, quanto per la metodologia (detta allora "epistemologia sperimentale", del tutto nuova nel panorama mondiale), che addirittura l'Autore discute passo passo per proporla alla comunità. Possiamo pensare che da qui nasca gran parte del modo moderno di pensare alla ricerca in Didattica della Matematica.
In tali lavori, l'Autore definisce l'insieme D dei decimali che considera come ampliamento di N e che servirà poi a passare ai razionali Q; ne studia le caratteristiche algebriche e, brevemente, la storia. Dopo di che mostra un'interessantissima sequenza didattica, oramai storica, che sfrutta le esperienze effettuate nella scuola primaria ("ripetute 10 volte", asserisce, prima di presentarle alla comunità). La prima fase passa

attraverso attività fatte al pantografo che chiamano in causa le frazioni; la seconda attraverso la ricostruzione ingrandita di un dato puzzle; la terza riguarda un interessante problema concernente i diversi spessori di fogli di carta. Di ciascuna fase, Brousseau studia dettagliatamente tutti gli aspetti che oggi si considerano di didattica ma che allora erano assolutamente nuovi. Riporta poi un test effettuato a verifica e ne discute i risultati. Ogni tanto fornisce un approccio decimale ai razionali, sempre più approfondito, ed analizza costantemente le singole fasi del processo sperimentale.
La vastità di questo lavoro, ripeto, è tale, da un punto di vista generale, da non poter non considerare questo lavoro come una chiave di volta nella struttura dell'attuale ricerca in Didattica della Matematica; se ne accorse lo stesso Autore, se è vero che in un suo successivo articolo sugli ostacoli epistemologici* (Brousseau, 1983, uno degli articoli più citati al mondo nel nostro àmbito) egli indica a mo' di esempio proprio il suo studio didattico sui numeri decimali.
La ricerca didattica, tuttavia, è lenta ad essere assimilata, assorbita, fatta propria dal mondo della scuola militante; cosicché l'impatto sulla prassi scolastica anche dopo questo articolo, a distanza di 20 anni, non è stato quello che avrebbe dovuto e potuto essere. Non solo: l'analisi delle reali attività nelle aule e la produzione di testi scolastici mostra che ancora dobbiamo fare i conti con le difficoltà dell'introduzione delle frazioni e dei decimali.

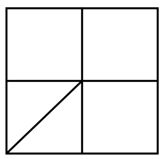
Un'altra citazione speciale merita un progetto nato negli USA nel 1979 e proseguito fino all'agosto 2002; un gruppo di ricercatori: K. Cramer e T. Post (Università del Minnesota), M.J. Behr (Università dell'Illinois) (deceduto nel 1995), G. Harel (Università della California) e R. Lesh (Università Purdue), crearono *The Rational Number Project*, nell'àmbito del quale furono pubblicati oltre 90 articoli fino al 2003. Il focus di queste ricerche sono i numeri razionali, con tutto ciò che li accompagna nell'àmbito del "ragionamento proporzionale"; dunque le frazioni appaiono in modo esplicito e significativo. Di tali articoli, alcuni li ho già citati ed altri dovrò citare tra breve; dunque appaiono in bibliografia, anche se non riconoscibili come parte del progetto, ma in base al nome degli Autori. Per non appesantire inutilmente la bibliografia di questo libro, rinvio il Lettore interessato al sito che porta il nome del Progetto; in esso si trova la storia del progetto e la bibliografia completa (sia in ordine cronologico, sia in ordine alfabetico).

4.2.2. Anni '90-2000

Veniamo ora alla presentazione di alcune ricerche degli anni '90 e 2000; la produzione in questa area (frazioni, numeri decimali, introduzione ai numeri razionali, a livello di scuola primaria e media) è vastissima, tanto che, per non disperdermi nelle citazioni di testi che non userò e per evitare a questo libro una bibliografia finale terribilmente lunga, come ho già avvertito, mi limiterò a citare e presentare brevemente solo quei lavori di ricerca che hanno avuto influenza su quanto dirò in seguito, ignorando gli altri.

Clemens, Del Campo (1990) iniziano una tendenza che troverà vari adepti, anche se secondo diverse modalità; la concettualizzazione del numero razionale evidentemente non è un processo naturale, mentre c'è un generale consenso nella letteratura internazionale sul fatto che essa evolva per soddisfare necessità del genere umano; ebbene, suggeriscono gli Autori, visto che vi sono discussioni su versanti opposti, vale la pena abbandonare questo dibattito.
Weame (1990) critica l'organizzazione dell'apprendimento procedurale, spesso usato a scuola, e l'organizzazione dell'apprendimento concettuale, proponendo proprio un esempio che ha come argomento la costruzione di senso per i numeri decimali.
Saenz-Ludlow (1990, 1992, 1994, 1995) inizia un filone che sarà molto seguito, quello dei "case studies" sull'apprendimento delle frazioni (ma già Hunting, 1986, aveva pubblicato un lavoro simile), cioè di analisi del processo di insegnamento - apprendimento che prende in esame un solo soggetto; in tutti i lavori vengono analizzate strategie personali non solo per la concettualizzazione di frazioni, ma anche per l'esecuzione spontanea di addizione tra frazioni.
Davis, Hunting (1990) suggeriscono di svolgere attività didattica parallela su diverse competenze da attivare sulle frazioni, per esempio su contesti discreti e continui, proseguendo nelle ricerche di Hunting e di Korboski condotte negli anni '80.
Mack (1990, 1993) propone l'idea di "conoscenza informale" come quella conoscenza basata su attività spontanee della vita quotidiana effettuate per dare risposta a problemi posti nel contesto della vita reale dell'individuo; le sue esperienze in aula dimostrano che su questa conoscenza informale possono costruirsi le idee iniziali di frazione e di numero razionale; le frazioni si presentano come parti che compongono un tutto; ciascuna di queste parti viene trattata come un numero a sé stante, piuttosto che come frazione.
Bonotto (1991) presenta una profonda analisi sui diversi approcci al numero razionale e le relative sperimentazioni didattiche.
Basso (1991a, b, 1992) suggerisce possibili itinerari didattici sulle frazioni, soprattutto in quarta e quinta primaria, che tengono conto dei risultati della ricerca didattica degli anni '80.
Figueras (1991) presenta un'interessante e vasta rassegna sull'uso che delle frazioni e dei numeri razionali si fa nel mondo reale; questa opera è ancora un valido spunto per avere riferimenti socialmente concreti nell'uso delle frazioni negli esempi in didattica.
Hunting, Davis (1991) mettono in evidenza la relazione tra l'idea di rapporto ed il primo apprendimento sulle frazioni, suggerendo di sviluppare una didattica dei due concetti all'unisono, fin dall'inizio; su questa linea si trovano d'accordo anche Streefland (1991) e Neuman (1993).
Hunting, Davis, Bigelow (1991), dopo un'analisi critica delle esperienze didattiche sulle frazioni, sostengono l'idea che si deve a lungo trattare la frazione unitaria, fino a

costruirne una salda idea, prima di ogni altro passo; si deve poi passare ad un ulteriore frazionamento delle parti frazionarie ottenute, ritornando di tanto in tanto all'unità da cui si era partiti; sono di questo avviso anche Kieren (1993a) e Steffe, Olive (1990).
Streefland (1990, 1991, 1993) difende ed esemplifica modalità di insegnamento – apprendimento delle frazioni all'interno del mondo reale, per giustificare passo passo le necessità che la vita reale pone per quanto concerne l'apprendimento e la padronanza delle frazioni e dei numeri razionali.
Valdemoros (1992, 1993a, b, c, 1994a, b, 1997, 1998, 2001, et al. 1998) dedica una grande varietà di attenzioni al linguaggio delle frazioni; in particolare studia la costruzione del significato della frazione attraverso l'uso di diversi sistemi simbolici, anche in riferimento all'uso di materiali e modelli concreti; in Valdemoros (1997) studia le risorse intuitive che favoriscono l'addizione tra frazioni; spesso ricorre a studi di casi singoli; in Valdemoros (2004) riporta i risultati di una ricerca su 37 allievi di 8-11 anni di età, centrata sui diversi contenuti assegnabili ad una frazione. Molto interessante il caso di quegli studenti che, di fronte ad un muro quadrato che deve essere diviso in 5 parti uguali tra 5 amici pittori, danno la risposta:



che io stessa ho trovato in altre occasioni. L'Autrice distingue vari piani di analisi per l'interpretazione dei dati: piano semantico, sintattico, di "traduzione" da un lingua all'altra, della lingua aritmetica, della lettura.
Parecchi sono gli studi (soprattutto reports su esperienze d'aula) che relazionano su attività circa le frazioni svolte in età prescolare; fra questi ricordo Pepper (1991), Hunting, Pepper, Gibson (1992) dei quali dovremo servirci al momento delle proposte didattiche.
Cannizzaro (1992) presenta un intreccio tra i piani matematico, cognitivo e di sviluppo curricolare nella didattica dell'aritmetica; ad un certo punto esamina il caso della didattica della frazione evidenziando alcuni punti che io stessa metterò in evidenza più avanti, per esempio differenziando le diverse accezioni del termine ed i rischi che si corrono nell'uso di modelli concreti.
Kieren (1992, 1993a, b, c) prosegue gli studi classici dei 20 anni precedenti, insistendo molto sulle competenze acquisite come fatti personali specifici, suggerendo e verificando che esistono meccanismi personali di costruzione delle conoscenze in questo campo, proponendo processi apprenditivi che partano proprio dal frazionamento di unità.
Behr, Lesh, Post, Silver (1992, 1993) discutono criticamente delle attività didattiche a loro contemporanee, distinguono varie fasi dell'apprendimento delle frazioni e dei numeri razionali ed analizzano il linguaggio nel quale si esprime la didattica delle frazioni in aula.

Bonotto (1992) presenta i risultati di un ampio test effettuato su allievi di V primaria e di I media sulle frazioni e sui numeri decimali; in particolare, studia l'ordinamento, giungendo a mostrare come la conoscenza dei numeri naturali è allo stesso tempo supporto e ostacolo a questo apprendimento, come vi sia difficoltà nella gestione del passaggio tra numeri frazionali e decimali, e come fra conoscenza delle frazioni e dei decimali vi sia conflitto. Vi si conferma la necessità di un lungo cammino adattativo nell'apprendimento di questi concetti.
Un lavoro di analisi delle problematiche generali che si incontrano nel passaggio dai numeri naturali alle frazioni, con relative difficoltà sia matematiche sia di apprendimento, si trova in Gray (1993).
Davis, Hunting, Pearn (1993a, b) propongono l'uso di schemi grafici che mettano in relazione i numeri naturali con quelli frazionari, dopo aver verificato l'abilità di giovani allievi a passare dagli uni agli altri; il "teaching experiment" dei tre Autori è durato due anni, accompagnando allievi per la durata di due anni scolastici, dagli 8-9 ai 9-10 anni di età.
Ball (1993) propone una sua personale esperienza di insegnamento - apprendimento in III primaria nella quale lungamente discute con i propri allievi degli usi quotidiani delle frazioni, nel linguaggio ordinario; solo dopo aver costruito una salda consapevolezza ed aver accettato rappresentazioni personali, discute con essi di simbolismi opportuni, negoziandoli apertamente.
Bezuk, Bieck (1993) insistono sull'importanza di dominare linguisticamente il lavoro sulle frazioni nel tentativo di dare senso al suo apprendimento ed al suo uso; nel testo propongono una breve panoramica delle ricerche in questa direzione.
Graeber, Tanenhaus (1993) propongono un approccio informale alle frazioni, per esempio dando loro un senso concreto; l'idea che viene proposta è quella di usare le frazioni come numeri per misurare grandezze; la scelta è quella di far costruire agli studenti una conoscenza informale sul tema.
Brown (1993) propone uno sforzo dei ricercatori affinché si giunga a teorie o modelli comuni, proprio allo scopo di superare la difficoltà della frammentazione delle ricerche sulle difficoltà dell'apprendimento di questo nostro tema.
Giménez (1994) propone una distinzione tra "frazionare" nel linguaggio comune e "frazione" in Matematica, mettendo in campo racconti, storie, provocazioni cognitive varie e sfruttando il ricorso alla storia ed alla discussione collettiva in aula; il suo scopo è quello di creare in aula una situazione di sempre maggior integrazione culturale di situazioni di frazionamento.
Groff (1994) appartiene alla schiera di coloro che, assai numerosi, propongono di eliminare definitivamente l'argomento "frazioni" dai primi anni di scuola. A questa opinione si contrappongo coloro che, al contrario, vogliono anticipare la costruzione informale di frazione fin dalla scuola dell'infanzia, come vedremo. (Io propenderò per questo ultimo avviso, ma con molta attenzione…).
Mariotti, Sainati Nello, Sciolis Marino (1995) esaminano le competenze che gli studenti dichiarano di possedere al passaggio tra la scuola media e la superiore, per scoprire,

attraverso le risposte e le domande successive di approfondimento, quali esse realmente siano. Si scopre che gli studenti pensano generalmente che i diversi insiemi numerici siano tra loro disgiunti e che sia la scrittura diversa a determinare la natura di un numero.
Kamii, Clark (1995) affrontano un filone classico, quello della difficoltà di capire fino in fondo che cosa significa l'equivalenza tra frazioni; dei risultati di ricerca di questo lavoro dovrò servirmi al momento di fare commenti didattici sull'apprendimento delle frazioni.
Di grande aiuto a chi si occupa di ricerca in questo settore è il vasto e profondo punto critico che viene fatto da Pitkethly, Hunting (1996). In questo lavoro si esaminano diverse tendenze, diversi punti di vista e dunque diversi filoni di ricerca nel nostro settore. Non vengono dati ovviamente suggerimenti didattici, ma solo un vasto panorama sulla ricerca a metà degli anni '90; è auspicabile che un lavoro analogo venga compiuto, a partire da questo, tra breve, a metà degli anni 2000. In un certo senso, questo paragrafo ne è già un inizio.
Sensevy (1996a) riporta un'esperienza di insegnamento – apprendimento con studenti di 4ª e 5ª di primaria, durata quindi 2 anni scolastici. Caratteristica di questa esperienza era la negoziazione continua di significati e di creazione di formalismi che avveniva in aula, durante la ideazione di problemi coinvolgenti le frazioni. Lo scopo comune che veniva riconosciuto era quello della comunicazione efficace. Per raggiungere questo scopo, significati e formalismi sono stati basati su utensili semiotici opportuni che dovevano avere la caratteristica di far condividere, ad allievi e maestro, i significati in gioco. Nascono ovviamente norme sociali nuove che determinano una nuova forma di contratto didattico*. L'esperienza di Sensevy si basa su uno studio teorico (1994) elaborato in sede di tesi di dottorato.
Sempre Sensevy (1996b) presenta un lavoro di ingegneria didattica* che chiama "Il Giornale delle Frazioni", realizzato in un periodo di 2 anni scolastici, in 4ª e 5ª primaria. Lo studio intende evidenziare i contratti temporali che pesano sul processo di insegnamento – apprendimento; tali contratti impediscono all'allievo di divenire un esperto perché la proposta di nuovi argomenti viene fatta prima che i precedenti siano stati organizzati e fatti propri. La ricerca – sperimentazione didattica, nella quale gli allievi avevano un ruolo attivo, aveva lo scopo di «studiare le condizioni temporali che possono portare l'allievo a costruire un'attività riflessiva in un lavoro di tipo epistemologico» (pag. 8; la traduzione è mia). Ora, la ricerca non riguarda espressamente le frazioni o i numeri decimali, trattandosi di qualche cosa di più generale; tuttavia l'esempio scelto dall'Autore è proprio quello delle frazioni, il che mi autorizza a segnalarlo ai miei Lettori ed a tenerne conto nel seguito.
Barbero, Carignano, Magnani, Tremoloso (1996) esaminano dati concreti sugli errori che gli studenti commettono relativamente al nostro tema, per poi giungere ad un'analisi precisa della situazione e delle possibili cause; su questa linea si muovono anche Bonotto (1991, 1993, 1995, 1996), Bonotto, Basso (1994), Bove et al. (1994).

Vaccaro (1998) contiene una proposta per la didattica delle frazioni negli anni finali della scuola primaria, nella quale si ricorre ad una fiaba opportuna. Segnalo questo articolo come uno di quelli che suggeriscono attività, rientrando dunque nella ingegneria didattica*.
Zazkis (1998) dedica il suo studio alla polisemia nella pratica matematica scolare (tema molto presente nell'attuale ricerca in didattica); in particolare si occupa dei termini "divisore" e "quoziente" e mostra come effettivamente vi siano ambiguità nell'uso di tali termini e come queste si riflettano pesantemente nella pratica scolare, nel linguaggio d'aula e nell'apprendimento (il testo si basa su interviste effettuate in aula con studenti). Appare evidente che questa polisemia non può che generare problemi nell'apprendimento delle frazioni.
Hahn (1999) propone i risultati di una ricerca che apparentemente non ha a che vedere con il nostro tema; si tratta di studiare quali siano le competenze autentiche che stanno alla base di un'attività come quella di venditore; si scopre che «il solo concetto matematico del quale gli apprendisti [venditori] hanno padronanza è il concetto di proporzionalità applicato al calcolo delle percentuali» (pag. 229, la traduzione è mia). L'Autrice verifica allora quali siano le competenze sullo stesso soggetto presso studenti di diversi livelli. Poiché alla base dell'idea di percentuale e di operazioni su di essa sta il concetto di frazione, mi servirò nel seguito anche di questi risultati. La tradizione di studio nel campo specifico dell'apprendimento della percentuale è illustre e data oltre 20 anni (Noelting, 1980; Karplus, Pulos, Stage, 1994; Adda, Hahn, 1995; solo per fare qualche esempio).
Weame, Kouba (2000) presentano una discussione sulle difficoltà concettuali ìnsite nell'apprendimento dei numeri razionali, come risultato di un'indagine sulla valutazione del progresso dell'educazione nazionale negli USA.
Singh (2000) presenta uno studio sul rapporto e sulla proporzione; è ovvio come questo tema abbia importanza per i nostri scopi, dato che una delle possibili accezioni semantiche della frazione è proprio il rapporto; inoltre, come dichiara l'Autore, attività sulla proporzione chiamano in campo la capacità di gestire contemporaneamente due rapporti. Questo campo specifico di studio ha notevoli antecedenti: Karplus, Pulos, Stage (1983); Hart (1988); Lamon (1993); Resnick, Singer (1993); Karplus, West (1994); Confrey (1994, 1995); tanto da costituire un filone di ricerca a sé stante. Nel seguito, al momento di studiare le diverse accezioni del termine "frazione", al momento di studiare i problemi didattici generali dell'apprendimento della frazione, al momento di dare raccomandazioni didattiche, mi servirò dei risultati di questi studi specifici.
Adjiage, Pluvinage (2000) presentano i risultati di una prova fatta in aula per la durata di 2 anni nella quale si è privilegiata la rappresentazione geometrica unidimensionale rispetto a quella bidimensionale; gli Autori sottolineano come le classiche rappresentazioni bidimensionali portino ad ostacoli ben noti e difficili da superare, mentre l'uso di entrambe con la stessa costanza sembra ridurre le difficoltà; gli Autori sottolineano l'importanza di fare costante riferimento alle grandezze comuni nella vita

degli allievi. L’importanza del riferimento alle grandezze era già stato messo in luce da Carraher, Dias Schliemann (1991).
Keijzer, Terwel (2001) presentano un interessante “case study” condotto su un percorso di 30 lezioni in una scuola primaria in Olanda; lo scopo era quello di arrivare a far costruire al soggetto il minimo delle competente sulle frazioni, cioè alfabetizzarlo sulle frazioni. Gli Autori descrivono tutto il processo, partendo dalla definizione degli obiettivi, le singole lezioni, la costruzione degli apprendimenti, fino alle prove effettuate per verificare l’avvenuta costruzione delle competenze. Naturalmente hanno tenuto conto delle recenti ricerche in didattica, tese ad evidenziare le varie difficoltà, allo scopo di prevenirle o superarle. Nel testo sono riportati colloqui tra insegnante e soggetto nonché grafici e disegni effettuati da quest’ultimo. Questo lavoro si basa sui risultati contenuti in Keijzer, Buys (1996) (che è anche la proposta di uno specifico curricolo sulle frazioni).
O’Connor (2001) presenta un gruppo di discussione tra bambini di 5ª di primaria il cui tema è il seguente: Può ogni frazione essere trasformata in decimale? Lo scopo del lavoro è generale e l’oggetto “frazione” è dunque scelto solo come tema, non come finalità. Lo scopo, infatti, è quello di mostrare come, nel lavoro dell’insegnante, si frappongano varie interpretazioni personali che operano gli studenti in modo personale, dovuti sia alle complicazioni matematiche, sia all’interferenza con i calcoli etc. Ma la discussione si rivela utile anche ai fini di chi studia le frazioni perché mette in evidenza costruzioni spontanee di sapere.
Llinares (2003) costituisce il capitolo 7 di un libro (a cura di Chamorro, 2003) interamente dedicato alla Didattica della Matematica nella scuola primaria; il libro ha la caratteristica di presentare la disciplina Matematica, nei suoi aspetti elementari, sotto forma di suggerimenti didattici agli insegnanti, senza trascurare però i risultati di ricerca didattica matematica sia in generale sia in modo specifico. Si tratta dunque di un insieme di suggerimenti per la pratica di insegnamento e di riflessioni sui possibili risultati di apprendimento [quel che in D’Amore (1999) si chiamerebbe: un insieme di visioni A e B della didattica*]. Si rivela molto utile vedere come Llinares, uno dei protagonisti dello studio della didattica delle frazioni nel mondo ispanico e latino americano della fine degli anni ’80, consideri e faccia uso dei risultati della Didattica degli anni ’90. Ovviamente questo lavoro sarà utile nel capitolo finale di questo libro.
La Spagna è sempre molto attiva in operazioni di questo tipo, cioè di supporto “alto” alla pratica di insegnamento; tanto è vero che, con scopi del tutto analoghi, nel 2001 era uscito un testo a cura di Castro (2001), con un analogo capitolo sulle frazioni, sempre per la scuola primaria (Castro, Torralbo, 2001), uno specifico sui numeri decimali della stessa Castro ed uno sulla proporzionalità (Fernández, 2001).
Sulla stessa linea si muove Socas (2001) in un capitolo scritto sui numeri decimali con molte attenzioni didattiche, all’interno di un volume utilizzato per la formazione universitaria dei maestri elementari.
Sempre in questa linea, ma indirizzato solo ai sistemi numerici, esce, sempre nel 2003, un altro libro dedicato alla didattica (Cid, Godino, Batanero, 2003). In esso, il capitolo 4

(pagg. 159-196) è dedicato alle frazioni ed ai razionali positivi, mentre il capitolo 5 (pagg. 197-232) è dedicato ai numeri decimali. Questi due capitoli sono ricchissimi di questioni didattiche, non solo suggerimenti per l'insegnamento, ma riflessioni sull'apprendimento (che, ovviamente, si trasformano in importanti suggerimenti concreti per l'insegnante). Anche questi studi ci saranno utili in seguito.
Gagatsis (2003) è la traduzione in italiano di una raccolta di articoli di ricerca in Didattica della Matematica, ricerca compiuta dal ricercatore greco in Grecia e Cipro, con prefazione di Raymond Duval. Il capitolo 2 è dedicato alle rappresentazioni ed all'apprendimento, con vari esempi; in esso, il paragrafo 3 (pagg. 82-95) è dedicato alle frazioni. Più precisamente, l'Autore si pone le seguenti domande di ricerca: «Esiste una forma di rappresentazione relativa ai concetti di equivalenza e di addizione tra frazioni che gli studenti tendono a manipolare in modo più efficace? Esiste una modalità di traduzione tra rappresentazioni relative ai concetti di equivalenza e di addizione fra frazioni che gli studenti tendono a manipolare in modo più efficace?» (pagg. 83-84). Una ricerca, condotta su 104 studenti di 5ª primaria a Cipro, mostra, tra altre cose, la poca flessibilità degli studenti nel passare da una rappresentazione all'altra, il che comporta difficoltà nella scelta di una rappresentazione efficace sia dell'addizione, sia dell'equivalenza tra frazioni. In questo libro si fa ovviamente riferimento ad altre ricerche dello stesso Autore sul tema delle frazioni e delle loro rappresentazioni, come Marcou, Gagatsis (2002).

Per terminare questa lunga, ma necessaria rassegna che dà solo un minimo quadro della complessità e della vastità della produzione sul tema, devo dichiarare che c'è tutto un filone molto importante, che non aveva analoghi né premesse negli anni '60 e '70, ma che, a partire dagli anni '80, ha assunto un'importanza sempre crescente, cioè l'uso delle nuove tecnologie nella didattica in generale, nella Didattica della Matematica più in specifico, nella didattica delle frazioni e soprattutto dei decimali e dei razionali nel nostro caso. Se dovessi ora iniziare una vera e propria analisi degli studi e delle proposte in questo senso, sarebbero pagine e pagine di citazioni. Siccome però in questo libro non me ne occuperò (sarebbe un lavoro specifico e lo lascio ad altri più competenti), preferisco citare solo l'interessantissimo lavoro di Chiappini, Pedemonte, Molinari (2004), tra i più recenti al momento di scrivere questo libro; in tale lavoro appare una bibliografia che potrà aiutare chi è interessato a questo specifico tema.

5

Vari modi di intendere il concetto di “frazione”

Dalla letteratura internazionale emerge chiaramente un primo notevole problema non solo terminologico ma anche matematico che voglio affrontare subito: le diverse interpretazioni possibili del concetto di “frazione”; sulla didattica tornerò a lungo alla fine di questo stesso capitolo **5.** e nei due capitoli finali.
La discussione proposta in questo capitolo, però, ha profonde ripercussioni sull’azione didattica. Di solito, infatti, all’inizio dell’avventura cognitiva sulle frazioni, si propone la seguente “definizione” (la prendo da un libro di testo italiano di I media; rendendo il percorso assai più graduale, meno rapido, più ricco di esempi, ciò è del tutto analogo a quello che si fa nella scuola primaria, di solito in 3ª o, al più, in 4ª).
Dopo aver fatto un classico esempio di ripartizione di una pizza in 4 parti *uguali*, così prosegue il libro:
Si ha una unità-tutto e la si divide in parti *uguali*; ciascuna di queste parti è una “unità frazionaria”; per esempio, se l’unità-tutto è stata divisa in 4 unità frazionarie, allora ciascuna di esse si chiama “un quarto” e si scrive $\frac{1}{4}$. Se di queste unità frazionarie se ne prendono alcune, allora la parte presa dell’unità-tutto si chiama frazione. Nel nostro esempio, abbiamo preso 3 unità frazionarie $\frac{1}{4}$, allora si dice che si è presa la frazione “tre quarti” che si scrive $\frac{3}{4}$.
La grande maggioranza degli Autori che abbiamo conosciuto nei capitoli precedenti, da oltre 35 anni evidenzia che, dietro al termine “frazione”, si nascondono varie accezioni e questo genera una prima confusione: si pretende di dare una “definizione” iniziale definitiva di questa parola ma questa scelta non ha poi la forza di soddisfare tutti i significati che il termine assume. Tanto più che tale “definizione” iniziale è facilmente comprensibile, entra subito nel cognitivo più profondo, produce (troppo presto) un modello*, come vedremo, e non si ha più poi l’occasione, la forza, il coraggio di modificarla per adeguarla alle diverse necessità che mano a mano si presentano.

In questo capitolo mi limiterò ad elencare i principali significati che la parola “frazione” può assumere in Matematica e dunque nel processo di insegnamento – apprendimento. I significati qui presentati e brevemente discussi costituiranno il punto di partenza per molte delle successive riflessioni didattiche. (L’elenco non segue un ordine particolare).
Per evitare continui riferimenti bibliografici, dichiaro che mi servo di tutta la letteratura specifica su questo tema; esso è stato esaminato in modo molto diffuso da molti Autori a partire dagli anni ’70 ed ’80.

5.1. LA FRAZIONE COME PARTE DI UN UNO-TUTTO, A VOLTE CONTINUO E A VOLTE DISCRETO

Per cominciare, notiamo che, se si considera la frazione come una relazione parte - tutto, c’è un’enorme differenza a seconda che il “tutto” (l’unità) sia costituito da qualche cosa di continuo o di discreto.

- *Se il tutto è un’unità continua* (l’area superficiale di un rettangolo o una pizza o una torta), trovarne gli a b-esimi (cioè trovarne la frazione $\frac{a}{b}$) si può sempre fare (teoricamente: perché trovare *per davvero* i $\frac{423}{874}$ di una pizza sarebbe impossibile). Perde senso il caso in cui sia $a > b$, le cosiddette frazioni *improprie*, per le quali la definizione (dividere l’unità in b parti *uguali* e prenderne a) non ha più un significato intuitivo: come si fa, in effetti, a dividere una unità in 4 parti e prenderne… 5? C’è chi risponde che, in tal caso, non c’è una sola pizza, ma 2; ma allora l’unità è *la* pizza o *le 2* pizze? Una situazione come questa non può non recare confusione. A volte l’unità è 1, a volte è più di 1; nel caso delle frazioni improprie, le pizze sono 2 ma l’unità è una.
- *Se il tutto è un’unità discreta* (12 persone o 12 biglie o 12 giocattoli), continua a non avere senso la frazione impropria, ma c’è di più: perfino le frazioni proprie sono a rischio; trovare gli a b-esimi dipende dal rapporto tra 12 e b. Per esempio, si possono sì trovare i $\frac{3}{4}$ di 12 persone (si tratta di 9 persone), ma è impossibile dare senso concreto ai $\frac{3}{5}$. Bisognerebbe dunque distinguere: data una unità - tutto discreta, ci sono sue frazioni che hanno un senso concreto ed altre che non l’hanno. C’è di più. Se vogliamo trovare i $\frac{6}{8}$ di 12 persone, a prima vista non si può fare a causa dell’impossibilità di dividere 12 persone in 8 parti; ma un esperto potrebbe dire che la frazione $\frac{6}{8}$ si può scrivere nella sua forma equivalente $\frac{3}{4}$, rendendo

possibile trovare i $\frac{6}{8}$ di 12; ma questo passaggio dà per conosciuto un argomento che è in via di costruzione; spesso le costruzioni delle due conoscenze (frazione propria di un insieme discreto e frazioni cosiddette equivalenti) si accavallano; l'insegnante crede di poter basare l'una sull'altra, mentre lo studente sta invece ancora costruendo contemporaneamente entrambe.
Voglio far notare altre due incongruenze.

La prima riguarda il termine *uguale*; se vogliamo prendere i $\frac{3}{4}$ di 12 persone, che cosa significa dividere le 12 persone in 4 parti *uguali*? Che cosa riguarda questa *uguaglianza*? Si sta parlando del peso, dell'altezza, dell'intelligenza, … o semplicemente del numero? Se riguarda solo il numero, questo fatto non ha riscontro nel caso degli esempi continui… e soprattutto non ha alcun fondamento quella supposta richiesta che le parti siano *uguali*.

La seconda riguarda la relazione di "equivalenza" tra $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$; di solito ci si lascia trasportare e si prosegue nell'elencare frazioni "equivalenti": $\frac{12}{16}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{30}{40}$, $\frac{45}{60}$ e si finisce con il dire: «e così via, all'infinito…». All'infinito? Se abbiamo 12 persone o qualsiasi altra raccolta finita… Un conto è fare queste affermazioni puramente teoriche quando si è costruito *il concetto**, ben altro è farle in via di costruzione concettuale.

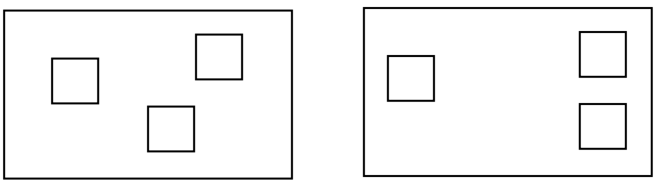
In entrambi i casi, unità continua o discreta, è meglio ribadirlo in forma esplicita, una volta assunta la definizione ricordata sopra non hanno senso da un punto di vista logico le frazioni improprie ed apparenti. Queste hanno bisogno di una giustificazione specifica, possibile, per esempio, quando la frazione si sarà finalmente trasformata in un numero e non sarà più assimilata dallo studente ad un'attività concreta di partizione di oggetti concreti.
Vediamolo ancora una volta.

Tutti sanno che, tra i saperi scolastici proposti a proposito delle frazioni $\frac{m}{n}$ ($n \neq 0$), vi è la classica distinzione tra:

- frazioni proprie: $m<n$
- improprie: $m>n$
- apparenti: $m=n\times q$, dove q è un numero naturale positivo; dunque, a parte il caso $q=1$, tutte le altre frazioni apparenti sono anche improprie; per esempio, $\frac{2}{3}$ è una frazione propria, $\frac{8}{3}$ è una frazione impropria, $\frac{6}{3}$ è una frazione sia impropria che apparente.

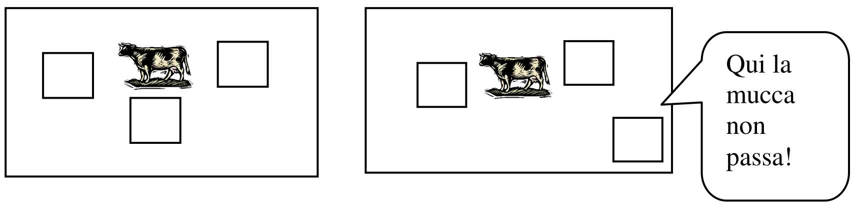
Ma se la frazione è stata ottenuta dividendo una unità – tutto in parti "uguali", delle quali parti se ne sono prese alcune, com'è possibile giustificare una frazione impropria, sulla base della definizione data? E, in quanto alla frazione apparente, solo la frazione che ha il numeratore uguale al denominatore ha un senso: si ha una unità - tutto, la si divide in 4 parti e le si prendono tutte e 4; si ottiene la "frazione" $\frac{4}{4}$ che è poi la stessa unità – tutto di partenza.

A proposito delle difficoltà concettuali relative all'argomento frazioni, un'ulteriore complicazione cognitiva è costituita, come abbiamo già visto in varie occasioni, dall'aggettivo "uguali" sul quale abbiamo sempre insistito: «dividere una unità in parti "uguali"» è la richiesta preliminare a qualsiasi trattazione sulle frazioni.
Supponiamo di usare come unità pizze o torte; dividere in parti "uguali" è, dal punto di vista dell'adulto, un'idea astratta; si fa riferimento ad un caso reale, è vero, ad un oggetto concreto, ma lo si vuol considerare come astratto: al più presto lo si vuol far diventare un apprendimento astratto. Ma il giovane allievo al quale la proposta è stata fatta in situazione reale, a questa fa riferimento: una pizza ricoperta di succulenti ingredienti, tenderà, nella realtà, ad essere difficilmente ripartita *veramente* a metà.
La cosa è più sottile ed interessante di quanto potrebbe sembrare; affrontarla richiede una riflessione più ampia.
Nel famoso esperimento di Piaget e dei suoi collaboratori circa l'idea di estensione di una superficie piana (Piaget, Inhelder, Szeminska, 1948), venivano mostrati a bambini giovanissimi due rettangoli verdi identici che venivano proposti ed interpretati come prati (il verde era identificato con l'erba); su entrambi venivano posti alcuni quadrati bianchi che rappresentavano le basi di altrettante casette disposte su tali prati. Questo dispositivo era teso a verificare se i bambini piccoli erano in grado di capire che se a superfici piane equiestese vengono sottratte superfici piane equiestese, allora le differenze sono ancora equiestese:
se [(A equiesteso a B) e (C equiesteso a D)] allora [A-C equiesteso a B-D].



Ritenendo che i giovanissimi allievi non potessero far uso di termini tecnici (rettangolo, quadrato, superficie, estensione, differenza di estensione, equiestensione), il dispositivo originario degli anni '40 offriva un'interpretazione realistica: casette bianche a base quadrata su campi d'erba di forma rettangolare.

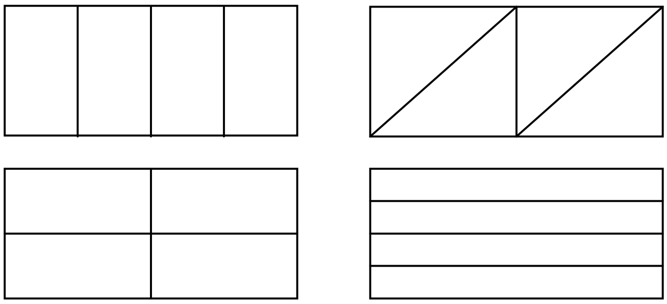
Per completare il quadro realistico, venivano poste sui due rettangoli-campi delle piccole riproduzioni identiche di mucche e la domanda era così posta: «In quale dei due prati la mucca potrà mangiare più erba»?
Gli aggettivi generici "grande, piccolo" sostituivano i più tecnici "più esteso, meno esteso". Il dispositivo messo in campo era di stampo realistico per permettere agli allievi di dare risposte sensate; ma nell'interpretazione degli sperimentatori si celava il desiderio di avere risposte astratte, nel campo della geometria, non dell'allevamento delle mucche.
Sappiamo che gli allievi, però, immersi nella situazione-modello, davano risposte assolutamente legate alla circostanza reale; per esempio, se una "casa" era posta *quasi* sul bordo del "campo" affermavano che l'erba tra casa e bordo non poteva essere mangiata a causa della stazza della mucca:



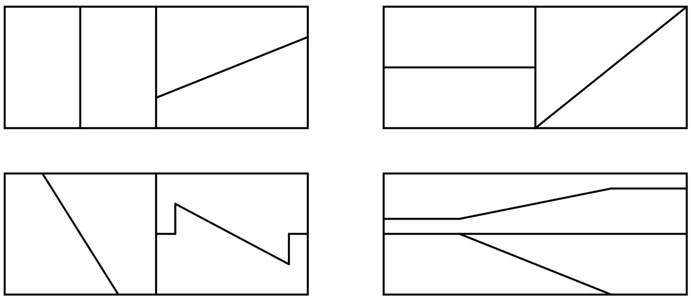
Le risposte, dunque, erano *negativamente* influenzate dal modello concreto proposto. Per sua natura, se al bambino viene proposto un modello concreto che rappresenta fatti reali, su *quelli* punterà la sua attenzione, sui fatti reali, non sull'astrazione alla quale l'adulto sta facendo invece riferimento implicito. Per cui le risposte non possono essere interpretate in chiave astratta, perché il bambino ha risposto alle domande poste sul modello concreto, interpretando la realtà.

Ora, forti di questa famosa esperienza, torniamo alla pizza da dividere in parti "uguali"; il bambino che si è giustamente immedesimato nella situazione reale proposta, tenderà a cavillare su di essa, come farebbe al ristorante nel caso concreto; una pizza, anche se accuratamente tagliata a metà, non presenta due parti scambiabili senza problemi: ciò dipende da fattori contingenti, per esempio dagli ingredienti che ricoprono una metà o l'altra.
È stato l'adulto a scegliere il modello *reale*; non può ora far finta di nulla e pretendere un comportamento *astratto*.
Supponiamo allora di considerare un'unità continua meno ricca di riferimenti realistici, per esempio un rettangolo. Implicitamente, quando l'adulto propone al bambino di dividere il rettangolo in parti "uguali", spesso intende parlare dell'area di quel rettangolo, della sua superficie. Da una parte, dunque, quel termine "uguali" potrebbe e dovrebbe essere interpretato come "congruenti", "sovrapponibili" (e tanti insegnanti di

scuola primaria ed anche secondaria lo interpretano così ed obbligano lo studente ad interpretarlo così):



Ma allora una divisione del rettangolo in 4 parti come le seguenti:

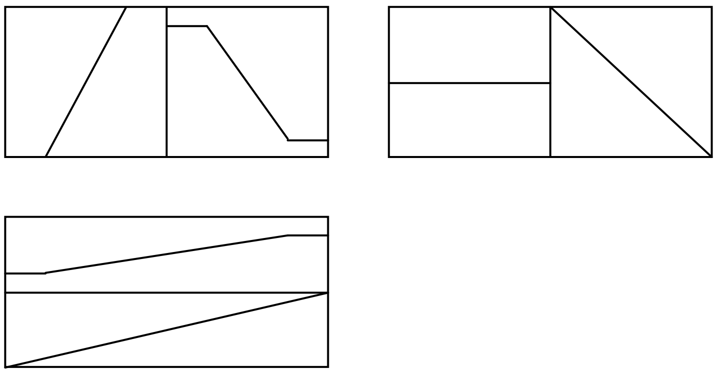


a rigore non sarebbe una divisione ammessa: le parti che appaiono non sono *uguali*; ma allora, sono o non sono ciascuna $\frac{1}{4}$?

Le 4 parti non sono "uguali" tra loro, se interpretiamo quell'aggettivo come "congruenti", "sovrapponibili"; ma lo sono se invece diamo un'interpretazione relativa all'estensione, all'area.

Ecco dunque che il termine "uguali" usato nella prima presentazione dell'idea concettuale di frazione, e che sembrava così neutro e chiaro, costituisce invece un serio ostacolo alla costruzione di conoscenza.

Noi vogliamo che ciascuna di queste 4 parti dell'unità – rettangolo:



sia da considerarsi come $\frac{1}{4}$ del rettangolo stesso, ma se usiamo l'aggettivo "uguali", troppo restrittivo, siamo in difficoltà. E non possiamo accusare l'allievo di risposte scorrette.
D'altra parte, all'età in cui la frazione viene introdotta, parole come "equiestese", "congruenti", "sovrapponibili" sono, per lo più, sconosciute (anche se esistono interessanti ricerche che dimostrano che l'uso di questi aggettivi non solo è possibile, ma semplifica e migliora notevolmente l'apprendimento, perfino nella scuola dell'infanzia; si veda Giovannoni, 1996).
L'idea di semplificare ad ogni costo, di trovare modelli concreti ad ogni costo, a volte si rivela una strategia didattica non ottimale; l'immagine* concettuale che il bambino si fa della nuova proposta cognitiva si trasforma troppo presto in modello* e nascono ostacoli didattici* alla costruzione di conoscenza.

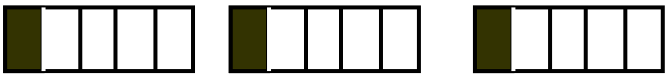
5.2. LA FRAZIONE COME QUOZIENTE

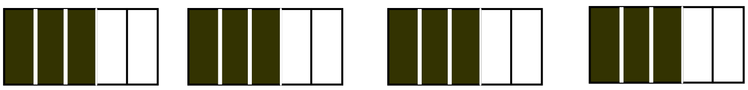
La scrittura $\frac{a}{b}$ è stata proposta in precedenza in termini di parte/tutto: data una unità, dividerla in b parti (uguali, congruenti, sovrapponibili, considerate insomma interscambiabili) e prenderne a; l'unità di partenza poteva essere continua, e dunque produrre pochi problemi; oppure poteva essere discreta, cioè un insieme di c elementi, e dunque produrre problemi di "compatibilità" tra b e c.
Ma è possibile vedere la frazione $\frac{a}{b}$ come una divisione non necessariamente effettuata ma solo indicata: $a:b$; in questo caso l'interpretazione più intuitiva non è la parte/tutto, ma la seguente: abbiamo a oggetti e li dividiamo in b parti.

Per esempio, se abbiamo l'unità costituita da un insieme discreto di 6 elementi e ne dobbiamo prendere i $\frac{3}{5}$, una tecnica è di dividere ogni elemento in 5 parti e poi prendere 3 di tali quinti da ciascun elemento, sempre che questo si possa dividere in parti, ulteriore complicazione concettuale.
A volte, l'operazione di divisione indicata $\frac{a}{b}$ è anche effettuata; per esempio, $\frac{3}{5}$ può indicare una frazione parte/tutto, una divisione indicata (3 oggetti da distribuire tra 5 persone) ma anche il quoziente 0,6, se tale divisione viene effettuata.
Solo che la scrittura 0,6 non produce più l'effetto operatorio che produceva, addirittura in due sensi diversi, la frazione $\frac{3}{5}$ che l'ha originata.

Appare dunque evidente che la stessa scrittura $\frac{3}{5}$ sta ad indicare situazioni che, agli occhi di chi apprende, possono avere interpretazioni assai diverse:

1: 

2: 

3: 

Ma a queste rappresentazioni concrete sfugge l'interpretazione di numero razionale 0,6 che va immaginato o rappresentato a parte: la divisione "indicata e non effettuata" e la divisione "solo effettuata" hanno dunque ruoli completamente diversi.

5.3. LA FRAZIONE COME RAPPORTO

A volte la frazione $\frac{a}{b}$ si usa esplicitamente per indicare il rapporto tra *a* e *b* ed allora a volte si scrive *a*:*b*; il segno ":" sostituisce "–" non tanto e non solo nell'indicare l'operazione di divisione (solo indicata o da effettuare) ma anche nell'esplicitare un senso di relazione tra due grandezze che stanno tra loro come *a* e *b*.

Così, se abbiamo un segmento AB lungo 20 cm ed uno CD lungo 25, il primo è i $\frac{4}{5}$ del secondo, il che può essere scritto: AB=$\frac{4}{5}$CD oppure AB:CD=4:5. La scrittura 4:5 indica il rapporto tra le lunghezze dei due segmenti.
Nulla vieta di pensare ad esempi discreti, una raccolta P di 20 oggetti ed una Q di 25 oggetti; è ovvio che la relazione tra le quantità di P e di Q è ancora di 4:5 che spesso si legge "di 4 a 5".
Se si prende la lunghezza del segmento CD come unitaria o la quantità di oggetti della raccolta Q come unitaria, allora la lunghezza di AB o la quantità di oggetti della raccolta P si può esprimere con la frazione $\frac{4}{5}$, restituendo a questa scrittura una interpretazione abbastanza vicina alla parte/tutto.
Ma è meglio avvertire che, nell'interpretazione che stiamo qui discutendo, questa sarebbe una forzatura; intuitivamente, si tratta di interpretazioni diverse.

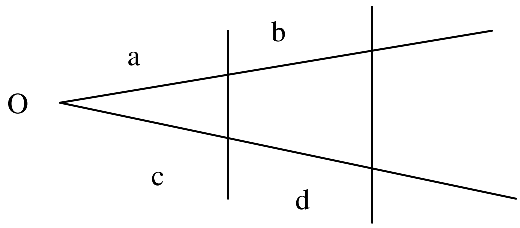
Una modellizzazione matematicamente più adeguata di questa interpretazione chiama in causa la proporzionalità; siano G_1 e G_2 due grandezze variabili che possano assumere valori diversi ma reciprocamente legati sempre secondo lo stesso rapporto, esprimibile tramite una tavola numerica, per esempio:

G_1	G_2
8	10
12	15
16	20
…	…
a	*b*

Appare abbastanza chiaramente che il rapporto che lega G_1 e G_2 è $\frac{4}{5}$ anche se, probabilmente, non avrebbe senso dichiarare che $\frac{G_1}{G_2}=\frac{4}{5}$. In tale caso appare assai più diffuso scrivere come in una proporzione: G_1:G_2=4:5.
D'altra parte, una proporzione altro non è che l'uguaglianza di due rapporti; per esempio: 4:5=12:15 e cioè la dichiarazione che le due frazioni $\frac{4}{5}$ e $\frac{12}{15}$ sono due

scritture diverse dello stesso numero razionale [cioè che le coppie di naturali (4; 5) e (12; 15) appartengono alla stessa classe di equivalenza].

Non si può negare che abbiamo evidenziato un altro uso semantico del termine “frazione” che presenta aspetti particolari.
Tra le altre peculiarità forti della frazione come rapporto, c’è il fatto che numeratore e denominatore appaiono come intercambiabili e non hanno più quella valenza semantica così stretta che hanno avuto finora. Se il rapporto che lega G_1 e G_2 è come 3 a 4, cioè $\frac{3}{4}$, allora si ha anche che G_2 sta a G_1 come 4 a 3 dunque il rapporto è $\frac{4}{3}$. Il significato di queste due affermazioni è lo stesso, per cui le peculiarità di numeratore e denominatore sono, in un certo senso, intercambiabili.
Una visione anche grafica, molto efficace, si ha nel caso del teorema di Talete:

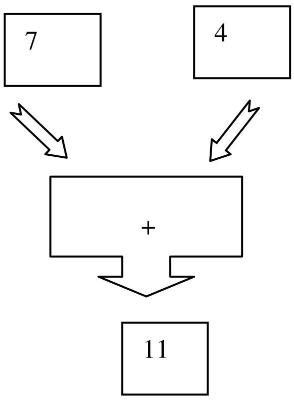


Nella situazione qui sopra illustrata, per esempio, è indifferente scrivere a:b=c:d cioè $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ oppure a:c=b:d cioè $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, con uno scambio di numeratori e denominatori che mette nell’imbarazzo più di un allievo.

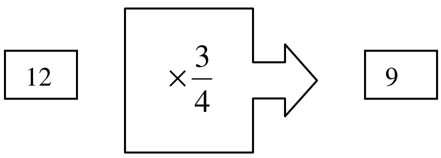
5.4. LA FRAZIONE COME OPERATORE

Molto spesso la frazione è considerata un operatore moltiplicativo, anzi questo è forse uno dei suoi significati più usati nella scuola. Per esempio: «Trovare i $\frac{4}{5}$ di una raccolta di 20 pere» significa operare come segue: (20:5)×4 pere; «Trovare un segmento CD che sia i $\frac{4}{5}$ di un segmento AB che misura 20 cm» porta a dire che CD misurerà 16 cm.
Si capisce bene che solo con uno sforzo si può ammettere di aver sfruttato la definizione iniziale di frazione, anche se a quella ci si può ricondurre. Nel caso del segmento, per esempio, non basta prendere 5 parti “uguali” di AB, ma bisogna conservare proprietà geometriche che si danno per scontate, per esempio l’adiacenza dei segmenti in cui abbiamo diviso AB. Il problema proposto, dunque, non è ben posto; la domanda

avrebbe dovuto essere: «Trovare la lunghezza di un segmento CD che…» perché di lunghezza stiamo parlando e non di segmento.
La frazione come operatore, dunque, agisce sui numeri puri piuttosto che sulle raccolte o sugli oggetti; è, di fatto, una nuova operazione che combina la divisione e la moltiplicazione.
A volte si presentano situazioni imbarazzanti: «Trovare i $\frac{4}{5}$ di una raccolta di 22 pere» presenta un problema di intuizione, dato che 22 non è divisibile per 5. Perso l'aspetto intuitivo, nulla vieta, allora, di operare scambiando tra loro le due operazioni: (4×22):5. La cosa è lecita, certo, e produce lo stesso risultato numerico, ma mostra altresì che la frazione come operatore *non* è la frazione per come l'abbiamo intesa all'inizio. La relazione parte/tutto si è persa.
Negli anni '70 si affermò in didattica l'idea di schematizzare le operazioni aritmetiche come "macchine operatorie"; per esempio 7+4=11 veniva più o meno schematizzata come:



In modo del tutto analogo, ho visto in libri di testo enfatizzare la frazione come operatore con schemi del tipo:



Appare evidente che la definizione iniziale non è coerente con questa interpretazione della frazione come operatore.

5.5. LA FRAZIONE IN PROBABILITÀ

Cerchiamo di valutare la probabilità secondo la quale, gettando due dadi, uscirà un multiplo di 4. I casi possibili sono 36, gli eventi favorevoli sono 9 (che esca 4, il che si presenta in 3 casi; 8, che si presenta in 5 casi; 12, che si presenta in 1 caso). Dunque la probabilità di quell'evento è esprimibile con la scrittura $\frac{9}{36}$, cioè il numero dei casi favorevoli all'evento, rispetto al numero dei casi possibili.

$\frac{9}{36}$ esprime una misura, il grado di soddisfacibilità dell'evento, un limite per scommettere, la probabilità; tale frazione è sì equivalente a $\frac{1}{4}$, ma solo aritmeticamente, perché intuitivamente questa trasformazione dice poco. Dice assai più un'altra frazione equivalente: $\frac{25}{100}$, specie se la scriviamo in una forma più usuale: 25%. Se poi esprimiamo le frazioni dette in un'altra equivalente, per esempio $\frac{27}{108}$, questa frazione perde proprio di senso, non rappresenta più il problema che si stava discutendo.

Dunque, pur valendo tutte le proprietà relative alle equivalenze tra frazioni, solo alcune conservano un senso nel problema proposto.

Inoltre, se pensiamo al significato originale della frazione, cioè dividere una unità – tutto in parti uguali, che cosa significa, in probabilità, quel $\frac{9}{36}$? Che cosa abbiamo diviso in 36 parti uguali, per prenderne 9? Certo, un significato gli si può trovare, arrampicandosi sugli specchi; bisogna però ammettere che ci siamo allontanati da quella intuitiva definizione che avevamo dato all'inizio.

5.6. LA FRAZIONE NEI PUNTEGGI

Laura cerca di colpire il bersaglio ed ha a disposizione 5 tiri; fa centro 2 volte; si riposa un po' e, nella seconda manche, ha a disposizione 3 tiri; fa centro ancora 2 volte.

Andrea fa centro 3 volte su 5 nella prima manche e poi solo 1 volta su 3 nella seconda prova.

Laura dunque ha fatto centro 4 volte su 8 ed anche Andrea 4 su 8.

Esprimiamo "matematicamente" quel che è avvenuto:

Laura I	Laura II	Laura totale	Andrea I	Andrea II	Andrea totale
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{8}$

Dovremmo avere molti dubbi nell'accettare questa descrizione del gioco di Laura ed Andrea perché, accettandolo, ci troviamo di fronte ad un'addizione tra frazioni siffatta: $\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{4}{8}$, stravagante assai… Eppure, $\frac{4}{8}$ è equivalente ad $\frac{1}{2}$ e non si può negare che Laura ha colpito il bersaglio la metà delle volte in cui ha tirato…
Le "frazioni" nei punteggi sono un oggetto matematico che ha peculiarità proprie, intuitive ma assai poco vicine alla definizione che era stata data all'inizio.

5.7. LA FRAZIONE COME NUMERO RAZIONALE

In questo caso si mettono in particolare evidenza questioni aventi a che fare con l'operatività: equivalenza tra frazioni, addizioni tra frazioni etc.
Il numero razionale 0,5, per esempio, non è altro che la classe di equivalenza [(1; 2), (2; 4), (4; 8), …, (3; 6), (6; 12), (9; 18), (5; 10), (10; 20),…] formata da tutte e sole quelle infinite coppie ordinate di numeri (*a*; *b*), tali che: $a \in \mathrm{N}$, $b \in \mathrm{N}$-{0} e tra le quali appare la coppia (1, 2) oppure, se si preferisce, $b=2\times a$.
Chiunque capisce che non ci si può portare dietro, specie in un'aula scolastica, a nessun livello, questa zavorra; per cui spesso si sceglie un rappresentante di questa classe, il più delle volte quello "ridotto ai minimi termini", nel nostro caso (1; 2), e lo si usa al posto della classe di equivalenza. Anzi, lo si scrive direttamente sotto forma frazionaria $\frac{1}{2}$, senza paura di ambiguità: si sa che, scrivendo $\frac{1}{2}$, ci si… trascina dietro anche tutta la sequela infinita delle coppie – frazioni equivalenti.
Dunque, tanto 0,5 quanto $\frac{1}{2}$, alla fine, si accettano come rappresentanti dello stesso numero razionale, pur essendo, all'origine, enti *essenzialmente* diversi

D'altra parte, che cosa vorrebbe dire, altrimenti, operare tra razionali?
Se si addiziona: 0,5+1,2, tutti sappiamo che la somma è 1,7; ma che cosa significherebbe eseguire l'addizione tra le classi infinite di coppie ordinate? Certo, siamo in grado di farlo, ma che lavoro!
Viceversa, se abbiamo l'addizione: $3,\overline{4}$+2,3, le cose non sono così banali, tanto è vero che a scuola si evita accuratamente. In questi casi conviene passare alla scrittura frazionaria $\frac{31}{9}+\frac{23}{10}=\frac{310+207}{90}=\frac{517}{90}=5,7\overline{4}$. Visto il risultato, ora è facile intuire che le cose avrebbero dovuto andare così. [L'analisi di questo risultato porta ora ad una *intuizione di accettazione** dell'addizione tra razionali periodici o misti (Fischbein, 1985), molto importante in didattica].

Ora, però, effettuiamo una moltiplicazione: $3,\overline{4} \times 2,3$. Quasi tutti tornano all'espressione in frazioni, per avere il risultato: $7,9\overline{2}$, un po' più complesso da giustificare intuitivamente.
Dunque, la forma frazionaria è inutile per rappresentare i numeri razionali e per gestirne la teoria, ma assai utile in vari casi per gestire certe operazioni. In altre parole, $\frac{1}{2}$ non è un numero razionale, ma lo *rappresenta* piuttosto bene.
Se le cose stanno così, è facile vedere come anche 3 sia un razionale; basta pensare che si tratta in fondo della frazione $\frac{3}{1}$ insieme a tutte le sue equivalenti. (Se proprio si vuol ammettere che i numeri razionali *devono essere scritti con la virgola*, come si trova in certi libri di testo, basterà convincersi a scrivere 3,0 al posto di 3, ma io lo trovo ridicolo).
In sostanza, la scrittura frazionaria funziona bene, nonostante tutti i limiti, per i numeri razionali. Se si eliminassero le frazioni dalla prassi di insegnamento, così come è già avvenuto nella Matematica, sarebbe però comodo introdurla per ausilio nel fare le operazioni nei numeri razionali.
Dunque, per esempio, invece di scrivere $\frac{3}{8}$, si può scrivere 0,375, ma vale anche il viceversa.
È ovvio che i numeri razionali, e di conseguenza i decimali, si possono pensare come *estensione* dei numeri naturali.
Questo fatto è naturale; infatti i numeri razionali possono essere pensati come le radici delle equazioni lineari del tipo $ax+b=0$ o $ax-b=0$, dove a e b sono naturali non entrambi nulli. Ora, i numeri naturali sono soluzioni di equazioni di questo tipo quando b è multiplo di a.
Per avere $\frac{3}{4}$ basta risolvere l'equazione $4x-3=0$; per avere $1,\overline{2}$, basta risolvere l'equazione $9x-11=0$.

[Noti il Lettore attento che ho volutamente evitato di parlare dell'insieme dei numeri interi, Z, per non mettere troppa carne al fuoco; avrei o potuto limitarmi ai razionali assoluti Q^a, oppure passare attraverso Z. Nel primo caso, avrei potuto prendere in esame solo le equazioni del tipo $ax-b=0$, nel secondo caso solo le equazioni del tipo $ax+b=0$. Insomma, qualche cosa si perde e si guadagna sempre].

5.8. LA FRAZIONE COME PUNTO DI UNA RETTA ORIENTATA

Non è raro trovare sui libri di testo o nelle attività in aula la seguente proposta: «Porre $\frac{3}{4}$ sulla retta numerica». Limitiamoci alla semiretta razionale positiva r_Q^a per diminuire le complicazioni.
Rispondere a questa domanda significa valutare quella frazione come se fosse un numero razionale, applicare la relazione d'ordine in Q^a e mettere un cerchietto nero o una tacca (che indicherà tale frazione) tra l'origine (0) e l'unità (1) in una posizione appropriata ed opportuna. [Lo stesso vale se, in luogo di $\frac{3}{4}$, si propone di posizionare il corrispondente numero decimale 0,75].
In tal caso, la frazione è vista come un valore – punto sulla retta orientata, assai più vicina ad essere un numero razionale che non una frazione. Quando scriviamo, infatti, $\frac{3}{4}<\frac{6}{7}$, non stiamo valutando il fatto che se prendiamo della stessa unità – tutto i $\frac{3}{4}$ otteniamo meno che se ne prendiamo i $\frac{6}{7}$, ma stiamo invece direttamente trattando le frazioni come numeri razionali. Se vogliamo disporli entrambi sulla retta numerica, sappiamo che $\frac{3}{4}$ verrà *prima* di $\frac{6}{7}$. Per verificare la correttezza di quanto stiamo dicendo e/o per disporre bene i punti sulla semiretta, trasformeremo le due frazioni in altre equivalenti ma più opportune: $\frac{21}{28}$ e $\frac{24}{28}$. Tutto risulta così più evidente.
La frazione indica in questo caso una distanza, la distanza tra l'origine ed il punto – frazione. Ovviamente si tratta di una distanza relativa, dato che dipende dall'unità di misura.

5.9. LA FRAZIONE COME MISURA

Sulle bottiglie di vino si legge spesso 0,75 *l*, il che sta ad indicare una quantità, una misura, nella unità decimale *litro*.[6] Chiunque è un grado di capire che si tratta di $\frac{3}{4}$ di un litro. Eppure… Si tratta di una frazione nel senso primitivo (una unità – tutto divisa in 4 parti *uguali* delle quali se ne sono prese 3) o semplicemente di un numero per

[6] Anche se è stata abolita da anni dal sistema metrico decimale internazionale, credo che in Europa questa unità resisterà a lungo; in America, spesso, l'unità di misura scelta dipende dal tipo di sostanza della quale si vuol esprimere la quantità; così, acqua, vino, birra, latte si esprimono in litri, ma la benzina, per esempio, in galloni.

esprimere una quantità? Un conto è avere una bottiglia graduata da 1 litro e decidere di riempirne i $\frac{3}{4}$, ben altro è avere una bottiglia di vino che è *già* di misura 0,75.

Decidiamo di comprare 2 matite che costano ciascuna € 0,75. Difficile pensare a trasformare questo 0,75 in $\frac{3}{4}$ di 1 €, eppure è così. La spesa sarà di € 1,5, senza bisogno di ricorrere alle frazioni che complicherebbero assai la questione.

La quantità di vino nella bottiglia, la spesa per una matita sono delle misure; a volte ha senso pensarle espresse come numeri razionali, a volte anche come frazioni, ma in nessun caso occorre o conviene fare riferimento alla definizione originaria di frazione. È più spontaneo un uso diretto della misura così come viene espressa.

5.10. LA FRAZIONE COME INDICAZIONE DI QUANTITÀ DI SCELTA IN UN TUTTO

Si vogliono premiare i clienti di un Grande Magazzino ed il direttore decide di fare uno sconto un tal giorno, scegliendo a caso i clienti: 1 ogni 10; il primo entrato riceve un bonus, poi l'11-esimo, poi il 21-esimo e così via. Dunque, uno ogni dieci. Alla fine, quanti clienti avranno ricevuto il bonus? È ovvio: $\frac{1}{10}$. In tal caso, la frazione $\frac{1}{10}$ significa più cose: che il bonus è stato dato ad $\frac{1}{10}$ dei clienti del giorno (arrotondato per difetto: se i clienti sono stati 80, 7 hanno ricevuto il bonus; se sono stati 81 o 88, il bonus lo ricevono 8); ma $\frac{1}{10}$ significa anche, in questo caso, "1 ogni 10" che non è, a rigore, la frazione che pretende di dividere un uno – tutto in 10 parti uguali.

5.11. LA FRAZIONE E LA PERCENTUALE

Questo punto lo abbiamo già accennato a proposito della probabilità e quindi lo tratterò brevemente.

A volte è più comodo esprimere 75% sotto forma di frazione $\frac{75}{100}$ o $\frac{3}{4}$, a volte conviene lasciarlo espresso sotto forma di percentuale, a volte ancora è preferibile il numero decimale 0,75.

Sulla bottiglia di vino, sarebbero ridicole le prime due scritte e si privilegia dunque la terza.

Nelle cose che hanno a che fare con la probabilità, è più intuitivo esprimere le misure con una delle prime due forme.

Se si ottiene un mutuo in banca, l'interesse viene espresso in percentuale: 3,5%.

Eccetera.

Insomma, anche se le scritture matematiche risultano formalmente equivalenti, non sono del tutto equisignificanti nella prassi quotidiana; il che significa che vi sono *significati distinti* che ciascuno di noi riconosce alle diverse varietà di scrittura formale.

5.12. LA FRAZIONE NEL LINGUAGGIO QUOTIDIANO

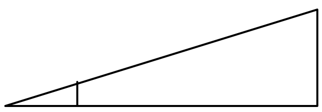
Molti dei ricercatori che si occupano della didattica delle frazioni propendono attualmente per un primo contatto "informale", com'è poi, in fondo, nello stile didattico oggi più diffuso e generalizzato.
Può dunque essere d'aiuto un paragrafo nel quale si esplorano diversi campi e diversi usi delle frazioni nella vita di tutti i giorni; lo studente dovrebbe controllare linguisticamente e cognitivamente questi usi e proporne dei propri, fino a raggiungere una concettualizzazione stabile e significativa del termine; su questa si potrà poi *costruire* la successiva conoscenza.
Mi limito qui, dunque, a presentare una breve rassegna ispirandomi non solo alla letteratura, che ne è ricchissima (soprattutto: Llinares Ciscar, Sánchez García, 1988; Streefland, 1990, 1991, 1993; Figueras, 1991; Giménez, 1994), ma anche alla pratica quotidiana, dato che termini che hanno o sembrano avere a che fare con le frazioni appaiono con frequenza nel linguaggio quotidiano.

Nella lettura dell'orologio, l'affermazione «Sono le sette e tre quarti» chiama certamente in causa il fatto che quel "tre quarti" vuol dire "45 minuti", dato che si tratta dei "tre quarti" di un'ora - unità che misura 60 minuti. Ma poi, con l'uso, quel termine diventa più un riferimento puntuale che non una vera e propria frazione: "tre quarti" vuol dire che la punta della lancetta lunga dell'orologio analogico si trova sul 9, in quella data posizione. Si perde il senso originario della frazione e si acquista un nuovo senso, meno legato alla frazione e più specifico.

In Musica le frazioni hanno un ruolo determinante, si pensi alla "ottava"; non sempre le frazioni in Musica si comportano come quelle in Matematica, ma lo studente sente nominare gli stessi nomi e dunque pensa agli stessi oggetti concettuali. L'ingresso delle frazioni in Musica è antichissimo; c'è chi lo fa risalire a Pitagora. Le durate relative alle note musicali si indicano, di solito, con i seguenti nomi: intero o semibreve; metà o minima, che ha lunghezza uguale a metà dell'intero; quarto o semiminima; ottavo o croma; sedicesimo o semicroma; etc.

Nella pratica quotidiana, tutti sentono parlare di sconto; se lo sconto è del 50%, è istruttivo far capire che si tratta della metà. Se lo sconto è del 25%, è istruttivo far riflettere sul fatto che si tratta di un quarto.
Il viceversa è più complicato. Se una cosa che costava 80 ora costa 100, è aumentata di $\frac{1}{4}$ cioè del 25%; se ora cala di $\frac{1}{4}$ non torna a 80, come molti credono, ma arriva a 75.

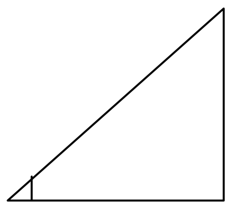
Ancora più complicato, quando il numero percentuale si trova sui cartelli stradali ad indicare una pendenza.
Per esempio, una pendenza di questo tipo:



20

100

è del 20% perché, rispetto a 100 m di distanza teorica frontale piana, fa alzare di 20 m; dunque, ci si alza di $\frac{1}{5}$.
Una pendenza come la seguente:



100

100

dunque, è del 100%; ci si alza di 1, per così dire, e l'angolo di salita è ovviamente di 45°. (Se si fa la domanda a bruciapelo, molti ammettono di credere che una pendenza del 100% sia un angolo retto. Provare per credere).

Nelle misure, spesso ricorrono percentuali, frazioni o numeri razionali, non sempre tra loro interscambiabili.
Mezzo chilo di pasta, 0,50 litri, 50% di acqua per una miscela, …; solo con un po' di esercizio si capisce che si tratta dello stesso numero razionale.

Si fa una società in 4 ed alla fine si divide l'incasso in parti uguali; si tratta della frazione $\frac{1}{4}$, come quando si ripartiscono caramelle o una pizza; si tratta anche del 25% a testa; un po' meno intuitiva è, in questo caso, l'espressione 0,25.

Nelle ricette di cucina si fa spesso riferimento a frazioni o a percentuali; questo è un campo favoloso di ricerca intuitiva. Infatti, se una ricetta è stata sperimentata per 4 persone ed i commensali diventano 6, tutti gli ingredienti vanno modificati. Ma non si tratta di aggiungere 2 unità ad ogni misura!,[7] come si potrebbe ipotizzare guardando le cose in modo addittivo, bensì di modificare ogni quantità aggiungendo il 50%, cioè moltiplicandola per $\frac{3}{2}$, come è in una visione moltiplicativa che chiama in causa i rapporti. Ma questa soluzione non è affatto così intuitiva per gli studenti, come potrebbe sembrare.

In Medicina capita spesso che un infermiere debba ridurre a metà una dose, riempire un flacone per i suoi $\frac{3}{4}$, fare una soluzione salina al 10%, … In casi di questo genere, ciascuno di noi auspica che quell'infermiere abbia frequentato una scuola nella quale la Matematica in generale e le frazioni in particolare abbiano avuto successo apprenditivo!

Bambini che giocano in cortile a misurare le ombre, si rendono facilmente conto del fatto che l'ombra è lunga la metà, un quarto del bastone piantato perpendicolarmente per terra.

Ragazzi che partecipano ai Giochi della gioventù o che assistono a gare di Atletica leggera, vengono a sapere presto che la lunghezza della pista, di tutte le piste del mondo, è stata internazionalmente stabilita in 400 m. Capiscono subito allora che, per correre i 200 m, gli atleti devono partire da metà pista; che per correre i 1500 m, devono percorrere 3 giri di pista e $\frac{3}{4}$. Si capisce perché le gare mescolano distanze oramai storiche (1500 m, miglio) ad altre scelte a causa della lunghezza standard della pista e divenute quindi classiche (400 m, 800 m).

Gli esempi possono continuare a lungo, ma è molto più produttivo se ogni classe trova i propri esempi sulla base delle esperienze personali dei singoli allievi.

5.13. LA CONCETTUALIZZAZIONE DELLE FRAZIONI E LA TEORIA DI VERGNAUD

Ho più volte evidenziato come la prima fase dell'apprendimento matematico sia l'apprendimento concettuale; su questo tornerò in un apposito capitolo, il **6.**, nel quale darò un nome esatto a tutto ciò.
Qui, dopo questa carrellata di diversi significati del concetto "frazione", voglio tentare una visione unitaria che non dispiacerà a quel Lettore che si è perso in questo panorama.

[7] Questa è la soluzione che ha proposto un allievo – cuoco sedicenne in un corso di cucina in un Istituto Professionale, secondo il racconto del docente che si stava confidando con me.

Seguendo Vergnaud (1983, 1988, 1990, 1992) e la presentazione che ne dà D'Amore (1999), possiamo pensare che un *concetto* C è una terna di insiemi C = (S, I, *S*) tali che:

- S è l'insieme delle situazioni che danno senso al concetto (il referente);
- I è l'insieme degli invarianti sui quali si basa l'operatività degli schemi (il significato);
- *S* è l'insieme delle forme linguistiche e non linguistiche che permettono di rappresentare simbolicamente il concetto, le sue procedure, le situazioni e le procedure di trattazione (il significante).

«Secondo Vergnaud studiare come si sviluppa e come funziona un concetto significa considerare di volta in volta questi tre "piani" separatamente ed in mutua relazione reciproca» (D'Amore, 1999, pag. 209).

Si capisce subito, come immediata conseguenza ovvia, che la scelta di un solo significato per la "frazione" non riesce a concettualizzare la frazione nei suoi molteplici aspetti.

Come abbiamo visto fin dalle prime pagine di questo libro:

- dietro lo stesso termine "frazione" si nascondono molte situazioni diverse che danno senso al concetto,
- per ciascuna di queste situazioni vi sono invarianti sui quali si basano le operatività degli schemi,
- vi sono varie forme linguistiche (che in seguito potremmo chiamare registri semiotici*) che permettono di rappresentare il concetto.

Dunque, si presenta la necessità di concettualizzare "frazione" attraverso tutti questi significati e non solo attraverso la scelta di uno – due di essi, con una scelta scolastica che si rivelerebbe perdente.

Ma la proposta di Vergnaud come Autore non si limita a questa considerazione (che, di per sé, sarebbe già notevole); seguendo gli stessi lavori di Vergnaud, la presentazione che ne fanno Godino (1991), D'Amore (1993, 1999), D'Amore, Marazzani (2003), possiamo andare oltre.

Intendo far uso della teoria dei campi concettuali*.

Godino (1991), sinteticamente, la presenta così: «I concetti matematici si dotano di significato a partire da una varietà di situazioni; ogni situazione non può essere analizzata usualmente con l'aiuto di un solo concetto dato che intervengono vari di essi. Questa è la ragione che ha portato Vergnaud allo studio dell'insegnamento e dell'apprendimento di *campi concettuali*, cioè grandi sistemi di situazioni la cui analisi e trattamento richiede vari tipi di concetti, procedimenti e rappresentazioni simboliche che sono connesse l'una con l'altra. Come esempi di tali campi concettuali si possono citare le strutture additive, le strutture moltiplicative, la logica delle classi e l'algebra elementare».

Il Lettore ha già intuito che noi qui aggiungeremo: le frazioni.

Lo stesso Vergnaud, in varie occasioni, ha dato definizioni di campo concettuale; eccone tre che ho scelto, seguendo D'Amore (1999, pagg. 362-segg.), in ordine

cronologico, anche per mostrare come, con il passare degli anni, l'idea si raffina e si precisa sempre più:
«campo concettuale è un insieme di situazioni, di concetti e di rappresentazioni simboliche (significanti) in stretto collegamento gli uni con gli altri, che sarebbe illusorio analizzare separatamente» (Vergnaud, 1984);
«un campo concettuale è un insieme di problemi e di situazioni per trattare i quali sono necessari concetti, procedure e rappresentazioni di tipo diverso ma in stretta connessione tra loro» (Vergnaud, 1985b);
«La teoria dei campi concettuali è una teoria cognitivista che si propone di fornire un quadro coerente e alcuni principi di base per lo studio dello sviluppo e dell'apprendimento di competenze complesse, soprattutto quelle che riguardano le scienze e le tecniche. Poiché offre un quadro per l'apprendimento, essa interessa la didattica: ma non è solamente una teoria didattica. Il suo scopo principale consiste nel fornire un quadro che permetta di comprendere le filiazioni e le rotture fra conoscenze nei bambini e negli adolescenti, intendendo per "conoscenze" sia i saper fare che i saperi espliciti. (...) La teoria dei campi concettuali non è specifica della Matematica: ma essa è stata inizialmente elaborata per rendere conto del processo di concettualizzazione progressiva delle strutture additive, delle strutture moltiplicative, delle relazioni numero-spazio, dell'algebra» (Vergnaud, 1990).
Il Lettore avrà cominciato a farsi un'idea.
L'esempio più tipico e diffuso dell'idea di Vergnaud, riguarda il *campo concettuale delle strutture moltiplicative*.
Prendo da D'Amore (1993, pagg. 363 segg.) una lunga citazione: «Normalmente, quando gli insegnanti giudicano che sia giunto il momento di affrontare lo studio della moltiplicazione (come concetto da introdurre, rivisitare o sistemare; come simbolismo da introdurre e concordare; come algoritmo), pensano appunto alla moltiplicazione; perché tirare in ballo una struttura? Proprio a causa delle strette relazioni che vi sono tra concetti apparentemente molto diversi tra loro ed invece legati all'idea di moltiplicazione intesa come concetto-base comune.
Vergnaud elenca tre motivi che, a suo dire, rendono necessario mettersi in un campo concettuale piuttosto che di fronte ad un solo concetto. Vediamoli:

1. È fuorviante studiare la moltiplicazione da sola, come operazione per risolvere certe classi di problemi; in realtà, la moltiplicazione è connessa con la divisione, con le frazioni, con i rapporti, i numeri razionali, le funzioni lineari eccetera. Tutti questi enti o concetti sono matematicamente interdipendenti e sono tutti contemporaneamente presenti fin dai primi problemi che gli allievi devono risolvere.
2. È necessario un dominio di conoscenze e competenze piuttosto ampio per poter studiare l'evoluzione cognitiva dello studente per quanto concerne questi concetti così legati tra loro, e per un periodo lungo. Ciò è necessario per rendere significativo l'approccio psicogenetico.

3. Le procedure delle quali si avvalgono gli studenti, i concetti dei quali si servono e le rappresentazioni simboliche cui fanno ricorso sono ampie e diverse e non sempre e non solo sono quelle proposte nei singoli casi dalla didattica in aula. Ci sono poi legami tra tipi diversi di problemi, per cui eventuali errori compiuti nella risoluzione di un problema possono avere spiegazioni confrontando la soluzione (sbagliata) con quella che si sarebbe dovuto dare ad un problema di tipo diverso.

Vergnaud propone allora di considerare come oggetto della didattica, per esempio, *non* tanto la *moltiplicazione*, ma piuttosto di prendersi carico delle *strutture moltiplicative*. Egli esemplifica con molti dettagli vari esempi, in particolare proprio quello da noi scelto viene scomposto in tre componenti, ciascuna delle quali è affrontata in modo analitico. (…).
Da quando Vergnaud ha lanciato questa idea, essa si è rivelata feconda per gli studi in vari campi; l'idea che ne hanno alcuni è che gli esempi si esauriscono con le operazioni aritmetiche o algebriche».[8]
Nel campo concettuale "strutture moltiplicative" Vergnaud ingloba le frazioni dato che esse contribuiscono a dare senso al concetto di moltiplicazione; ma la cosa si può rovesciare.

Quel che mi preme mettere in evidenza è duplice.
Da un lato, non è pensabile una didattica delle frazioni isolata dal contesto matematico che le dà senso; frazioni, rapporti, proporzioni, moltiplicazioni, pensiero moltiplicativo, numeri razionali, sono solo alcuni punti emergenti di tutto quanto dà senso alle frazioni. Questi concetti non possono essere staccati gli uni dagli altri, ma devono tutti confluire in un unico grande apprendimento.
Dall'altro, tutte le diverse accezioni di frazione devono essere esplorate e messe in relazione l'una all'altra; poiché alcune sono tra loro profondamente diverse, abbiamo una prima risposta al perché dell'esplicita domanda che si fece la Hart nel lontano 1985: *Perché le frazioni sono difficili*?

5.14. LA CONCETTUALIZZAZIONE SEGNO – OGGETTO DI DUVAL

Lo schema ternario seguito da Vergnaud si è rivelato fruttuoso, come s'è visto; ma non è l'unico proposto in tempi recenti per la concettualizzazione. Seguirò ora D'Amore (2003b, 2005) per proporre un ulteriore approfondimento.
In tempi più recenti, Raymond Duval (1993) ha sostituito allo schema ternario uno schema binario, quello che si esprime attraverso la coppia: "significato – oggetto" oppure la coppia "segno – oggetto"; «il fatto è che in Duval il termine "significato" raggruppa i significanti diversi dello stesso oggetto; dunque i termini "significato" e "segno" sono in un certo senso interscambiabili» (D'Amore, 2005).

[8] Si veda anche la voce che D'Amore (2002a) ha dedicato a Gérard Vergnaud sulla *Enciclopedia Pedagogica*.

La concettualizzazione così intesa passa allora attraverso il segno che esprime il suo stesso oggetto.
Segue D'Amore (2005):
«Il caso della Matematica è, in questo settore, peculiare; ciò, almeno per tre motivi:

- ogni concetto matematico ha rinvii (…) a "non-oggetti"; dunque la concettualizzazione non è e non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta; in altre parole in Matematica non sono possibili rinvii ostensivi;
- ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono "oggetti" da esibire in loro vece o a loro evocazione; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci;
- si parla più spesso in Matematica di "oggetti matematici" che non di concetti matematici in quanto in Matematica si studiano preferibilmente oggetti piuttosto che concetti; «la nozione di oggetto è una nozione che non si può non utilizzare dal momento in cui ci si interroga sulla natura, sulle condizioni di validità o sul valore della conoscenza» (Duval, 1998)».

È importante notare che il termine "concetto", in Duval, non rinvia affatto alle stesse occorrenze ed allo stesso uso che ne fanno Piaget, Kant, Vergnaud, Vygotskij, Chevallard... La nozione di concetto, preliminare o comunque prioritaria in quasi tutti gli Autori, diventa secondaria in Duval, mentre ciò che assume carattere di priorità è la coppia (*segno, oggetto*).
In Duval (1996) si cita un passo di Vygotskij nel quale sostanzialmente si dichiara che non c'è concetto senza segno:
«Tutte le funzioni psichiche superiori sono unite da una caratteristica comune superiore, quella di essere dei processi mediati, cioè di includere nella loro struttura, come parte centrale ed essenziale del processo nel suo insieme, l'impiego del segno come mezzo fondamentale di orientamento e di dominio dei processi psichici... L'elenco centrale [del processo di formazione dei concetti] è l'uso funzionale del segno, o della parola, come mezzo che permette all'adolescente di sottomettere al suo potere le proprie operazioni psichiche, di dominare il corso dei propri processi psichici...» (Vygotskij, 1962; nell'ed. francese, 1985, alle pagg. 150, 151, 157).

Da tutte queste considerazioni possiamo trarre molte indicazioni sia concettuali che didattiche; e, queste ultime, sia di livello astratto che concreto.
Le occorrenze dell'oggetto matematico "frazione" sono molteplici e rinviano ad una molteplicità di segni, ciascuno dei quali appartiene a diversi sistemi di segni.
Ogni concetto matematico, d'altra parte, rinvia non solo all'oggetto mentale che la società e la tradizione matematica hanno costruito, ma a tutti i segni che, nei diversi sistemi di segni, sono stati elaborati per rappresentarlo. «Non c'è concetto senza segno» potrebbe essere detto più completamente: «Ogni concetto rinvia a segni all'interno di più sistemi di segni».

Si capisce come le tesi di Vergnaud e di Duval possano essere viste, come le ho presentate qui (e come fa D'Amore, 2005) in successione, necessarie per capire *come* operare in didattica.
Allo scopo di entrare ancora più in profondità, però, si rende necessario una visita al mondo dell'apprendimento concettuale e dei registri semiotici; è quel che farò nel prossimo capitolo **6**.

6

Noetica e semiotica delle frazioni

In questo capitolo affronto un tema fondamentale tanto per la Didattica della Matematica (non solo per la ricerca, ma anche per la pratica d'aula) che è stato messo in luce dagli studi di Raymond Duval a partire dagli anni '80. Per non appesantire troppo la lettura con rinvii bibliografici, che sarebbero continui e dunque fastidiosi, dichiaro subito che mi servirò di Duval, 1993, 1995, 1996, 1998; Godino, Batanero, 1994; D'Amore, 2001a, b, 2003a.

6.1. TERMINOLOGIA PER INIZIARE

Con il termine "noetica" si intende l'acquisizione concettuale; nel caso dell'ambiente scuola, l'apprendimento concettuale.
Con il termine "semiotica" si intende la rappresentazione dei concetti mediante sistemi di segni.
Nel caso della Matematica, evidentemente entrambi i termini acquistano straordinaria importanza.
La noetica in Matematica è importante visto che, preliminare a qualsiasi attività matematica, c'è l'apprendimento dei suoi concetti.
C'è chi dice che l'apprendimento matematico consta di 4 fondamentali elementi, distinti ma tra loro interconnessi:

- l'apprendimento di concetti (noetica)
- l'apprendimento di algoritmi
- l'apprendimento "strategico"
- l'apprendimento comunicativo.

L'apprendimento di concetti è preliminare a qualsiasi altro ed è indubbio che in Matematica abbia un ruolo dominante.
L'apprendimento di algoritmi non rientra in quello concettuale, tanto è vero che richiede capacità meccaniche e mnemoniche che non possono essere ridotte a concettuali. Nell'apprendimento di algoritmi mettiamo anche quelli mnemonici (per esempio

l'apprendimento a memoria della tabellina moltiplicativa pitagorica, il saper contare a 2 a 2, il saper dire la sequenza numerica alla rovescia…).
Dell'apprendimento cosiddetto "strategico" fanno parte la capacità di argomentare, di risolvere problemi, di dimostrare…
Dell'apprendimento comunicativo, per troppo tempo dimenticato in didattica, fanno parte la capacità di esprimere il proprio parere su cose matematiche, di descrivere un oggetto, di definire…
Secondo molti studiosi, però, il primo apprendimento matematico è la noetica; dunque dobbiamo insegnare ad apprendere concetti matematici.
Si capisce bene, dunque, perché è così importante pensare alla noetica in Didattica della Matematica.

6.2. SEMIOTICA

Bisogna considerare che i concetti della Matematica non esistono nella realtà concreta. Il punto P, il numero 3, l'addizione, il parallelismo tra rette, non sono oggetti concreti, non esistono nella realtà empirica. Sono puri concetti (astratti, ideali).
Dunque, se si vuole fare riferimento ad un punto P, al numero 3, all'addizione tra numeri frazionari, alla relazione di parallelismo tra rette, non possiamo "esemplificare" o "mostrare", come si fa nelle altre scienze; in Matematica l'unica cosa che possiamo fare è scegliere un registro semiotico e *rappresentare* quel concetto in quel registro.
Quel che si impara a maneggiare, nella nostra disciplina, non sono gli oggetti (i concetti, nel nostro caso) ma le loro *rappresentazioni semiotiche*.
La semiotica in Matematica e nella Didattica della Matematica è dunque di fondamentale importanza.
Di solito, per una rappresentazione semiotica vi sono più registri possibili.

Primo esempio.
Una *retta* può essere rappresentata:
con il linguaggio italiano orale pronunciando la parola "r-e-t-t-a";
con il linguaggio spagnolo scritto scrivendo la parola "r-e-c-t-a";
con il disegno rappresentando una linea dritta continua che si suppone illimitatamente prolungabile; in Italia si aggiungono puntini da una parte e dall'altra, in America si mettono due punte di freccia da una parte e dall'altra;
con simbolismo algebrico: $ax+by+c=0$ oppure $y=px+q$;
…

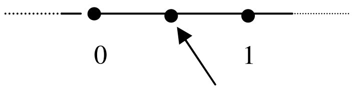
Secondo esempio.
Supponiamo di voler rappresentare in diversi registri il concetto che in Matematica formalizza l'idea di dividere a metà un intero:

registro semiotico: la lingua comune:

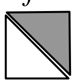
rappresentazione semiotica: un mezzo
altra rappresentazione semiotica: la metà
etc.

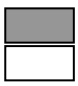
registro semiotico: la lingua aritmetica:
rappresentazione semiotica: $\frac{1}{2}$ (scrittura frazionaria)
altra rappresentazione semiotica: 0.5 (scrittura decimale)
altra rappresentazione semiotica: 5.10^{-1} (scrittura esponenziale)
etc.

registro semiotico: la lingua algebrica:
rappresentazione semiotica: $\{x \varepsilon Q^{+} / 2x\text{-}1=0\}$ (scrittura insiemi-stica)
altra rappresentazione semiotica: $y=f(x)$: $x \rightarrow \frac{x}{2}$ (scrittura fun-zionale)
etc.

registro semiotico: il linguaggio figurale:
rappresentazione semiotica:


etc

registro semiotico: schemi pittografici
rappresentazione semiotica:


rappresentazione semiotica:


etc.

etc.

Il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un'altra nello stesso registro semiotico si chiama "trasformazione di trattamento":

½


0.5

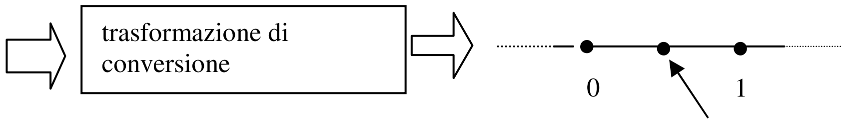
0.5


5.10^{-1}

etc.

Il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un’altra in un altro registro semiotico si chiama “trasformazione di conversione”:

$\frac{1}{2}$



etc.

Nella semiotica vi sono dunque 3 operazioni fondamentali:

- la scelta degli elementi distintivi che del concetto vogliamo rappresentare; questa scelta è fondamentale per la decisione circa il registro semiotico da scegliere;
- il trattamento;
- la conversione.

Dovrò tornare su questo punto più avanti.

6.3. IL PARADOSSO COGNITIVO DI DUVAL

Nel 1993 Duval mise in evidenza un paradosso cognitivo che si nasconde in tutto ciò. Vediamo i termini della questione. Noteremo che, per quanto riguarda la didattica delle frazioni, questo punto è di eccezionale importanza.

C’è in gioco un apprendimento concettuale da raggiungere. L’insegnante (che conosce il concetto) propone allo studente (che non conosce ancora il concetto) alcune delle sue rappresentazioni semiotiche. Nelle intenzioni dell’insegnante c’è la volontà, la speranza, il desiderio che, attraverso le rappresentazioni semiotiche, lo studenti costruisca l’apprendimento concettuale (noetica) di quel concetto. Ma tra le mani dello studente ci sono solo rappresentazioni semiotiche, oggetti: parole, formule, disegni, schemi… ma non il concetto in sé. Se lo studente conoscesse già il concetto, potrebbe *riconoscere in quelle* rappresentazioni semiotiche il concetto; ma non conoscendo il concetto, *vede solo delle* rappresentazioni semiotiche, cioè oggetti concreti, macchie di inchiostro su fogli di carta, macchie di gesso sulla lavagna.
Se l’insegnante di Matematica non ha mai sentito parlare di noetica e semiotica cullerà l’illusione che, vedendo lo studente manipolare quelle rappresentazioni semiotiche, egli stia di fatto manipolando il concetto e che dunque la costruzione cognitiva sia avvenuta. Di fatto, potrebbe essere nata un’incredibile ma diffusa ambiguità: lo studente ha imparato solo a manipolare le rappresentazioni semiotiche, ma non ha costruito il concetto, e l’insegnante si illude.
Per completezza e serietà, riporto da pag. 38 di Duval (1993) il testo esatto in cui l’Autore descrisse la prima volta questo paradosso (la traduzione è presa da D’Amore,

2003a): «(…)da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche».
Non ci sono ricette miracolistiche, c'è solo consapevolezza. L'insegnante che ora conosce questa problematica non potrà che porre attenzione agli apprendimenti dei propri studenti, verificando se appartengono davvero alla sfera della noetica e non solo della semiotica.
Ma noi dobbiamo procedere.

6.4. PIÙ IN PROFONDITÀ

In Matematica, dunque, l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche.
Prendendo a prestito dallo stesso Duval: *non c'è noetica senza semiotica*.
Userò di seguito definizioni, simbolismi e grafici introdotti da D'Amore (2001, 2003a) per entrare più in profondità.

semiotica $=_{df}$	teoria che studia la rappresentazione concettuale realizzata per mezzo di segni all'interno di sistemi di segni
noetica $=_{df}$	acquisizione concettuale o di un concetto

D'ora in poi:

$r^m =_{df}$	registro semiotico (m = 1, 2, 3, ...)
$R^m_i(A) =_{df}$	rappresentazione semiotica i-esima (i = 1, 2, 3,...) di un concetto A nel registro semiotico r^m

Si può notare che, se cambia il registro semiotico, cambia necessariamente anche la rappresentazione semiotica, mentre non è detto il viceversa; cioè può cambiare la rappresentazione semiotica pur mantenendosi lo stesso registro semiotico.
A mio parere il seguente grafico illustra la questione in modo incisivo ed efficace:

caratteristiche della semiotica $\left\{ \begin{array}{l} \textit{rappresentazione} \\ \textit{trattamento} \\ \textit{conversione} \end{array} \right.$ [queste tre sono attività cognitive diverse]

contenuto A da rappresentare

scelta dei tratti distintivi di A

RAPPRESENTAZIONE $R^m{}_i(A)$ in un dato registro semiotico r^m

trasformazione di rappresentazione *TRATTAMENTO*

nuova rappresentazione ($i \neq j$) $R^m{}_j(A)$ nello *stesso* registro r^m

trasformazione di registro *CONVERSIONE*

nuova rappresentazione ($h \neq i$, $h \neq j$) $R^n{}_h(A)$ in un *altro* registro semiotico r^n ($n \neq m$)

($m, n, i, j, h = 1, 2, 3, ...$)

Si notino le frecce che vanno, nella prima parte del grafico, dal basso verso l'alto. Esse hanno la ragion d'essere seguente. La scelta dei tratti distintivi fissati del contenuto A dipende dalle capacità semiotiche di rappresentazione del registro scelto. Scegliendo un registro diverso si fisserebbero altri tratti di A. Ciò dipende dal fatto che due rappresentazioni dello stesso oggetto, ma in registri diversi, hanno contenuti diversi.

L'acquisizione concettuale di un oggetto matematico si basa su due sue caratteristiche "forti" (Duval, 1993):

1. l'uso di più registri di rappresentazione semiotica è tipica del pensiero umano
2. la creazione e lo sviluppo di sistemi semiotici nuovi è simbolo (storico) di progresso della conoscenza.

Queste considerazioni mostrano l'interdipendenza stretta tra noetica e semiotica, come si passa dall'una all'altra: non solo dunque non c'è noetica senza semiotica, ma la semiotica viene assunta come caratteristica necessaria per garantire il primo passo verso la noetica.

A questo punto è doverosa una precisazione sulla teoria che da anni sta sviluppando Raymond Duval.

Duval accorda alla conversione un posto centrale rispetto alle altre funzioni ed in particolare rispetto a quella di trattamento, considerata invece dai più come decisiva dal punto di vista matematico.
Perché? Almeno per tre ragioni distinte:
1. Mentre il trattamento non presenta fenomeni di non congruenza evidenti tra una rappresentazione e l'altra dello stesso concetto, la conversione deve spesso superare ostacoli notevoli di non riconoscibilità; in questo fatto si nasconde uno degli ostacoli maggiori dell'apprendimento matematico.
2. Nel trattamento si conservano aspetti delle variabili cognitive che risultano essere dipendenti le une dalle altre e riconducibili le une alle altre; nella conversione, invece, spesso le variabili cognitive in gioco sembrano complementamente differenti.
3. La conversione presuppone una coordinazione dei due registri di rappresentazione messi in moto, coordinazione che non è mai data in partenza e che non si costruisce spontaneamente basandosi sul solo fatto che si facciano effettuare delle attività matematiche didatticamente interessanti.

Ciò che si chiama la "concettualizzazione" comincia dunque realmente solo quando si mette in moto, anche solo abbozzandola, la coordinazione di due distinti registri di rappresentazione.

La teoria dei registri deve essere valutata basandosi sugli apporti relativi alla ricchezza, alla novità delle osservazioni, così come alla novità delle attività di apprendimento che le variabili cognitive permettono di definire. E non in rapporto a delle decisioni a priori su che cos'è la Matematica o in base a considerazioni non controllabili attraverso metodologie precise.
È ogni singolo allievo che apprende, e nessuno può apprendere (o comprendere) al posto di un altro. Inoltre, la riuscita di un'azione didattica non si giudica immediatamente, ma solo alcuni anni più tardi: ci sono molti casi di riuscita immediata che si rivelano poi degli insuccessi, a distanza di tempo...
Ecco, dunque, perché Duval insiste sul carattere centrale della conversione; è questo il punto decisivo, quel che veramente differenzia la sua teoria dei registri, rispetto a tutto quel che si può dire e si usa dire su segni e semiotica, o sul cognitivo.

6.5. "COSTRUIRE" CONOSCENZA

La costruzione dei concetti matematici è dunque strettamente dipendente dalla capacità di usare *più* registri di rappresentazioni semiotiche di quei concetti:

- di scegliere i tratti distintivi del concetto da rappresentare e *rappresentarli* in un dato registro;
- di *trattare* tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro;
- di *convertire* tali rappresentazioni da un dato registro ad un altro.

L'insieme di questi tre elementi e le considerazioni precedenti mettono in evidenza il profondo legame che c'è tra noetica e costruttivismo: "costruzione della conoscenza in

Matematica" è, secondo D'Amore (2001, 2003a), proprio l'unione di quelle tre "azioni" su un concetto, cioè l'espressione stessa della capacità di scegliere i tratti distintivi che si vogliono *rappresentare* di quel concetto, di *trattare* le rappresentazioni ottenute all'interno di un registro stabilito e di *convertire* le rappresentazioni da un registro ad un altro.
È questa una specificazione delle operazioni-base che, nel loro insieme, definiscono quella "costruzione" cognitiva che, altrimenti, resta un termine misterioso ed ambiguo, disponibile ad ogni sorta di interpretazione.
Si noti ancora che, da un punto di vista cognitivo, concordo sul fatto che si deve accordare più importanza al punto 3 (la conversione) piuttosto che al punto 2 (il trattamento) perché ciò permette di definire le variabili indipendenti sia per l'osservazione sia per l'insegnamento.
Ma, da un punto di vista matematico e nella prassi didattica, si usa spesso accordare più importanza al trattamento piuttosto che alla conversione.

6.6. LE FRAZIONI, CONCETTO O RAPPRESENTAZIONE SEMIOTICA?

Lungi dall'essere discorsi astratti e vuoti, quelli di questo capitolo sono assolutamente concreti e pregnanti per la didattica. Basta mettersi in una situazione di insegnamento – apprendimento specifica e rileggere i primi 5 paragarafi di questo capitolo **6.** pensando ad un tema preciso.
Il nostro tema è l'apprendimento concettuale della frazione.
La frazione è un concetto, dunque il suo apprendimento rientra nella noetica.
Ma non può essere concretamente mostrato il "concetto di frazione", al più si può operare su un intero, su un oggetto, la torta, per frazionarlo ed ottenerne una parte; questa parte non è una "frazione" ma è una "frazione di quell'oggetto"; dunque, nel registro semiotico delle operazioni concrete, abbiamo agito per mostrare una rappresentazione semiotica, non il concetto.
Possiamo decidere di usare parole per descrivere quel che abbiamo fatto alla torta; abbiamo dunque cambiato registro semiotico e stiamo mostrando un'altra rappresentazione semiotica, non il concetto.
Possiamo decidere di fare un altro esempio, astraendo dall'oggetto concreto torta e passando ad un altro oggetto concreto, per esempio un rettangolo (meglio, la sua superficie); abbiamo cambiato registro semiotico e stiamo dunque fornendo un'altra rappresentazione semiotica, non il concetto.
Di solito, a questo punto, si astrae dall'oggetto considerato (torta, rettangolo) e si suppone che sia stato costruito il concetto frazione indipendente dal modello concreto di partenza, considerato come unità, come il tutto.
Fino ad ora le unità erano stati oggetti continui: una torta, la superficie di un rettangolo. Si passa ad un'unità discreta, per esempio a 12 palline che però vanno pensate come unità – tutto; si è cambiato il registro in maniera totale e brutale, ma si dà per scontato che la conversione avvenga spontaneamente.

Anzi, a questo punto (o forse addirittura prima) si introduce un formalismo matematico opportuno, la scrittura delle frazioni, con le denominazioni “numeratore” e “denominatore”; di fatto, si sta fornendo una nuova rappresentazione semiotica in un registro semiotico diverso, dunque si sta operando una nuova conversione.
…

Tutto ciò, ed altro, di solito, avviene in una unità di lezione, 30-40-50 minuti.
Si scelgono tratti distintivi caratteristici di diversi oggetti:
l’azione di frazionare
la torta (continua)
la superficie (continua) di un rettangolo
la raccolta (discreta) di palline
la scrittura formale con i suoi nomi specifici
e si compiono continue trasformazioni di trattamento (poche) e di conversione (molte), dando per scontato che se l’allievo saprà replicarle, allora l’azione di insegnamento avrà avuto successo, l’apprendimento raggiunto, il concetto costruito.
Ora che sappiamo che la semiotica non è la noetica, che l’apprendimento a manipolare rappresentazioni semiotiche non è la noetica, capiamo bene perché, di solito, le prime ore di lezione sulle frazioni hanno successo salvo rivelare dopo qualche lezione, nelle settimane successive o nei mesi successivi, che il successo era solo apparente e che lo studente è in grave crisi: non ha affatto costruito il concetto che volevamo fargli costruire, ma ha imparato solo a manipolare alcuni passaggi ed alcuni registri. Nulla più.
Di tutto ciò dovremo tenere ben conto al momento delle proposte didattiche finali.

7

Difficoltà nell’apprendimento delle frazioni e Didattica della Matematica

Dividerò questo capitolo in due parti:
- la **7.1.** è dedicata agli errori tipici degli studenti rilevati dalla letteratura internazionale; qui metterò anche alcune proposte didattiche tese a rimediare a questi errori tipici; non farò molte citazioni specifiche, dichiarando fin d’ora che mi servirò di quasi tutti i testi citati nel capitolo **4.**;
- la **7.2.** è dedicata ancora agli errori, ma rovesciando il punto di vista e cercandone una collocazione all’interno dei temi fondamentali della Didattica della Matematica intesa come Epistemologia dell’apprendimento matematico, seguendo D’Amore (1999, 2003b).

7.1. ERRORI TIPICI DEGLI STUDENTI RILEVATI NEL CONTESTO INTERNAZIONALE E SUGGERIMENTI

7.1.1. Difficoltà nell’ordinare

Una difficoltà spesso rilevata dai ricercatori negli studenti di qualsiasi età è quella di ordinare le frazioni, i numeri con la virgola ed i due mescolati.

Ordine tra frazioni. Per esempio, $\frac{2}{3}$ può essere pensata minore di $\frac{4}{9}$ perché 2<4. Questa “giustificazione” ha un’analogia sviante nell’ordine tra numeri scritti con la virgola: 2,3 < 4,9 perché 2 < 4.

Questo errore è rimediato facendo sempre ricorso a frazioni equivalenti a quelle di partenza, ma con lo stesso denominatore; in tal caso si avrebbe $\frac{6}{9}$ e $\frac{4}{9}$ che, di solito, non produce più problemi.

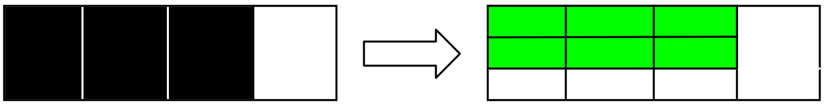
Ordine tra frazione e numero scritto con la virgola. Per esempio, se si tratta di mettere in ordine $\frac{2}{3}$ e 0,75, la cosa può produrre difficoltà; bisogna rendere naturale o la trasformazione di 0,75 in frazione o eseguire la divisione 2:3.
Ordine tra numeri scritti con la virgola. Per esempio, se si tratta di mettere in ordine 1,2 e 1,15, è noto che la competenza acquisita sui naturali può dare problemi interpretativi; la letteratura segnala casi in cui lo studente afferma: «A parità di parte intera, siccome 15>2, allora 1,15>1,2». Questo "ragionamento" (non sempre così ben esplicitato) è assai più diffuso di quanto non si creda ed è stato messo in evidenza dalla letteratura di ricerca fin dagli anni '60. Non sempre si rivela naturale scrivere 1,2 nella forma 1,20. Ad impedire la naturalezza di questo passaggio sta anche una regola acquisita precedentemente, in base alla quale aggiungendo uno 0 "in fondo" ad un numero lo si moltiplica per 10; anche in questo caso, una regola valida in N viene erroneamente ed impropriamente estesa ai numeri con la virgola.
Conseguenza diretta di questa difficoltà si riscontra nel tentativo, segnalato in numerosissimi casi nel contesto internazionale, di trovare un "successivo" alle frazioni ed ai numeri razionali: il "successivo" di $\frac{3}{5}$ è allora $\frac{4}{5}$; il "successivo" di 0,3 è 0,4. Queste dichiarazioni mostrano la mancata comprensione della struttura e del linguaggio delle frazioni e dei numeri razionali. Le cause vanno ricercate in un tentativo di adattare quel che succedeva nei numeri naturali a questa nuova situazione. Vista la difficoltà diffusa, questo punto va trattato esplicitamente, mostrando come, sia tra le frazioni che tra i razionali, l'idea di "successivo", così intuitiva in N, non esista più in Q^a.

7.1.2. Difficoltà nelle operazioni

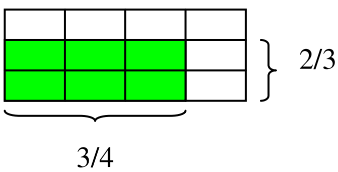
Come ho già fatto vedere, molta letteratura internazionale ha mostrato la grande difficoltà concettuale che hanno gli studenti nell'eseguire le operazioni tra frazioni.
Una regola che funziona molto bene e non dà problemi è la seguente:
$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d};$$
ma se si cerca di trovare l'analoga per la "addizione" le cose non funzionano più:
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$
(a parte un caso un po' particolare che ho mostrato in precedenza, nel paragrafo **5.6.**).
Quando la moltiplicazione tra frazioni è richiesta formalmente, si hanno risultati molto migliori che non quando viene proposta attraverso un grafico, contro l'opinione e la convinzione di molti insegnanti.

Per esempio, la richiesta di trovare i $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$ (formale, senza schemi o disegni geometrici) porta ad una percentuale di successo migliore che non quando si pone lo stesso problema in modo grafico:

trovare i $\frac{2}{3}$ della parte $\frac{3}{4}$ che è già ombreggiata nella prima figura:



Il fatto è che, dopo un po', lo studente associa alla domanda «Trovare i $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$» l'operazione di moltiplicazione, non ben giustificata, ma facile da eseguire formalmente, come abbiamo visto. Il problema viene dunque risolto solo semioticamente, senza bisogno di aver costruito davvero il concetto di moltiplicazione tra frazioni.
Tutti gli altri casi sono assai più complessi.
Si è visto comunque, fin dagli anni '80, che l'approccio cognitivo alla frazione (non solo esecutivo) attraverso l'area in genere funziona meglio di qualsiasi altro, molto meglio di quello discreto e comunque generalmente meglio di quello formale (cioè operando solo tra frazioni).
Negli anni '60, Green (1969) propose di risolvere la difficoltà di trasformare il problema «Trovare i $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$» nella moltiplicazione $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$, in modo che vi fosse un grafico opportuno a spiegarla, come segue:



A leggere la letteratura successiva, non sembra però che si raggiunsero risultati apprenditivi entusiasmanti.

Tornando all'addizione (e alla sottrazione) tra frazioni, la letteratura internazionale ne ha ampiamente evidenziato le difficoltà.
Qualcuno ha proposto, qualche decina d'anni fa, di non fornire agli studenti spiegazioni sul significato di $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ ma solo la regola per effettuarla (Stenger, 1971). Poiché si è

visto che quella classica, che passa attraverso il trovare il minimo comune multiplo tra *b* e *d*, cioè il denominatore comune alle due frazioni, crea problemi, si è fornita la seguente regola formale: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ e si è chiesto agli studenti di seguire questa senza ulteriori spiegazioni.
Indubbiamente si è avuto un miglioramento di prestazioni formali, ma insuccesso nell'apprendimento del *senso* da dare a quel che si sta facendo.
La ricerca degli ultimi 30 anni è riuscita a mettere in evidenza il fatto che bisogna dare sempre *senso* a quel che si sta facendo e questo avviene attraverso vari registri semiotici e con il coinvolgimento personale dello studente nella costruzione della propria conoscenza.

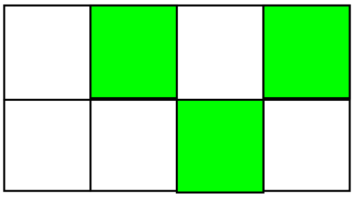
Passiamo infine alla divisione tra frazioni. Fin dagli anni '60 (per esempio, Sluser, 1963; Krich, 1964; Wilson, 1968; Bidwell, 1968) è stato messo in evidenza che questa operazione crea molte difficoltà. Sono state studiate tecniche di ingegneria didattica* anche molto diverse tra loro, ma i risultati sono analoghi a quanto visto prima: non esistono panacee nel campo della Didattica A*, cioè nel cercare semplicemente tecniche per insegnare. L'unico risultato davvero apprezzabile è quello di responsabilizzare lo studente nella costruzione attiva della propria conoscenza, per esempio ricorrendo a problemi coinvolgenti o da lui stesso ideati.
È stato messo in evidenza che una difficoltà notevole degli studenti, nel campo delle frazioni, è capire quando, in un problema, si deve usare la moltiplicazione o la divisione tra frazioni, perché i modelli* usuali costruiti su moltiplicazione e divisione non funzionano più. Fin dagli anni '70-'80, le prove di Hasemann (1979) in Germania e le prove negli USA ed in Gran Bretagna raccontate da Hart (1985) mostrano l'enorme difficoltà che hanno gli studenti nel gestire queste conoscenze; né i risultati delle ricerche successive degli anni '90 e 2000 mostrano progressi notevoli con strumenti di ingegneria didattica*, occasionali anche se specifici.

Poco sopra ho scritto «(…) enormi difficoltà che hanno gli studenti nel gestire queste conoscenze», perché proprio di *conoscenze* si tratta e non di loro mancanza. Mi spiego.
La ricerca in Didattica della Matematica ha ampiamente messo in evidenza come, alla base dei nuovi apprendimenti, vi siano degli ostacoli didattici* o epistemologici* che sono delle vere e proprie conoscenze, acquisite precedentemente in altri campi, che hanno funzionato bene in essi ma che si rivelano fallimentari quando si tenta di applicarli alle nuove situazioni. La ricerca di Fischbein degli anni '80 ha ampiamente messo in evidenza proprio questo, mentre la teoria degli ostacoli di Brousseau degli anni '70 si è imposta nello spiegare questo fenomeno; spesso tutto ciò è legato a problemi di gestione semiotica, come ha evidenziato Duval negli anni '80. Queste tre teorie sono rimaste scollegate per anni, senza un punto di vista unitario che oggi esiste, fornito da D'Amore in (2003b). Cosicché disponiamo oggi, grazie agli studi di Fischbein, Brousseau e Duval, di uno strumento eccezionale di analisi delle risposte

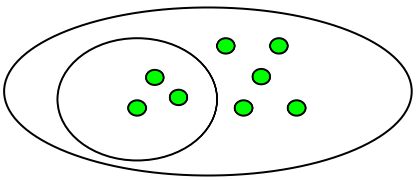
degli studenti in aula, lo scopo principale della Didattica B*, l'Epistemologia dell'apprendimento matematico.

7.1.3. Difficoltà nel riconoscere gli schemi

Se si presenta allo studente la situazione:



ci si aspetta che egli riconosca facilmente che sono stati ombreggiati i $\frac{3}{8}$ del rettangolo - unità; a volte, invece, lo studente risponde «$\frac{3}{5}$», interpretando erroneamente lo schema e la domanda.
Questo stesso fatto si presenta addirittura con maggiore frequenza nel caso discreto seguente:

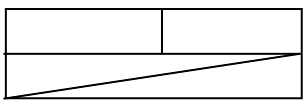


3/5 o 3/8?

segno del fatto che gli schemi non sempre sono perfettamente esplicativi e che, tra essi, alcuni sono più difficili da interpretare di altri (come già ha mostrato D'Amore, 1998).
In generale, le risposte a domande di questo tipo sono nettamente peggiori quando si tratta di esempi in situazioni discrete.
Questo dipende spesso dal fatto che lo studente non sa decidere qual è l'unità in gioco.
Quando poi si tratta di frazioni improprie, la caduta nelle risposte errate è netta.

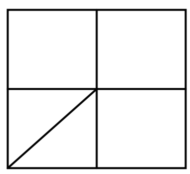
7.1.4. Difficoltà nel gestire l'aggettivo "uguale"

In situazioni come questa:



lo studente potrebbe non sapere come interpretare la richiesta che le unità frazionarie devono essere *uguali*. A mio avviso, tutte le 4 parti che sono state indicate nella figura precedente sono $\frac{1}{4}$ del rettangolo di partenza; tuttavia ho trovato anche insegnanti che, rispettosi di quell'*uguali* che appare nella definizione, non ammettevano questo fatto.
In queste condizioni, è lecito e logico aspettarsi che lo studente non sappia che cosa decidere.

A volte lo studente è in conflitto tra due richieste; per esempio, se gli si chiede di dividere un quadrato in 4 parti uguali per trovarne $\frac{1}{4}$, abbiamo una percentuale di successo molto alta; ma se si chiede di dividere in 5 parti uguali per avere $\frac{1}{5}$, possiamo incontrare problemi; infatti una divisione in 5 non è canonica per un quadrato: di fronte a questa figura, si privilegiano spesso divisioni in 2, in 4, in 8,…; la forma quadrato non risponde spontaneamente ad una divisione per 5.
Il conflitto è tra la richiesta di quell'aggettivo "uguali" e la richiesta "in 5". Tra le soluzioni proposte, come abbiamo già visto, in letteratura si trova la seguente:



che mostra la difficoltà di gestione della faccenda da parte dello studente (rilevata non solo da me, ma anche da Valdemoros, 2004). Questa difficoltà dipende anche e soprattutto dal reiterato uso di figure "semplici" da dividere che finiscono con il diventare obbligate ed attese.
Meglio ancora: sembra che, rispetto alla figura unitaria da frazionare in parti "uguali", vi siano dei numeri di queste parti più "opportuni". L'abitudine, la reiterazione, trasformano questa scelta di comodo in un obbligo e lo studente la interpreta così.

7.1.5. Difficoltà nel gestire l'equivalenza

La letteratura segnala studenti che non sanno gestire l'equivalenza tra frazioni, fin dagli anni '60.
Per esempio, sono state sottoposte a studenti di età variabile queste uguaglianze, nelle quali essi dovevano riempire i posti mancanti:

(a1) $\frac{1}{3}=\frac{2}{\nabla}$, (a2) $\frac{4}{12}=\frac{1}{\lozenge}$;

(b1) $\frac{2}{7}=\frac{\Delta}{14}$, (b2) $\frac{2}{7}=\frac{\Delta}{14}=\frac{10}{\triangleright}$.

Si è rivelato come (a1) e (b1) siano più facili da gestire che non le altre; che, ancora a 15 anni, meno del 30% degli studenti sa risolvere con sicurezza completamente (b2).
Si è poi notato che lo studente si comporta differentemente a seconda che si passi da termini numerici al numeratore e denominatore piccoli a più grandi (come il passaggio da $\frac{2}{4}$ a $\frac{4}{8}$) o viceversa (come da $\frac{2}{4}$ a $\frac{1}{2}$).
L'intervista a studenti bravi esecutori ha anche mostrato che essi applicano strategie diverse, non solo la diffusa «moltiplica (o dividi) sopra e sotto per lo stesso numero».
Per esempio, nel passare da $\frac{5}{10}$ a $\frac{?}{30}$, alcuni studenti notavano come 5 sia la metà di 10 e dunque ponevano 15, come metà di 30, al posto di ?.
Altri passavano da $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{6}$ in modo addittivo: si passa da 1 a 2 addizionando 1 a sé stesso, dunque si passa da 3 a 6 addizionando 3 a sé stesso.
Negli anni '70 furono proposti vari metodi per suggerire e mostrare l'equivalenza tra frazioni.

Tutte queste attenzioni nel suggerire stratagemmi di insegnamento rientrano in quelle che in D'Amore (1999) vengono definite "di Didattica A", cioè tese al miglioramento dell'insegnamento, ma senza una vera e propria ricerca empirica (che stava appunto nascendo allora) sull'apprendimento.

Anche nel caso dell'equivalenza, si è visto come lo studente faccia fatica a capirne il senso nei casi discreti; se abbiamo 3 palline bianche e 6 nere, possiamo dire che le bianche sono $\frac{1}{3}$ del totale delle palline; ma se abbiamo 6 bianche e 12 nere, lo studente potrebbe faticare a capire che, all'aumento evidente… del numero di palline, non corrisponda anche un aumento di quel $\frac{1}{3}$.
Qui scatta anche un meccanismo percettivo (che tanta importanza ha negli allievi giovani): Se passiamo da 9 palline a 18, com'è possibile che quel *numero* resti uguale? Il dominio della frazione come rapporto, abbiamo visto, non è affatto banale.
A studenti anche maturi è stata posta la seguente domanda: «Ho la frazione $\frac{x}{y}$ e divido tanto x quanto y per 2. Ottengo una nuova frazione. Questa è la metà di $\frac{x}{y}$, uguale a $\frac{x}{y}$

o il doppio di $\frac{x}{y}$?». Le risposte più diffuse sono "la metà" e "il doppio" a qualsiasi età, mentre la risposta "uguale" è assai scarsa, specie tra gli allievi più giovani.

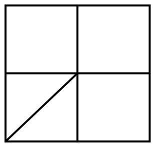
7.1.6. Difficoltà nel gestire la riduzione ai minimi termini

Connesso con il problema dell'equivalenza tra frazioni è la riduzione ai minimi termini.
Nel passare da una frazione ad una sua equivalente, bisogna dividere o moltiplicare per uno stesso numero numeratore e denominatore; spesso, questo "dividere per uno stesso numero" è riassunto in un rapido ma pericoloso "cancellare sopra e sotto". Per esempio: $\frac{6}{9}$ si riduce a $\frac{2}{3}$ per il seguente motivo: da $\frac{2\times 3}{3\times 3}$ si "cancella" 3 sopra e sotto.

Questa conoscenza porta a varie complicazioni.
La prima, segnalata in letteratura fin dagli ani '60 (Steffe, Parr, 1968), è la "riduzione" di $\frac{5}{16}$ a $\frac{5}{4}$; lo studente dichiara di aver cancellato il 4 dal denominatore 16; la scrittura 16 era già apparsa più volte e le era stato "cancellato", appunto, il 4.
La seconda, che si trascina anche alle scuole superiori, è la seguente "semplificazione", da sempre presente in letteratura: lo studente divide sopra e sotto per 3 in $\frac{3}{6}$ e poi non sa scrivere il numeratore nella frazione risultante $\frac{\ }{2}$; avendo "cancellato" l'intero numeratore, a volte scrive $\frac{0}{2}$, dato che «non è rimasto niente».
Qui è chiara l'influenza del contratto didattico*, come vedremo meglio.

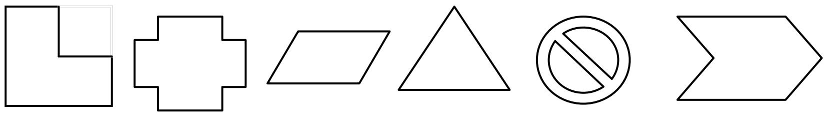
7.1.7. Difficoltà nel gestire figure non standard

Per semplificare le attività di routine, si tende a privilegiare sempre l'uso di figure standard, quando si vogliono trovare frazioni in contesti continui: rettangoli, cerchi, quadrati, solo raramente triangoli equilateri. Questo fatto è assai pericoloso perché genera una misconcezione* secondo la quale "si possono trovare le frazioni *solo* di quelle figure e *non* di altre"; questa misconcezione è stato riscontrato in molti studenti (e non solo). Ricordo il caso già segnalato di divisione del quadrato in 5 parti "uguali":



È dunque assolutamente necessario creare situazioni, anche solo esercizi, nelle quali si debba trovare frazioni di figure non standard, come le seguenti:

Trovare i $\frac{3}{4}$ di ciascuna di queste figure:



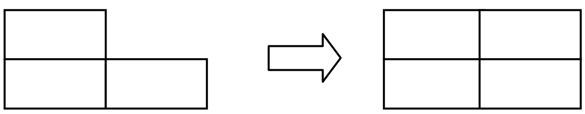
7.1.8. Difficoltà nel passare da una frazione all'unità che l'ha generata

Di solito, negli esercizi di routine, si dà una figura – unità o una raccolta – unità discreta di oggetti e se ne cerca una frazione. Molto difficilmente si creano situazioni inverse che, invece, costituiscono parte essenziale per l'apprendimento delle frazioni:

«Ecco i $\frac{3}{4}$ di una unità; trova l'unità di partenza».

È fondamentale costruire l'idea che non sempre c'è un'unica risposta corretta a questo compito e che tutte le soluzioni corrette trovate risolvono altrettanto bene l'esercizio. Arrivare a capire questo fatto è difficile a causa del contratto didattico*: lo studente crede che l'insegnante abbia già in mente *la* soluzione giusta e che si aspetti *esattamente quella*; il suo compito è dunque quello di intuire, indovinare che cosa l'insegnante si aspetti di sentirsi dire.

Se anche si fanno esercizi di questo tipo, la figura che si dà ha l'aspetto tipico delle frazioni, cioè la figura è concava o le manca percettivamente proprio la parte che ricostruisce l'intero, un solo intero, un ben determinato intero e solo quello, proprio quello:

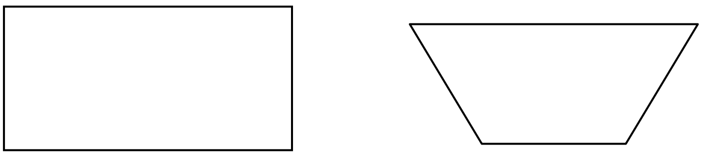


$\frac{3}{4}$ 1

È invece fondamentale dare esercizi in cui la parte frazionaria ha l'aspetto di figura compatta, unitaria, convessa; per risolvere l'esercizio, lo studente deve rompere il modello mentale* che si sta costruendo.
Do qui di seguito due esempi diversi.

Ecco i $\frac{3}{4}$ di una unità; trova l'unità di partenza:

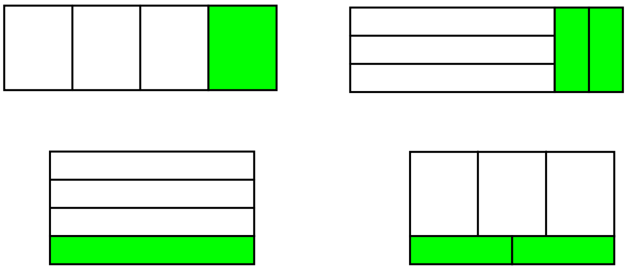
prima figura *seconda figura*

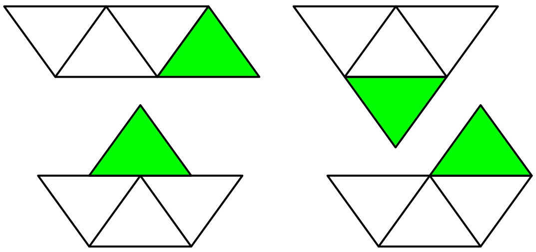


L'esercizio è molto costruttivo cognitivamente perché lo studente deve dividere il rettangolo (il trapezio) in 3 (numeratore) parti (significativamente) "uguali" e prenderne 4 (denominatore) per avere l'unità. Ovviamente le risposte corrette possibili in entrambi i casi sono molteplici.

Ci sono due elementi cognitivamente importanti in questa attività:

- il primo è che lo studente può dividere il rettangolo (il trapezio) in 3 parti a piacere, il che è molto significativo; ovviamente la scelta che farà potrà portarlo a soluzioni diverse, tutte potenzialmente giuste:





- il secondo è che lo studente deve *dividere* il rettangolo in tante parti quante ne esprime il *numeratore*, il che rompe una misconcezione* che certo si insinua nella mente come un modello parassita*: bisogna *sempre* moltiplicare per il numeratore e dividere per il denominatore.

In effetti, facendo l'esperienza, si vedrà che la tendenza generalizzata di alcuni studenti sarà quella di dividere il rettangolo (il trapezio) in 4 parti e non in 3.

7.1.9. Difficoltà nel gestire autonomamente o spontaneamente schemi o figure o modelli

Anche se un certo risultato positivo si ha proponendo allo studente schemi e modelli già precostituiti e, spesso, standard, stereotipi, la letteratura ha messo bene in evidenza che lo studente entra in crisi quando deve gestire schemi, diagrammi, figure in modo spontaneo o produrli autonomamente. Questo discorso vale in generale, anche tenuto conto delle difficoltà del dominio di diversi registri semiotici, ma per le frazioni in modo specifico la cosa si è rivelata drammatica recentemente, grazie agli studi anticipatori di Lesh, Post, Behr (1987) e più recenti di Gagatsis Michaelidou, Sciacalli (2000), solo per citarne alcuni.

Il fatto è che, passare da modelli interni* ad esterni*, è una traduzione* tutt'altro che banale; i modelli esterni sono vari: registro linguistico orale, scritto, disegni, figure, schemi, … E poi c'è la difficoltà ancora maggiore della gestione di schemi per situazioni discrete, difficoltà assai più marcata ed evidente.

Su questa gestione autonoma bisogna lavorare didatticamente, in aula, non ci si può aspettare che sia un apprendimento spontaneo, indotto dall'abitudine, dalla costanza o dalla ripetizione di modalità. Anzi, costanza e ripetizione agiscono spesso in senso contrario all'apprendimento consapevole.

Dunque, fin dall'inizio bisogna che lo studente apprenda a usare tutti i registri semiotici a sua disposizione in modo autonomo: (1) a scegliere quello che gli sembra più adatto alla situazione, (2) a *trattare* per passare da una rappresentazione ad un'altra nello stesso registro, (3) a *convertire* per passare da una rappresentazione all'altra in registri diversi; le tre operazioni fondamentali della semiotica.

Mai come nell'apprendimento delle frazioni si rivela importante per un insegnante conoscere almeno i primi elementi della semiotica.

7.2. LA DIDATTICA DELLA MATEMATICA COME EPISTEMOLOGIA DELL'APPRENDIMENTO MATEMA-TICO, NEL CASO DELLE FRAZIONI

Dividerò questo paragrafo **7.2.** in 6 sezioni; in ognuna metterò in evidenza probabili cause delle difficoltà di apprendimento non distinte per tipologia di difficoltà, non basate cioè su fatti legati alla Matematica delle frazioni, ma distinte per elementi che si riferiscono ai capisaldi della moderna ricerca in Didattica della Matematica.

Non entrerò in dettaglio con molti esempi, perché ritengo di averlo già fatto nel corso del paragrafo **7.1.** ed anche in parecchi dei capitoli precedenti. Quel che voglio fare in questo paragrafo **7.2.** è rovesciare il punto di vista storicamente consolidato (che parte dagli errori, ne descrive possibili cause e cerca rimedi) e proporre invece un punto di vista che, tenuto conto dei risultati della ricerca, raccoglie, a volte in un'unica causa, motivazioni per generi di errori non sempre ascrivibili ad una banale mancata costruzione di competenza di fatti matematici.
Non farò troppe citazioni bibliografiche puntuali, se non sono strettamente necessarie; per quanto concerne la Didattica della Matematica, mi servirò come sempre di D'Amore (1999) (ma anche di 2003b); infine, per quanto riguarda gli errori sulle frazioni, userò quelli già riportati nel paragrafo **7.1.** precedente, con le citazioni lì fornite.

7.2.1. Contratto didattico

Entrata nel campo della ricerca in Didattica della Matematica nei primi anni '70, addirittura alla fine degli anni '60, concepita da Guy Brousseau, l'idea di contratto didattico si è subito rivelata una delle più feconde per spiegare quel che succede in un'aula durante le ore di Matematica. Come oramai tutti sanno, per "contratto didattico" si intende l'insieme di tutto ciò che regola il comportamento degli allievi, ma anche dell'insegnante, in base alle attese che ciascuno di essi ha nei confronti dell'altro e della Matematica.
Lo studente, dunque, non sembra operare in aula in base al processo di insegnamento – apprendimento, non si fa carico responsabile degli apprendimenti che sta costruendo, non rischia in situazioni problematiche nuove, non osa mettere in gioco il proprio sapere; soprattutto egli cerca di comportarsi, agire, risolvere, rispondere sulla base di quel che ritiene che l'insegnante si aspetti da lui (calco la mano sullo studente, ma il discorso è reciproco).
Queste supposte *attese* sono create sulla base delle convinzioni che lo studente si è fatto nel corso del tempo sull'insegnante, su sé stesso, sui loro rispettivi ruoli sociali, sulla scuola, sulla valutazione, sulle norme che, implicitamente, crede di aver dedotto dalla vita di aula, sulla Matematica e sul suo senso.
Ecco alcune frasi che tentano di definire che cos'è il contratto didattico:
«In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere il problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo d'insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico» (Brousseau, 1980a, pag. 127; la traduzione è tratta da Schubauer-Leoni, 1996, pag. 21).
Un altro modo di vedere la cosa, anche per comprendere meglio i legami tra insegnante, allievo e sapere, è offerto da Chevallard (1988b): «Concretamente, insegnante ed allievi si ritrovano insieme (all'inizio dell'anno) attorno ad un sapere precisamente stabilito

(dal programma dell'anno). Contratto d'insegnamento (che obbliga il maestro), contratto d'apprendimento (che obbliga l'allievo), si sa che il contratto didattico "obbliga" anche il sapere (…). Inoltre e soprattutto, le clausole del contratto organizzano i rapporti che allievi ed insegnante intrattengono con il sapere. Il contratto regola fino al dettaglio la questione. Ogni nozione insegnata, ogni compito proposto si trova sottomesso alla sua legislazione».
Sono frasi molto forti che evidenziano l'importanza che ha il contratto didattico, con le sue clausole per lo più implicite, non dette, nella vita quotidiana che si svolge in aula.
Ignorare la questione significa mettersi nelle condizioni di non voler capire quel che accade attorno a noi nelle ore di Matematica.
Molto di quel che accade in aula, infatti, è condizionato, regolato, deciso dal contratto didattico, anche per quanto concerne le frazioni. Risposte dello studente che a prima vista non hanno una logica, che sembrano denotare solo incomprensione o mancanza di apprendimento, sono in realtà pesantemente decise dal contratto didattico che vige in aula. Cosicché, lo studente non si farà scrupolo a rispondere in modi che all'adulto parranno assurdi, solo perché sta cercando di trovare la risposta che spera essere quella attesa.
Qualche esempio.
(a) La "somma" di frazioni: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ non è proposta dallo studente all'insegnante perché lo studente la ritiene vera, ma perché ha l'aspetto di qualche cosa che all'insegnante potrebbe anche andare bene. Ha una forma accettabile…
(b) Dato un problema sulle frazioni, al momento di decidere quale operazione deve essere eseguita, è un'illusione pensare che lo studente ragioni per scegliere, quando sappiamo che, per contratto, egli ha come scopo solo quello di cogliere un cenno di approvazione; e così proporrà a raffica consecutivamente anche proposte tra loro contraddittorie: «Devo fare la moltiplicazione [guarda l'insegnante e non lo vede sorridere con approvazione, dunque cambia proposta]… No, la divisione», scrutando costantemente lo sguardo dell'insegnante. L'apparente assurdità della successione delle proposte acquista così una sua logica.
(c) La "semplificazione" $\frac{6}{12}=\frac{0}{2}$ risponde a competenze precedenti, per esempio acquisite nella sottrazione, in base alle quali quando "non resta niente" vuol dire che il numero corretto da porre è 0. Questo risultato può essere dettato da misconcezioni o da ostacoli didattici (termini che conosceremo tra poco) con estrema naturalezza. L'insegnante non crede ai suoi occhi e giudica le competenze matematiche dell'allievo; ma non sono precisamente questi i parametri e le variabili che entrano in gioco: in base al contratto didattico, lo studente non sta ragionando, non sta mettendo in gioco le proprie competenze, sta solo cercando di indovinare che cosa l'insegnante si aspetta di sentirsi dire da lui. Se l'insegnante spazientito gli suggerisce di non mettere 0 ma 1 al numeratore, lo studente debole non si adombrerà, non si chiederà il perché, non si

metterà in gioco; semplicemente sostituirà l'1 allo 0, come gli è richiesto esplicitamente, alla caccia di consenso. Non sta costruendo conoscenza, sta facendo in modo che la sua risposta coincida il più possibile con la richiesta dell'insegnante. La prossima volta, in occasione analoga, la "semplificazione" di $\frac{4}{8}$ potrà portare a $\frac{1}{2}$ o a $\frac{0}{2}$ a seconda di come lo studente ricorderà il suggerimento della volta precedente; la scelta corretta di scrivere $\frac{1}{2}$, purtroppo, non sarà la verifica certa di un apprendimento.
La frase di riconoscimento positivo da parte dell'insegnante: «Così va bene» sarà intepretata come la conferma del percorso "contrattuale" («Bisogna stare attenti a fare quel che l'insegnante chiede»), non del percorso cognitivo («Ho finalmente capito come si fa a semplificare le frazioni»).
Questi esempi e queste parole sono certo eccessivamente dure, forse esagerate, ma in alcuni casi assai vicini al vero.
Gli studi sul contratto didattico hanno null'altro che messo in evidenza situazioni che, implicitamente, erano sotto gli occhi di tutti, ma non chiaramente capite ed espresse. Nelle frazioni la cosa è parecchio evidente e ricorrente: lo studente rinuncia a osare, rinuncia a farsi carico personale del proprio apprendimento ed agisce contrattualmente.

7.2.2. Eccesso di rappresentazioni semiotiche

Come abbiamo visto nel capitolo **6.**, nell'apprendimento matematico la noetica passa attraverso la semiotica; ma potrebbe valere la conseguenza del paradosso di Duval, secondo la quale si rischia che lo studente non arrivi alla noetica, ma si fermi alla gestione semiotica.
D'Amore ha più volte evidenziato un'altra apparente situazione paradossale:

- da un lato, questo pericolo si trasforma in insuccesso apprenditivo quando si ha un eccesso di rappresentazioni semiotiche da gestire (D'Amore, 2002b; 2003a); dire che lo studente si confonde o che dedica tutta la propria attenzione alla gestione dei registri semiotici invece che all'apprendimento concettuale, è dir poco;
- dall'altro lato, è necessario, per la costruzione di apprendimento matematico, passare attraverso la consapevolezza ed il dominio delle tre componenti della semiotica (2003b), come ho già evidenziato nel corso del capitolo **6.**

Non c'è una soluzione, se non la ovvia responsabilizzazione professionale dell'insegnante. Sapendo come stanno le cose, la proposta di diversi registri e di diverse rappresentazioni semiotiche deve avvenire con la consapevolezza dei due punti precedenti.
Ora, nel caso delle frazioni, la quantità di registri semiotici a disposizione è immensa: ne abbiamo visto un piccolo esempio in **6.**, ma basta aprire un libro di testo qualsiasi.
A gestire i diversi registri, a scegliere i tratti distintivi del concetto da trattare, a convertire, non si impara *automaticamente*; questo apprendimento deve

necessariamente essere il risultato di un insegnamento esplicito nel quale l'insegnante chiama ad essere corresponsabile lo studente.
L'insegnante troppo spesso sottovaluta questo aspetto e passa da un registro all'altro, convinto che lo studente lo segua; occorre ricordare sempre le cautele suggerite da Duval. L'insegnate può permettersi di saltare da un registro all'altro senza problemi, perché ha già concettualizzato; ma lo studente, no, lo studente lo segue sul piano dei rappresentanti semiotici, non sui significati. Il rischio è enorme. L'apparente semplicità, l'apparente leggibilità di certi registri, non deve far credere che lo studente se ne appropri o ne sia già padrone.
Un esempio per tutti.
Noi adulti scriviamo e sui libri appare scritto indifferentemente $\frac{2}{3}$ o $^{2}\!/_{3}$; uno studente di 12 anni mi ha chiesto una volta come mai si scrivesse in due modi diversi e *perché*. Per quello studente, anche i minimi cambiamenti erano sintomo di una variazione di significato, si aggrappava a variazioni che per l'adulto sono insignificanti (sono le *informazioni parassite* di D'Amore, 1998).
Se una modifica di questo genere è considerata dallo studente uno scoglio, tanto da doverne chiedere giustificazioni, si immagini che cosa significa per lui passare da scritture aritmetiche a immagini schematiche a grafici a figure geometriche, come si fa in grande quantità nel caso delle frazioni. Ogni registro semiotico ha le sue regole sintattiche e semantiche che vanno apprese in modo specifico ed esplicito, per essere gestito.
Può essere interessante per il Lettore notare che, fin dall'inizio, in questo libro, ho *sempre* adottato una sola notazione, $\frac{a}{b}$, proprio in memoria di quello studente. La sua apparentemente ingenua domanda mi ha molto aiutato a capire. Avevo già accennato a questa scelta nella *Premessa*, ma senza spiegare il perché.

7.2.3. Immagini e modelli troppo presto formatisi

Per sua natura, l'essere umano si forma spontaneamente immagini (mentali) di ciò con cui entra in contatto in forma sensibile.
Se si pronuncia il nome di un oggetto sconosciuto a qualcuno, non si deve credere che costui non si faccia subito un'immagine di quell'oggetto. Costui si fa, in modo confuso, oppure completo, o solo parziale, in base alle proprie conoscenze ed esperienze, un'immagine che può essere figurale, un suono, una parola,…
Se si decide di dire ad uno studente di 8 anni che si sta per iniziare una successione di lezioni sulle frazioni, non si deve pensare che costui sia una *tabula rasa* o una brocca vuota da riempire. Questa parola, da sola, anche senza cognizione specifica, produce già una immagine.
Seguendo D'Amore (1999, 2003b), proporrò la seguente terminologia:

«"Immagine mentale" è il risultato figurale o proposizionale prodotto da una sollecitazione (interna o esterna). L'immagine mentale è condizionata da influenze culturali, stili personali, in poche parole è prodotto tipico dell'individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi. Essa può più o meno essere elaborata coscientemente (anche questa capacità di elaborazione dipende però dall'individuo). Tuttavia l'immagine mentale è interna ed almeno in prima istanza involontaria».
Nel processo di insegnamento – apprendimento, «lo studente si costruisce un'immagine I_1 di un concetto C; egli la crede stabile, definitiva. Ma ad un certo punto della sua storia cognitiva, riceve informazioni su C che non sono contemplate dall'immagine I_1 che aveva. Egli deve allora (e ciò può essere dovuto ad un conflitto cognitivo, *voluto* dall'insegnante) adeguare la "vecchia" immagine I_1 ad una nuova, più ampia, che non solo conservi le precedenti informazioni, ma accolga coerentemente anche le nuove. Di fatto, egli si costruisce una nuova immagine I_2 di C. Tale situazione può ripetersi più volte durante la storia scolastica di un allievo, costringendolo a passare da I_2 a I_3 …».
Non ho voluto cambiare le parole di D'Amore (2003b) perché mi sembrano assai chiare. Anche le prossime citazioni sono tratte da lì.
«Molti dei concetti della Matematica sono raggiunti grazie a passaggi, nei mesi o negli anni, da un'immagine ad un'altra più… comprensiva e si può immaginare questa successione di costruzioni concettuali, cioè di successive immagini $I_1, I_2, \ldots, I_n, I_{n+1}, \ldots$ come una specie di scalata, di "avvicinamento" a C.
Ad un certo punto di questa successione di immagini, c'è un momento in cui l'immagine cui si è pervenuti dopo vari passaggi "resiste" a sollecitazioni diverse, si dimostra abbastanza "forte" da includere tutte le argomentazioni e informazioni nuove che arrivano rispetto al concetto C che rappresenta. Un'immagine di questo tipo, dunque stabile e non più mutevole, si può chiamare "modello" M del concetto C».
Si può pensare dunque che il modello (mentale) M del concetto C dello studente S sia l'immagine (mentale) finale di una successione di immagini sempre più elaborate e comprensive che si è fatto S, in una sorta di cammino ideale nel quale l'insegnante ha il compito di guidare S.
Oppure si può anche pensare che il modello M del concetto C dello studente S sia l'insieme di tutte le immagini che, a proposito di C, S si è fatto.
In ogni caso, al modello M, si dà il nome di modello (mentale) *interno* (si tratta infatti di un modello *privato*, al quale lo studente deve fare riferimento quando vorrà produrre un modello *esterno*, per esempio in situazione di comunicazione con altri, adulti o coetanei).
«Farsi un modello di un concetto, dunque, significa rielaborare successivamente immagini (deboli, instabili) per giungere ad una di esse definitiva (forte, stabile)».
Purtroppo, questo è il punto di vista teorico, ma non sempre le cose funzionano come dovrebbero; ci sono, infatti, due possibilità:

«M si forma al momento giusto nel senso che si tratta davvero del modello (…) che l'insegnante auspicava per C; l'azione didattica ha funzionato e lo studente si è costruito il modello M voluto dall'insegnante del concetto C;
M si forma troppo presto, quando ancora rappresenta solo un'immagine che avrebbe dovuto essere ulteriormente ampliata; a questo punto non è facile raggiungere C, perché la stabilità di questo parziale M è di per sé stessa un ostacolo ai futuri apprendimenti».
Dunque, per dirlo in maniera molto semplice, bisognerebbe fare in modo che lo studente S arrivasse alla costruzione voluta di C grazie ad un adeguato modello M formatosi al momento giusto.
L'insegnante tende spesso, per ovvi motivi legati alla speranza di un successo cognitivo, a proporre «un'immagine forte e convincente, che diventa persistente, confermata da continui esempi ed esperienze, di un concetto C; l'immagine si trasforma in *modello intuitivo*.
C'è insomma rispondenza diretta tra la situazione proposta ed il concetto matematico che si sta utilizzando; ma questo modello potrebbe non essere ancora quello che, del concetto C, ci si aspetta all'interno del sapere matematico.
Dunque, tra i modelli, si riserva il nome di "modello intuitivo" a quei modelli che rispondono pienamente alle sollecitazioni intuitive e che hanno dunque un'accettazione immediata forte (Fischbein, 1985, 1992)».
Si parla anche, talvolta, di *modelli parassiti*.
Gli esempi più noti in questo campo, studiati per primo proprio da Fischbein, sono quelli legati alle seguenti convinzioni (che, più avanti, in **7.2.4.**, ci porteranno a parlare di *misconcezioni*).
Ne propongo alcuni a mo' di esempio.
(a) La moltiplicazione tra due numeri naturali dà luogo ad un prodotto che è certamente maggiore di ciascuno dei due fattori; questa affermazione è vera in N, insieme dei numeri naturali, ma non certo in Q^a, insieme dei razionali assoluti. Il modello intuitivo della moltiplicazione in Q^a, però, potrebbe coincidere con il modello che lo studente si è costruito in N, evidentemente troppo presto; l'idea di limitare l'insegnamento della moltiplicazione solo al cosiddetto "schieramento" nella scuola primaria, non aiuta certo in questa impresa cognitiva; «non è un caso che molti studenti evoluti (anche universitari) si dichiarino meravigliati di fronte al fatto che tra le due operazioni: 18×0.25 e 18:0.25 la prima è quella che dà un risultato minore. Essi conservano il modello errato creatosi nella scuola elementare in base al quale "la moltiplicazione aumenta i valori"» (D'Amore, 2003b). In realtà, questa "meraviglia" non è limitata ai soli studenti evoluti e l'ho potuta verificare anche tra insegnanti in formazione ed in servizio.
(b) Nella divisione tra *a* e *b*, *a* deve essere maggiore di *b*. Di solito vengono forniti ai giovanissimi studenti due modelli intuitivi di divisione:
si *ripartiscono a* oggetti in *b* contenitori e si chiede quanti oggetti si devono porre in ogni contenitore(divisione per ripartizione);

si calcola quanti contenitori servono per *contenere a* oggetti raccolti a *b* a *b* in ciascun contenitore (divisione per contenenza);
in questi due casi, in effetti, *a* e *b* devono essere numeri naturali con $a>b$, altrimenti la richiesta non ha senso.
Se queste situazioni restano immagini della divisione, per convertirsi in modello solo dopo l'introduzione della divisione in Q^a, bene; purtroppo, invece, nella maggior parte dei casi (assicurava Fischbein nel 1985), la divisione si evolve in modello quando ancora dovrebbe essere immagine ed allora il modello intuitivo così costruito diventa un ostacolo insormontabile per la costruzione di un buon modello efficace e completo della divisione; inoltre, con modelli intuitivi di divisione legati solo alle cosiddette "ripartizione" e "contenenza", ben pochi sono in grado di dare un senso a situazioni come quella suggerita ancora da Fischbein (1985): «0,75 litri di aranciata costano 2 dollari; quando costa un litro?»; l'operazione che risolve il problema è: 2:0,75 ma tra coloro cui la richiesta è stata fatta, bambini, studenti adulti, insegnanti in servizio, studenti universitari, studenti di corsi post laurea, insegnanti in formazione, solo pochissimi, ma veramente pochissimi, la accettano; molti preferiscono passare alla proporzione: 0,75:2=1:x e, solo risolvendo questa equazione lineare, una volta trovato $x=\frac{1\times 2}{0{,}75}$, sono disposti ad eseguire la divisione 2:0,75 ma come effetto dell'applicazione di una regola, non della "traduzione" diretta del testo problematico in una formula aritmetica equivalente.
(c) Nella sottrazione si privilegia, a volte, anzi assai spesso, *solo* l'immagine "togliere" e così questa si trasforma prestissimo in modello, tra l'altro facendo coincidere il modello intuitivo con quello formale. Per cui, esercizi come «Se togliamo 3 palline da un insieme di 10 palline, quante palline rimarranno?» hanno un successo che rasenta il 100% in II primaria, mentre «Ho 3 palline, ma me ne occorrono 10 per giocare. Quante palline devo aggiungere a quelle che ho già, per poter cominciare a giocare?» hanno successo molto minore, come rilevava già Fischbein (1985). Il fatto è che lo studente non riconosce al II esercizio la risolubilità con una sottrazione in quanto non corrisponde al modello intuitivo inizialmente proposto e già costruito; egli tende dunque a scrivere nel II caso 3+7=10 piuttosto che 10-3=7, privilegiando il ruolo intuitivo di quell'*aggiungere* che appare nel testo.

Gli esempi potrebbero continuare a lungo, non solo nel campo dell'apprendimento dell'Aritmetica, ma anche della Geometria, della Probabilità, della Logica etc., ma rinvio a D'Amore (1999, 2003b) per vederne ancora e soprattutto per un'analisi molto più approfondita.
Riporto qui una bella ed illuminante frase di Fischbein 1985): «Ogni operazione aritmetica possiede, oltre al suo significato formale, anche uno o più significati intuitivi. I due livelli possono coincidere oppure no».

Torniamo a D'Amore (2003b) per avere una conclusione efficace: «Didatticamente conviene lasciare immagini ancora instabili, in attesa di poter creare modelli adatti e significativi, il più possibile vicini al sapere matematico che si vuole raggiungere.
Più "forte" è il modello intuitivo, più difficile è infrangerlo per *accomodarlo* ad una nuova immagine. Insomma, l'immagine – misconcezione non deve diventare modello visto che, per sua stessa natura, è in attesa di definitiva sistemazione.
Si tratta allora di non dare informazioni distorte e sbagliate; non solo non darle in modo esplicito, ma addirittura evitare che si formino autonomamente per non favorire l'insorgere di modelli parassiti. Una solida competenza dell'insegnante in Didattica della Matematica è, in questo, un forte aiuto».

Nel caso delle frazioni, succede molto spesso che una immagine si trasformi in modello (mentale) interno, troppo presto, quando ancora dovrebbe restare immagine.
Vediamo alcuni esempi.
(a) L'immagine di una unità – tutto che viene divisa in parti *uguali*, intendendo questo *uguale* come identità, congruenza, sovrapponibilità, marchia in modo efficace e duratura il concetto di frazione, trasformandosi in modello e pretendendo dunque di essere rispettata in ogni occasione. Abbiamo già visto come questo pregiudichi assai presto la formazione noetica della frazione.
(b) L'immagine di dividere una unità – tutto in parti uguali e prenderne alcune, suggerisce semanticamente che questo "alcune" non possa essere "tutte"; il modello si forma facilmente, dato che coincide con una intuizione forte; ma pregiudica poi il passaggio alla unità come frazione $\frac{n}{n}$ ed alle frazioni improprie.
(c) L'uso di figure geometriche viene visto dagli studenti come specifico e significativo, mentre l'adulto le pensa casuali e le vede come scelte generiche. Per esempio il continuo ed unico ricorso a rettangoli o cerchi costringe a ragionare in modo tale che l'immagine (che avrebbe dovuto essere aperta, duttile, modificabile) diventa invece persistente e stabile e si fa modello; se la frazione viene proposta su figure diverse (triangoli, trapezi,…) lo studente non domina più la noetica della frazione perché la situazione proposta non fa parte del suo modello.
(d) Se l'unità – totalità viene insistentemente proposta stilizzata come una figura geometrica unica, connessa, compatta, convessa, la costruzione del concetto di frazione si fa modello con questa configurazione fissa, irremovibile. Se poi si tenta di usare una unità – totalità che è formata da un insieme discreto di oggetti, il modello troppo presto formatosi non risponde più ai bisogni nuovi della situazione.
(e) Se bisogna dividere sempre e solo un numero per un altro più piccolo e questo diventa il modello di divisione, allora, al momento di dividere 2 euro tra 4 persone, difficilmente allo studente sarà spontaneo operare con la frazione $\frac{2}{4}$ o con la divisione tra numeri razionali 2:4. Questi due atteggiamenti non saranno compatibili con quel

modello e lo studente cercherà alternative, come, per esempio, quella di operare solo tra centesimi 200:4, come se questa trasformazione fosse obbligatoria. Avrà sempre come risultato 50 centesimi e mai 0,5 o 0,50 euro perché questi due valori gli sembreranno innaturali.

Gli esempi potrebbero proseguire a lungo e su infinite situazioni aventi a che fare con frazioni o numeri con la virgola.

Nota.
Il Lettore avrà notato come le cose si intreccino; è difficile separare gli argomenti di Didattica della Matematica gli uni dagli altri; io mi sto sforzando a farlo, prevedendo anche Lettori non del tutto padroni di questa disciplina.
Dunque, sono costretta a ricorrere a piccoli trucchi espositivi. A volte, cioè, lo *stesso esempio* che fornisco in un paragrafo potrebbe essere usato, con una spiegazione diversa, in un altro; o, meglio ancora, in entrambi, con un discorso più ampio. Mano a mano che il Lettore avrà fatto esperienza in Didattica, lo farà da sé.
Sono costretta a questa nota, specie prima di iniziare il prossimo paragrafo, dato che quanto in esso descritto in realtà emergeva già abbondantemente nei precedenti.

7.2.4. Misconcezioni

In questo paragrafo mi servirò, oltre che dei soliti D'Amore (1999, 2003b) anche di D'Amore, Sbaragli (2005).

Legata alle idee di "immagine" e di "modello troppo presto formato di un concetto", c'è un'importante questione che riguarda la *misconcezione*. «Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che, per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda *necessario* passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione.Si può notare come, almeno in taluni casi, alcune immagini possono essere delle vere e proprie misconcezioni, cioè interpretazioni errate delle informazioni ricevute» (D'Amore, 2003b).
La ricerca ha fornito su questo tema molte informazioni e numerosi esempi.
«Per esempio, in una III elementare, uno studente eseguiva in colonna le seguenti sottrazioni:

37-	89-	26-	56-
24=	67=	18=	43=
----	----	----	----
13	22	12	13

L'insegnante osservò che tre sottrazioni su quattro erano state effettuate correttamente; diede dunque una valutazione positiva, ma invitò lo studente, nella terza sottrazione, a "prendere in prestito una decina". Lo studente non capiva di che decina si stava parlando perché aveva in mente un'altra regola personale: per eseguire le sottrazioni in colonna si procede da destra verso sinistra e, in ogni colonna, si sottrae dal più grande il più piccolo. Ne aveva avuto conferma in molti casi; la comunicazione che riguardava casi come la terza sottrazione non gli era giunta per chissà quale motivo, e dunque aveva assunto nel suo curricolo quella "regola". Essa funzionava *quasi* sempre e nei casi negativi egli non capiva perché: stava usando *correttamente*, infatti, una regola (che non sapeva essere invece scorretta). Una vera e propria misconcezione. [Sulla differenza tra curricolo insegnato e curricolo appreso, si veda Fandiño Pinilla (2002)]» (D'Amore, 2003b).
Gli esempi possibili di misconcezione sono numerosissimi, tratti dall'Aritmetica, dalla Geometria etc., e per questi rimandiamo non solo ai testi citati in precedenza, ma anche a Sbaragli (2005), testo specificamente rivolto a questo tema, dove si distingue tra misconcezioni "evitabili" (cioè non necessarie) ed "inevitabili" (cioè momenti di passaggio necessari verso la costruzione di un modello auspicato di un concetto).
Dunque, noi propendiamo per il senso dato da D'Amore (1999), considerando le misconcezioni anche come «concezioni momentanee non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica. Attenzione, però: lo studente non lo sa e dunque ritiene che le sue, quelle che per il ricercatore sono misconcezioni, siano invece concezioni vere e proprie. Dunque è l'adulto che sa essere quelle elaborate e fatte proprie dai ragazzi delle misconcezioni. Chiamarle *errori* è troppo semplicistico e banale: non si tratta di punire, di valutare negativamente; si tratta, invece, di dare gli strumenti per l'elaborazione critica» (D'Amore, 1999, 2003b).
In un certo senso, dunque, le misconcezioni, intese come detto, non sono necessariamente eliminabili, né costituiscono del tutto un danno. Potrebbero anche apparire come un momento delicato necessario di passaggio, da una prima concezione elementare (ingenua, spontanea, primitiva,...) ad una più elaborata e auspicata.

Gli esempi possibili nel caso delle frazioni sono molteplici.
Moltissimi degli esempi visti fino ad ora sono ascrivibili a misconcezioni che gli studenti si sono fatti e che sono diventate modello troppo presto, quando ancora dovevano restare immagini. Ne abbiamo visti vari esempi che potremmo ripercorrere tutti, ad uno ad uno.
Ricordo le misconcezioni legate all'ordine tra frazioni, ordine desunto a partire da quello tra naturali; alla semplificazione di frazioni; alla gestione della equivalenza tra frazioni; alle operazioni tra frazioni; alla scelta delle figure sulle quale operare con le frazioni; …
Il Lettore potrebbe, come esercizio costruttivo, rileggere i paragrafi **7.2.1.**, **2.**, **3.** e giustificare le situazioni ivi descritte alla luce dell'idea di misconcezione.

7.2.5. Ostacoli ontogenetici, didattici ed epistemologici

Così come altre idee che si sono rivelate feconde per la ricerca in Didattica della Matematica e per studiare la pratica dell'aula, anche l'idea di *ostacolo* proviene da studi originali di Guy Brousseau fin da suoi lavori del 1968, altri del 1972 e 1976 (Brousseau, 1972a, 1976), resi celebri dal suo lavoro specifico del 1983 e dal citatissimo (Brousseau, 1986) (tale concetto è però già presente in studi filosofici di Gaston Bachelard, 1938, anche se ristretto alle sole scienze naturali).

Userò D'Amore (2003b) (che ha, non per caso, una prefazione proprio di Brousseau) per entrare immediatamente nell'argomento:

«(…) ostacolo è un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi (anche solo cognitivi) precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo), si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti».

Si fa solitamente una distinzione fra tre tipi di ostacoli:
- di natura ontogenetica
- di natura didattica
- di natura epistemologica,

che esaminerò brevemente uno alla volta.

Ostacoli ontogenetici (legati all'allievo ed alla sua natura).

«Ogni soggetto che apprende sviluppa capacità e conoscenze adatte alla sua età mentale (che può essere diversa dall'età cronologica), dunque adatte a mezzi e scopi di quella età: rispetto all'acquisizione di certi concetti, queste capacità e conoscenze possono essere insufficienti rispetto ad un progetto didattico da parte dell'insegnante e possono costituire quindi ostacoli di *natura ontogenetica* (l'allievo potrebbe avere limitazioni neurofisiologiche anche solo dovute alla sua età cronologica)».

Ostacoli didattici (legati all'insegnante ed alle sue scelte).

«Ogni docente sceglie un progetto, un curricolo, un metodo, interpreta in modo personale la trasposizione didattica, secondo le sue convinzioni sia scientifiche sia didattiche: egli crede in quella scelta e la propone alla classe perché la pensa efficace; ma quel che è efficace effettivamente per qualche studente, non è detto che lo sia per altri. Per questi *altri*, la scelta di *quel* progetto si rivela un *ostacolo didattico*».

Ostacoli epistemologici (legati alla natura stessa degli argomenti della Matematica).

«Ogni argomento a carattere matematico ha un proprio statuto epistemologico che dipende dalla storia della sua evoluzione all'interno della Matematica, dalla sua accettazione critica nell'àmbito della Matematica, dalle riserve che gli sono proprie, dal linguaggio in cui è espresso o che richiede per potersi esprimere. Quando nella storia dell'evoluzione di un concetto si individua una non continuità, una frattura, cambi radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto abbia al suo interno ostacoli di carattere epistemologico ad essere appreso; ciò si manifesta, per esempio, in errori ricorrenti e tipici di vari studenti, in diverse classi, stabili negli anni» (D'Amore, 2003b).

Un esempio di ostacolo ontogenetico può essere dato facilmente. In base all'età ed alla situazione di maturità cognitiva, ci sono argomenti che non possono essere affrontati a certi livelli scolastici. Per esempio, si è visto che l'apprendimento della "implicazione materiale" tra enunciati A e B ($A \rightarrow B$) in logica, si rivela fallimentare per studenti sotto i 14 anni, nonostante l'enfasi che accompagnò l'ingresso della logica nella didattica quotidiana in Matematica (per una critica a questo proposito sulla situazione in Italia negli anni '80 e primi '90, si veda D'Amore, 1991)
Tra gli apprendimenti legati alle frazioni, molti possono essere pensati come veri e propri ostacoli ontogenetici. Per esempio, il tentativo di far costruire cognitivamente il numero razionale come classe di equivalenza di coppie di naturali (il secondo dei quali diverso da zero) è fallimentare per motivi legati ad ostacoli ontogenetici. Per costruire davvero questo concetto, bisogna avere la forza cognitiva e culturale di considerare tale classe come un solo oggetto, astraendo dai suoi componenti. Si è visto che questa capacità si acquisisce solo in particolari circostanze per motivi legati all'ostacolo ontogenetico. (Il che spiega perché bisogna continuare ancora ad insegnare ed a far apprendere le frazioni a scuola).

Un esempio di ostacolo didattico è la proposta che fanno taluni insegnanti della scuola primaria al momento di presentare gli oggetti geometrici attualmente infiniti: il segmento come infinità di punti, la retta come figura illimitata formata da infiniti puntini ordinati in fila. Il modello più diffuso nelle scuole è quello del segmento come una collana di perline che, per la sua immediatezza, viene subito accettato dagli studenti e diventa modello intuitivo; esso costituisce un evidente ostacolo didattico al momento in cui si deve introdurre l'idea di densità, nella stessa scuola elementare ed ancora di più nella scuola media, e quando si deve introdurre l'idea di continuità nella scuola superiore. Ricerche accurate hanno ampiamente evidenziato che gli studenti maturi (ultimo anno delle superiori e primi anni di università) non riescono a diventare padroni del concetto di continuità proprio a causa del modello intuitivo persistente di segmento come collana di perline (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002). Quanto alla retta come figura illimitata, essa ed il conteggio prolungato dei numeri naturali, sembrano fornire agli studenti la capacità di vedere l'infinito solo in potenza e non in atto, il che pure crea gravi ostacoli didattici nei corsi successivi. Su questo tema, si veda anche Sbaragli (2004) che lo approfondisce molto.
Tra gli apprendimenti legati alle frazioni, molti possono essere pensati come veri e propri ostacoli didattici. Essi sono in genere dovuti a scelte che compie l'insegnante nel presentare i vari elementi della didattica delle frazioni, sulla base del buon senso o della tradizione. Di solito queste scelte hanno successo e penetrano subito e bene, creando

conoscenza che però diventa modello troppo presto; in realtà si tratta di misconcezioni che l'allievo crede essere concezioni corrette. Quando tenta di applicarle alle situazioni nuove, esse si rivelano fallimentari.
Nel corso di questo capitolo **7.**, abbiamo visto molti esempi di scelte didattiche che si rivelano ostacoli.
Il primo è la scelta di accanirsi a tutti i costi a voler dare una sola "definizione" di frazione, definizione che poi non regge, che non ce la fa a sostenere il peso delle nuove situazioni. Sarebbe bene darla in modo critico, avvisando che ci sarà bisogno di modificarla per includere nuove situazioni.
Un altro è l'insistenza di voler fare sempre solo modelli concreti, che poi si rivelano inefficaci. Sarebbe bene avvisare gli studenti che i modelli concreti vengono dati solo per aiutare l'immaginazione nel suo primo approccio, ma che dovranno poi fare ricorso all'astrazione, di cui sono capaci, a livelli diversi, a tutte le età.
Un altro ancora è la scelta di introdurre registri semiotici diversi senza didattiche specifiche, come se lo studente dovesse/potesse apprendere a farne uso spontaneamente. Sarebbe bene mettere in evidenza la struttura semiotica di ogni registro scelto, man mano che lo si sceglie, in modo esplicito.
Un ultimo esempio è costituito dall'insistenza da parte dello studente nel voler trovare un "successivo" di una frazione o di un razionale; per cui la frazione "successiva" di $\frac{3}{5}$ è allora $\frac{4}{5}$ e il "successivo" di 0,3 è 0,4; è ovvio che si tratta di un ostacolo didattico legato al fatto che lo studente ha appreso a far uso del termine "successivo" nell'insieme N dei numeri naturali ed ha costruito il concetto esteso a *tutti* i domini numerici, senza che mai si avesse un momento nel quale questa concezione venisse messa in crisi. Su questo tema si richiede una didattica esplicita (purtroppo però è stato notato come non siano solo studenti alle prime armi a cadere in questo tranello, ma anche studenti evoluti ed insegnanti).

Gli esempi di ostacoli epistemologici ci vengono forniti o dalla storia della Matematica o dalla vita di aula. Concetti che nella storia hanno creato fratture, discussioni, difficoltà, … certo sono ostacoli epistemologici; argomenti sui quali gli studenti commettono errori che sono sempre gli stessi in qualsiasi tempo ed in qualsiasi Paese, certo sono ostacoli epistemologici. Ebbene, la ricerca ha dimostrato che si tratta di solito degli *stessi* argomenti.
Di seguito, do alcuni esempi di ostacoli epistemologici.
(a) Il concetto di infinito, necessario nella pratica scolastica e nella pratica matematica, ma difficile da gestire in modo soddisfacente; il concetto di infinito a scuola nasce fin dai primi giorni, quando si impara a contare, ma diventa di giorno in giorno più necessario; nella storia nasce in modo esplicito, come oggetto di studio meritevole di

attenzione, nel V secolo a. C.; in entrambe le situazioni crea/creò imbarazzanti problemi anche con forti polemiche.
(b) Il concetto di zero, necessario nella pratica scolastica e nella pratica matematica, ma difficile da gestire in modo soddisfacente; il concetto di zero a scuola nasce fin dai primi giorni, con la linea dei numeri e con la sottrazione 3-3; è indubbio che la sua gestione crea sempre, anche nella scuola superiore, difficoltà a non finire; nella storia nasce solo nel VI secolo d. C., in India, e si afferma in Europa e nel mondo solo dopo discussioni anche violente.
(c) Il concetto di numeri dotati di segno (numeri interi o, come si dice a volta, relativi); a scuola viene introdotto presto, fin dalla scuola primaria, ma diventa essenziale per l'Algebra in III media; si sa che crea non pochi imbarazzi agli studenti per i quali è un vero e proprio ostacolo; nella storia nasce nel VI-VII secolo, sempre in India, ma viene gestito in Aritmetica e poi in Algebra nel IX secolo nel mondo arabo, accolto nel mondo europeo con scetticismo durato molto a lungo, addirittura per vari secoli.
Tra gli apprendimenti legati alle frazioni, molti possono essere pensati come veri e propri ostacoli epistemologici. Essi sono facilmente riconoscibili nella storia e/o nella pratica didattica.
(a) La riduzione delle frazioni ai minimi termini è stata per molto tempo un oggetto specifico di studio nella storia; basti pensare che gli Egizi, che coltivarono le frazioni per molti secoli, preferirono avere a che fare solo con frazioni con numeratore unitario; gli studenti spesso usano conoscenze elaborate in precedenza quando devono ridurre ai minimi termini; abbiamo visto il caso della "riduzione" $\frac{6}{12}=\frac{0}{2}$ nella quale si adotta qualche conoscenza che è stata appresa nel corso della sottrazione tra naturali.
(b) Il passaggio dalle frazioni ai numeri con la virgola ha richiesto alla Matematica più di 4500 anni, nonostante fosse già disponibile (nel mondo sumero, per esempio) un sistema posizionale; nel mondo indiano è nato, nel VI secolo d. C., un sistema posizionale decimale corretto; ma solamente dal XV si può dire che si sia fatto un uso consapevole e corretto dei numeri decimali. A scuola questo passaggio non è cognitivamente incruento, anzi lascia sul campo parecchie vittime. In letteratura si segnalano studenti, neppur tanto giovani, che semplicemente trasformano così: $\frac{2}{3}=2{,}3$.
(c) La gestione dello zero nelle frazioni ha creato difficoltà enormi nella storia, tanto che i matematici arabi hanno esplicitamente studiato situazioni come le seguenti, una per una: $\frac{0}{n}$ (con $n\neq 0$, relativamente semplice); $\frac{n}{0}$ (con $n\neq 0$, piuttosto complicata, sulla quale si è discusso parecchio, per secoli); $\frac{n}{m}$ (con $n\neq 0$ e con m sempre più piccolo, che *tende* a zero); $\frac{0}{0}$ (che ha creato vittime illustri anche tra matematici famosi). Ebbene, come non riconoscere che queste stesse "frazioni" creano in aula problemi cognitivi?

Gli esempi potrebbero proseguire a lungo.

L'idea di ostacolo conduce a ripensare alla presenza ed alla funzione dell'errore nella pratica scolastica; seguendo D'Amore (2003b): «L'errore, dunque, non è necessariamente solo frutto di ignoranza, ma potrebbe invece essere il risultato di una conoscenza precedente, una conoscenza che ha avuto successo, che ha prodotto risultati positivi, ma che non tiene alla prova di fatti più contingenti o più generali.
Dunque non si tratta sempre di errore di origine sconosciuta, imprevedibile, ma della evidenziazione di ostacoli nel senso sopra citato. Queste considerazioni hanno portato la ricerca in Didattica della Matematica a rivalutare in modo molto diverso dalla prassi usuale l'errore ed il suo ruolo».

7.2.6. Eccesso di situazioni didattiche e mancanza di situazioni adidattiche

Come il Lettore avrà notato, spesso cito il nome di Guy Brousseau quando introduco quei temi di Didattica della Matematica che, durante gli anni '80, hanno rivoluzionato la ricerca (e dunque stanno rivoluzionando la pratica), nel nostro settore.
Tra tutti gli argomenti introdotti dal grande ricercatore francese, ho lasciato per ultimo il più importante, una teoria che, in un certo senso, racchiude tutte le altre, la cosiddetta "teoria delle situazioni".
Mi servirò di Brousseau (1986) e D'Amore (1999, 2001).

Situazione didattica è una situazione che l'insegnante crea tenendo conto dello stato cognitivo dei suoi allievi, delle esigenze del programma, della trasposizione, dell'ambiente; egli la propone ai propri studenti in modo esplicito, operando da mediatore tra il sapere da insegnare* ed i propri studenti, dichiarando esplicitamente quel che vuole ottenere, intervenendo attivamente nel loro processo di apprendimento, sostituendosi agli studenti nel tentativo di spiegare ogni dettaglio, di dichiarare apertamente che cosa bisogna fare, che cosa bisogna dire, come si fa per risolvere, per scrivere etc. Tutto è esplicito, tanto che il contratto didattico è l'elemento trionfante: lo studente è così impegnato non tanto ad imparare la Matematica ma ad imparare quali sono le attese dell'insegnante, esplicite ma soprattutto implicite.

Situazione adidattica è una situazione che l'insegnante crea tenendo conto dello stato cognitivo dei suoi allievi, delle esigenze del programma, della trasposizione, dell'ambiente; egli la propone in maniera indiretta o, meglio, se possibile, non la propone affatto, ma fa sì che sia necessario entrarvi. Con un'azione che si chiama *devoluzione* affida agli studenti la gestione di tale situazione; essi sanno che, accettando tale responsabilità, impareranno qualche cosa, cioè sanno che lo scopo dell'attività è di apprendimento, ma non sanno che cosa stanno per accettare; il relativo impegno degli studenti è detto *implicazione*; gli studenti lavorano, si impegnano, discutono, scoprono e l'insegnante non ha la funzione di mediatore bensì quella di regista della situazione; non entra nei dettagli della costruzione che gli studenti fanno ma si limita a sorvegliare, a indirizzare; quando qualche studente arriva alla costruzione della conoscenza che l'insegnante sa essere quella voluta, quando questo studente dichiara in qualche modo il raggiungimento di essa e l'insegnante vi scorge appunto una costruzione personale, invita quello studente a renderla pubblica, difendendo la propria costruzione (che nessuno sa se è o no quella corretta) dalle incertezze o addirittura dalle opposizioni di altri studenti; questa difesa costringe lo studente a passare da un modello interno ad uno esterno, a causa della volontà comunicativa creatasi nella situazione; tale azione è detta *validazione*; quando si giunge ad una costruzione di conoscenza condivisa, cioè ad una sorta di *socializzazione della conoscenza*, quando cioè tutti gli studenti si voltano a guardare l'insegnante, questo cessa di avere una pura funzione da regista, riacquista la funzione di insegnante e *istituzionalizza il sapere* raggiunto, riconoscendogli uno *status* ufficiale di spendibilità, uno *status* teorico, dandogli il nome con il quale la società lo riconosce. In questa situazione, il contratto didattico non può avere un ruolo importante, dato che l'insegnante non dichiara che cosa vuol ottenere e dunque lo studente non può evitare di affrontare il problema apprenditivo per affrontare al suo posto quello di indovinare le attese dell'insegnante, dato che queste non vengono mai dichiarate.

In entrambi i casi, situazione didattica e situazione adidattica, dunque, si ha uno scopo didattico, ma mentre nel primo caso esso viene dichiarato esplicitamente, nel secondo è come nascosto. In entrambi i casi l'ambiente è sfruttato (in positivo o in negativo), ma mentre nel primo caso tutto è rivelato esplicitamente (attività da effettuare, cose da fare, elementi dei quali tener conto,…) nel secondo caso l'ambiente si oppone alla costruzione di conoscenza e l'allievo lo deve piegare alla propria volontà.

Situazione non didattica è, infine, una situazione nella quale non vi sono traguardi cognitivi da raggiungere, né espliciti né impliciti, ma solo attività da svolgere ed effettuare. Non c'è traguardo cognitivo, ma non è detto che lo studente non vi impari lo stesso qualche cosa.

Se ora il Lettore ha la pazienza di rileggere con attenzione, non potrà non osservare che:

- nella situazione didattica lo studente non impara la Matematica ma impara altro;
- l'unico modo che abbiamo per far sì che gli studenti costruiscano sapere matematico è quello di ricorrere alla situazione adidattica;

e tuttavia:

- la situazione didattica è assolutamente la più presente nelle aule scolastiche, nelle quali l'insegnante non rinuncia ad un ruolo mal interpretato e si frappone senza rendersene conto tra lo studente e l'apprendimento della Matematica, proponendo invece l'apprendimento delle sue stesse attese (il più delle volte implicite);
- la situazione adidattica richiede un certo coraggio, una grande professionalità, molta pazienza e grandi capacità di osservazione.

Per quanto riguarda le frazioni, non credo di stupire nessuno dicendo che la stragrande maggioranza delle situazioni che l'insegnante propone per il loro apprendimento è didattico, mentre assai poco spesso ricorre a situazioni adidattiche, con il risultato che questo libro e l'intera letteratura internazionale evidenzia: il fallimento quasi totale nell'apprendimento delle frazioni e dei numeri razionali.
Tutti sappiamo oggi che la costruzione di apprendimento significativo dovrebbe passare attraverso situazioni adidattiche, ma che queste non sono certo quelle più utilizzate nella pratica didattica, mentre dovrebbero esserlo. Nelle frazioni più che in altri argomenti.

8

Osservazioni sulla didattica delle frazioni in aula

Le osservazioni effettuate fino a questo punto, e sparse un po' per tutto il libro, tengono conto dei risultati della letteratura internazionale di ricerca sul tema "insegnamento – apprendimento delle frazioni" e si riferiscono esclusivamente alla scuola primaria ed alla scuola secondaria di primo grado (mi dicono però, sia la mia passata esperienza personale, sia i commenti di vari colleghi italiani e non, che le cose nella scuola secondaria di secondo grado non sempre vanno *molto* meglio).
Il libro avrebbe potuto concludersi qui; ma, spinta dai miei primi lettori, della cui pazienza ho abusato, sottoponendo loro le prime versioni del lavoro, ho deciso di accettare il consiglio di riunire, in questo capitolo finale, alcune esplicite osservazioni didattiche più puntuali; il che sarebbe come dire: suggerire una… manciata di consigli sull'insegnamento delle frazioni.
Molti dei libri che segnalo in bibliografia terminano addirittura con un'ipotesi di curricolo sull'insegnamento delle frazioni; ma, a seguire questa strada, a me sembrava di commettere un doppio peccato, da un lato di arroganza, dall'altro di ingenuità: mi pare che nessuno possa indicare ad un professionista *come* e *cosa* fare in una situazione generale, astratta; bisogna che il professionista lo decida da sé. Nel mondo della scuola, poi, la trasposizione didattica* è un momento creativo magico ed affidarsi ad illusori suggerimenti generali o solo a libri di testo potrebbe rivelarsi troppo riduttivo, addirittura offensivo.
Così, alla fine, ho deciso di fare come specifico subito: una raccolta di consigli – osservazioni critiche che potrebbero anche essere molto utili concretamente al momento di voler impostare una successione di interventi didattici sulle frazioni. Queste osservazioni tengono conto dei risultati salienti della ricerca, non di un millantato buon senso o di semplice esperienza personale.
Dividerò queste osservazioni dal semplice al complesso.

8.1. OSSERVAZIONI E RACCOMANDAZIONI INTRO-DUTTIVE

1.
È bene introdurre e poi utilizzare le frazioni nel modo più naturale e spontaneo possibile, usando per molto tempo il linguaggio quotidiano ed approfittando di tutte le occasioni reali in cui le frazioni si presentano. Per esempio, se ci sono vendite con sconti, informazioni in TV etc.

Si tratta di mettere sempre in evidenza che la frazione è presente in modo significativo nella vita reale, per dare *senso* a quel che si studia. Per esempio, nella gestione dell'orologio o in tutti i giochi che si prestano.
L'idea di frazione deve essere la più naturale possibile.
Assunto questo punto di vista, dunque, e contrariamente a quel che succede oggi, è bene iniziare a parlare di frazioni fin dalla scuola dell'infanzia; è ovvio che ciò significa semplicemente presentare situazioni reali in cui si deve dividere qualche cosa a metà, in tre parti; ripartire a manciate alcuni cioccolatini fra bambini etc. L'insegnante può far gestire le situazioni dagli stessi bambini: il più "grande" (5 anni) distribuisce equamente caramelle ai più piccoli (3 o 4 anni), descrivendo quel che fa, come lo fa etc. Insomma, il linguaggio delle frazioni, nelle sue fasi più elementari, deve diventare presente nella quotidianità, fino a renderlo naturale. Nessun simbolismo dovrebbe entrare ad interferire con la costruzione linguistica qui delineata.
È bene dunque non aspettare la III primaria per decidersi a prendere in considerazione le frazioni, ma questo dovrebbe avvenire sia in I che in II, sempre con quelle attenzioni dette sopra, con cautele a non finire, senza simbolismi specifici, in modo del tutto naturale.
Moltissimi Autori suggeriscono che, per tutta la III primaria, si faccia riferimento solo alle frazioni "egizie" del tipo $\frac{1}{n}$.
Non smettere mai, in I, II e III, in modo colloquiale, di parlare e usare le frazioni in modo ingenuo; formalmente si può fare riferimento solo alle egizie in III, quelle cioè in cui si divide una unità – tutto in n parti, tanti quanti sono, per esempio, i bambini, per dare a ciascuno una *unità frazionaria* che abbia un senso evidente e riconoscibile.
Abbiamo visto come la costruzione di competenza è lenta e questa, ci assicurano quei ricercatori che hanno provato, è una possibile strategia didattica.

2.

Al momento nel quale si decide di iniziare una didattica delle frazioni, è inutile illudersi ed illudere che la classica definizione iniziale possa poi andare bene per sempre, in tutti i casi in cui si farà uso dei vari concetti di "frazione"; è bene anzi introdurre man mano i vari tipi di accezione di questo termine in modo problematico, avviando anche discussioni in aula, coinvolgendo lo studente nella complessità della costruzione di questa competenza.

3.

Per partire si dovrà necessariamente far uso di modelli concreti; ma sarebbe bene spiegare esplicitamente spesso che il modello concreto è solo un… modello concreto, mentre che quel che si sta apprendendo è teorico ed astratto, per far sì che lo studente non leghi troppo il suo apprendimento all'oggetto proposto.

4.

Discutere sempre esplicitamente su che cosa vuol dire dividere un uno – totalità in parti "uguali". Abbiamo visto che l'aggettivo "uguali" va interpretato di volta in volta, non va preso alla lettera e che il suo uso e l'insistenza nel metterlo in evidenza in modo acritico finiscono con il provocare diversi danni. "Uguali" va usato in modo problematico, va sempre interpretato: a volte vuol dire solo "ugualmente numerosi", a volte vuol dire "equiestesi" etc. È molto meglio non nascondere questa oggettiva difficoltà linguistica ed anzi esplicitarla. Ottimo esercizio logico e linguistico consiste nell'evidenziare questo interessante problema definitorio.

8.2. OSSERVAZIONI E RACCOMANDAZIONI PUNTUALI

5.

È bene evitare di introdurre le frazioni improprie fino che non si è consolidata la costruzione concettuale delle frazioni proprie; esse non appartengono alle frazioni "concrete" su cui si è fatta enfasi all'inizio dell'azione didattica, ma ad una loro teorizzazione matematica che porterà ai numeri razionali. L'unica frazione apparente che ha senso iniziale è $\frac{n}{n}$, nella quale si divide un uno – totalità in n parti e le si prendono tutte.

Lo studente si sta ancora costruendo il concetto di frazione come un qualche cosa che si ottiene frazionando un oggetto in parti e non può accettare che questa… operazione si possa assimilare ad un numero, come richiede l'idea di frazione impropria. Bisogna lasciare tempo affinché questa complessa interpretazione avvenga, trasformando, appunto, la frazione come parte o come operazione fino a farla diventare un numero.

La ricerca mostra come spesso il modello di frazione che hanno in mente studenti evoluti non sia quello di numero, ma di qualche cosa di operativo, così come l'hanno appreso e concettualizzato nei primi anni della scuola primaria.

6.

Bisogna porre molta attenzione al contesto discreto; bisogna ricordare che i $\frac{2}{3}$ di 4 oggetti sembra non avere senso; i $\frac{3}{3}$ di 4 oggetti è sì l'unità, dunque sono i 4 oggetti stessi, da un punto di vista matematico, ma non ha senso concreto per molti studenti.

7.

A proposito di non senso, $\frac{3}{6}$ esprime la probabilità di ottenere l'uscita di un numero pari se si getta un dado, il che è esprimibile anche con $\frac{1}{2}$:

- nel caso $\frac{3}{6}$, il 6 rappresenta il numero di tutte le possibili uscite diverse mentre il 3 rappresenta gli eventi che danno esito favorevole (il 2, il 4, il 6);
- nel caso $\frac{1}{2}$, il 2 rappresenta il numero di raggruppamenti possibili, i favorevoli (pari) ed i contrari (dispari); in tal caso, 1 rappresenta il raggruppamento dei pari.

Ma che *senso intuitivo* ha, se invece di $\frac{3}{6}$ scriviamo $\frac{7}{14}$? Le due frazioni sono uguali (o equivalenti, se si preferisce), ma la seconda non ha senso nella situazione detta.
È bene evidenziare e non nascondere queste situazioni interessanti e curiose, offrendole alla discussione. Evidenziarle significa farne prendere possesso, farle diventare oggetto esplicito di sapere consapevole; celarle significa offrire certamente l'opportunità di situazioni di incomprensione in un prossimo futuro.

8.

Abbiamo più volte visto come la letteratura internazionale di ricerca insista nell'evidenziare la difficoltà che incontrano gli studenti nell'ordinare le frazioni; grande difficoltà si ha anche nell'ordinare i numeri con la virgola; ancora maggiore se si mescolano le due scritture.
Non ci si può aspettare che l'apprendimento dell'ordinamento avvenga in modo spontaneo, esso deve essere oggetto di insegnamento esplicito ed è necessario controllarne l'avvenuta padronanza.
In questa linea di lavoro porrei anche la questione del "successivo". Nell'insieme N dei numeri naturali, *ogni* numero ha un ben determinato successivo; ma nel caso delle frazioni o dei numeri scritti con la virgola, insomma in generale nei numeri razionali, il concetto di "successivo" si perde. Il successivo di $\frac{3}{7}$ non è $\frac{4}{7}$ perché ci sono infinite frazioni maggiori di $\frac{3}{7}$ ma minori di $\frac{4}{7}$; il successivo di 4,5 non è 4,6 per lo stesso motivo.
Il fatto che molti studenti maturi (e non solo studenti) credano che il successivo esista sempre, dimostra che questo argomento va preso sul serio perché crea misconcezioni radicate.

9.

L'adulto, specie se ha già costruito da tempo la propria conoscenza, tende a non ricordare le difficoltà che ha avuto nel passato; per esempio, una volta assunta in modo completo una terminologia, tende a non porre più attenzione a questo "dettaglio" dandolo per acquisibile con semplicità.
È doveroso allora notare che molti studenti maturi fanno fatica a ricordare anche solo quale tra i numeri a e b nella frazione $\frac{a}{b}$ vada chiamato "numeratore" e quale "denominatore".
Le denominazioni dovrebbero diventare spontanee, ma non vincolanti: si ricordi che, ogni tanto, gli stessi oggetti cambiano di nome. Per esempio, "numeratore" e "denominatore" possono diventare, in una proporzione, "antecedente" e "conseguente", oppure "estremo" e "medio".
Un controllo linguistico, necessario, si costruisce efficacemente solo se è evidenziato nella sua problematicità, coinvolgendo lo studente e non isolandolo.

10.

Bisogna spiegare bene, con cautela, ogni tanto, il fatto che le frazioni, prima o poi, devono diventare numeri; solo allora avrà senso metterle su una "linea dei numeri". Questo potrebbe avvenire anche solo alle medie. Si è visto come bambini di scuola primaria facciano molta fatica a pensare alla frazione come ad un numero, ma la pensano come una raccolta di cose o un'attività.

11.

Occorre studiare esplicitamente ed in modo problematico la presenza dello zero nelle frazioni; non si può pensare che lo studente inglobi lo zero nelle frazioni in modo spontaneo e senza difficoltà. Vale allora la pena, prima o poi, affrontare di petto questa enorme difficoltà. Idem nei numeri razionali.

12.

Le operazioni con le frazioni producono insuccessi incredibili; siccome si tratta di una conoscenza irrinunciabile, è bene almeno procedere con infinita gradualità. Alla fine della III primaria, per esempio, o all'inizio della IV, quando si hanno a disposizione solo frazioni "egizie", ha senso addizionare (prima, e sottrarre più avanti) frazioni aventi lo stesso denominatore. Nel costruire concettualmente l'operazione, si afferrerà anche l'idea di frazione non egizia, in modo del tutto naturale.
Purtroppo la ricerca insegna che operazioni come moltiplicazione e divisione tra frazioni sono complesse da apprendere. Inutile farsi illusioni, l'arma migliore è la gradualità. Si deve pensare che questo argomento certamente non verrà esaurito nella scuola primaria ma entrerà a far parte della scuola secondaria.
Non mi ripeto, ricordo solo che lo stesso discorso vale nell'àmbito dei numeri razionali.

13.

La ricerca mostra come sia necessario far trovare agli allievi frazioni di interi sia nel caso di figure continue sia discrete, ma variando spesso le forme e le modalità.
Le figure, poi, devono essere di tipo qualsiasi, non le sole figure standard che non pongono problemi, quelle che si trovano sempre sui libri di testo, perché altrimenti il problema si presenta, subdolo, nel falso modello che lo studente si costruisce di frazione: si possono trovare frazioni *solo* di certe forme geometriche elementari opportune e non di altre.

14.

È poi necessario fare spesso esercitazioni per così dire "contrarie", partendo cioè da una frazione data per arrivare a determinare l'intero che l'ha generata, scegliendo situazioni e figure diverse e mostrando che ci possono essere *più* risposte corrette alla *stessa* richiesta. Questa attività, di estrema importanza apprenditiva, è irrinunciabile ma le si dedica di solito poco tempo il che costituisce un imperdonabile errore didattico.

15.

Quando è possibile, è bene usare riferimenti storici per dare l'idea che la frazione è un argomento importante che si è evoluto nei secoli. Questo fatto porta con sé parecchi benefici, di immagine positiva della Matematica e di motivazione nello studiarla.

16.

Ci sono argomenti sulle frazioni per i quali è inopportuno ricorrere ad esempi concreti che sono di fatto non esemplificativi.
Per esempio, l'uguaglianza tra frazioni equivalenti è *matematicamente* iterabile all'infinito da un punto di vista formale astratto, ma ciò non ha senso nei casi discreti e a volte ne ha poco nei casi continui; abbiamo visto esempi anche nel caso della probabilità.
È bene evidenziare questi casi e non nasconderli, come se tutto dovesse avere modelli concreti.
Più in generale, ci sono argomenti in Matematica che hanno spiegazioni solo intrinseche e non riescono ad avere modelli concreti.
Per esempio, 3^0 (tre elevato alla zero) fa 1 non per motivi concreti, legati a modelli pratici, ma solo per necessità intrinseche alla Matematica. Così 0! (zero fattoriale)[9] fa 1 per motivi di coerenza interna.

17.

Attenzione alla confusione che si fa quando si tenta di esprimere l'orario in una scrittura decimale; un'ora e 30, viene spesso scritto 1,30 anziché 1,5. Conviene

[9] Per esempio, 6! (6 fattoriale) è il prodotto 6×5×4×3×2×1, cioè 720. Ma 0! va definito a parte come 1.

esplicitare molto bene questo problema e fornire alternative significative di formalizzazione.
Per esempio, si può scrivere senza ricorrere alla virgola 1:30 o usare altre scritture.
Cose analoghe valgono per gli angoli.
La misconcezione formale si evidenzia presto ma diventa grave nella scuola secondaria, per esempio nella gestione delle operazioni tra ampiezze.

8.3. OSSERVAZIONI E RACCOMANDAZIONI GENERALI

18.
La ricerca mostra come, in generale, sia bene usare molti registri semiotici per cercare di costruirsi un concetto (noetica). Ma abbiamo visto come l'uso di molti registri possa essere un ostacolo. Dunque è necessario introdurli in modo esplicito, uno alla volta, ciascuno con la propria specificità; è bene insegnare a gestire i vari registri, a trattare, a convertire.
Non bisogna pensare che tutto ciò avvenga in modo spontaneo, senza una didattica mirata esplicita, perché non è così.

19.
In generale, nell'azione di insegnamento – apprendimento, è bene esplicitare i problemi, invece che nasconderli. Lo studente deve imparare a farsi carico della responsabilità del proprio apprendimento. Deve avere un contatto diretto con il sapere insegnato* per trasformarlo in sapere da apprendere* e non delegare tutto all'insegnante, mediatore tra lui ed il Sapere*.
Il rischio, gravissimo, molto ben evidenziato dalla ricerca da oltre 30 anni, è che lo studente cessi di apprendere la Matematica per dedicarsi ad apprendere una materia diversa, non presente nelle indicazioni ministeriali, nei curricoli o nei programmi: quel che l'insegnante vuole sentirsi dire. Il suo obiettivo non sarà più la noetica, ma il raggiungimento di una valutazione appropriata, costi quel che costi, anche imparare a dire cose che non hanno (per lui) senso.
20.
Dare sempre l'opportunità di esprimere dubbi ed ascoltare le osservazioni. L'aula è luogo di discussione, la classe e le sue attività una risorsa per tutti. Non snobbare le osservazioni che esprimono dubbi, anche all'apparenza banali. (Ricordo solo la supposta evidenziata "differenza" tra le scritture $\frac{a}{b}$ e ${}^{a}\!/_{b}$, all'apparenza banale, ma che invece si è rivelata molto istruttiva).

21.
Usare il più possibile situazioni adidattiche*, almeno nei punti più significativi. La situazioni adidattiche danno garanzia di costruzione significativa di competenza, quelle didattiche* possono non portare neppure alla costruzione di conoscenza.

22.

La trasposizione didattica* è responsabilità professionale dell'insegnante e deve tener conto del gruppo classe più che della Matematica. Una volta effettuate le scelte di trasposizione che portano dal Sapere al sapere da insegnare, il passaggio successivo, dal sapere da insegnare al sapere insegnato, deve ricorrere a scelte nell'ambito della ingegneria didattica*. Sarebbe bene non banalizzare questi passaggi; un serio professionista deve valutare non solo scopi, ma anche modalità.

23.

Non si può insegnare quel che non si sa; dunque bisogna avere la professionalità e l'umiltà di studiare se si hanno dubbi; solo in questo caso la trasposizione didattica avrà senso ed efficacia.

Per dirla in modo più esplicito, l'insegnante deve avere l'umiltà, qualora non si senta pronto ed all'altezza, di studiare le frazioni, anche se nel suo ricordo scolastico vive ancora questo argomento come semplice.

Più in generale, il problema della formazione degli insegnanti è tutt'altro che banale, anche da un punto di vista scientifico.

La tendenza di far studiare a chi dovrà poi professare l'insegnamento argomenti totalmente lontani dai futuri contenuti, anche se ha un senso culturale, ha però ampiamente dimostrato di presentare notevoli lacune, tanto è vero che in molti Paesi si stanno proponendo soluzioni diverse (Fandiño Pinilla, 2003). La situazione italiana è esaminata in (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2003).

C'è una certa propensione oggi a puntare di più sui cambi di convinzione, da quelli più ingenui, semplicemente radicati sulla sola conoscenza della Matematica, verso interpretazioni più problematiche della professione docente (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004); mentre ad uno studio vasto della Matematica, si sta contrapponendo uno studio riflessivo e problematico (D'Amore, 2004).

Bibliografia

See references of: 1. Fractions: conceptual and didactic aspects (pag. 3-36)

43. Fandiño Pinilla M.I. (2003). "Diventare competente", una sfida con radici antropologiche. *La matematica e la sua didattica*. 3, 260-280.

"Diventare competente", una sfida con radici antropologiche

Martha Isabel Fandiño Pinilla

N.R.D.
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna - Italia

Sunto. In questo lavoro si fornisce una fondazione pragmatista – antrolopogica alla visione della Didattica della Matematica "per competenze"; di questa visione si danno connotazioni basate sulla prassi didattica, anche in relazione alla formazione dei docenti.

Resumen. En este trabajo se da un fundamento pragmático – antropológico a la visión de la Didáctica de la Matemática "por competencias"; en esta visión se dan connotaciones sobre las bases de la práxis didáctica, incluso en relación con la formación de los docentes.

Summary. In this paper we propose a pragmatic-anthropological foundation for Mathematics Education "for competences", providing a perspective based on didactic practice, also in relation to teacher training.

Resumé. Dans ce travail on donne une fondation pragmatique – antropologique à une vision de la Didactique des Mathématiques "par competences"; de cette vision on donne des connotations basées sur la pratique didactique, en rélation aussi à la formation des enseignants.

Il presente lavoro è svolto nell'àmbito del Progetto di Ricerca dell'Unità di Bologna 2002-2003: «*Ricerche sul funzionamento del sistema: allievo-insegnante-sapere*», inserito nel Programma di Ricerca Nazionale: «*Difficoltà in matematica: strumenti per osservare, interpretare, intervenire*», cofinanziato con fondi M.I.U.R. (ex 40%).

Preliminari.

La *competenza* è oggi da tutti riconosciuta come qualche cosa di più che una *conoscenza*, ben di più che un "saper fare in un dato contesto", come vari Autori la definivano al momento iniziale del dibattito, qualche decennio fa. La competenza

implica anche un "*voler* fare", dunque chiama immediatamente in causa fatti affettivi, come volizione e atteggiamento.[10]
Per poter affrontare questo discorso, devo partire da lontano, da questioni connesse con l'antropologia (che ritornerà più avanti, connessa alla scelta pragmatista).

Il desiderio di conoscere è una necessità implicita dell'essere umano; tutto in lui è indirizzato alla conoscenza, fin dai suoi primi passi nel mondo (in senso non solo metaforico). La tensione umana non è vòlta solo al comunicare, come talvolta si sente dire (l'uomo come animale comunicativo), dunque; in più, egli può/vuole trasformare il sapere appreso in un nuovo sapere, quello che gli permette di processare le informazioni possedute e cercare quelle che gli permettono di risolvere una nuova situazione problematica, se ha deciso di affrontarla.
Man mano che si soddisfa una necessità e in base a come questa necessità è soddisfatta, sorge una necessità nuova; è il gruppo sociale nel quale si trova inserito l'individuo e nel quale si trova ad agire, che determina in larga misura necessità e priorità che devono essere soddisfatte e fonti di tali necessità, dunque, in larga misura, giustificazioni specifiche che le determinano.
L'analisi ed il trattamento di questa problematica si assume all'interno di quel che tutta la società chiama *Educazion*e. Ma la possibilità che dentro ad un gruppo sociale sorgano forme di espressione complesse, tanto intellettuali quanto estetiche o etiche, dipende in larga parte dallo sviluppo cognitivo dei suoi membri e dal modo in cui questi affrontano problemi facendo, dell'integrazione dei diversi saperi e delle motivazioni, una costante.

Motivazione.

Alla base di questa costante d'azione, c'è sempre un processo psichico - intellettuale che potremmo identificare con la coppia motivazione - volizione.
Venendo all'aula come luogo specifico di una società ben strutturata (la classe, la scuola) all'interno della Società intesa in senso più generale, mi sembra che potrebbero essere tre i modi di intendere la motivazione, modi che delineo qui di seguito.

- Ogni problema può essere presentato come la ricerca della soddisfazione di una necessità avvertita dalla società stessa, nella sua generalità, il che fa sì che gli interessi personali di ciascuno si trasformino nell'interesse del gruppo sociale di appartenenza. In questa direzione, l'interesse dell'allievo sarà centrato nell'essere utile alla società; su questa base sono orientati molti dei programmi educativi ufficiali di vari Paesi. Sotto questo profilo, le lezioni, le attività che permettono di

[10] Per evitare continue citazioni bibliografiche che potrebbero diventare noiose, preferisco dire una volta per tutte, all'inizio di questo testo, che farò continui riferimenti a D'Amore (1999a) per quanto riguarda la Didattica della matematica; ed a Fandiño Pinilla (2002) per quanto riguarda curricolo e valutazione. Altri testi verranno esplicitamente citati nel corso del lavoro.

scoprire le relazioni fra teoria e pratica sono quelle che risvegliano il maggior interesse cognitivo dell'allievo. In questa direzione si deve rinnovare continuamente l'attività docente al fine di ottenere un allievo più critico, creativo ed innovatore, quando si auspica che dovrà agire (sia nell'immediato, sia in futuro come adulto) all'interno della società. La competenza è dunque vista come qualche cosa che permette di migliorare la qualità di vita della società.

- L'interesse del soggetto sta nel tentativo di soddisfare le sue proprie necessità e nello studio – analisi – conoscenza delle proprietà dell'oggetto (inteso non solo in senso fisico) che si ritiene possa soddisfarle. L'importanza di porre l'allievo in contatto con gli oggetti che, allo stesso tempo, soddisfano le necessità, creandone delle nuove, evidenzia in un primo momento gli interessi individuali ed in un secondo momento provoca la incorporazione nel quotidiano di soggetti utili alla società. È così che la valorizzazione del soggetto per i successi ottenuti, lo porta a cercare nuove fonti di sapere. La mancata canalizzazione adeguata di questo interesse può indurre l'allievo alla ricerca del riconoscimento in attività non desiderate dalla società [attività che esigono scarsa preparazione cognitiva ma che si presentano come altamente redditizie sia in termini monetari sia in termini di immagine: spettacolo, pubblicità, sport…(basti pensare ai "personaggi" osannati dalla TV più banale ed alla esasperata emulazione degli aspetti più "facili" in cui ciò si esplicita); o attività non lecite]. Se si vuol seguire questo tipo di motivazione, l'insuccesso scolastico deve essere trattato con professionalità, da parte dell'insegnante, dunque soprattutto non deve frustrare né immobilizzare lo sviluppo dello studente verso competenze significative. La competenza appare qui come valorizzazione specifica dell'essere umano come persona.

- Una terza tendenza considera l'importanza della motivazione come qualche cosa di intrinseco, specifico, tipico dell'essere umano, una vera e propria propensione naturale. La necessità di sapere, di conoscere, di apprendere è sufficiente per attivare la motivazione; è il desiderio di migliorare l' "io", che tiene attiva la motivazione. Si tratta dunque di un piacere intrinseco. In questa ottica, la conoscenza di per sé stessa è la fonte che attiva il desiderio di apprendere in contesti ogni volta più complessi. La natura dell'essere umano si impone su tutto ed a dispetto di tutto, perché dentro di essa si trova già insita la necessità di conoscere, di interpretare con maggiore chiarezza il mondo che ci circonda. In questa posizione, la competenza è l'espressione stessa di questa propensione al conoscere ed all'uso delle conoscenze raggiunte per procedere nella stessa direzione, verso nuove conoscenze.

Per poter procedere, ho bisogno di fare ricorso ad altri campi e ad altre fonti.

Matematica e linguaggio. Apprendimento.

Il vero apprendimento della Matematica va molto oltre le condizioni nelle quali si apprende un linguaggio (sintassi, semantica e pragmatica); ciò, poiché la Matematica non è (solo) un linguaggio in sé stessa, dato che non si è formata con lo scopo di comunicare *ogni* tipo di pensiero dell'essere umano; il linguaggio della Matematica si creò per comunicare *certe* specifiche proprietà di particolari "oggetti" e le loro relazioni con il mondo empirico. Inoltre le espressioni matematiche portano con sé una grande difficoltà, dato che non sono indipendenti dal contenuto: esprimere qualche cosa in Matematica implica conoscerlo, dominarlo; il simbolismo è carico di significati che devono essere conosciuti da parte di chi li sta usando (emittente e ricevente). Lascio al lettore le considerazioni critiche sui potenziali opposti: quel che di specifico ha il linguaggio della Matematica, non ce l'hanno (tutti) gli altri linguaggi.
Ogni considerazione sul linguaggio nel quale si esprime la Matematica, in ambito didattico, comporta riflessioni sull'apprendimento sia della Matematica sia del suo linguaggio (D'Amore, 2000). In ogni apprendimento c'è un cambio di norme di comportamento sia effettivo, sia linguistico; se questo cambio si realizza senza conoscere il significato delle proposizioni usate, è un cambio che non avrà durata nel tempo. Una volta che smetta di aver senso la necessità di dare una risposta (il corso, la lezione, l'interrogazione, il compito…), si dimentica quanto "appreso", dato che questo apprendimento viene considerato fuori dal contesto in cui aveva un qualche senso. Smette dunque di operare la motivazione. Se, al contrario, si dà al sapere appreso una giustificazione, per esempio gli si riconosce un senso all'interno della realtà stessa del soggetto in fase di apprendimento, allora si fornisce a quell'individuo la forza di mettere in moto elementi e relazioni, facendo sì che i cambi di comportamento permangano nel tempo. In tal modo, si modifica tale comportamento non solo nell'ambito scolastico, ma anche in altri ambienti e momenti della vita dell'individuo.
Per ottenere ciò, la scuola deve proporre situazioni di apprendimento nelle quali si privilegia la ricerca di alternative, vissute dall'allievo in forma naturale e contestualizzate. Ricordiamo che è stato ampiamente dimostrato che gli apprendimenti più stabili sono quelli che hanno messo l'allievo in contraddizione, quelli che hanno imposto la necessità di ristabilire un equilibrio tra una misconcezione e nuove informazioni su un dato oggetto di apprendimento.

La *competenza in Matematica* e la *competenza matematica*.

Questo è un punto centrale, sul quale non si fa mai abbastanza chiarezza. Voglio proporre allora da queste pagine una distinzione tra due accezioni del termine *competenza*, la competenza in Matematica e la competenza matematica, distinzione alla quale invito d'ora in avanti a fare riferimento, commentandola e definendola sempre meglio.

La *competenza in Matematica* si centra nella disciplina Matematica, riconosciuta come scienza costituita, come oggetto proprio, specifico, di conoscenza. L'allievo entra in contatto con saperi specifici, saperi che la società ha inglobato nelle conoscenza riconosciute come base per un dignitoso ingresso nel suo interno; si appropria di una parte di tali saperi, tanto formalmente quanto informalmente. Si riconosce così l'esistenza di un dominio concettuale ed affettivo che media tra l'allievo stesso e la Matematica. La competenza è qui vista all'interno dello specifico ambito scolare.
Per alcuni autori (Kulm, 1986), raggiungere la competenza in questo senso ha come base i concetti trattati nei primi anni della scuola media; ma questo stesso periodo può essere anche quello in cui questa competenza si annulla, dato che inizia lo studio della Matematica con un grande carico di apparato formale. Questa situazione, se non è ben gestita dall'insegnante, può dunque favorire il processo di *scolarizzazione* (D'Amore, 1999b), portando l'allievo a rinunciare a farsi carico del proprio apprendimento ed a rifugiarsi solo in ciò che gli propone l'insegnante. Questa competenza è individuale; però, se si lavora nel paradigma della dicotomia validazione - socializzazione, si può pensare in una competenza in Matematica anche a livello di gruppo classe.

La *competenza matematica* si riconosce quando un individuo vede, interpreta e si comporta nel mondo in un senso matematico. L'atteggiamento analitico o sintetico, con il quale alcune persone affrontano situazioni problematiche, è un esempio di questo tipo di competenza. Ci sono buoni risolutori di problemi che possono riconoscere, delimitare e risolvere situazioni problematiche; il che, viceversa, a volte, non è facile da evidenziare in persone che trattano bene, per esempio, algoritmi. Aspetti come il gusto e la valorizzazione della Matematica, sono alcuni degli aspetti utili per orientare il raggiungimento della competenza matematica.

Sia nella competenza in Matematica come nella competenza matematica, si evidenziano dunque tre aspetti:
- il cognitivo: conoscenza della disciplina
- l'affettivo: disposizione, volontà, desiderio di rispondere ad una sollecitazione esterna o interna
- la tendenza di azione: persistenza, continuità, sollecitudine.

Competenza come fatto legato alla singola persona.

Sulla base degli ultimi paragrafi, si può allora affermare che la competenza è, in ogni caso, una qualità riferibile singolarmente, dunque specifica *della* persona.
La scuola deve optare per il raggiungimento tanto della competenza in Matematica quanto della competenza matematica, però deve privilegiare quest'ultima, dato che si

sta pensando alla formazione di un individuo che si comporta e vive in determinati spazio e tempo, in un determinato gruppo sociale.
Poiché la competenza matematica comporta la capacità – disponibilità a guardare il mondo in modo matematico, e dato che ciò non si apprende spontaneamente in modo implicito, si rende necessario pensare che deve far parte del curricolo proprio questo processo di insegnamento – apprendimento specificamente rivolto a saper vedere matematicamente il mondo.
Sto pensando a iter cognitivi transdisciplinari che hanno come obiettivo l'analisi razionale, matematica del mondo, sia di quello empirico, sia di quello linguistico, sia di quello esterno al mondo della scuola, dunque sociale e professionale, sia di quello tipicamente scolastico.
Deve apparire, anche al di là del detto, il senso della proposta di una competenza da far raggiungere alle persone, alle singole persone, oggi studenti, domani cittadini.

Ancora sui modi d'essere delle competenze.

Spesso usiamo tutti il modo di dire "competenze in Matematica". Ma questo modo semplicistico di porre la questione, nasconde in realtà una questione complessa.
Possiamo parlare di diverse competenze in Matematica o, se si preferisce, di diverse componenti della competenza in Matematica; quanto meno abbiamo in lista:

- il dominio degli aspetti semiotici (scelta dei tratti rappresentativi dell'oggetto da rappresentare, trattamento e conversione delle rappresentazioni semiotiche nei vari registri,…) (D'Amore, 2001);
- il dominio che concerne la risoluzione di problemi (approssimare, proporre strategie, scegliere l'algoritmo adatto, confrontare strategie,…);
- il dominio della problematica che concerne il grande capitolo della cosiddetta "comunicazione matematica" (giustificazione, argomentazione, dimostrazione,…);
- …

Ciascuna di queste componenti si evidenzia in modo differente, anche a seconda del livello scolare, il quale è a sua volta influenzato dalla cultura e dalle attese sociali.
Ne segue che non ci sono competenze per ciascun livello scolastico, ma diversi livelli per ogni competenza. Questi "livelli" possono anche, per comodità, essere identificati con quelli classici scolastici (ma solo per comodità).

Potrebbe essere di grande interesse l'analisi storica di come si è usata la parola competenza dal punto di vista didattico, dal momento in cui tale parola ha fatto il suo ingresso. Si ha l'impressione che, all'inizio, fosse identificabile né più né meno con la conoscenza (e, al più, il suo uso) e che solo successivamente si sia arricchita di significati sempre più espliciti e profondi e dunque sempre più specifici. D'altra parte, non è sempre così, per qualsiasi termine, quando questo entra a far parte di una teoria?

Entra dapprima quasi per caso, e poi, riconosciutagli una specificità, lo si identifica, lo si isola, lo si specifica e gli si dà un *senso* specifico.

Tornando al titolo di questo paragrafo, è sulla base della complessità racchiusa dal termine "competenza" che trae origine il fatto che la valutazione di competenze non può ridursi ad un test per verificare la padronanza in qualche cosa di specifico, ma che si presenta invece come un aspetto di grande importanza per lo sviluppo di ciascuno di questi aspetti isolatamente, ma anche nella loro interazione. La valutazione deve essere vista allora come il *processo di analisi dell'aula*, di tutte le componenti dell'aula. Ma su questo punto dovrò tornare tra qualche paragrafo.

Le filosofie pragmatiste e la competenza. La scelta antropologica.

In D'Amore, Fandiño Pinilla (2001), si dà una distinzione tra teorie "realiste" e "teorie pragmatiche", all'interno delle scelte epistemologiche che stanno a monte di quanto concerne la Matematica.

All'interno di una corrente *realista*, la competenza di tipo esogeno (competenza matematica) deriva dalla competenza endogena (competenza in Matematica) grazie all'azione del transfer cognitivo. Un docente che opta per un'azione didattica in ambito realista, non dovrà far altro che trasporre il sapere matematico, adattandolo alla classe; e, una volta raggiunta la conoscenza, cercare situazioni nelle quali quella conoscenza può essere messa in azione:

conoscenza $\Longrightarrow$ competenza

All'interno di una scelta *pragmatica*, dato che qui ogni apprendimento è necessariamente situato, la competenza matematica si conquista attraverso il ricorso a diverse situazioni; è l'ambito, è la situazione, è la pragmatica d' *uso* che determinano, allo stesso tempo, sia la costruzione di una conoscenza, sia la creazione di una competenza da parte dello studente. In altre parole, se è vero che nelle filosofie pragmatiche è il contesto, è l'uso che danno senso ai concetti, dunque alle costruzioni di conoscenze, è altrettanto vero che qui non c'è bisogno di creare una successione causale: conoscenza e competenza si costruiscono l'un l'altra nella stessa "azione":

conoscenza $\rightleftarrows$ competenza

Diventa allora spontaneo considerare come centrale la persona (o l'istituzione, come insieme di persone) che si mette in relazione all'oggetto matematico che si vuol conoscere, e non l'oggetto in sé: «Un oggetto esiste dal momento in cui una persona X (o una istituzione I) riconosce questo oggetto come esistente (per essa). Più esattamente, si dirà che l'oggetto O esiste per X (rispettivamente per I) se esiste un oggetto, rappresentato da R(X,O) (rispettivamente R(I,O)) e detto relazione personale da X ad O (rispettivamente relazione istituzionale da I ad O)» (Chevallard, 1992).

La competenza, come fatto personale o istituzionale, è dunque antropologicamente fondata, soprattutto se la scelta è a carattere pragmatista.

La figura del docente, se si vuol raggiungere lo sviluppo della competenza nell'allievo.

Ora devo pormi il problema della figura dell'insegnante, qualora si sia fatta una scelta finale che vede lo studente come colui che deve raggiungere competenza e non solo conoscenza (mi servo di: Fandiño Pinilla, 1999a, b).
L'insegnante deve avere prima di tutto lui stesso competenza in Matematica ed essere cosciente della problematica della competenza matematica.
Oltre alla conoscenza della disciplina che insegna e della teoria della didattica specifica di quella disciplina, gli si deve chiedere una volontà ed una capacità comunicative reali, per esempio quelle di saper / voler spiegare il mondo da un punto di vista matematico, senza forzarne i problemi, facendo sì che la Matematica vi appaia in modo naturale.
La costante nell'azione dell'insegnante deve essere la rottura dell'equilibrio che si genera come punto di partenza per l'apprendimento, canalizzata nella direzione adeguata affinché essa si costituisca realmente in un apprendimento da parte dello studente. Lo scopo è quello di proporre situazioni di apprendimento che superino la risposta ad un continuo interrogatorio (scritto o orale, in modalità diverse) e si convertano invece nella soddisfazione di una spontanea valorizzazione ed evidenziazione della propensione verso necessità, gusto, desiderio di sapere da parte dell'allievo. Il "cambio" qualitativo dei processi di insegnamento / apprendimento indirizzati verso il raggiungimento della competenza, sta nella trasformazione della docenza in un'attività dinamica, comunicativa, dimenticando la logica della prassi dell'istruzione che per lungo tempo ha identificato l'educazione scolastica.

Per giungere ad un apprendimento che si converta in una competenza del primo tipo (competenza in Matematica) da parte dell'allievo, è necessario un reiterato incontro dell'insegnante con l'oggetto di studio, affrontandolo ogni volta con nuovi elementi, nuovi procedimenti, approfondendolo e legandolo con altri saperi (disciplinari, di altre discipline, ma anche non disciplinari). Una volta raggiunta questa competenza, occorre proporre situazioni che incentivino la competenza matematica.

Detto in altro modo, l'azione didattica non può essere lineare né può banalmente ridursi ad una sequenza di fasi che vanno dal semplice al complesso, dato che in questo modo prende forza l'idea di una scala didattica forzata e troppo rigida, quella che in passato si faceva partire dai prerequisiti (che, all'interno di una teoria della competenza, non sono certo il primo dei problemi).
Si richiede una serie di nuovi e reiterati incontri con il sapere matematico, nei quali la riarticolazione sia proposta come parte di questo sapere e non come una somma di saperi nei quali la responsabilità di questa integrazione stia solo nel far… incontrare lo studente con gli scarsi elementi che offre la disciplina a livello scolare.

Se chi qui legge ha abbastanza spirito, potrebbe notare la *voluta* continua confusione che si è fatta tra:

- azione dell'insegnante per far raggiungere competenza al proprio allievo
- competenza che deve avere l'insegnante per far sì ch'egli possa formare allievi competenti.

La figura professionale dell'insegnante lo abilita a competenze che lo aiutino nel creare persone competenti…
D'altra parte, nella sua fase di formazione professionale iniziale, lo stesso insegnante è uno studente… [11]

In modo più specifico, pensiamo all'allievo.

Se l'allievo si rende conto, avverte che nell' "ambiente di apprendimento" della Matematica l'oggetto di conoscenza è in relazione con contesti che considera egli stesso significativi, sarà più facilmente in grado di raggiungere una competenza dato che:

- lo stare all'interno di un contesto significativo lo porta a *voler* affrontare la situazione, mettendo in moto azioni anche e soprattutto personali di ricerca;
- ha bisogno di una elaborazione, concettuale o procedurale; di fronte alla situazione, cioè, egli necessita di un bagaglio cognitivo che gli permetta di consolidare il sapere appreso e costruire nuovi saperi in una direzione da lui stesso auspicata;
- permette all'allievo di cercare una forma di comunicare quel che ha raggiunto, validando così il nuovo sapere.

[11] A questo tema, negli anni '90, sia chi qui scrive che molti altri docenti delle Università statali colombiane hanno dedicato molto tempo e molti studi, nella fattispecie nel tentativo di creare percorsi di formazione universitaria ideali per futuri insegnanti. Si veda, per esempio: Bonilla, Fandiño Pinilla, Romero, Sánchez (1999), solo per avere un'idea; in realtà, negli anni '91-'99, il dibattito è stato notevole in tutta l'America Latina e si è concretizzato in ricerche, sperimentazioni e convegni sul tema. Tornerò su questo punto in una nota successiva, verso la fine di questo scritto.

Sviluppare competenza matematica.

Tenterò di riassumere in pochi punti (non esaustivi) la metodologia che in qualche modo privilegia lo sviluppo della competenza matematica, a mio avviso.

- Lavorare su situazioni problematiche prese dalla realtà, sulla base di quel che ho detto poco sopra; occorre ovviamente scegliere situazioni a-didattiche, a partire da situazioni prese in prestito dalla realtà e che rispondano ad un problema sentito dall'allievo. Non si vuole qui ritornare alla superata discussione sul reale come fonte di ispirazione dei problemi, ma al fatto che ogni allievo ha una *sua* realtà alla quale tiene e coinvolgendo la quale egli cessa di pensare alla scuola come ad un luogo avulso da interessi, ma anzi come luogo che gli permette di usare conoscenze in modalità vincenti, con successo anche esogeno e non solo endogeno.
- Organizzare lo sviluppo curricolare sulla base dei processi e non solo dei prodotti. Si è oramai accettato il fatto che è attraverso il processo che si costruisce un sapere; questa intenzione curricolare si evidenzia poi nella valutazione, dato che questa deve essere in corrispondenza con l'attività sviluppata nell'aula; non è possibile, per esempio, valutare lo studente in modo tradizionale quando si vuole lavorare su competenze invece che su conoscenze (Fandiño Pinilla, 1999a).
- Proporre lavoro di aula sufficientemente ricco e stimolante, affinché l'elaborazione mentale che si richiede per affrontare il lavoro prosegua fuori dal tempo e dallo spazio scolastici (Barón, Lotero, Fandiño Pinilla, Sánchez, 1999).
- Stimolare la creatività e l'immaginazione degli studenti mediante diverse attività matematiche, tenendo presente che non sono i contenuti in sé stessi a costituire la meta da raggiungere tramite la scuola, ma che sono la base per costruzioni di livello più alto.
- Riconoscere le concezioni che l'allievo ha elaborato in relazione alla Matematica, il suo insegnamento ed il suo apprendimento; un'idea stereotipata della Matematica e della forma in cui la si presenta in aula, si interpongono con un lavoro destinato allo sviluppo della competenza. Il lavoro matematico ha bisogno di rinforzarsi con attività che all'allievo piacciano (in senso lato) e che avverta come qualche cosa di necessario per la sua azione nella società dunque non solo endogena, ma anche esogena. Questo punto è emerso con forza in più occasioni e per diversi motivi.

Cambi concettuali nell'azione didattica che comporta il voler far sviluppare la competenza matematica.

Sul curricolo.

Decidere che la propria azione didattica ha come scopo quello di far sviluppare una competenza matematica da parte dei propri allievi, comporta vari cambi nel curricolo. Per prima cosa, ed è ovvio, occorre progettare un curricolo avente come direzione quella del raggiungimento di competenze. Se guardiamo a come stanno le cose ora, in vari Paesi, si vede come la corsa dell'insegnante a "terminare" il programma come

scopo curricolare non permetta allo studente di costruire competenze, né in Matematica, né tanto meno matematiche. Occorre evitare l'abuso nella utilizzazione di regole, della simbolizzazione, dell'astrazione, della memorizzazione per brevi periodi, di attività decontestualizzate rispetto al mondo esterno alla scuola, al mondo reale,… che poco a poco portano l'allievo ad un processo di scolarizzazione.
Se l'azione didattica è tesa a far sviluppare nell'allievo competenze matematiche, il curricolo va ridisegnato su misura per questo scopo specifico. A questo punto ho già dedicato vari paragrafi precedenti, molti dei lavori citati in bibliografia ed altri.

Sulla valutazione.
Come ho già detto e come esplicitamente ripeto, sulla base della complessità racchiusa dal termine "competenza", e che finalmente comincia ad apparire in questo ed in tanti altri studi, trae origine il fatto che la valutazione di competenze non può ridursi ad un test per verificare la padronanza in qualche cosa di specifico. La valutazione in vista di una didattica volta a far raggiungere competenze si presenta come un processo di analisi dell'aula, di tutte le componenti dell'aula, come ho già scritto qualche paragrafo prima.

Sui contenuti della formazione.
Occorre rivedere daccapo i corsi di laurea per la formazione degli insegnanti elementari ed i corsi di specializzazione per la formazione degli insegnanti di scuola secondaria. Bisogna stabilire, oltre alle norme ufficiali della formazione disciplinare, una formazione didattica significativa e vera, per esempio garantita da un legame esplicito tra queste attività di formazione ed i gruppi di ricerca didattica.[12] Occorre creare corsi di "aggiornamento" dei docenti in servizio nei quali si evidenzino e si discutano i risultati della ricerca (come si fa, per esempio, con i chirurghi), ma anche i fondamenti epistemologici e didattici dei saperi in gioco.

Sui materiali "didattici".
Occorrerebbe studiare bene le condizioni di realizzazione dei libri di testo, dei mezzi di comunicazione, dei vari strumenti a disposizione degli insegnanti di Matematica per la loro azione didattica. Si pensi, per esempio, alla scuola elementare ed ai danni che l'uso scriteriato e oramai insensato di certi materiali "didattici" ha fatto, nonostante l'esplicita denuncia dei ricercatori perfino su riviste di larga diffusione (D'Amore, 2002). Occorre elaborare o almeno raccomandare agli insegnanti materiali e laboratori che offrano significativo appoggio didattico, ed insegnare ad essere comunque critici nei confronti di questi strumenti. Occorre creare spazi nei quali si possano discutere le metodologie implementate.

…

[12] In vari Paesi, c'è coincidenza, laddove possibile, tra queste due attività, nel senso che la formazione *didattica* dei futuri insegnanti di Matematica è affidata proprio ai gruppi di ricerca in Didattica della Matematica. In Italia, la coincidenza, quando c'è, sembra essere non voluta da un punto di vista legislativo, ma fattuale: chi si interessa della formazione è, di solito, chi fa ricerca nel campo.

Ma la cosa a mio avviso più importante, è il necessario cambio della funzione e della visione che la società attribuisce alla Matematica. Non credo che occorra insistere su questo punto, perché l'hanno già fatto diversi altri autori. Stante la visione e la funzione che la società generalmente attribuisce alla Matematica, importante (con giustificazioni a vuoto) sì ma a-culturale, diventa difficile ogni altro discorso sui tentativi di cambio detti sopra.

Piacere / Non piacere che provoca la Matematica presso gli studenti.

Gli studenti possono riconoscere l'importanza della Matematica a partire dalla sua utilità pratica (intesa in senso lato), ma possono giungere ad una rassegnazione in questa direzione, quando arrivano a costruirsi la convinzione (diffusissima) che la Matematica appresa a scuola nulla ha a che vedere con il mondo reale. È il contatto con certi contenuti, con certe attività proposte, con gli esercizi che deve risolvere, che rendono lo studente dapprima insicuro in sé stesso come matematico, e che lo allontanano poi dalla Matematica. Abbiamo testimonianze di molti allievi che affermano, a proposito del proprio piacere nel fare Matematica: «Mi piace quando la capisco». D'altra parte, la relazione atteggiamento – riuscita - atteggiamento è il primo passo per il raggiungimento di competenza; ricordiamo che la base della competenza sta nell'integrazione dei tre aspetti cognitivo, affettivo e comunicativo.
Che cos'è che allontana, di solito, dalla Matematica? Non è la Matematica in sé, come testimoniano tanti allievi, ma è la forma in cui questa viene presentata, il fallimento costante, la mancata interazione tra il mondo reale ed i contenuti matematici appresi, l'impossibilità di fare e usare la Matematica oltre il tempo e lo spazio prettamente scolastici, la votazione bassa rispetto al tempo che si è dedicato al suo studio…

Il passaggio da "obiettivi" a "competenze".

In certe occasioni, a volte in forma esplicita ma altre in forma implicita, il modo di legare lo studente con l'oggetto di studio avviene attraverso situazioni le cui risposte richiedono risoluzioni semplici, parziali, di facile ubicazione all'interno del contenuto disciplinare, in base all'idea che, accumulando conoscenze semplici (o attività risolutive semplici) e mettendole in relazione l'una all'altra, esse alla fine conducano ad una capacità di condotta complessa.
L'apprendimento è qui dunque visto come una somma di condotte parziali che si uniscono per formarne una totale complessa. Questo è lo schema che caratterizza l'organizzazione curricolare che si dà per obiettivi. In esso, i contenuti si presentano come piccoli nuclei tematici; l'andare coprendoli passo dopo passo, rappresenta un avanzamento nel programma stabilito. La valutazione si dà una volta terminato un certo tempo, scelto in modo arbitrario, destinato dall'insegnante allo studio di tale contenuto, in base a propri parametri (per esempio, in base alla propria esperienza).

Occorre segnalare che una scelta siffatta:

- risulta molto economica in quanto a risorse ed a tempi;
- offre una certa qual sicurezza al docente ed all'allievo in quanto la conoscenza da raggiungere è chiaramente determinata, tanto per la profondità quanto per l'estensione;
- ogni contenuto si può trarre da una fonte ben nota o comunque evidenziabile (conoscenza previa dell'insegnante, libri, appunti,…), in base ad un programma di relazioni condizionate, programma identificato con le attività che l'insegnante organizza, e a ciascuna delle quali ci si aspetta di dover dare una risposta molto chiara e definita;
- tanto la profondità dei contenuti quanto l'estensione, così come le attività di aula, sono scelte del docente, da lui stesso stabilite, anche se sotto vari condizionamenti;
- l'insegnante si presenta al gruppo classe come la persona che ha il dominio scientifico e come colui che dirige tutte le attività con lo scopo di far sì che gli allievi possano prendere possesso di questo sapere.

In questa direzione, si cercano risposte ma non si sviluppano affatto competenze. Certo, comunque, non competenze matematiche. E ci sono dubbi anche sul fatto che si possano formare competenze in Matematica…

Questa visione "per obiettivi" ha avuto un ruolo importante in passato, nella rivoluzione che portò dalla centralità curricolare dell'insegnamento (programmi) a quella dell'apprendimento (programmazione).[13] Una delle carenze di questo modo di vedere, è che esso limita la creatività e la criticità, condizioni indispensabili nella formazione e nell'attività lavorativa dell'uomo, già nel presente, ma sempre più nel futuro. Da un punto di vista cognitivo, inoltre, non appare corretta l'idea della formazione "complessa" come somma di formazioni "semplici", già vista poche righe fa.

La visione curricolare "per obiettivi", dunque, oggi è motivo di discussioni fortemente critiche anche ufficiali, a livello ministeriale, in vari Paesi del mondo, a favore di una visione "per competenze".

Altra limitazione di questo modo di intendere il lavoro matematico in aula è che sembra privilegiare solo alcuni degli allievi, quelli cosiddetti "dotati in Matematica"; all'opposto, l'apprendimento della Matematica deve propendere, in una moderna visione delle cose, per la costruzione di competenza matematica, che è innata nell'essere umano e che a volte chiede solo uno stimolo adeguato per potersi manifestare.

La sfida.

Raggiungere competenza matematica in generale è una sfida, ed esige per lo meno quattro diverse richieste didattiche.

[13] Basti pensare, in Italia, alle discussioni dei primi anni '80 che portarono ai Programmi Ministeriali del 1985 per la Scuola Elementare; si chiamavano ancora "Programmi", ma erano espressi per obiettivi: il che era, per l'Italia, una importante rivoluzione.

- *Richiesta epistemologica*: è costituita dal referente teorico che si mette in gioco in una determinata situazione di insegnamento / apprendimento; si tratta di un referente che orienta l'azione dell'insegnante nell'articolazione di campi concettuali, di aspetti comunicativi; esso risponde al processo di insegnamento / apprendimento, concepito curricolarmente.

  Questo oggetto involucra aspetti relazionati con
  - la dimensione storica: prospettive filosofiche, principi di validazione e di argomentazione che hanno permesso il suo stesso ingresso nella disciplina,… ;
  - la dimensione disciplinare: reti concettuali che si tessono e che strutturano lo stesso sapere),… ;
  - la dimensione epistemica (processi semantici, logici e discorsivi che stanno all'origine di questo sapere degli allievi,…).
- *Richiesta cognitiva*: la costruzione teorica di un allievo per quanto concerne un oggetto di apprendimento, riguarda chi apprende da due punti di vista:
  - a partire dalle condizioni epistemiche imposte dall'oggetto stesso di apprendimento in base a sue peculiarità;
  - a partire dalle condizioni dello sviluppo cognitivo, comunicativo, volitivo e socioculturale di colui che sta apprendendo (che si vuol fare apprendere).
- *Richiesta comunicativa*: struttura l'interazione discorsiva in una situazione particolare di apprendimento; a partire da qui, questa esigenza involucra:
  - la dimensione comunicativa del campo di sapere messo in gioco;
  - le sue forme particolari di significazione;
  - le sue forme particolari di comunicazione e la dimensione discorsiva tipica dell'aula, dimensione complessa in quanto comprende la comunicazione dell'insegnante e quella degli studenti, il che genera a sua volta forme speciali di comunicazione.
- *Richiesta socioculturale*: stabilisce relazioni tra tutti gli elementi costitutivi dell'aula e determina i processi di produzione; tale relazione influenza le tre istanze delle relazioni didattiche:
  - le forme di avvicinamento all'oggetto di apprendimento;
  - le forme di procedere con questo sapere, per essere accettato socialmente;
  - le forme del procedere con l'oggetto di apprendimento che rende evidenti le norme socioculturali dell'aula (Heath, 1956: è interessante evidenziare che questa citazione è tratta da un testo che vuole commentare la Geometria, non il suo apprendimento, e che tuttavia entra nel discorso socioculturale che, secondo la critica didattica moderna, gestisce il sapere da apprendere).

Che cosa si valuta, quando si parla di "valutazione delle competenze"?

Voglio subito avvertire, per correttezza, che questa domanda resterà tale perché ogni risposta è da considerarsi prematura, nonostante gli anni di esperienza in vari Paesi.[14]
Una risposta complessa, come merita la complessità del tema, può essere ritrovata in Fandiño Pinilla (2002). Più volte, qui è stato messo in evidenza come la valutazione di competenze non può ridursi ad un test usuale (orale, scritto,…) per verificare la padronanza di qualche cosa di specifico, ma che si presenta invece come un aspetto di grande importanza per lo sviluppo di ciascuno degli aspetti legati alla conoscenza nella sue varie forme isolatamente, ma anche nella loro interazione.
La valutazione deve essere vista esclusivamente come il processo di analisi dell'aula, di tutte le componenti dell'aula: il curricolo, l'efficacia dell'azione dell'insegnante, l'allievo.
Qui, più che altrove, ha senso evidenziare che l'allievo è tanto responsabile del processo di valutazione quanto lo sono l'insegnante o la società, se è vero che è l'allievo competente ad essere giudicato, dunque ad essere giudice e giudicato all'un tempo. Non può essere che così; d'altra parte, chi meglio di una persona competente è in grado di valutare la propria effettiva competenza?

[14] Per esempio, il mio, la Colombia, è attivo in questa ricerca da molti anni, tanto per quanto riguarda l'allievo, tanto, per ovvia conseguenza, l'insegnante.
Da una dozzina d'anni, l'esame finale di stato (solo scritto) che sancisce il "grado" (in Italia, paragonabile alla "Maturità"; ma l'accesso all'Università richiede poi un difficoltoso esame d'ingresso, molto molto selettivo) viene fatto sulle competenze raggiunte dall'allievo e non sulle sole conoscenze. Siccome l'esame è scritto, vi sono state molte discussioni, per anni ed anni, su come valutare le competenze raggiunte, con l'ulteriore complicazione che tale valutazione va fatta su testi solo scritti. Naturalmente ciò ha portato l'insegnante, da qualche anno, a lavorare sulle competenze, con una fortissima richieste da parte delle scuole alle università di intervenire sulla formazione iniziale ed in servizio.
Inoltre, in Colombia è da anni in discussione l'ipotesi di valutare l'insegnante per permettergli una evoluzione nella carriera e dunque nello stipendio; la valutazione verrebbe fatta in maniera complessa:
- sulla sua competenza in Matematica e su quella raggiunta dai suoi allievi;
- sulla sua competenza matematica e su quella raggiunta dai suoi allievi;
- sulla sua competenza in Didattica della Matematica.

Siccome anche questa valutazione avverrebbe solo per iscritto, alcune Università hanno elaborato ipotesi di strategie apposite, per esempio la creazione di "casi" (Bonilla Estevéz, Fandiño Pinilla, Romero Cruz, 1999); il "caso" è la descrizione di una situazione d'aula nella quale, in rispetto allo schema sistemico che si usa chiamare "triangolo della didattica":
- c'è un sapere in gioco,
- ci sono delle risposte o dei comportamenti possibili di vari allievi,
- ci sono delle risposte o dei comportamenti o delle valutazioni possibili da parte dell'insegnante, per ciascuno di questi.

L'insegnante sotto valutazione deve scegliere il proprio comportamento e sulla base di queste risposte viene a sua volta valutato.
Il livello raggiunto in questi studi in Colombia negli anni '90 è stato talmente elevato, che molti Paesi dell'America Latina si sono rivolti agli specialisti colombiani per sfruttare in maniera ufficiale queste stesse tecniche a livello ministeriale (chi qui scrive ha tenuto corsi su questi temi in Bolivia, Costarica, Guatemala,…).
A parte quelle già indicate in calce a questo scritto, evito di dare ulteriore bibliografia in questa direzione, per non appesantire troppo il testo.

Bibliografia

Barón C., Lotero M., Fandiño Pinilla M.I., Sánchez N. (1999). Proyecto de Aula. In: AA. VV: (1999). *Matemáticas Escolares Asistidas por Computador*. Proyecto curricular de Licenciatura en Matemáticas. Collana: Matemáticas Escolares. Bogotá: Universidad Distrital "Francisco José de Caldas". 1-24 (Modulo 7).

Bonilla M., Fandiño Pinilla M.I., Romero J., Sánchez N. (1999). El saber profesional del profesor: objeto de evaluación. In: *Actas del XVI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*. Bogotà, 29 novembre, 3 dicembre 1999. Università Nazionale, Università Pedagogica, Università Distrettuale. Bogotà. 25-31.

Bonilla Estevéz M., Fandiño Pinilla M.I., Romero Cruz J.H. (1999). La valutazione dei docenti in Colombia. Alcuni punti di riflessione. *La Matematica e la sua didattica*. 4. 404-419.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique. *Recherches en didactique des mathématiques.* 12, 1, 73-112.

D'Amore B. (1999a). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (1999b). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 1999, 247-276.

D'Amore B. (2000). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 28-47.

D'Amore B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-173.

D'Amore B. (2002). Basta con le cianfrusaglie. *La Vita Scolastica*. 8, 14-18.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Nicosia (Cipro): Intercollege Press Ed. Atti del "Third Intensive Programme Socrates-Erasmus", Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno –6 luglio 2001. 111-130.

Fandiño Pinilla M. I. (1999a). Alumnos competentes; objeto de formación (evaluación) del profesor de matemáticas. In: *Actas del XVI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*. Bogotà, 29 novembre, 3 dicembre 1999. Università Nazionale, Università Pedagogica, Università Distrettuale. Bogotà. 32-38.

Fandiño Pinilla M. I. (1999b). Evaluación. In: AA. VV: (1999). *Matemáticas Escolares Asistidas por Computador*. Proyecto curricular de Licenciatura en Matemáticas. Collana: Matemáticas Escolares. Bogotá: Universidad Distrital "Francisco José de Caldas". 1-19 (Modulo 6).

Fandiño Pinilla M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.

Heath Th. L. (1956). Introduction and Commentary to: Euclid. *The Thirteen of Euclid's Elements*. New York: Dover.

Kulm G. (1986). Investigación en torno a las Actitudes matemáticas. In: *Antología del Seminario de Investigación Educativa*. Vol. I. México: UPN.

58. Fandiño Pinilla M.I. (2004). La ricerca in didattica e la sua influenza su valutazione e curricolo. In: D'Amore B., Sbaragli S. (eds.) (2004). *Il grande gioco della matematica*. Atti del II Convegno omonimo, Lucca, 10-11 settembre 2004. Lucca: Formarete – Provincia di Lucca. 29-40

La ricerca in didattica e la sua influenza su valutazione e curricolo

Martha Isabel Fandiño Pinilla

N.R.D.
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica Università di Bologna - Italia

Summary. *In this paper we propose a pragmatic-anthropological foundation for Mathematics Education "for competences", providing a perspective based on didactic practice, also in relation to teacher training.*

Il presente lavoro è svolto nell'àmbito del Progetto di Ricerca dell'Unità di Bologna 2002-2003: «*Ricerche sul funzionamento del sistema: allievo-insegnante-sapere*», inserito nel Programma di Ricerca Nazionale: «*Difficoltà in matematica: strumenti per osservare, interpretare, intervenire*», cofinanziato con fondi M.I.U.R. (ex 40%). Esso è un sunto di uno dei capitoli che appaiono nel libro: D'Amore B., Godino D.J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna, Pitagora.

1. Preliminari

La *competenza* è oggi da tutti riconosciuta come qualche cosa di più che una *conoscenza*, ben di più che un "saper fare in un dato contesto", come vari Autori la definivano al momento iniziale del dibattito, qualche decennio fa. La competenza implica anche un "*voler* fare", dunque chiama immediatamente in causa fatti affettivi, come volizione e atteggiamento.[15]
Per poter affrontare questo discorso, devo partire da lontano, da questioni connesse con l'antropologia (che ritornerà più avanti, connessa alla scelta pragmatista).

Il desiderio di conoscere è una necessità implicita dell'essere umano; tutto in lui è indirizzato alla conoscenza, fin dai suoi primi passi nel mondo (in senso non solo

[15] Per evitare continue citazioni bibliografiche che potrebbero diventare noiose, preferisco dire una volta per tutte, all'inizio di questo testo, che farò continui riferimenti a D'Amore (1999a) per quanto riguarda la Didattica della matematica; ed a Fandiño Pinilla (2002) per quanto riguarda curricolo e valutazione. Altri testi verranno esplicitamente citati nel corso del lavoro.

metaforico). La tensione umana non è vòlta solo al comunicare, come talvolta si sente dire (l'uomo come animale comunicativo), dunque; in più, egli può/vuole trasformare il sapere appreso in un nuovo sapere, quello che gli permette di processare le informazioni possedute e cercare quelle che gli permettono di risolvere una nuova situazione problematica, se ha deciso di affrontarla.
Man mano che si soddisfa una necessità e in base a come questa necessità è soddisfatta, sorge una necessità nuova; è il gruppo sociale nel quale si trova inserito l'individuo e nel quale si trova ad agire, che determina in larga misura necessità e priorità che devono essere soddisfatte e fonti di tali necessità, dunque, in larga misura, giustificazioni specifiche che le determinano.
L'analisi ed il trattamento di questa problematica si assume all'interno di quel che tutta la società chiama *Educazion*e. Ma la possibilità che dentro ad un gruppo sociale sorgano forme di espressione complesse, tanto intellettuali quanto estetiche o etiche, dipende in larga parte dallo sviluppo cognitivo dei suoi membri e dal modo in cui questi affrontano problemi facendo, dell'integrazione dei diversi saperi e delle motivazioni, una costante.

2. Motivazione

Alla base di questa costante d'azione, c'è sempre un processo psichico- intellettuale che potremmo identificare con la coppia motivazione-volizione.
Venendo all'aula come luogo specifico di una società ben strutturata (la classe, la scuola) all'interno della Società intesa in senso più generale, mi sembra che potrebbero essere tre i modi di intendere la motivazione, modi che delineo qui di seguito.

- Ogni problema può essere presentato come la ricerca della soddisfazione di una necessità avvertita dalla società stessa, nella sua generalità, il che fa sì che gli interessi personali di ciascuno si trasformino nell'interesse del gruppo sociale di appartenenza. In questa direzione, l'interesse dell'allievo sarà centrato nell'essere utile alla società; su questa base sono orientati molti dei programmi educativi ufficiali di vari Paesi. Sotto questo profilo, le lezioni, le attività che permettono di scoprire le relazioni fra teoria e pratica sono quelle che risvegliano il maggior interesse cognitivo dell'allievo. In questa direzione si deve rinnovare continuamente l'attività docente al fine di ottenere un allievo più critico, creativo ed innovatore, quando si auspica che dovrà agire (sia nell'immediato, sia in futuro come adulto) all'interno della società. La competenza è dunque vista come qualche cosa che permette di migliorare la qualità di vita della società.
- L'interesse del soggetto sta nel tentativo di soddisfare le sue proprie necessità e nello studio – analisi – conoscenza delle proprietà dell'oggetto (inteso non solo in senso fisico) che si ritiene possa soddisfarle. L'importanza di porre l'allievo in contatto con gli oggetti che, allo stesso tempo, soddisfano le necessità, creandone delle nuove, evidenzia in un primo momento gli interessi individuali ed in un secondo momento provoca la incorporazione nel quotidiano di soggetti utili alla

società. È così che la valorizzazione del soggetto per i successi ottenuti, lo porta a cercare nuove fonti di sapere. La mancata canalizzazione adeguata di questo interesse può indurre l'allievo alla ricerca del riconoscimento in attività non desiderate dalla società [attività che esigono scarsa preparazione cognitiva ma che si presentano come altamente redditizie sia in termini monetari sia in termini di immagine: spettacolo, pubblicità, sport… (basti pensare ai "personaggi" osannati dalla TV più banale ed alla esasperata emulazione degli aspetti più "facili" in cui ciò si esplicita); o attività non lecite]. Se si vuol seguire questo tipo di motivazione, l'insuccesso scolastico deve essere trattato con professionalità, da parte dell'insegnante, dunque soprattutto non deve frustrare né immobilizzare lo sviluppo dello studente verso competenze significative. La competenza appare qui come valorizzazione specifica dell'essere umano come persona.

- Una terza tendenza considera l'importanza della motivazione come qualche cosa di intrinseco, specifico, tipico dell'essere umano, una vera e propria propensione naturale. La necessità di sapere, di conoscere, di apprendere è sufficiente per attivare la motivazione; è il desiderio di migliorare l' "io", che tiene attiva la motivazione. Si tratta dunque di un piacere intrinseco. In questa ottica, la conoscenza di per sé stessa è la fonte che attiva il desiderio di apprendere in contesti ogni volta più complessi. La natura dell'essere umano si impone su tutto ed a dispetto di tutto, perché dentro di essa si trova già insita la necessità di conoscere, di interpretare con maggiore chiarezza il mondo che ci circonda. In questa posizione, la competenza è l'espressione stessa di questa propensione al conoscere ed all'uso delle conoscenze raggiunte per procedere nella stessa direzione, verso nuove conoscenze.

3. La *competenza in Matematica* e la *competenza matematica*

Questo è un punto centrale, sul quale non si fa mai abbastanza chiarezza. Voglio proporre allora da queste pagine una distinzione tra due accezioni del termine *competenza*, la competenza in Matematica e la competenza matematica, distinzione alla quale invito d'ora in avanti a fare riferimento, commentandola e definendola sempre meglio.

La *competenza in Matematica* si centra nella disciplina Matematica, riconosciuta come scienza costituita, come oggetto proprio, specifico, di conoscenza. L'allievo entra in contatto con saperi specifici, saperi che la società ha inglobato nelle conoscenza riconosciute come base per un dignitoso ingresso nel suo interno; si appropria di una parte di tali saperi, tanto formalmente quanto informalmente. Si riconosce così l'esistenza di un dominio concettuale ed affettivo che media tra l'allievo stesso e la Matematica. La competenza è qui vista all'interno dello specifico ambito scolare.

Per alcuni autori (Kulm, 1986), raggiungere la competenza in questo senso ha come base i concetti trattati nei primi anni della scuola media; ma questo stesso periodo può essere anche quello in cui questa competenza si annulla, dato che inizia lo studio della

Matematica con un grande carico di apparato formale. Questa situazione, se non è ben gestita dall'insegnante, può dunque favorire il processo di *scolarizzazione* (D'Amore, 1999b), portando l'allievo a rinunciare a farsi carico del proprio apprendimento ed a rifugiarsi solo in ciò che gli propone l'insegnante. Questa competenza è individuale; però, se si lavora nel paradigma della dicotomia validazione - socializzazione, si può pensare in una competenza in Matematica anche a livello di gruppo classe.
La *competenza matematica* si riconosce quando un individuo vede, interpreta e si comporta nel mondo in un senso matematico. L'atteggiamento analitico o sintetico, con il quale alcune persone affrontano situazioni problematiche, è un esempio di questo tipo di competenza. Ci sono buoni risolutori di problemi che possono riconoscere, delimitare e risolvere situazioni problematiche; il che, viceversa, a volte, non è facile da evidenziare in persone che trattano bene, per esempio, algoritmi. Aspetti come il gusto e la valorizzazione della Matematica, sono alcuni degli aspetti utili per orientare il raggiungimento della competenza matematica.
Sia nella competenza in Matematica come nella competenza matematica, si evidenziano dunque tre aspetti:

- il cognitivo: conoscenza della disciplina
- l'affettivo: disposizione, volontà, desiderio di rispondere ad una sollecitazione esterna o interna
- la tendenza di azione: persistenza, continuità, sollecitudine.

4. Le filosofie pragmatiste e la competenza. La scelta antropologica

In D'Amore e Fandiño Pinilla (2001), si dà una distinzione tra teorie "realiste" e "teorie pragmatiche", all'interno delle scelte epistemologiche che stanno a monte di quanto concerne la Matematica.
All'interno di una corrente *realista*, la competenza di tipo esogeno (competenza matematica) deriva dalla competenza endogena (competenza in Matematica) grazie all'azione del transfer cognitivo. Un docente che opta per un'azione didattica in ambito realista, non dovrà far altro che trasporre il sapere matematico, adattandolo alla classe; e, una volta raggiunta la conoscenza, cercare situazioni nelle quali quella conoscenza può essere messa in azione.

conoscenza $\Longrightarrow$ competenza

All'interno di una scelta *pragmatica*, dato che qui ogni apprendimento è necessariamente situato, la competenza matematica si conquista attraverso il ricorso a diverse situazioni; è l'ambito, è la situazione, è la pragmatica d'*uso* che determinano, allo stesso tempo, sia la costruzione di una conoscenza, sia la creazione di una competenza da parte dello studente. In altre parole, se è vero che nelle filosofie pragmatiche è il contesto, è l'uso che danno senso ai concetti, dunque alle costruzioni di conoscenze, è altrettanto vero che qui non c'è bisogno di creare una successione causale: conoscenza e competenza si costruiscono l'un l'altra nella stessa "azione":

$$\text{conoscenza} \rightleftarrows \text{competenza}$$

Diventa allora spontaneo considerare come centrale la persona (o l'istituzione, come insieme di persone) che si mette in relazione all'oggetto matematico che si vuol conoscere, e non l'oggetto in sé: «Un oggetto esiste dal momento in cui una persona *X* (o una istituzione *I*) riconosce questo oggetto come esistente (per essa). Più esattamente, si dirà che l'oggetto O esiste per *X* (rispettivamente per *I*) se esiste un oggetto, rappresentato da R(*X*,O) (rispettivamente R(*I*,O)) e detto relazione personale da *X* ad O (rispettivamente relazione istituzionale da *I* ad O)» (Chevallard, 1992).
La competenza, come fatto personale o istituzionale, è dunque antropologicamente fondata, soprattutto se la scelta è a carattere pragmatista.

5. La figura del docente, se si vuol raggiungere lo sviluppo della competenza nell'allievo

Ora devo pormi il problema della figura dell'insegnante, qualora si sia fatta una scelta finale che vede lo studente come colui che deve raggiungere competenza e non solo conoscenza (mi servo di: Fandiño Pinilla, 1999a, b).
L'insegnante deve avere prima di tutto lui stesso competenza in Matematica ed essere cosciente della problematica della competenza matematica.
Oltre alla conoscenza della disciplina che insegna e della teoria della didattica specifica di quella disciplina, gli si deve chiedere una volontà ed una capacità comunicative reali, per esempio quelle di saper / voler spiegare il mondo da un punto di vista matematico, senza forzarne i problemi, facendo sì che la Matematica vi appaia in modo naturale.
La costante nell'azione dell'insegnante deve essere la rottura dell'equilibrio che si genera come punto di partenza per l'apprendimento, canalizzata nella direzione adeguata affinché essa si costituisca realmente in un apprendimento da parte dello studente. Lo scopo è quello di proporre situazioni di apprendimento che superino la risposta ad un continuo interrogatorio (scritto o orale, in modalità diverse) e si convertano invece nella soddisfazione di una spontanea valorizzazione ed evidenziazione della propensione verso necessità, gusto, desiderio di sapere da parte dell'allievo. Il "cambio" qualitativo dei processi di insegnamento / apprendimento indirizzati verso il raggiungimento della competenza, sta nella trasformazione della docenza in un'attività dinamica, comunicativa, dimenticando la logica della prassi dell'istruzione che per lungo tempo ha identificato l'educazione scolastica.

Per giungere ad un apprendimento che si converta in una competenza del primo tipo (competenza in Matematica) da parte dell'allievo, è necessario un reiterato incontro dell'insegnante con l'oggetto di studio, affrontandolo ogni volta con nuovi elementi, nuovi procedimenti, approfondendolo e legandolo con altri saperi (disciplinari, di altre discipline, ma anche non disciplinari). Una volta raggiunta questa competenza, occorre proporre situazioni che incentivino la competenza matematica.
Detto in altro modo, l'azione didattica non può essere lineare né può banalmente ridursi ad una sequenza di fasi che vanno dal semplice al complesso, dato che in questo modo prende forza l'idea di una scala didattica forzata e troppo rigida, quella che in passato si faceva partire dai prerequisiti (che, all'interno di una teoria della competenza, non sono certo il primo dei problemi).
Si richiede una serie di nuovi e reiterati incontri con il sapere matematico, nei quali la riarticolazione sia proposta come parte di questo sapere e non come una somma di saperi nei quali la responsabilità di questa integrazione stia solo nel far… incontrare lo studente con gli scarsi elementi che offre la disciplina a livello scolare.
Se chi qui legge ha abbastanza spirito, potrebbe notare la *voluta* continua confusione che si è fatta tra:

- azione dell'insegnante per far raggiungere competenza al proprio allievo
- competenza che deve avere l'insegnante per far sì ch'egli possa formare allievi competenti.

La figura professionale dell'insegnante lo abilita a competenze che lo aiutino nel creare persone competenti…
D'altra parte, nella sua fase di formazione professionale iniziale, lo stesso insegnante è uno studente… [16]

6. Sviluppare competenza matematica

Tenterò di riassumere in pochi punti (non esaustivi) la metodologia che in qualche modo privilegia lo sviluppo della competenza matematica, a mio avviso.

- Lavorare su situazioni problematiche prese dalla realtà, sulla base di quel che ho detto poco sopra; occorre ovviamente scegliere situazioni a-didattiche, a partire da situazioni prese in prestito dalla realtà e che rispondano ad un problema sentito dall'allievo. Non si vuole qui ritornare alla superata discussione sul reale come fonte di ispirazione dei problemi, ma al fatto che ogni allievo ha una *sua* realtà alla quale tiene e coinvolgendo la quale egli cessa di pensare alla scuola come ad un luogo

[16] A questo tema, negli anni '90, sia chi qui scrive che molti altri docenti delle Università statali colombiane hanno dedicato molto tempo e molti studi, nella fattispecie nel tentativo di creare percorsi di formazione universitaria ideali per futuri insegnanti. Si veda, per esempio: Bonilla, Fandiño Pinilla, Romero, Sánchez (1999), solo per avere un'idea; in realtà, negli anni '91-'99, il dibattito è stato notevole in tutta l'America Latina e si è concretizzato in ricerche, sperimentazioni e convegni sul tema.

avulso da interessi, ma anzi come luogo che gli permette di usare conoscenze in modalità vincenti, con successo anche esogeno e non solo endogeno.

- Organizzare lo sviluppo curricolare sulla base dei processi e non solo dei prodotti. Si è oramai accettato il fatto che è attraverso il processo che si costruisce un sapere; questa intenzione curricolare si evidenzia poi nella valutazione, dato che questa deve essere in corrispondenza con l'attività sviluppata nell'aula; non è possibile, per esempio, valutare lo studente in modo tradizionale quando si vuole lavorare su competenze invece che su conoscenze (Fandiño Pinilla, 1999a).
- Proporre lavoro di aula sufficientemente ricco e stimolante, affinché l'elaborazione mentale che si richiede per affrontare il lavoro prosegua fuori dal tempo e dallo spazio scolastici (Barón, Lotero, Fandiño Pinilla, Sánchez, 1999).
- Stimolare la creatività e l'immaginazione degli studenti mediante diverse attività matematiche, tenendo presente che non sono i contenuti in sé stessi a costituire la meta da raggiungere tramite la scuola, ma che sono la base per costruzioni di livello più alto.
- Riconoscere le concezioni che l'allievo ha elaborato in relazione alla Matematica, il suo insegnamento ed il suo apprendimento; un'idea stereotipata della Matematica e della forma in cui la si presenta in aula, si interpongono con un lavoro destinato allo sviluppo della competenza. Il lavoro matematico ha bisogno di rinforzarsi con attività che all'allievo piacciano (in senso lato) e che avverta come qualche cosa di necessario per la sua azione nella società dunque non solo endogena, ma anche esogena. Questo punto è emerso con forza in più occasioni e per diversi motivi.

7. La sfida

Raggiungere competenza matematica in generale è una sfida, ed esige per lo meno quattro diverse richieste didattiche.

- *Richiesta epistemologica*: è costituita dal referente teorico che si mette in gioco in una determinata situazione di insegnamento / apprendimento; si tratta di un referente che orienta l'azione dell'insegnante nell'articolazione di campi concettuali, di aspetti comunicativi; esso risponde al processo di insegnamento / apprendimento, concepito curricolarmente.

  Questo oggetto involucra aspetti relazionati con
- la dimensione storica: prospettive filosofiche, principi di validazione e di argomentazione che hanno permesso il suo stesso ingresso nella disciplina,… ;
- la dimensione disciplinare: reti concettuali che si tessono e che strutturano lo stesso sapere),… ;
- la dimensione epistemica (processi semantici, logici e discorsivi che stanno all'origine di questo sapere degli allievi,…).
- *Richiesta cognitiva*: la costruzione teorica di un allievo per quanto concerne un oggetto di apprendimento, riguarda chi apprende da due punti di vista:

- a partire dalle condizioni epistemiche imposte dall'oggetto stesso di apprendimento in base a sue peculiarità;
- a partire dalle condizioni dello sviluppo cognitivo, comunicativo, volitivo e socioculturale di colui che sta apprendendo (che si vuol fare apprendere).
- *Richiesta comunicativa*: struttura l'interazione discorsiva in una situazione particolare di apprendimento; a partire da qui, questa esigenza involucra:
- la dimensione comunicativa del campo di sapere messo in gioco;
- le sue forme particolari di significazione;
- le sue forme particolari di comunicazione e la dimensione discorsiva tipica dell'aula, dimensione complessa in quanto comprende la comunicazione dell'insegnante e quella degli studenti, il che genera a sua volta forme speciali di comunicazione.
- *Richiesta socioculturale*: stabilisce relazioni tra tutti gli elementi costitutivi dell'aula e determina i processi di produzione; tale relazione influenza le tre istanze delle relazioni didattiche:
    - le forme di avvicinamento all'oggetto di apprendimento;
    - le forme di procedere con questo sapere, per essere accettato socialmente;
    - le forme del procedere con l'oggetto di apprendimento che rende evidenti le norme socioculturali dell'aula (Heath, 1956: è interessante evidenziare che questa citazione è tratta da un testo che vuole commentare la Geometria, non il suo apprendimento, e che tuttavia entra nel discorso socioculturale che, secondo la critica didattica moderna, gestisce il sapere da apprendere).

8. Che cosa si valuta, quando si parla di "valutazione delle competenze"?

Voglio subito avvertire, per correttezza, che questa domanda resterà tale perché ogni risposta è da considerarsi prematura, nonostante gli anni di esperienza in vari Paesi.[17]

[17] Per esempio, il mio, la Colombia, è attivo in questa ricerca da molti anni, tanto per quanto riguarda l'allievo, tanto, per ovvia conseguenza, l'insegnante.
Da una dozzina d'anni, l'esame finale di stato (solo scritto) che sancisce il "grado" (in Italia, paragonabile alla "Maturità"; ma l'accesso all'Università richiede poi un difficoltoso esame d'ingresso, molto molto selettivo) viene fatto sulle competenze raggiunte dall'allievo e non sulle sole conoscenze. Siccome l'esame è scritto, vi sono state molte discussioni, per anni ed anni, su come valutare le competenze raggiunte, con l'ulteriore complicazione che tale valutazione va fatta su testi solo scritti. Naturalmente ciò ha portato l'insegnante, da qualche anno, a lavorare sulle competenze, con una fortissima richieste da parte delle scuole alle università di intervenire sulla formazione iniziale ed in servizio.
Inoltre, in Colombia è da anni in discussione l'ipotesi di valutare l'insegnante per permettergli una evoluzione nella carriera e dunque nello stipendio; la valutazione verrebbe fatta in maniera complessa:
- sulla sua competenza in Matematica e su quella raggiunta dai suoi allievi;
- sulla sua competenza matematica e su quella raggiunta dai suoi allievi;
- sulla sua competenza in Didattica della Matematica.

Una risposta complessa, come merita la complessità del tema, può essere ritrovata in Fandiño Pinilla (2002). Più volte, qui è stato messo in evidenza come la valutazione di competenze non può ridursi ad un test usuale (orale, scritto, …) per verificare la padronanza di qualche cosa di specifico, ma che si presenta invece come un aspetto di grande importanza per lo sviluppo di ciascuno degli aspetti legati alla conoscenza nella sue varie forme isolatamente, ma anche nella loro interazione.
La valutazione deve essere vista esclusivamente come il processo di analisi dell'aula, di tutte le componenti dell'aula: il curricolo, l'efficacia dell'azione dell'insegnante, l'allievo.
Qui, più che altrove, ha senso evidenziare che l'allievo è tanto responsabile del processo di valutazione quanto lo sono l'insegnante o la società, se è vero che è l'allievo competente ad essere giudicato, dunque ad essere giudice e giudicato all'un tempo. Non può essere che così; d'altra parte, chi meglio di una persona competente è in grado di valutare la propria effettiva competenza?

Bibliografia

Barón C., Lotero M., Fandiño Pinilla M.I., Sánchez N. (1999). Proyecto de Aula. In: AA. VV: (1999). *Matemáticas Escolares Asistidas por Computador*. Proyecto curricular de Licenciatura en Matemáticas. Collana: Matemáticas Escolares. Bogotá: Universidad Distrital "Francisco José de Caldas". 1-24 (Modulo 7).
Bonilla M., Fandiño Pinilla M.I., Romero J., Sánchez N. (1999). El saber profesional del profesor: objeto de evaluación. In: *Actas del XVI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*. Bogotà, 29 novembre, 3 dicembre 1999. Università Nazionale, Università Pedagogica, Università Distrettuale. Bogotà. 25-31.
Bonilla Estevéz M., Fandiño Pinilla M.I., Romero Cruz J.H. (1999). La valutazione dei docenti in Colombia. Alcuni punti di riflessione. *La Matematica e la sua*

Siccome anche questa valutazione avverrebbe solo per iscritto, alcune Università hanno elaborato ipotesi di strategie apposite, per esempio la creazione di "casi" (Bonilla Estevéz, Fandiño Pinilla, Romero Cruz, 1999); il "caso" è la descrizione di una situazione d'aula nella quale, in rispetto allo schema sistemico che si usa chiamare "triangolo della didattica":

- c'è un sapere in gioco,
- ci sono delle risposte o dei comportamenti possibili di vari allievi,
- ci sono delle risposte o dei comportamenti o delle valutazioni possibili da parte dell'insegnante, per ciascuno di questi.

L'insegnante sotto valutazione deve scegliere il proprio comportamento e sulla base di queste risposte viene a sua volta valutato.
Il livello raggiunto in questi studi in Colombia negli anni '90 è stato talmente elevato, che molti Paesi dell'America Latina si sono rivolti agli specialisti colombiani per sfruttare in maniera ufficiale queste stesse tecniche a livello ministeriale (chi qui scrive ha tenuto corsi su questi temi in Bolivia, Costarica, Guatemala,…).
A parte quelle già indicate in calce a questo scritto, evito di dare ulteriore bibliografia in questa direzione, per non appesantire troppo il testo.

didattica. 4. 404-419.
Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique. *Recherches en didactique des mathématiques.* 12, 1, 73-112.
D'Amore B. (1999a). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (1999b). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 1999, 247-276.
D'Amore B. (2000). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 28-47.
D'Amore B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-173.
D'Amore B. (2002). Basta con le cianfrusaglie. *La Vita Scolastica*. 8, 14-18.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Nicosia (Cipro): Intercollege Press Ed. Atti del "Third Intensive Programme Socrates-Erasmus", Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno - 6 luglio 2001. 111-130.
Fandiño Pinilla M. I. (1999a). Alumnos competentes; objeto de formación (evaluación) del profesor de matemáticas. In: *Actas del XVI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*. Bogotà, 29 novembre, 3 dicembre 1999. Università Nazionale, Università Pedagogica, Università Distrettuale. Bogotà. 32-38.
Fandiño Pinilla M. I. (1999b). Evaluación. In: AA. VV: (1999). *Matemáticas Escolares Asistidas por Computador*. Proyecto curricular de Licenciatura en Matemáticas. Collana: Matemáticas Escolares. Bogotá: Universidad Distrital "Francisco José de Caldas". 1-19 (Modulo 6).
Fandiño Pinilla M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.
Heath Th. L. (1956). Introduction and Commentary to: Euclid. *The Thirteen of Euclid's Elements*. New York: Dover.
Kulm G. (1986). Investigación en torno a las Actitudes matemáticas. In: *Antología del Seminario de Investigación Educativa*. Vol. I. México: UPN.

69. D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I. (2004). "Ejercicios anticipados" y "zona de desarrollo próximo": comportamiento estratégico y lenguaje comunicativo en actividad de resolución de problemas. *Epsilon*. [Sevilla, Spagna]. 57, 357-378.

"Ejercicios anticipados" y "zona de desarrollo próximo": comportamiento estratégico y lenguaje comunicativo en actividad de resolución de problemas

Bruno D'Amore, **Martha Isabel Fandiño Pinilla, Ines Marazzani**

NRD
Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática
Departamento de Matemática - Universidad de Bologna – Italia

Abstract. This study investigates the idea of "in advance exercise", based on specific stimulus texts in situations of autonomous and collaborative problem-solving, as defined by Vygotsky, within the zones of proximal and potential development, with a view to identifying types of behavioural strategies linked to a range of variables.

Resumen. En este trabajo se estudia la idea de "ejercicio anticipado", es decir, de particulares textos - estímulos en situación de resolución de problemas, autónoma y colaboradora, según las definiciones de Vygotskij, en el ámbito de las zonas de desarrollo próximo y potencial, con el fin de conocer tipologías estratégicas de comportamiento sobre la base de diversas variables.

Resumé. Dans ce travail on étudie l'idée de "exercice anticipé", c'est à dire de textes-stimulations particuliers en situation de résolution de problèmes, autonome et en collaboration, selon la définition de Vigotsky, dans le cadre des zones de développement proche et potentiel, au but de connaître les typologies stratégiques de comportement sur la base de différentes variables.

Sunto. In questo lavoro si studia l'idea di "esercizio anticipato" cioè di particolari testi-stimolo in situazione di problem solving, autonomo e collaborativo, secondo le definizioni di Vygotskij, nell'àmbito delle zone di sviluppo prossimale e potenziale, allo scopo di conoscere tipologie strategiche di comportamento in base a diverse variabili.

El presente trabajo se desarrolló en el ámbito del Proyecto de Investigación de la Unidad de Bologna: «*Investigación sobre el funcionamiento del sistema: alumno-maestro-saber*», dentro del Programa de Investigación Nacional: «*Dificultad en matemática: instrumentos para observar, interpretar, intervenir*», co-financiado con fondos del M.I.U.R. (Ministerio de la Instrucción, de la Universidad y de la Investigación, Italia).

1. Marco teórico en el cual se sitúa nuestra investigación

Delinearemos en cinco puntos, del 1.1. a 1.5, el marco teórico en el que se sitúa nuestra investigación. Daremos a continuación algunas definiciones que serán útiles.

1.1. La "zona de desarrollo próximo"

Debemos a Vygotsky (1931-80) una distinción, al día de hoy considerada clásica, entre dos ideas concernientes al desarrollo individual:

- "nivel efectivo de desarrollo": se trata de un modo de expresar en forma esquemática la idea de competencia efectivamente adquirida en un determinado momento del desarrollo cognitivo de un individuo; la "zona" en la cual se sitúa este nivel se llama "zona efectiva";
- "nivel potencial de desarrollo": análogo, para las competencias que potencialmente en un futuro próximo un individuo puede adquirir; la "zona" en la cual se sitúa este nivel se llama "zona potencial".

La actividad didáctica tiene, por razones opuestas, poco sentido en cada una de estas "zonas":

- en la primera, sólo puede confirmar los conocimientos ya adquiridos;
- en la segunda, no puede producir competencia o construcción de conocimiento, dado que quien está en fase de aprendizaje (el aprendiz) no tiene aún la competencia necesaria para entender lo que se le está proponiendo.

Por tanto, la actividad didáctica se debe jugar toda *entre* la zona de desarrollo efectivo y la zona de desarrollo potencial, en aquella que se llama "zona de desarrollo próximo", es decir «la distancia entre el nivel efectivo de desarrollo (…) y el nivel de desarrollo potencial (…)», como lo dice el mismo Vygotsky en el texto citado.
En realidad, la situación es un poco más sutil.
En el texto al cual hacemos referencia, en el momento de presentar esta distinción, Vygotsky se refiere explícitamente no a genéricas actividades didácticas de aprendizaje, sino a situaciones de resolución de problemas (*problem solving)* y distingue dos formas de esta actividad:

- *problem solving* autónomo, es decir afrontado por el aprendiz autónomamente,
- *problem solving* colaborativo, es decir afrontado por el aprendiz bajo la guía de un adulto o en colaboración con un coetáneo que ha alcanzado un mayor éxito en la actividad.

La zona de desarrollo próximo, en actividad de *problem solving*, está, por tanto, comprendida entre estas dos zonas:

- lo que un individuo sabe hacer autónomamente pertenece a la zona efectiva;
- lo que un individuo hace en colaboración podría no ser del todo adquirido en modo autónomo; pero, si dicha colaboración se dio, entonces su hacer forma parte de la zona potencial o, por lo menos, sirve para definirla y reconocerla (más aún, según Vygotsky, los resultados del *problem solving* en colaboración podrían revelar más

elementos relacionados con las competencias individuales que no el llamado autónomo).

Por tanto, la zona operativa de la didáctica es *más allá* de la zona efectiva, pero *antes* de la potencial, es decir aquella zona donde el aprendiz puede construir conocimiento. Escribe el mismo Vygotsky: «La zona de desarrollo próximo define aquellas funciones que no son aún maduras pero que están en proceso de maduración, funciones que madurarán mañana pero que en el momento actual están en estado embrionario. El nivel efectivo de desarrollo caracteriza el desarrollo mental retrospectivamente, mientras la zona de desarrollo próximo caracteriza el desarrollo mental prospectivamente».

Con el fin de testimoniar lo antes descrito, Vygotsky hizo experimentos con los cuales demostró que «aquello que hoy está en la zona de desarrollo próximo será el nivel de desarrollo efectivo mañana»; con este objetivo, consideró también los estudios de McCarthy, publicados en los años 30', que efectivamente podían demostrar esta afirmación [para tener más detalles, véase D'Amore (1997), apartado 4.4. y siguientes].

En la colaboración entre aprendiz y adulto o coetáneo más hábil, reviste seguramente un papel de extraordinaria importancia el aprendizaje por imitación, entendida no solo como pasividad repetitiva, sino como la activación de mecanismos autónomos sobre la base de un modelo comportamental exitoso que le ha sido propuesto. Por tanto, un papel central le espera a los miembros de una sociedad en el interior de la cual quien aprende está inserto: «El aprendizaje humano presupone una naturaleza social específica y un proceso a través del cual los niños se integran gradualmente a la vida intelectual de aquellos que los circundan» (Vygotsky, 1931-80).

1. 2. Los ejercicios "anticipados"

Es bien conocida por quienes se ocupan de didáctica de la matemática la distinción entre "ejercicio" y "problema", tanto que no consideramos necesario aportar citas bibliográficas. Sirve aquí recordar solamente que:

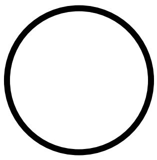
- *la realización de un ejercicio* implica, por su misma naturaleza, una actividad no creativa en la cual se emplean competencias ya adquiridas: efectuando un ejercicio el estudiante pone en juego sólo saberes ya adquiridos, no se requiere ningún acto creativo;
- por su misma definición, en cambio, *la resolución de un problema* implica poner en juego actividades creativas: el estudiante, sobre la base de sus propias competencias, debe saber organizarlas con el fin de idear una solución o usar una determinada estrategia que antes no ha sido experimentada; por lo cual, se trata de un verdadero y propio acto creativo.

Sobre la profunda diferencia de las funciones didácticas de ejercicios y problemas ya se ha escrito bastante; se puede ver por ejemplo D'Amore (1997).

Es por demás obvio que, en esta distinción, la naturaleza de un texto – estímulo es en un cierto sentido neutral. Expliquémoslo mejor. Un texto – estímulo puede ser al mismo

tiempo un ejercicio o un problema, dependiendo del ámbito en el cual viene propuesto (por ejemplo, según el nivel escolar).
Un ejemplo, elocuente según nuestro parecer, ya presentado en D'Amore 1992, es el siguiente.

Se considera el siguiente test: en una hoja de papel blanco sin líneas se dibuja una circunferencia y se invita al estudiante a medirla en cms:



¿Cuántos cms mide?

- Si este estímulo viene dado en el 3° grado de escuela media (niños de 11-14 años), esperamos que el estudiante tome la medida del diámetro en cm (a lo sumo después de haberlo trazado) y después calcule la medida de la circunferencia multiplicando la medida del diámetro por 3.14.
- Si este estímulo viene propuesto en el 3° grado de escuela primaria, los resultados son extremamente diferentes. Uno de los autores de este artículo hizo algunas pruebas sobre este texto en Argenta, provincia de Ferrara, entre 1990 y 1991, analizando el comportamiento de los niños. (Sobre tales comportamientos, no nos detendremos aquí; las pruebas fueron efectuadas, de manera no sistemática, como preliminares a una investigación, con el único fin de recoger indicios).

Es necesario testimoniar que se revela de importancia estratégica el *desear* proceder en la resolución: la pareja de procesos *motivación – volición* (Pellerey, 1993) juega un papel de extraordinaria importancia. Se sabe también que, a nivel de escuela primaria es más fácil llevar a cabo un proceso de motivación con el fin de que el estudiante active, por sí mismo, el proceso de volición.

Entonces, ¿qué es lo que distingue un problema de un ejercicio anticipado?. Es sólo, por así decirlo, la naturaleza escolar – práxica del texto: nosotros pedimos que el ejercicio anticipado sea un ejercicio estándar, de uso y consumo rutinario en la escuela, en *un cierto punto del itinerario escolar*; solo que dicho texto – estímulo viene propuesto *antes* de aquel momento.
Es obvio que el texto - estímulo contenido en un ejercicio anticipado no debe contener símbolos formales desconocidos o, más en general, términos u otros aspectos incomprensible. Aún más en general: el ejercicio anticipado se elige de forma tal que quien lo recibe este en situación de entender el *sentido* del texto escrito y el *sentido* de la pregunta.

Esta consideración nuestra, a la cual no podemos renunciar, la hacemos explícita de una vez por todas y no se repetirá en las líneas siguientes, dándola por descontada, como parte de la definición misma de “ejercicio anticipado”.

1. 3. Ejercicios anticipados y zona de desarrollo. La idea de “distancia”

Podemos por tanto afirmar, sobre la base de lo expuesto hasta aquí, que el ejercicio se juega todo en la zona efectiva; mientras el ejercicio anticipado no es otra cosa que un ejercicio de la zona de desarrollo potencial pero, por así decirlo, *transportado* algún tiempo antes, *anticipado*, precisamente.
Es por tanto intuitivo lo que sigue:

- si un ejercicio forma parte de la zona potencial, pero está demasiado lejos de la zona efectiva, su anticipación produce resultados cognitivos nulos y una actividad resolutiva (sensata) inexistente;
- si, por el contrario, el sujeto entiende el sentido de la solicitud, con la suficiente motivación para sumergirse en el intento de resolución y el deseo de enfrentarlo verdaderamente, entonces podrían producirse resultados cognitivos interesantes.

En líneas anteriores hicimos referencia a la mayor o menor “distancia” entre la zona efectiva en la cual se encuentra un individuo, con respecto a las competencias necesarias para resolver un cierto problema; y la zona potencial en la cual dicho texto debe ser considerado sólo un ejercicio. [Como ejemplo concreto, en el caso de la medida de la circunferencia, tomamos en examen alumnos de 3° grado de primaria y les dimos como problema un ejercicio del 3° grado de la escuela media].
Ahora bien, es obvio que las definiciones de zona efectiva, zona potencial y zona próxima, están ligadas a cada individuo, es decir, es un hecho puramente individual y relacionado con el objeto específico de aprendizaje; sin embargo, con el único objetivo de hacer comprensibles los procesos de investigación, definimos la idea de “distancia” entre la zona efectiva de un determinado individuo A, a quien se le ha dado para resolver un ejercicio anticipado E, y la zona potencial a la cual E pertenece por derecho como ejercicio, según la tradición difusa y compartida por los maestros (como “jueces” de estos tipos de pertenencias, consideramos siempre el juicio de maestros basándonos en su experiencia y en su criterio).
Supongamos que solo nos interese el ambiente escolar y fijemos las ideas sobre la organización escolar italiana. Si A cursa el grado $p^{\text{ésimo}}$ y E pertenece como ejercicio al grado $q^{\text{ésimo}}$, siguiendo el criterio de maestros expertos, con $p<q$, decimos que la distancia de E para A es el valor q-p. (Si q-p=0, E es un ejercicio para A). Por “grado $q^{\text{ésimo}}$” entendemos banalmente: 1° para el primer curso de la escuela primaria, 2° para el segundo curso,… 6° para la primer grado de escuela media, … 8° para el tercer grado de la escuela media, …. 13° para el último grado de la escuela superior. [En el caso de la medida de la circunferencia, la “distancia” se determinó genéricamente como 5, suponiendo que los alumnos a quienes se les propuso este texto tenían las competencias

exigidas, tanto para el grado que estaban cursando como en relación con la temática involucrada].

1. 4. Los ejercicios anticipados como ocasión de actividad

Si a un alumno en particular (SITUACIÓN AUTÓNOMA: SA) se le propone un ejercicio anticipado, podemos suponer desde ya que se pueden encontrar dos macro-tipo de respuesta actitudinal:

- si existen las condiciones para que el alumno desee a cualquier costo dar una respuesta (por ejemplo: porque se crearon las bases de una verdadera motivación), entonces el alumno pone en juego todas sus estrategias para dar una solución;
- si tales condiciones no fueron creadas o no produjeron ningún efecto sobre un alumno en particular, entonces, es bastante probable que dicho estudiante no afronte la actividad que reconoce como nueva, nunca antes afrontada, no congruente con sus propias competencias.

Definimos la primera de estas condiciones:

- SA con motivación y volición positivas (SAm);

mientras definimos la segunda:

- SA con motivación y volición deficientes (SAn).

Si a un alumno se le propone un ejercicio anticipado, pero se le asigna un adulto o un compañero que ha afrontado la actividad con éxito (SITUACIÓN COLABORATIVA: SC), podemos suponer también en este caso, dos macro-tipo de respuestas actitudinales análogas: SCm y SCn.

1. 5. Ejercicios anticipados y lenguaje

Tanto en las situaciones SA como en las SC, el lenguaje adquiere un peso significativo, aunque por razones diversas.

Iniciemos con las SA.
Para dar una explicación concreta de lo que entendemos con la precedente afirmación, volvamos al test de la circunferencia presentado líneas arriba.
Nuestra prueba fue presentada en situación SA y el mayor número de los comportamientos actitudinales fueron SAm y (casi) ningún SAn. En *todos* los casos de SAm, los alumnos operaban correctamente: hubo quien intentó medir con la regla, deslizándola a lo largo de la circunferencia; otros intentaron con el transportador, pensándolo como una… regla curva apta para medir la circunferencia; otros extendieron papel o hilo a lo largo de la circunferencia; se encontró también el caso de un niño que intentó cronometrar el tiempo que empleaba la punta de un compás en diseñar la circunferencia, para trazar después, en el mismo tiempo, gracias a una regla, un segmento de igual longitud (la circunferencia rectificada … en el mismo tiempo).

Por tanto, en *todos* los casos de SAm, los alumnos que enfrentaron este ejercicio operaron *concretamente*.

Se puede pensar que, dado que no tiene los instrumentos cognitivos, el estudiante recurre a una práctica operativa concreta, aquella que parece estar dominada por la praxis y no por las competencias teóricas (que se da cuenta de no poseer).
Al terminar la resolución del ejercicio anticipado en el caso de la circunferencia, se pedía siempre al alumno que explicara cual había sido su estrategia resolutiva; él, con voluntad comunicativa explícita, exponía en realidad lo que había *hecho*, dando ampliamente razón a Vygotsky (1931-80): «El lenguaje y la acción forman parte de una única y compleja función psíquica, dirigida a la solución de los problemas (…)».

Veamos ahora por qué el lenguaje es importante en situaciones SC.
Frente a la propuesta de ejercicio anticipado, el alumno debe entrar en sintonía comunicativa con el adulto o con el compañero más hábil que le ha sido asignado como colaborador. Este último asume el papel de guía y arrastra consigo al menos experto, recurriendo a una explicación del proceso de solución que es en general afrontada simultáneamente. En este caso, adquiere gran importancia el lenguaje como intercambio social, aspecto que también Vygotsky (1931-80) estudió ampliamente.

En las dos situaciones SA y SC, en relación con el lenguaje, estamos de frente a lo que Vygotsky llama *lenguaje externo* (con función de comunicación y, por tanto, destinado a otra persona con la intención de hacerle entender):[18]

- en la situación SAm, el lenguaje externo es usado al final del proceso resolutivo para comunicar al adulto entrevistador cual fue la modalidad seguida para la resolución, (casi) siempre de tipo práctico, heurístico: la explicación de aquello que él *hizo*;
- en la situación SCm, el lenguaje externo permite un intercambio entre alumno y adulto o coetáneo más hábil; el segundo da indicaciones al primero y el primero comenta, solicita etc.

Los dos usos del lenguaje externo son en ambos casos de la categoría *diversas formas de discurso,* una de las cuatro categorías en las cuales Duval (1996-97) categoriza el término "lenguaje".[19] Las *diversas formas de discurso* son, según Duval, por ejemplo: narración, conversación, explicación, … Nosotros agregamos: descripción de un hecho, de un objeto, de un proceso, solicitud de explicación, …

[18] A tal *lenguaje externo*, Vygotsky contrapone un *lenguaje interior* que no tiene función comunicativa y que es por tanto perceptible sólo por quien lo usa.
[19] Las otras son: *lengua* (sistema semiótico con funcionamiento propio), *función general de comunicación, uso de (cualquier) código.*

2. Problemas de investigación

Antes de continuar, declaramos que, en el caso del *problem solving colaborativo* (SC), hicimos siempre la elección de proponer como colaborador del alumno que participaba en la investigación no un adulto, sino un compañero que había alcanzado éxito en la actividad. Es presumible que, cambiando esta variable, parte de los resultados de la investigación pueden cambiar.

Uno de los objetivos de esta investigación (si queremos, secundario) era el de proponer ejercicios anticipados a distancias diversas solo para recoger tipologías de comportamiento resolutivo en el ámbito de *problem solving* en este tipo de situación.

El primer problema de investigación que nos pusimos fue el siguiente:
P1. ¿Es verdad que si existe una presencia positiva de procesos de motivación – volición, entonces los porcentajes de SAm y de SCm superan ampliamente aquellos de SAn y de SCn respectivamente?.

[Somos conscientes del hecho que para declarar “positiva” la presencia de procesos de motivación – volición se necesitarían definiciones objetivas; pensamos que, actualmente, es imposible, por lo menos para nosotros, definir la “medida” de dicha “positividad”: nos limitamos a evidenciar este aspecto gracias a las entrevistas efectuadas antes, durante y después de las pruebas, más en modo cualitativo que cuantitativo. Daremos algunos ejemplos].

Sigamos enumerando los problemas de investigación:

P2. ¿Qué influencia tiene la distancia sobre el hecho de que el resolutor pertenezca a una de las tipologías SAm, SAn, SCm, SCn?. Es decir: ¿es verdadero (o falso) que a mayor distancia, le corresponde menor empeño?.

P3. ¿Se puede confirmar en modo significativo que, al final de las respuestas en el ámbito SAm, se den en preponderancia explicaciones lingüísticas de tipo operativo, relativamente al ejercicio anticipado propuesto?.

P4. Si ante una situación SAm y SCm el individuo encuentra alguna dificultad, ¿está en grado de preguntarse: «¿Qué es lo que no sé?, ¿Qué es lo que debería saber para poder resolver este problema?.»?. Esta pregunta de investigación tiene un sentido específico. Dado que el ejercicio anticipado conserva su naturaleza de ejercicio y el estudiante entiende (por definición) el texto (o por lo menos el sentido) y la pregunta (o por lo menos el sentido), podría suceder que el estudiante, aquí más que en otra situación, se haga una pregunta de carácter metacognitivo de este tipo.

P5. ¿Qué tipo de intercambios lingüísticos comunicativos existen entre un alumno y su colaborador (compañero más hábil) en situación SCm?. ¿Es posible caracterizar dicho lenguaje de alguna forma?

P6. Supongamos que el estudiante considerado menos capaz, después de una situación SCm, al final haya obtenido éxito. En este punto le proponemos un ejercicio anticipado del mismo tipo, pero en situación autónoma SA. Nos preguntamos: ¿un resultado positivo en colaboración puede ser considerado como la base de un aprendizaje autónomo?. Si así fuese, por lo menos para la competencia en juego, ¿la distancia se ha anulado?; dicho en otras palabras, ¿para la competencia en juego la zona potencial se ha convertido en efectiva?

Se decidió hacer la investigación solo con niños de tercero de primaria considerándolos suficientemente competentes para saber leer un texto en forma autónoma y poseedores de competencias matemáticas básicas sobre las cuales sustentar la propia actividad resolutiva. Además, la edad de los niños de este grado es tal que resulta bastante fácil crear situaciones motivadoras que permitan inducir procesos de volición. Es presumible que una elección diversa de la variable *edad* pueda condicionar los resultados de la investigación, incluso modificarlos. Por ejemplo, nos dicen los colegas maestros de escuela media y superior (alumnos de 14-19 años) que es más complejo motivar estudiantes de secundaria a asumir actividades que no pertenezcan a las normales *rutinas* de clase. Resta por tanto la necesidad de efectuar pruebas con alumnos de grados superiores, aspecto al cual nos comprometemos nosotros mismos, salvo que otros investigadores deseen asumirse el trabajo.

3. Hipótesis de la investigación

H1. En relación con el problema de investigación **P1,** nuestras expectativas eran decididamente positivas. En situación motivadora, se suponía que se hubiesen creado procesos de volición tales de impulsar los sujetos examinados a asumir actitudes de resolución y a no rechazar la propuesta de los ejercicios anticipados solo porque presentaban cuestiones aún no asumidas en el trabajo de aula.

H2. En relación con el problema de investigación **P2**, la respuesta que esperábamos era positiva: a mayor distancia mayor es la renuncia a seguir el ejercicio anticipado; pero, sin embargo, teníamos la convicción que un ambiente positivamente motivador habría podido reducir la entidad de tal renuncia. En resumen, esperábamos que, de alguna forma, gracias a una buena motivación, tal renuncia no fuera tan evidente.

H3. En relación con el problema de investigación **P3**, estabamos convencidos que el trabajo autónomo sobre un ejercicio anticipado en buenas condiciones motivadores produjera básicamente trabajo operativo concreto, y no formal, y que, en consecuencia, a la pregunta del investigador sobre cómo fue encontrada la solución, los sujetos respondieran en un gran porcentaje simplemente reproduciendo su “hacer” en forma lingüística.

H4. En relación con el problema de investigación **P4**, nuestra expectativa era a favor de una cierta presencia de aspectos metacognitivos, influenciados a lo sumo por el coloquio con el investigador, quien hubiera podido hacer directamente preguntas del tipo: «¿Cuando has leído el texto, qué te has preguntado?»; o: «¿Por qué no sabrías responder?». La idea base era la siguiente: intentar de hacer emerger en forma autónoma declaraciones sobre preguntas que el resoludor se hubiera planteado acerca de su propio conocimiento (en positivo o, mejor aún, en negativo) en el momento en el cual asumió la responsabilidad del proceso de resolución.

H5. En relación con el problema de investigación **P5,** teníamos la certeza que, con una buena comunicación, en el interior de una situación colaboradora, los dos estudiantes (el experto y el menos experto) habrían tenido intercambios lingüísticos interesantes; esperábamos que estos intercambios estuvieran caracterizados por preguntas del segundo al primero y de explicaciones (es decir afirmaciones) del primero; por tanto, de la categoría “diversas formas del discurso” de Duval. Esperábamos que se pudiese caracterizar este lenguaje como “colaborador” en el sentido que los dos dialogantes habrían mostrado, en su actitud lingüística, exactamente los papeles que nosotros les habíamos asignado.

H6. En relación con el problema de investigación **P6**, nuestra expectativa era positiva; es decir, esperábamos tener una explícita confirmación empírica de la hipótesis según la cual un aprendizaje colaborador subordinado en una situación SCm produce aprendizaje autónomo, es decir en situación Sam. Ahora bien, no parece del todo posible poder declarar en modo riguroso que, a través SCm, se anticipe una parte cognitiva de la zona potencial, transformándola en efectiva; y sin embargo, ésta era nuestra expectativa, al menos en parte.

4. Metodología de la investigación

Fueron elaborados algunos textos, con la importante ayuda de colegas maestros de escuela elemental y media, cada uno de los cuales elegido en un determinado nivel escolar, nivel que venía confirmado por los mismos colegas; cada texto debía representar, en el ámbito al cual se refería, un ejercicio.

La metodología adoptada fue la siguiente.
Tomamos como grupo de trabajo 3 cursos de tercero de primaria, para un total de 48 niños (en realidad se trataba de un total hipotético de 51 niños, pero durante los días destinados a las prueba 3 estaban ausentes). Las pruebas fueron efectuadas en la escuela elemental "Villaggio Kennedy" de Perugia por Ines Marazzani y en la escuela elemental "Iqbal Masih" de Lido Adriano (Ra) por Giuliana Liverani (a quienes les agradecemos su gran profesionalidad). Todas las pruebas fueron realizadas en clases donde la titularidad no era de las maestras que realizaban la prueba.
Se empleó en cada caso todo el tiempo necesario para entrar en sintonía con los alumnos y crear un clima de confianza. Después se creó un ambiente de fuerte motivación para buscar una solución del ejercicio "de los niños más grandes", como en un desafío importante. No entramos en detalles sobre "cómo" esto fue posible; lo que cuenta es que, según nuestra opinión, el ambiente motivador fue alcanzado (más adelante veremos la confirmación de esta afirmación con declaraciones elegidas entre aquellas expresadas por los niños durante las entrevistas).
En cada clase, los niños eran invitados a resolver un ejercicio anticipado. Se disponían de los textos que ilustraremos más adelante; éstos eran distribuidos en forma aleatoria a los estudiantes.

La verificación de P1 [¿Es verdad que si existe una presencia positiva de procesos de motivación – volición, entonces los porcentajes de SAm y de SCm supera ampliamente aquellas de SAn y de SCn respectivamente?] fue hecha simplemente contando los casos de aceptación de la tarea y los casos de rechazo. Se entrevistaron los niños, para conocer las motivaciones que los habían llevado a hacer esta elección y para tener informaciones sobre el ambiente de motivación creado. Tal verificación fue hecha en la totalidad de los 48 alumnos (de ellos, un solo alumno ha declarado de no desear participar en las pruebas y se excluyó personalmente).

La verificación de P2 [¿Es verdad, o no, que a mayor distancia le corresponde menor empeño?] se obtenía por confrontación con el análisis precedente.. La verificación se hizo sobre 47 alumnos.

La verificación de P3 [¿Se puede confirmar de forma significativa que, en la fase final de las respuestas en ámbito SAm, se den en preponderancia explicaciones lingüísticas de tipo operativo, relativamente al ejercicio anticipado propuesto?] se obtenía gracias a entrevistas individuales efectuadas sobre estudiantes que habían trabajado de forma autónoma, dando respuestas de un cierto interés. Tal verificación fue hecha entrevistando 30 alumnos.

Cuando los estudiantes terminaban su trabajo, se verificaba si, para un determinado ejercicio anticipado, se daban resultados positivos (el estudiante había afrontado de alguna forma el problema) o negativos (el estudiante después de algunas pruebas, abandonaba). En este punto se formaban parejas de un alumno que había renunciado, o que no había logrado dar una respuesta, y un compañero más hábil, elegido porque había afrontado correctamente el mismo ejercicio. Se pasaba, por tanto, de situación SA a SC. Como habíamos dicho, pudimos analizar 47 casos de SA, mientras logramos analizar sólo 4 casos de SC (4 parejas, es decir 8 alumnos). Varias de las otras parejas que habíamos formado o no llevaron a terminó la tarea o se alejaron de ésta.

La verificación de P4 [en el cual nos interrogábamos sobre consideraciones de carácter metacognitivo de parte del estudiante] se obtenía, gracias a entrevistas individuales efectuadas a estudiantes que habían trabajado ya sea en forma autónoma, ya sea en forma colaboradora, eligiendo aquellos estudiantes que, al menos al inicio, habían manifestado dificultad. Tal verificación fue hecha entrevistando los 4 alumnos "menos capaces" de las 4 parejas precedentes.

La verificación de P5 [donde se buscaba analizar los diferentes tipos de intercambios lingüísticos comunicativos entre el alumno y su colaborador más hábil en situación SC y, si es posible, caracterizar de alguna forma dicho lenguaje] fue hecha registrando todos los 4 coloquios SC y después escuchándolos y analizándolos cuidadosamente.

La verificación de P6 [¿Un resultado positivo colaborador SCm puede ser considerado como la base de un aprendizaje autónomo? Por tanto, ¿para dicha competencia en juego, la zona potencial se ha convertido en efectiva?] fue hecha como a continuación se describe. De las 4 parejas que trabajaron en situación SC, consideramos que 3 casos se podrían determinar como positivos. Entregamos entonces, a los tres alumnos "menos capaces" de cada pareja, un ejercicio anticipado, diferente de aquel que había sido objeto de trabajo con el compañero más hábil, pero con la misma distancia y del mismo tipo [para esta elección, seguimos las indicaciones de los maestros expertos; algunos de los ejercicios propuestos están reportados más adelante]. Se hicieron por tanto 3 pruebas seguidas siempre de entrevistas. [En realidad, además de las 4 parejas que definimos precedentemente como "analizadas con mucho rigor", trabajaron en situación SC otras parejas; pero, dado que algunas de estas se dispersaron en el proceso, no las estudiamos en forma científicamente atendible. Sin embargo, algunas de estas contribuyeron a dar una respuesta a la pregunta de investigación P6 y por tanto estas informaciones serán utilizadas].

Los textos de los ejercicios anticipados que habíamos usado son los siguientes, presentados en distancia creciente.

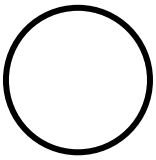
Test

Ejercicios anticipados de distancia 1 respecto al 3° grado de escuela primaria.

Test 1.1
Un comerciante compra mercancía y gasta 100 euros; si desea una ganancia de 40 euros, ¿a cuánto debe revender la mercancía?.

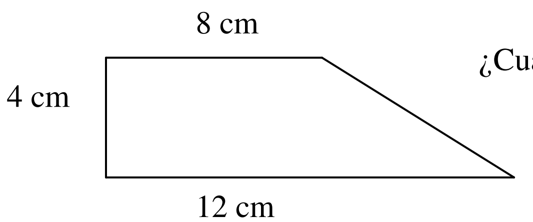
Ejercicios anticipados de distancia 2 respecto al 3° grado de escuela primaria.

Test 2.1



¿Cuántos cms mide el contorno de la figura?.

Test 2.2



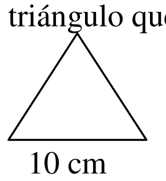
¿Cuánto mide la superficie?.

[Dicha figura estaba realizada en papel blanco y las medidas aquí indicadas eran exactamente iguales a las presentadas en el dibujo; esto se hizo así porque entre las estrategias esperadas estaba precisamente el que los alumnos hicieran la cuadratura de la superficie para luego contar los cuadrados internos].

Test 2.3
Calcula cuánto vale la siguiente expresión:
[(5-2)×3]+[2×(3-1)]
[Es verdad que en tercero de primaria los alumnos aún no conocen la sintaxis de la escritura aritmética; sin embargo no se excluye el hecho que algún niño pueda intuir el orden de las operaciones, más por la concatenación de los paréntesis que no por la prioridad establecida universalmente. Además, hacemos notar que se evitaron los casos en los cuales se debe establecer la prioridad entre operaciones sin paréntesis].

Test 2.4

Mide el área de este triángulo que tiene todos los lados iguales.



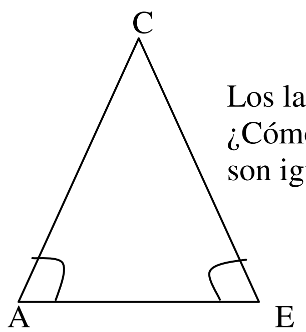
Test 2.5
Un televisor cuesta 400 euros, pero se vende con el 25% de descuento, es decir por cada 100 euros se ahorran 25 euros. ¿Cuánto se debe pagar para comprar dicho televisor?.

Ejercicios anticipados de distancia 5 respecto al 3° grado de primaria.

Test 5.1
Para pegar 100 baldosas un albañil emplea 6 horas; ¿cuántas horas empleará, si debe pegar 300 baldosas?.

Ejercicios anticipados de distancia 6 respecto al 3° grado de primaria.

Test 6.1



Los lados AC y EC son iguales.
¿Cómo se puede demostrar que los ángulos Â y Ê son iguales?.

Ejemplo de test de control.

Test de control para 1.1

Para surtir una floristería se compran rosas por 120 euros. ¿A cuánto se deben vender si se desea obtener una ganancia de 20 euros?.

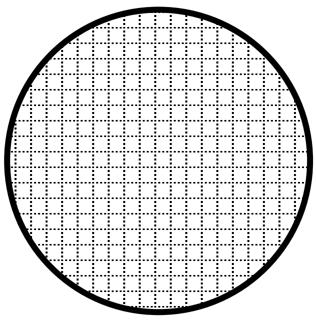
Un vendedor de fruta adquiere cajas de fresas por 150 euros. ¿A cuánto debe vender las cajas de fresas si desea una ganancia de 200 euros?

Test de control para 2.1

Lucas, siguiendo el borde de un vaso con el lápiz ha dibujado en su cuaderno la circunferencia que te presentamos. ¿Cuánto mide la circunferencia que ha dibujada Lucas?.

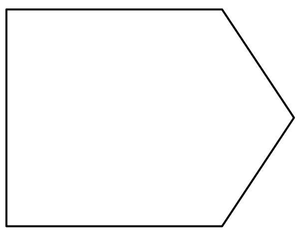
(Se le entrega una hoja con el dibujo de una circunferencia).

Una modista debe bordar el centro de raso de la forma dibujada. ¿Cuántos centímetros de hilo se necesitan para delinear el borde?.



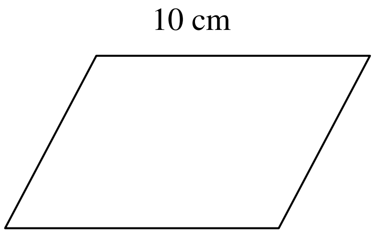
Test de control para 2.2

8 cm



Cuánto mide la superficie?.

Test de control para 2.2



¿Cuánto mide la superficie?.

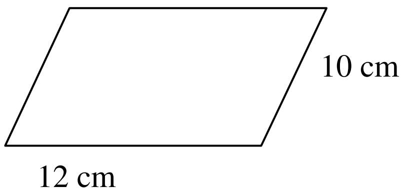
Test de control para 2.3
Calcula la siguiente expresión

$[(11 \times 3) - 5] + [\ (4 + 3) \times 2]$

Calcula la siguiente expresión

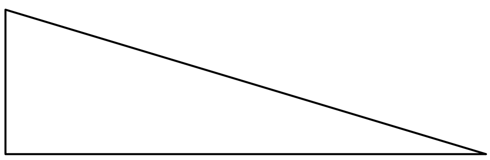
$[(24 \div 6) + 4] \times [(42 \div 7) - 5]$

Test de control para 2.4



Mide el área de este paralelogramo.

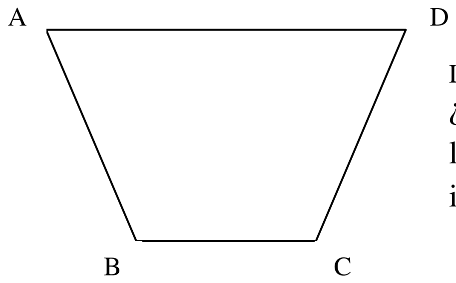
Mide el área de este triángulo que tiene los tres lados de diferente medida.



Test de control para 2.5
Una falda cuesta 100 euros, pero se vende con el 50% de descuento, es decir, por cada 100 euros el cliente se ahorra 50. ¿Cuánto debe pagar quien compra esta falda?.
Una bicicleta cuesta 200 euros, pero se vende con el 15% de descuento, es decir, por cada 100 euros el cliente se ahorra 15. Bajo estas condiciones, ¿cuánto debe pagar el cliente que compra esta bicicleta?

Test de control para 5.1
Marcos se entrena todos los días en atletismo; para correr 100 metros emplea 20 segundos; ¿cuántos segundos empleará para correr 400 metros, suponiendo que vaya con la misma velocidad por todo el trayecto?
Para preparar 50 pasteles a la crema, un pastelero emplea 2 horas; si debe preparar 400 pasteles, ¿cuántas horas empleará?

Test de control para 6.1



Los lados AB y CD son iguales.
¿Cómo se puede demostrar que los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{D}$ son iguales?.

5. Resultados de la investigación, discusión de los resultados y respuestas a las preguntas de investigación

En relación con la pregunta de investigación P1, de los 48 alumnos involucrados en la actividad, solo 1 ha rechazado la invitación a participar (aunque por todo el tiempo estuvo observando lo que sucedía a su alrededor). Su declaración fue la desconfianza en sus propias posibilidades para afrontar tareas presentadas como pertenecientes a clases sucesivas.
Por tanto 47 niños, oportunamente involucrados, pasando de la motivación a la volición, se empeñaron (con mayor o menor éxito) en el proceso de solución de problemas que están fuera de su labor escolar cotidiana y que pertenecen por derecho a ejercicios de niveles escolares posteriores.
Por tanto, la respuesta a la pregunta de investigación P1 es positiva y coincide con nuestras expectativas.

Con respecto a P2, se tiene la seguridad que una buena motivación garantizó la aceptación del desafío; en su conjunto, los 47 niños involucrados mostraron explícitamente el gusto de afrontar pruebas que están más allá de sus competencias; es más, en varias ocasiones pidieron continuar avanzando. Esto, tanto en la situación SA como en la situación SC.
Nuestra hipótesis H2, por tanto, fue desmentida en su posición objetiva, pero confirmada donde suponíamos que una buena motivación habría podido remediar el

temor, reduciéndolo. Así fue, gracias ciertamente al óptimo trabajo de las dos investigadoras que condujeron la prueba.

Con respecto a P3, los comentarios de los alumnos en lo relacionado con la realización de las pruebas son del todo operativas: «Mire como lo hice», «Mire, lo que hice fue…», «Así fue como lo hice», … No existe por tanto forma alguna de generalización en lo que respecta a la ejecución, solo una única y simple repetición de las fases de ejecución. Esto confirma completamente nuestra hipótesis H3.

Con respecto a P4, necesitamos hacer una profunda distinción que no habíamos previsto.
En situación SA, el estudiante no se pone, en general, en prospectiva metacognitiva; si el ejercicio anticipado era resuelto (bien o mal, esto poco importa) entonces era simple («Lo puede hacer», «Era fácil», …); incluso una vez visto, con el entrevistador, que la solución no era correcta, el estudiante no se plantea problemas de tipo metacognitivo y, si se enfrenta a la pregunta del entrevistador, escapa a esta modalidad y se refugia detrás de un simple «No lo supe hacer»,«No sabía qué hacer»,… incluso si, por el contrario, una respuesta (aunque errada) había sido dada.
La situación SC cambia completamente las cosas. El estudiante se interroga sobre qué (o qué no) ha funcionado y, en varias ocasiones, lo pide él mismo al propio compañero más hábil, o lo confiesa, o lo confirma, incluso de forma autónoma.
Una comunicación entre pares favorece ampliamente la disponibilidad del alumno a plantearse problemas metacognitivos; una comunicación con el adulto lo lleva a atrincherarse detrás de razones banales. En el caso del contacto con el compañero, se tiene la clara impresión que el menos capaz desee justificar su propio fracaso dándole un motivo; en el caso del contacto con el adulto, parece que esto no tenga importancia.

Con respecto a P5, el lenguaje usado entre el menos y el más capaz, en las parejas, es absolutamente caracterizable a la Duval (1996 –7) según la tipología "diversas formas de discurso" ya descritas por nosotros al final del apartado 1.5., en modo colaborador. La cuestión es de una evidencia total y se verifica también en lo que tiene que ver con sujetos poco propensos a esta forma de intercambio lingüístico en general, como nos aseguran los maestros titulares de las clases.

Antes de seguir, deseamos confirmar la gran volición de parte de los niños tanto en situación SA como en situación SC para afrontar las tareas propuestas.

Con respecto a P6, en fin, las pruebas hechas fueron demasiado pocas para poder afirmar con seguridad que el haber hecho una tarea en situación SC, de parte de un alumno que antes no había tenido éxito, en compañía con un compañero más capaz que antes había obtenido un resultado positivo, haya creado conocimiento. De cierto, 3 niños de los 4 que participaron correctamente en la prueba, supieron realizar con

evidente y total seguridad un nuevo ejercicio anticipado de tipo análogo al que antes no había obtenido éxito. (En realidad, como lo habíamos ya dicho, las pruebas positivas fueron más de las 4 aquí descritas, pero no podemos tenerlas en cuenta ya que las fases previstas y descritas por nosotros no fueron seguidas del todo correctamente; sin embargo, los resultados “clamorosos” de niños que, después de no haber tenido éxito en situación SA, conducidos de la mano en SC, obtuvieron resultados positivos, fueron más del 75%).
Como una forma de confirmación de lo anteriormente dicho, he aquí lo que dice un niño de los 3 que consideramos anteriormente:
Diego:
«Es fácil, entendí todo. Sabe, maestra, yo vengo de Ecuador y muchas veces aún no entiendo, pero esta vez ¡entendí todo!. Me divertí tanto porque son ejercicios difíciles, no como aquellos de la escuela que no los entiendo. Aquí debo pensar y no hacer solo lo que la maestra me dice, aquí puedo hacer como quiero yo»;
después de esta declaración, se ofrece para ayudar a una niña (perteneciente a otra pareja) que no había logrado resultado positivo: en este punto, siente que puede pertenecer al grupo de “compañero más capaz”.

6. Conclusiones y notas didácticas

El fin último de la investigación empírica es, según nuestra opinión, intentar de aprovechar los resultados para modificar o al menos influenciar la práctica de aula en sentido positivo.
De estas pruebas resulta más que evidente que se necesita analizar las unilaterales metodologías didácticas maestro–alumno, aprovechando aún más la colaboración entre compañeros.
Además, el temor que tienen a veces los maestros de proponer tareas que podrían no ser resueltas positivamente por parte de los alumnos, parece ser injustificado; si el motivo de este temor esta ligado a la posible desilusión del estudiante que no alcanza el éxito esperado, basta intervenir, como aquí se ha mostrado, sobre el proceso de motivación y de volición. No lograr resolver un problema difícil no es visto como un resultado negativo y puede ser el estímulo para trabajar en pareja, para construir conocimiento.
Naturalmente esta elección metodológica debe modificar ciertas convicciones del maestro sobre el currículo y sobre la evaluación.

Por lo que respecta al currículo, se necesita que sea considerado como un instrumento dúctil, que se adecue a las elecciones de aula y no, al contrario, que las condicionen, como, de otra parte, sugieren los estudios más modernos (Fandiño Pinilla, 2002).
Por lo que respecta a la evaluación, no lograr éxito en una tarea no se consideraría como algo negativo, sino como un precio a pagar por la construcción del conocimiento; es la

mejor forma para cambiar la idea de evaluación, ampliándola no solo al alumno, sino al currículo y a la eficacia de la acción del maestro, cuanto menos (Fandiño Pinilla, 2002).
En todo esto, parece tener un papel teórico excelente el análisis de la situación de aula, que parten del triángulo de la didáctica y de las reflexiones más maduras posibles al respecto (D'Amore, 2004; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2002).

7. Cómo los niños resuelven los ejercicios anticipados propuestos

Nada tiene que ver con la investigación; sin embargo, podría despertar curiosidad en algún lector saber *cómo* los alumnos resolvieron los test propuestos.
Haremos por tanto un rápido recorrido con el único fin de satisfacer esta curiosidad.

Test 1.1.
Muchas fueron las respuestas equivocadas; casi todos los que se equivocaron, en lugar de hacer la adición 100+40, efectúan la sustracción; no faltaron, sin embargo, quienes hicieron 100÷40. Quien no sabe qué hacer, dibuja; tenemos 3 dibujos (sobre 47 alumnos) de personajes y de casas (!). En varios casos el carácter abstracto de la mercancía se concretiza; por tanto el comerciante vende y compra artículos bien precisos. En un caso, el resultado 140 indica «las personas que deben comprar».
Una nota; el mayor porcentaje de errores se concentró en una clase en la cual rige el contrato explícito de resolver problemas atendiendo a formalidades, escribiendo primero los datos "útiles" y después los datos "superfluos" (que un niño escribe: "superfilos"), una confirmación más del daño que este tipo de obligación poco natural crea en el alumno. La concentración de los niños se centra toda en este aparato "formal" y deja de lado el sentido lógico de lo que se debería hacer (y por lo cual su trabajo será evaluado).

Test 2.1.
La prueba fue superada (de alguna forma) por la mitad o poco menos de los alumnos, en el sentido que ellos "inventan" alguna modalidad para efectuar la medida de la circunferencia. La mayor parte extiende un hilo y después lo mide rectificándolo (obteniendo todo tipo de resultados). Muchos fueron quienes midieron sin ningún criterio, por ejemplo subdividiendo la circunferencia en partes para después simplemente contarlas. Hubo quien cuenta cuantas veces la punta del lápiz está sobre la circunferencia. Hubo quien traza dos diámetros perpendiculares y da la medida de "ancho" y "largo" (con poca relación con la realidad, tanto que un niño declara que estas medidas son respectivamente 2 y 3 kilómetros). Y así muchos otros casos. Hay quien recuerda de haber usado la imagen del círculo para introducir las fracciones y afirma que la circunferencia mide 2/3.

Test 2.2.

Este fue uno de los test que causó mayor dificultad; las medidas efectuadas y/o declaradas parecen ser casuales, incluso cuando los niños se comportaron según nuestras previsiones, cuadriculando de cualquier forma la parte de la hoja contenida dentro de la figura. Pocos fueron los niños que contaron los cuadrados, pero de estos casi todos dejaron de considerar las secciones donde no había un cuadrado completo o, al contrario, las contaban como si fueran completas. Pero, la idea de superficie es muy distinta de aquella de perímetro, aunque la terminología no es exacta, (la superficie es, por ejemplo, «la parte que está dentro»). Muchos fueron los niños que midieron los lados del cuadrilátero e hicieron la suma.

Test 2.3.
Paradójicamente, este test, que usa convenciones aún no conocidas en la escuela primaria, fue objeto de atracción y de curiosidad y, en suma, tuvo una aproximación nada negativa.
El error más difundido es que, en el primer sumando las cosas proceden bien:
5-2=3
3×3=9
pero después, a este 9 se le suma el 2 y no se efectúa el calculo análogo dentro del paréntesis cuadrado del segundo sumando.
Solo un niño de todos los 47 declara no entender que debe hacer y que «los números son demasiado difíciles».

Test 2.4.
Totalmente fuera del alcance de los niños del 3° grado de primaria. Entre las respuesta se encontró de todo.

Test 2.5.
Porcentaje muy bajo de repuestas exactas, calculadas de diversas formas. Entre estas, hay quien resta 25 4 veces partiendo de 400; quien hace 25×4 y después lo resta de 400; quien resta de 100 el descuento de 25 4 veces, obteniendo 75, que después multiplica por 4.
Los errores de solución van del «No entiendo», al «400 euros», al dibujo de un televisor, al 400+25 etc.
De hecho, quienes se agarran a las formalidades para evidenciar datos y cosas del mismo estilo, no resuelve el problema y efectúa cálculos al azar.

Test 5.1.
Es frecuente la respuesta correcta 18, obtenida multiplicando 6 por 3, lo que significa que se inclinan por un razonamiento intuitivo más que por el cálculo. Hay quien intenta explicar el razonamiento.
Todos los niños que tienen la tendencia a trabajar siguiendo formalidades no logran un resultado positivo. Una de las preguntas que se ponen siempre por escrito dentro de la

casilla coloreada, es: «(¿Cuáles son los) Datos que faltan?». No entendemos cómo se pueda responder a una pregunta hecha de esta forma, evidentemente establecida por contrato explícito, dada la frecuencia con la que aparece en todos los alumnos.

Test 6.1.
Contrariamente a lo que podríamos esperar, la palabra "demostrar" se interpreta, de forma bastante correcta, como una "justificación"; cierto NO se encuentra ninguna demostración en el sentido adulto, pero sí un gran número de niños intentan explicar cómo podría justificarse tal afirmación: midiendo los ángulos (especialmente en centímetros, pero también en grados), midiendo los lados, calculando etc.

Por lo que respecta a los test de control, los resultados positivos son mucho más altos; de otra parte la pareja esta dirigida por un niño que ya había logrado dar una respuesta correcta en la tarea.
Por último, no presentamos los test que fueron necesarios para responder P6, es decir si el haber trabajado en situación SC produjo aumento del conocimiento, porque fueron del todo análogos a los ya reportados.

Bibliografía

D'Amore B. (1992). Novità nella didattica della matematica. *L'educatore*. 4, 62-67. [Primeras comunicaciones sobre el tema de los "ejercicios anticipados" son precedentes, como la efectuada por el autor en el VI *Incontro Internuclei della Scuola Elementare*, Garda, 11-13 abril 1991].

D'Amore B. (1997). *Problemas. Pedagogía e psicología de la matemática en la actividad de problem solving*. Madrid (España): Síntesis. [La primera edición de este libro en italiano es del 1993].

D'Amore B. (2004). *Elementos de didáctica de la matemática*. México D.F. (México): Grupo Editorial Iberoamérica. [La primera edición de este libro en italiano es del 1999].

D'Amore B, Fandiño Pinilla (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática*. 14, 1, 48-61.

Duval R. (1996-97). Représentation et représentations. Séminaire U.D.R. et F.F. No publicada..

Fandiño Pinilla M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna (Italia): Pitagora.

Pellerey M. (1993). Volli, sempre volli, fortissimamente volli. La rinascita della pedagogia della volontà. *Orientamenti pedagogici*. 6, 1005-1017.

Vygotsky L.S. (1931-1980). *Il processo cognitivo*. Torino (Italia): Boringhieri. En español: Vygotsky L.S. (1977). *Pensamiento y Lenguaje*. Buenos Aires (Argentina): La Pléyade.

Los autores agradecen al Colega y Amigo Juan Diaz Godino por su lectura crítica hecha a este trabajo antes de su edición.

80. Fandiño Pinilla M.I. (2005). Competenza e valutazione: una sfida dell'educazione di oggi. In: Benini AM., Gianferrari L. (eds) (2005). *Valutare per migliorarsi*. Napoli: Tecnodid. 40-48.

Competenza e valutazione: una sfida della educazione di oggi

Martha Isabel Fandiño Pinilla[20]

La pianificazione dei fenomeni didattici non avviene a caso; essi sono il risultato di complessi meccanismi attraverso i quali il Sapere si trasforma in "sapere da insegnare":

Sapere
$\Downarrow$ *Trasposizione didattica*
Sapere da insegnare
$\Downarrow$ *Realtà dell'azione didattica*
Sapere insegnato
$\Downarrow$ *Realtà dell'apprendimento*
Sapere appreso
$\Downarrow$ *Costruzione della conoscenza*
Sapere competente

L'apprendimento della matematica è fatto sistemico e complesso e consta di almeno 4 componenti distinte:

---

[20] NRD Università di Bologna (Dipartimento di Matematica); Università di Urbino; Università di Bolzano; Alta Scuola Pedagogica di Locarno.

• Apprendimento di concettiApprendimento algoritmicoApprendimento “strategico”Apprendimento comunicativo

Il termine “valutazione”

“Valutare” significa emettere un giudizio sopra qualche cosa; pertanto, la valutazione implica una ricerca: è un’azione permanente per mezzo della quale si cerca di dare un senso, stimare, emettere un giudizio.

Nel nostro contesto, il giudizio deve essere dato sui processi di sviluppo dell’allievo, sui suoi risultati, al fine di renderne il livello più alto e di migliorarne la qualità.

Gli aspetti da valutare

Per quanto si riferisce ai processi di sviluppo degli allievi, si cerca di determinarne:i progressi raggiunti in relazione alle competenze e agli obiettivi proposti,le conoscenze che essi hanno acquisito o costruito e fino a che punto si sono appropriati di queste,le abilità e le capacità che hanno sviluppato,gli atteggiamenti ed i valori che hanno assunto e fino a che punto tutto ciò si è consolidato,dato che la valutazione nell’ambito scolastico implica una inter - relazione personale, si trasforma in una relazione tanto “intellettuale” quanto “affettiva.

La valutazione tradizionale

La valutazione tradizionale era il risultato di una serie di discussioni che avvennero lungo il corso del XX secolo, discussioni sviluppatesi a causa di alcune tendenze della ricerca scientifica (Positivismo) che privilegiavano la misura oggettiva, la quantificazione e la sperimentazione su basi percentuali. Si misero così in evidenza in tutti i casi possibili le prove oggettive; questa tendenza si sta ora allontanando dalla Scuola e ci si sta dirigendo verso una valutazione di tipo qualitativo che richiama lineamenti di teorie critiche e problematicistiche (l’Epistemologia genetica ed il Razionalismo critico).

La valutazione cosiddetta “critica”

è interpretativa e critica, appunto, dà enfasi ai processi (senza prescindere dai prodotti, ma senza riconoscere ad essi tutta l’importanza che spesso ricevono), è “democratica”, “orizzontale”, “strategica” (con lo scopo di motivare), è “permanente” e “continua”, fa uso di procedimenti molteplici, è “flessibile” e “aperta”, comporta un’azione comunicativa, si basa sulla psicologia cognitiva.

Strategie di valutazione.

L’*autovalutazione*, nella quale gli stessi attori del processo educativo valutano ciascuno la propria attività; questa strategia è efficiente nella misura in cui aiuta l’allievo nella sua formazione integrale, rendendolo responsabile e dando fiducia alla sua autonomia (ne sono esempi: *l’autocorrezione*, il portfolio, …);la *covalutazione*: è la valutazione reciproca che fanno i componenti di un gruppo; è importante lavorare con l’obiettivo di riconoscere capacità, risultati e mancanze, al fine di trovare mezzi per migliorare e non per sanzionare o punire;la *eterovalutazione* è la valutazione che fa un soggetto circa

l'impegno di altri, in modo unilaterale; è una strategia con la quale si misura il "rendimento" degli allievi; l'eterovalutazione, intesa in modo tradizionale, cioè verticale, a volte si considera come l'unico mezzo di valutazione; così facendo, corre il rischio di trasformare la valutazione da processo educativo in atto coercitivo e sanzionatorio e di trasformarsi in qualche cosa che può essere interpretato come non condiviso e dunque non compreso e "ingiusto".
Per che cosa si valuta?
Per prendere decisioni circa il contenuto (trasposizione didattica) e circa la metodologia del lavoro in aula (ingegneria didattica).Per prendere decisioni circa il contenuto (trasposizione didattica) e circa la metodologia del lavoro in aula (ingegneria didattica).Per prendere decisioni circa l'ambiente di classe. In un'ipotesi costruttivista, è dato per certo che l'*implicazione personale* è il primo passo verso l'apprendimento; dunque valutare se questa è stata raggiunta è un passo di straordinaria importanza.Per comunicare quel che è importante. Gli allievi sono capaci di riconoscere quel che l'insegnante implicitamente considera come importante.
Per dare un "voto". È l'ultima delle ragioni per le quali valutare. Gli allievi devono avere chiaro che *valutare* non è sinonimo di *dare un voto*. Quando si dà un voto, si deve tener presente:
•l'uso di diversi strumenti e tecniche;
•è possibile che il lavoro dell'allievo sia diverso quando egli sa che il lavoro che sta producendo serve per ricevere un voto;
•occorre usare sempre un sistema di votazione che tenga in conto tanto il processo quanto il prodotto ed è basilare che gli allievi sappiano preventivamente che un certo lavoro, che stanno eseguendo, è oggetto di valutazione.

Gli strumenti per valutare

L'osservazione: richiede l'esame attento dei processi di formazione degli allievi;l'intervista: è un colloquio che segue uno schema prestabilito; permette di centrarsi su determinati aspetti;il questionario: è l'applicazione di una successione di domande al fine di ottenere informazioni su un determinato problema, tema o situazione;la sociometria: tecnica presa dalla psicologia; consiste nella proposta di un test al fine di identificare la posizione ed il compito dei membri di un gruppo all'interno di esso;la discussione in aula: si tratta del dialogo tra tutti gli allievi in relazione ad un tema pre – determinato, nel quale chiunque può essere emittente o ricevente;
i lavori degli allievi: sono tutte le attività, compiti, esercizi, progetti, prove oggettive, saggi, prove scritte a tema assegnato ma libere nella forma (in matematica si chiamano TEPs e sono molto diffusi), prove a libro aperto e portfolio etc., che realizzano gli allievi in forma individuale o in gruppo, in aula o fuori di essa.
Strumenti non tradizionali

Le prove scritte a tema assegnato ma libere nella forma sono strumenti per evidenziare le reali conoscenze e competenze degli allievi su certi concetti in ambito disciplinare; in

matematica sono stati parecchio studiati ed usati ed hanno assunto il nome di TEPs (testi scritti autoprodotti); si tratta di far scrivere in forma libera gli allievi su temi che riguardano concetti specifici; per riuscire in ciò, occorre che lo studente abbia non solo la sufficiente *motivazione* ad esprimersi, ma la necessaria *volizione*.Le *prove a libro aperto* sono attività nelle quali si permette agli allievi di consultare testi, quaderni o qualsiasi altro tipo di mezzo per poter risolvere un esercizio o un problema; si oppone all'apprendimento a memoria; il compito dell'insegnante è quello di proporre situazioni che stimolino la riflessione, la creatività, il processamento di risposte a partire da informazioni che l'allievo può trovare con qualsiasi mezzo, però che non può limitarsi semplicemente a trascrivere, ma che deve interpretare personalmente.Il *portfolio* consiste nella raccolta *critica* da parte dell'allievo (*portfolio*, appunto), dei lavori che egli realizza sopra un dato tema, un progetto o un'unità di lavoro; questa raccolta si chiama anche "*biografia di lavoro*"; in tale raccolta si evidenziano momenti di produzione libera oppure guidata, manuale, intellettuale, ma limitata nel tempo. L'allievo deve assumere un atteggiamento critico, selezionando quei lavori che gli danno una maggiore soddisfazione intellettuale o d'altro tipo, o che a suo avviso meglio dimostrano i suoi progressi, accompagnando tale scelta con una riflessione scritta relativa al proprio progresso conoscitivo.
Quali sono le caratteristiche di una valutazione?
La valutazione dovrebbe essere:
continua: si realizza in modo permanente sulla base di una successione che permette di dare un valore tanto al progresso come alla difficoltà di ciascun allievo;*integrale*: tiene conto di tutti gli aspetti e delle diverse dimensioni dell'individuo;*sistematica*: organizzata sulla base di principi pedagogici e messa in relazione con gli scopi dell'educazione;*flessibile*: d'accordo con i ritmi di sviluppo dell'individuo; pertanto deve considerare la "storia" dell'allievo, i suoi interessi di base e le sue capacità, i suoi limiti ed i suoi cambi di interesse;
interpretativa: cerca di comprendere il significato dei processi e dei risultati e non solo la loro evidenza finale.

"Diventare competente": una sfida con radici antropologicheLa *competenza* è oggi da tutti riconosciuta come qualche cosa di più che una *conoscenza*, ben di più che un "saper fare in un dato contesto", come vari Autori la definivano al momento iniziale del dibattito.
La competenza implica necessariamente anche un "*voler* fare", dunque chiama immediatamente in causa fatti affettivi, come volizione e atteggiamento.La tensione umana non è vòlta solo al comunicare, come talvolta si sente dire (l'uomo come animale comunicativo); egli può/vuole trasformare il sapere appreso in un nuovo sapere, quello che gli permette di processare le informazioni possedute e cercare quelle che gli permettono di risolvere una nuova situazione problematica, se ha deciso di affrontarla.Man mano che si soddisfa una necessità e in base a come questa necessità è

soddisfatta, sorge una necessità nuova. È il gruppo sociale, nel quale si trova inserito l'individuo, che determina necessità e priorità che devono essere soddisfatte. L'analisi ed il trattamento di questa problematica si assume all'interno di quel che tutta la società chiama *Educazion*e.La possibilità che dentro ad un gruppo sociale sorgano forme di espressione complesse, tanto intellettuali quanto estetiche o etiche, dipende dallo sviluppo cognitivo dei suoi membri e dal modo in cui questi affrontano problemi facendo, dell'integrazione dei diversi saperi e delle motivazioni, una costante di azione.Alla base di questa costante d'azione, c'è sempre un processo psichico - intellettuale che potremmo identificare con la coppia: motivazione – volizione.

Modi di intendere la motivazione

Ogni problema può essere presentato come la ricerca della soddisfazione di una necessità avvertita dalla società stessa, nella sua generalità, il che fa sì che gli interessi personali di ciascuno si trasformino nell'interesse del gruppo sociale di appartenenza.

L'interesse del soggetto sta nel tentativo di soddisfare le sue proprie necessità e nello studio – analisi – conoscenza delle proprietà dell'oggetto (inteso non solo in senso fisico) che si ritiene possa soddisfarle.

Una terza tendenza considera l'importanza della motivazione come qualche cosa di intrinseco, specifico, tipico dell'essere umano, una sua vera e propria propensione naturale.

Matematica e apprendimento

L'apprendimento della matematica va molto oltre le condizioni nelle quali si apprende un linguaggio (sintassi, semantica e pragmatica); la matematica non è (solo) un linguaggio in sé stessa, dato che non si è formata con lo scopo di comunicare *ogni* tipo di pensiero dell'essere umano. l linguaggio della matematica, infatti, si creò per comunicare *certe* specifiche proprietà di particolari "oggetti" e le loro relazioni con il mondo empirico.In ogni apprendimento c'è un cambio di norme di comportamento, sia affettivo, sia linguistico; se questo cambio si realizza senza conoscere il significato profondo delle proposizioni usate, è un cambio che non avrà durata nel tempo. Una volta che smetta di aver senso la necessità di dare risposte, si dimentica quanto "appreso", dato che questo apprendimento viene considerato fuori dal contesto. *Smette dunque di operare la motivazione*.Se, al contrario, si dà al sapere appreso una giustificazione, per esempio gli si riconosce un senso all'interno della realtà stessa del soggetto, allora si fornisce all'individuo la forza di mettere in moto elementi e relazioni, facendo sì che i cambi di comportamento permangano nel tempo.

La competenza *in* matematica

La *competenza in matematica* si centra nella disciplina, riconosciuta come scienza costituita, come oggetto proprio, specifico, di conoscenza.L'allievo entra in contatto con saperi specifici, saperi che la società ha inglobato nelle conoscenze riconosciute come base per un dignitoso ingresso nel suo interno; si appropria di una parte di tali saperi, tanto formalmente quanto informalmente.Si riconosce così l'esistenza di un dominio concettuale ed affettivo che media tra l'allievo stesso e la matematica.

La competenza è qui vista all'interno dello specifico àmbito scolare.

La competenza matematica

La *competenza matematica* si riconosce quando un individuo vede, interpreta e si comporta nel mondo in un senso matematico. L'atteggiamento analitico o sintetico, con il quale alcune persone affrontano situazioni problematiche, è un esempio di questo tipo di competenza.Ci sono buoni risolutori di problemi che possono riconoscere, delimitare e risolvere situazioni problematiche; il che, viceversa, a volte, non è facile da evidenziare in persone che trattano bene, per esempio, algoritmi.

Aspetti come il gusto e la valorizzazione della matematica, sono alcuni degli aspetti utili per orientare il raggiungimento della competenza matematica.

Aspetti determinati della competenza

Aspetto cognitivo: conoscenza della disciplina;aspetto affettivo: disposizione, volontà, desiderio di rispondere ad una sollecitazione esterna o internatendenza di azione: persistenza, continuità, sollecitudine.La scuola deve optare per il raggiungimento tanto della competenza in matematica quanto della competenza matematica, però deve privilegiare quest'ultima.Poiché la competenza matematica comporta la capacità – disponibilità a guardare il mondo in modo matematico e dato che ciò non si apprende spontaneamente in modo implicito, si rende necessario pensare che deve far parte del curricolo proprio questo processo di insegnamento – apprendimento specificamente rivolto a "saper vedere matematicamente" il mondo

Ancora sui modi d'essere delle competenze

Possiamo parlare di diverse competenze in matematica o, se si preferisce, di diverse componenti della competenza in matematica; quanto meno abbiamo in lista:

- il dominio degli aspetti semiotici (scelta dei tratti rappresentativi dell'oggetto da rappresentare, trattamento e conversione delle rappresentazioni semiotiche nei vari registri);il dominio che concerne la risoluzione di problemi (proporre e confrontare strategie, scegliere o creare l'algoritmo adatto, approssimare,…);il dominio della problematica che concerne il grande capitolo della cosiddetta "comunicazione matematica" (giustificazione, argomentazione, dimostrazione,…)
- …

Le filosofie pragmatiste e la competenza. La scelta antropologica

All'interno di una corrente *realista*, la competenza di tipo esogeno (competenza matematica) deriva dalla competenza endogena (competenza in matematica) grazie all'azione del transfer cognitivo.All'interno di una scelta *pragmatista*, dato che in essa ogni apprendimento è necessariamente "situato", la competenza matematica si conquista attraverso il ricorso a diverse situazioni; è l'àmbito, è la situazione, è la pragmatica d'*uso* che determinano, allo stesso tempo, sia la costruzione di una conoscenza, sia la creazione di una competenza da parte dello studente.

la competenza come fatto personale o istituzionale è dunque antropologicamente fondata, sopratutto se la scelta è di carattere antropologico.

Che cosa occorre al docente per costruire allievi competenti?

- Competenza a sua volta nella disciplina e coscienza della problematica della competenza matematica e *in* matematica,conoscenza non solo della disciplina che insegna ma anche della didattica specifica di quella disciplina,capacità di rotture costanti dell'equilibrio, generatrici di punti di partenza per l'apprendimento, affinché si costituisca realmente un apprendimento da parte dello studente,

- volontà e capacità comunicative reali, per esempio quelle di saper / voler spiegare il mondo da un punto di vista matematico, senza forzarne i problemi, facendo sì che la matematica vi appaia in modo naturale,
- capacità di soddisfare, valorizzare ed evidenziare le necessità, i gusti, i desideri di sapere da parte dell'allievo,trasformare la docenza in un'attività dinamica, comunicativa; questa è la base di un "cambio" qualitativo dei processi di insegnamento / apprendimento indirizzati verso il raggiungimento della competenza.

Per giungere ad un apprendimento che si converta in una competenza del primo tipo (competenza in matematica) da parte dell'allievo, è necessario un reiterato incontro dell'insegnante con l'oggetto di studio, affrontandolo ogni volta con nuovi elementi, nuovi procedimenti, approfondendolo e legandolo con altri saperi.Solo una volta raggiunta questa competenza in matematica, occorre proporre situazioni che incentivino la competenza matematica. I due processi possono essere simultanei, ma anche in tal caso la prima competenza precede sempre di un passo la seconda. L'una è di stimolo all'altra.

In modo più specifico, pensiamo all'allievo
Se l'allievo avverte che l'oggetto di conoscenza è in relazione con contesti che considera significativi, sarà più facilmente in grado di raggiungere una competenza dato che:

- lo stare all'interno di un contesto significativo lo porta a *voler* affrontare la situazione, mettendo in moto azioni di ricerca;ha bisogno di una elaborazione, concettuale o procedurale; di fronte alla situazione, cioè, necessita di un bagaglio cognitivo che gli permetta di consolidare il sapere appreso e costruire nuovi saperi in una direzione da lui auspicata.

Occorre permettere all'allievo di cercare una forma di comunicare quel che ha raggiunto, validando così il nuovo sapere.

Per sviluppare competenza matematica
occorre:

- lavorare su situazioni problematiche prese dalla realtàorganizzare lo sviluppo curricolare sulla base dei processi e non solo dei prodottiproporre lavoro di aula sufficientemente ricco e stimolantestimolare la creatività e l'immaginazione degli studentiriconoscere ed eventualmente agire per modificare le concezioni che l'allievo ha elaborato in relazione alla matematicae, soprattutto:decidere che la propria azione didattica ha come scopo quello di far sviluppare una competenza matematica.

Bibliografia minima

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.D'Amore B., Godino D.G., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.Fandiño Pinilla M.I. (2002). Curricolo e valutazione in matematica. Bologna: Pitagora.

86. Fandiño Pinilla M.I. La valutazione in Matematica e le prove INValSI. *La matematica e la sua didattica*. 3, 2005, 359-371.

La valutazione in Matematica e le prove INValSI [21]

Martha I. Fandiño Pinilla

NRD- Dipartimento di Matematica – Università di Bologna

Alta Scuola Pedagogica – Locarno - Svizzera

Si è formato a Bologna nel 2005 un piccolo gruppo (ValerMath: Valutazione Emilia Romagna in Matematica) formato da: una dirigente tecnica dell'USR, un docente universitario in funzione di coordinatore, tre insegnanti esperti di scuola (uno per la scuola primaria, uno per la scuola secondaria di 1° grado, uno per quella di 2° grado), una docente ricercatrice dell'IRRE/ER e la sottoscritta, chiamata in qualità di "esperta di valutazione in Matematica".
Tale gruppo ha lavorato sotto l'egida dell'Ufficio Scolastico Regionale per vagliare, criticare, sottoporre a verifiche da parte di docenti attivi, sensibili e critici, le prove Invalsi.
Mentre il gruppo lavora alacremente alla redazione di una relazione finale, io faccio qui in forma pubblica il punto su alcune riflessioni che, spero, potranno aiutare qualche insegnante a vedere le prove, qualsiasi prova, in un modo positivo. Ho una certa esperienza di prove nazionali di questo tipo, maturata nel mio Paese di origine; per cui, nell'ultimo paragrafo mi riferirò ad esempi tratti da quell'esperienza.

1. La problematicità della questione

1.1. La valutazione in Matematica, da parte di un insegnante, degli apprendimenti dei propri allievi ha principalmente tre macro obiettivi (Fandiño Pinilla, 2002):
a) misurare l'efficacia della propria azione didattica
b) misurare l'opportunità della scelta di un dato segmento curricolare

[21] Lavoro eseguito sotto gli auspici dell'Ufficio Scolastico Regionale dell'Emilia – Romagna.

c) misurare lo stato cognitivo di ogni singolo allievo.
La misura indicata in a) permette di trarre giudizi sulle funzionalità delle scelte metodologiche (ingegneria didattica, D'Amore, 1999a).
La misura b) permette di trarre giudizi sulla efficacia della trasposizione didattica (D'Amore, 1999a).
La misura c) permette di trarre indicazioni sul passaggio da "sapere insegnato" a "sapere appreso" e dunque sulla congruenza tra "curricolo auspicato" e "curricolo effettivo" (Fandiño Pinilla, 2002).
Ciascuno di questi punti è problematico e la Didattica della Matematica lo ha evidenziato in modi specifici. Per esempio, per quanto concerne il punto c), è ben nota l'esistenza di "curricoli sommersi" che sono spesso assai più *effettivi* di quelli "auspicati".

1.2. Vi sono dei limiti ad una valutazione effettuata dall'insegnante di classe:
- uso di metodologie attese (da parte dell'insegnante)
- comportamento secondo copioni standard (contratto didattico, D'Amore, 1999a) (da parte dell'allievo)
- uso di linguaggio compartito in aula che spesso già di per sé comporta risposte standard
- attese reciproche che influenzano le risposte e le loro interpretazioni
- …

1.3. Se una valutazione non è fatta dall'insegnante di classe, ma dall'esterno, questi limiti cadono, ma si aprono nuove possibili (ma quasi certe) complicazioni:
- smarrimento dello studente che non riconosce le metodologie usuali
- incapacità di gestire situazioni non usuali
- scontro con un linguaggio non usuale
- non riconoscimento degli obiettivi della valutazione
- non riconoscimento del senso delle richieste
- incongruenza tra gli apprendimenti raggiunti e la richiesta
- aumento delle interferenze emotive in presenza di valutatori esterni alla classe o alla scuola
- …

1.4. Vi sono poi due macro destinazioni della valutazione in Matematica, in ogni caso:
- valutazione di conoscenze
- valutazione di competenze.

Allo scopo di spiegare questa differenza (D'Amore, Godino e altri, 2003), vorrei fare l'analogo che alcuni Autori fanno per spiegare la differenza tra *frame* e *script* (D'Amore, 1999a); essi non rappresentano la stessa idea, essendo il *frame* più legato all'immagine statica (si usa dire "fotografia") e lo *script* all'immagine dinamica in evoluzione (si usa fare qui riferimento ad un processo, ad una sequenza di fotografie, c'è chi parla di "film" come, d'altra parte, l'idea di *script* evoca).
La conoscenza "fotografa" situazioni statiche; in un certo senso, questa valutazione *può* dunque essere effettuata tramite un test di controllo, dall'insegnante o dall'esterno. Un risultato deviante rispetto a quello auspicato dimostra solo che non c'è congruenza tra quanto era atteso o auspicato e quanto è stato di fatto ottenuto.
La competenza, che ha avuto negli ultimi 20 anni "definizioni" assai diverse, non è ricavabile da una "fotografia" perché implica un processo; sembrano essere due le caratteristiche su cui le diverse interpretazioni si accordano:
a) il suo carattere di dinamicità
b) il coinvolgimento di questioni cosiddette "affettive", come la "volizione".
Ciò comporta che ogni artificio messo in campo per valutare con una prova non iterata nel tempo una competenza sia destinato al fallimento.

1.5. Esistono 2 macro categorie di competenza per quanto riguarda la matematica (D'Amore, Godino ed altri, 2003):

- una competenza in matematica (endogena)
- una competenza matematica (esogena).

La prima è descritta da situazioni di evoluzione dinamica ed affettiva all'interno della disciplina stessa.
La seconda necessita di più sottili occasioni interculturali, nelle quali lo studente deve "usare" la propria competenza in matematica per interpretare situazioni diverse.

1.6. Va da sé che: con un test standard *non* è possibile valutare competenze in matematica, né tanto meno competenze matematiche.

1.7. C'è un punto sul quale tutti i ricercatori concordano e cioè la necessità della implicazione personale dello studente nella costruzione della propria conoscenza (e, ovviamente, a maggior ragione, della propria competenza).
È ben nota oramai a chiunque abbia a che fare con la Didattica della Matematica la "teoria delle situazioni" di Guy Brousseau, almeno nelle sue linee essenziali (D'Amore, 1999a).
Questa teoria ci insegna, tra l'altro, che le situazioni di apprendimento efficaci sono le situazioni adidattiche (alle quali si affidano i traguardi cognitivi più importanti, per esempio quelli che costituiscono i nuclei tematici imprescindibili o fondanti per le

discipline; c'è chi li chiama "nuclei epistemologici"). Una delle caratterizzazioni fondanti delle situazioni adidattiche è il doppio processo di devoluzione/implicazione che vede in azione prima l'insegnante sull'allievo (motivazione, affidamento del traguardo cognitivo da costruire) e poi lo studente su sé stesso (volizione, accettazione, determinazione) (D'Amore, 1999a).
Senza l'implicazione non c'è alcuna possibilità di buon funzionamento del processo di apprendimento; l'implicazione personale dello studente, infatti, è assolutamente necessaria al buon svolgimento di una situazione adidattica. Lo scopo di una situazione adidattica è la costruzione di conoscenza, ma senza l'implicazione personale non si ha situazione adidattica.
Dunque, l'implicazione personale è necessaria per la costruzione di conoscenza (e, a maggior ragione, di competenza).
Sappiamo che la mancanza di implicazione è stata segnalata come causa fondamentale del processo di scolarizzazione, assolutamente deleterio per l'apprendimento (D'Amore, 1999b); è stato anche segnalato dalla letteratura che tale processo ha inizio fin dalla scuola primaria. Afferma D'Amore: «Con il termine "scolarizzazione del sapere" intendo qui riferirmi a quell'atto in larga misura inconsapevole, attraverso il quale l'allievo, ad un certo punto della sua vita sociale e scolastica (ma quasi sempre nel corso della Scuola Elementare), delega alla Scuola (come istituzione) ed all'insegnante di scuola (come rappresentante dell'istituzione) il compito di *selezionare per lui i saperi significativi* (quelli che lo sono socialmente, per status riconosciuto e legittimato della noosfera), rinunciando a farsi carico diretto della loro scelta in base a qualsiasi forma di criterio personale (gusto, interesse, motivazione,…). Poiché questa scolarizzazione comporta il riconoscimento dell'insegnante come depositario dei saperi che socialmente contano, è anche ovvio che vi è, più o meno contemporaneamente, una scolarizzazione dei rapporti interpersonali (tra studente ed insegnante e tra studente e compagni) e del rapporto tra lo studente ed il sapere: è quel che nel titolo si chiama "scolarizzazione delle relazioni"». In questo ed in altri lavori, D'Amore analizza a fondo le implicazioni deleterie che la scolarizzazione comporta in aula, nel processo di apprendimento; e mostra come la richiesta di devoluzione da parte dell'insegnante, seguita dall'accettazione dell'implicazione da parte dell'allievo risolvano il problema (a qualsiasi livello scolastico).

1.8. La verifica di un apprendimento, pertanto, ha una radice significativa in una situazione in cui l'implicazione è avvenuta. Altrimenti il risultato ottenuto con tale verifica potrà al più servire a misurare la minore o maggior distanza tra le risposte auspicate e le risposte ottenute, non la qualità dell'apprendimento (che servirebbe invece alle successive azioni didattiche di recupero).

1.9. Lo studio del complesso meccanismo della valutazione in Matematica in tutte le sue sfaccettature è studiato da decenni da specialisti e non è dunque qui il caso di entrare in dettagli, anche perché NON è questo il tema.
Voglio solo far notare che, quando si dice "apprendimento" in Matematica, oramai ci si indirizza in almeno queste quattro direzioni:
1) noetica, cioè apprendimento dei concetti
2) apprendimento di algoritmi
3) apprendimento di strategie (es. la risoluzione di problemi)
4) apprendimento comunicativo (es. la validazione, l'argomentazione, la dimostrazione).
Esse non sono riconducibili l'una all'altra, anche se non sono del tutto indipendenti.

1.10. Tuttavia, la ricerca ha ben messo in evidenza che ci sono apprendimenti "trasversali" a tutti questi, assolutamente necessari. Tra gli esempi possibili a questo punto, privilegio ed evidenzio uno dei più dibattuti, che richiederebbe ben altro spazio: il dominio semiotico dei registri rappresentativi in cui avvengono:
1) la descrizione dei concetti (per esempio la loro definizione)
2) la simbolizzazione dell'apparato algoritmico senza il quale è impossibile riprodurre e generalizzare procedure
3) la esplicitazione e la messa in campo delle strategie
4) la trasformazione di un modello interno in un modello esterno in situazioni comunicative
…

1.11. Insegnanti non preparati in Didattica della Matematica non considerano importanti le questioni che sto trattando qui, dato che ritengono esistere rimedi ad hoc per ogni situazione fallimentare di apprendimento, pur senza aver effettuato sistematiche ricerche empiriche. Ecco una rapida carrellata di esempi:

- ingenue illusioni, come quella assai diffusa nella scuola media, secondo la quale il disegno "aiuta" nella risoluzione dei problemi, sono state fortemente messe in crisi. Si è ampiamente visto come il linguaggio del disegno, con le sue specifiche sintassi, semantica e pragmatica, possa entrare in collisione sia con il linguaggio naturale, sia con il linguaggio algebrico ed aritmetico, creando ulteriori difficoltà a chi ne ha già; la comprensione di una pluralità di registri semiotici pone sempre problemi interpretativi e deve essere oggetto di una didattica esplicita;
- ingenue illusioni, come quella assai diffusa nella scuola primaria, secondo la quale esistono strumenti preconfezionati in cui avvengono apprendimenti reali; la ricerca chiama tali apprendimenti "situati" o "artificiali": tali apprendimenti, infatti, sono situati solo nel contesto di apprendimento preconfezionato e non sono spontaneamente generalizzabili né trasferibili ad altri settori; e sono artificiali cioè

strettamente connessi alla minisituazione didattica creata artificialmente; l'idea-speranza, tipica degli anni '60-'70 inizio '80, che tali apprendimenti fossero spontaneamente generalizzati con un transfer cognitivo autonomo ad altre situazioni di apprendimento, è stata radicalmente falsificata; è stato ampiamente mostrato come *ogni* apprendimento è situato e come il transfer cognitivo non sia automatico, ma frutto di didattiche specifiche; chi effettua apprendimenti specifici in situazioni artificiali si limita ad apprendere quelle specifiche "regole del gioco" ma non costruisce necessariamente conoscenza;
- ingenue illusioni, dovunque diffuse, secondo le quali la ripetizione di un esercizio o la classificazione di situazioni problematiche in elenchi di casi possibili, aiuti e fortifichi nell'apprendimento, sono state contraddette; al più, si tratta di fortificare un addestramento, non di creare apprendimento, dato che la ripetizione dell'esercizio avviene nella zona effettiva di Vygotskij e non in quella prossimale;
- ...

1.12. Dunque, una verifica degli apprendimenti (anche solo di conoscenze, senza la pretesa di arrivare alle competenze) sembra essere un piano di analisi specifica, necessaria, ma problematica e complessa:
- *problematica* perché priva di definizioni standard onnicomprensive riducibili ad un comportamento che non ammetta devianze o diverse interpretazioni
- *complessa* perché chiama in causa una notevole molteplicità di fattori.

1.13. Ciò detto, tuttavia, accettiamo che una società decida, visto che ne ha tutto il diritto, di valutare attraverso un test i propri giovani cittadini in quanto concerne le loro conoscenze (perché, abbiamo visto, la valutazione delle competenze tramite una "fotografia statica" è un traguardo illusorio) (D'Amore, Godino ed altri, 2003).

2. La società valuta i propri giovani su conoscenze disciplinari

2.1. La prima cosa che ci si chiede è:
Qual è lo scopo di tale valutazione?
A parte quanto dichiarato in forma ufficiale, è ovvio che un tale impegno di energie deve tendere ad un solo obiettivo: migliorare la qualità delle conoscenza degli allievi, futuri cittadini.
Questo obiettivo si raggiunge non limitandosi ad una verifica statistica del rapporto tra riposte azzeccate / non azzeccate, ma potenziando un processo di miglioramento didattico che mostri agli insegnanti le lacune, le divergenze, le discrasie tra risultati attesi dalla società e risultati ottenuti.

Affinché dunque sia lecito pensare che la valutazione delle conoscenze tramite test porti all'obiettivo detto, la società dovrebbe:

- aver predeterminato quali sono i risultati attesi
- comunicarli agli insegnanti
- far sì che essi operino per tale raggiungimento

e poi, dopo le prove:

- mostrare le divergenze
- spiegarne i motivi
- suggerire modifiche all'azione didattica
- lasciare tempo per l'effettuazione di ulteriori attività didattiche
- ripetere le prove

e così via, in un processo circolare.

2.2. Come i risultati delle prove possono comunicare agli insegnanti le divergenze tra risultati attesi dalla società e risultati ottenuti?
Non c'è che una risposta proponibile:
la società, nel proporre delle prove, dovrebbe chiarire in forma esplicita quali sono le motivazioni specifiche di ciascuna di esse.
In modo più esplicito.
L'insegnante I verifica che i suoi allievi A hanno risposto alla domanda D in maniera divergente da quella auspicata, con uno scarto significativo.
I potrebbe allora decidere di far esercitare A su D, fino ad ottenere la risposta voluta.
Ma noi sappiamo, dalla ricerca didattica moderna, che ogni apprendimento è "situato"; dunque, dopo l'esercitazione, gli studenti A sanno rispondere a D, ma non hanno necessariamente aumentato la loro conoscenza.
Nel caso in cui la società sottoponesse nuovamente A ad una prova D' (che, secondo la società, condivide con D il senso conoscitivo), non è affatto detto che A risponderebbe a D' secondo le attese della società; potrebbero ancora aversi risposte devianti.
Per avere con certezza un aumento di conoscenza ed una prestazione buona su D', occorrerebbe che I sapesse (e condividesse, ma questo discorso lo farò dopo) quali erano:
a) gli obiettivi culturali, di conoscenza matematica per cui era stata proposta D
b) gli obiettivi didattici per cui D era stata proposta.
Con queste informazioni, I può modificare la propria azione didattica su A, in maniera più significativa e produttiva.
La somma di esperienze su singoli esercizi, è stato provato, non solo non determina aumento di conoscenza, ma può portare al risultato contrario, frantumando cioè una possibile costruzione di conoscenza in una ricerca improduttiva di casistica.
Dunque, per costruire conoscenza, l'insegnante deve decidere di operare didatticamente sul SENSO delle cose e non sulla loro apparenza.

2.3. Prima di procedere, evidenzio nuovamente un punto che è centrale per un'operazione di valutazione da parte della società di appartenenza, la condivisione cioè con gli insegnanti di: scopi, obiettivi, contenuti, metodi di controllo e misure di deviazione. Se l'insegnante non è reso *parte attiva* di questo processo, ovviamente tenderà a considerare la valutazione fatta sui propri allievi come una valutazione fatta su di sé e sulla propria azione didattica. Scatterà così un comprensibile tentativo di difesa, di giustificazione, che nulla ha di professionale, la cui origine sta nell'estraneità della proposta rispetto all'azione quotidiana del suo insegnare.

3. In altri Paesi del mondo

3.1. In altri Paesi una valutazione nazionale delle conoscenze degli allievi nei vari livelli scolastici, che qui in Italia sembra quasi essere un optional, è davvero importante; per esempio lo è perché da essa dipendono i prestiti della Banca Mondiale, oppure i finanziamenti delle singole realtà scolastiche, o gli incentivi che si sommano agli stipendi degli insegnanti, o altro. In quei Paesi, vista la centralità di controlli valutativi di questo tipo, si è messo in moto un meccanismo significativo che potrebbe essere auspicabile conoscere.
Mi è comodo fare riferimento a quel che succede nel mio Paese di origine, la Colombia, dove prove di tipo INValSI hanno luogo dal 1992, anno di una importante riforma che ha riguardato tutta l'educazione (da quella di base a quella superiore, cioè l'università).

3.2. Ad ogni insegnante che ha partecipato alle prove nazionali, vengono consegnati gratuitamente due testi prodotti dal Ministero, uno strettamente relativo alla prova ed uno più generale.

3.3. Nel primo testo (di circa 150 pagine formato A4, piuttosto ben confezionato, colorato, carta elegante), per ogni test proposto, viene spiegato:

- il macro-ambito di appartenenza di quel test (es. geometria, misura, pensiero razionale,…)
- il tema specifico di riferimento di esso (es. concetto di poligono, misura del perimetro di un poligono, relazione binaria,…)
- il motivo culturale per cui quell'apprendimento ha rilevanza
- la risposta auspicata dalla commissione ministeriale che tale test ha proposto
- il perché scientifico di tale risposta auspicata
- diverse spiegazioni delle interpretazioni che possono aver spinto uno studente a dare una risposta diversa da quella auspicata (errori, misconcezioni, confusione tra

concetti,…)

- giustificazioni dei singoli errori
- suggerimenti sul modo per modificare le conoscenze errate degli studenti su quel tema specifico
- suggerimenti didattici su come affrontare quel tema
- andamento statistico nazionale di quel test
- andamento locale
- suggerimenti di test diversi da quello proposto, ma aventi lo scopo analogo, come strumento a disposizione dell'insegnante per creare per analogia a sua volta test idonei ad affrontare lo stesso tema l'anno successivo.

3.4. Nel secondo testo (di circa 200 pagine formato A4, altrettanto elegante), specialisti della didattica disciplinare danno idee, suggerimenti teorici e concreti di ingegneria, trattano le specifiche didattiche, invitati dal Ministero dell'Educazione. Si tratta dunque di un testo di Matematica e di Didattica della Matematica, ma ricco anche di suggerimenti di ingegneria didattica.

3.5. Ognuno dei test proposti nella prova viene riferito in modo esplicito, nei commenti che appaiono nel volume 1, ai contenuti che appaiono nel volume 2. In tal modo l'insegnante non si sente abbandonato e sa quali sono, secondo la società nazionale, secondo le scelte ministeriali, i temi ritenuti socialmente rilevanti.

3.6. Dopo i primi anni di disorientamento, una volta a regime, l'insegnante ha generalmente assai gradito queste indicazioni che gli permettono, nel vastissimo dominio delle conoscenze matematiche, di indirizzare sempre di più le proprie scelte curricolari verso direzioni che sa essere quelle auspicate, che esperti (universitari, del mondo del lavoro, …) hanno riconosciuto come rilevanti per un futuro cittadino. Naturalmente fatta salva la piena libertà dell'insegnante di compiere le sue scelte, di contenuto e di metodo.

3.7. Mentre il volume 2 resta in un certo senso stabile punto di riferimento (tra il 1992 ed oggi vi sono state variazioni, ovviamente, che ampliano i punti di vista ed approfondiscono le didattiche tematiche), il volume 1 viene pubblicato ad ogni prova e rapidamente distribuito agli insegnanti.

3.8. Ma c'è di più. Se una scuola di una data realtà sociale (città, campagna, foresta, montagna, costa,…) ha ottenuto risultati considerati non confortanti, può chiedere aiuto al Ministero per una certa disciplina; il Ministero allora contatta il Centro Universitario più vicino nel quale si studia quella didattica disciplinare ed affida ad esso la cura, l'aggiornamento, la formazione in servizio di quegli insegnanti per un numero congruo di ore. Il Centro Universitario ha come impegno statutario anche questo, per cui il monte / ore annuale dei vari docenti universitari comprende non solo lezioni agli studenti dei corsi di laurea, ma anche questo tipo di docenza agli insegnanti in servizio.

3.9. Il risultato è molteplice:

- grande vivacità nelle conoscenze
- grande interesse sia verso le discipline che verso le didattiche
- notevole impegno
- aumento della professionalità
- soddisfazione personale del proprio ruolo docente, dovuto al miglioramento, anno dopo anno, delle prestazioni dei propri allievi secondo le attese stabilite a livello ministeriale e sociale
- …

3.10. Conoscendo ora l'Italia e l'Europa, so che il mio Paese e, in generale, i cosiddetti Paesi del "terzo mondo" o "in via di sviluppo", sono sempre guardati con una certa superficialità; ma, almeno nel campo che qui ci interessa, alcuni di questi Paesi meriterebbero di essere meglio conosciuti.
Per motivi contingenti, dovuti forse in origine all'impellente necessità dei prestiti concessi dalla Banca Mondiale, dalla Fao, dall'Unesco e da altre entità internazionali solo a quei Paesi che dimostrino ampiamente di aver puntato su una educazione di qualità, si è molto investito sull'educazione e sul futuro dei giovani, ottenendo ottimi risultati sia dal punto di vista delle conoscenze raggiunte dalla popolazione studentesca (l'obbligo di studio è, dal 1992, fino a 16 anni), sia da un punto di vista sociale e legislativo: la scuola e l'educazione sono considerate *strategiche* per la nazione.
Tra i risultati concreti, per esempio, gli insegnanti sono considerati dei professionisti e dunque ricevono di norma uno stipendio discreto, rispetto allo standard nazionale, che permette loro una vita sociale di buon livello.
In queste condizioni, sottoporsi alle prove dette, migliorare i risultati dei propri studenti etc. è gradito e non è considerato "lavoro in più" o lesivo della libertà di insegnamento.

3.11. Si tenga presente che le classi hanno di norma tra i 40 ed i 46 allievi; ma è assai più semplice tenere la disciplina e tenere desto l'interesse, dato che gli allievi hanno della scuola una concezione élitaria e considerano un privilegio potervi accedere. La partecipazione risulta pertanto attiva, attenta e stimolante. Inoltre, molti lavori sono affidati alla gestione personale a casa, con lavori individuali differenziati, anche per

quanto riguarda i contenuti. Non si tratta di stereotipati esercizi da svolgere a casa, ma di vero e proprio lavoro personale anche apprenditivo: la concezione di "studente" è completamente diversa da quella europea. Il numero di ore di scuola per anno è notevolmente maggiore di quello standard italiano o europeo. Non è considerato un disonore dover ripetere un segmento curricolare; anzi: spesso è lo studente o la famiglia (molto presente nella vita scolastica del proprio figlio) che propone un semestre di ripensamento (non si va per annualità, ma per semestri, il I da gennaio a giugno, il II da luglio a dicembre).
Per molte famiglie e per molti studenti, lo scopo è quello di elevarsi socialmente (in una società che privilegia lo studio e l'educazione) ed accedere alle università statali (che sono in genere le più qualificate). L'accesso alle università è molto restrittivo e solo gli studenti migliori in assoluto, che superano prove di elevata complessità, posso diventare studenti universitari. L'accesso si fa ogni semestre e non è raro il caso di giovani che riescono ad entrare dopo varie prove ripetute per semestri. Esistono appositi corsi dopo il completamento dell'iter scolastico che preparano alle prove di ingresso all'università.
Infine, non solo non è raro, ma è molto diffuso il fatto che insegnanti in servizio (padri e madri di famiglia, talvolta con numerosi figli) si iscrivano ai corsi post laurea come:

- specializzazioni in didattica disciplinare
- dottorato di ricerca in didattica disciplinare

al solo scopo di migliorarsi professionalmente.
La laurea per insegnare nella scuola pre-primaria (l'anno tra i 5 ed i 6 anni di età è obbligatorio per legge dal 1992) e primaria è obbligatoria in Colombia dal 1992, appunto.

Ho voluto tratteggiare quel che accade, in questo campo, in un Paese tanto lontano e diverso, solo perché la realtà delle prove tipo INValSI ha lì un successo determinato dalla chiarezza degli scopi e dalla accuratezza e coerenza degli strumenti correlati.

Riferimenti bibliografici minimi

Per la terminologia didattica:
D'Amore B. (1999a). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [IX ediz. 2005].

Sulle competenze:
D'Amore B., Godino J.D., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

Una rassegna abbastanza recente sulla valutazione in matematica:
Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.

Sul fenomeno della “scolarizzazione”:

D’Amore B. (1999b). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull’apprendimento della matematica. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.

Ringrazio gli altri membri del Gruppo Valermath (Gloria Balboni, Anna Maria Benini, Cristina Canella, Bruno D’Amore, Giorgio Gabellini, Grazia Grassi, Aurelia Orlandoni) per la lettura critica di una versione preliminare di questo documento e per i suggerimenti che mi hanno proposto.

En idioma italiano:
59. D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. [Bologna, Italia]. 3, 27-50.
En idioma español:
98. D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Espilon*. [Cádiz, Spagna]. 58, 20, 1, 25-43.

Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior

Bruno D'Amore – Martha Isabel Fandiño Pinilla

NRD (Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática)
Departamento de Matemática – Universidad de Bologna - Italia

Sunto. In questo articolo si presenta una ricerca condotta al termine di 4 semestri di formazione iniziale degli insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore, nell'àmbito del quadro teorico dei cambi di convinzioni sulla matematica, sulla didattica della matematica e sul ruolo dell'insegnante di matematica. A studenti di specializzazione post laurea, giunti a poche settimane dall'ottenimento del titolo di "Specializzato per l'insegnamento della Matematica", si sono chieste riflessioni e considerazioni critiche a posteriori sui cambi osservati su sé stessi nel corso dei 4 semestri, a causa degli insegnamenti seguiti, soprattutto quelli di Didattica della matematica. I futuri insegnanti dichiarano talvolta cambi radicali di convinzioni e di concezioni, intese queste ultime come generalizzazione delle prime.

Abstract. This article presents a research project at the end of four semesters of pre-service training for secondary school Mathematics teachers conducted within the theoretical framework of changes in beliefs about Mathematics, teaching and the role of the teacher. A group of postgraduate students, a few weeks from the end of their course was asked for reflections and critical observations concerning the changes experienced in themselves during the four semesters as a result of the training received, especially concerning the Mathematics Education. The future teachers describe changes of beliefs and conceptions, at times radical, the latter as a generalization of the former.

Resumen. En este artículo se presenta una investigación realizada al final de los 4 semestres de la formación inicial de los profesores de matemática de la escuela secundaria superior en el ámbito del cuadro teórico de los cambios de convicciones sobre la matemática, sobre la didáctica de la matemática y sobre el papel del profesor de matemática. A estudiantes de especialización de postgrado, a pocas semanas de obtener el título de "Especialista en la enseñanza de la matemática", se les pedían sus reflexiones y consideraciones críticas, a posterior, sobre los cambios observados sobre sí mismos en el programa de los 4 semestres, como consecuencia de los cursos seguidos, en particular el curso de Didáctica de la Matemática. Los futuros profesores declaran a su vez cambios radicales de convicciones y de concepciones, entendidas las segundas como generalización de las primeras.

Resumé. Dans cet article on présente une recherche conduite au but de 4 semestres de formation initiale des enseignants de mathématiques de l'école secondaire supérieur, dans le domaine des changes de convictions sur les mathématiques, sur la didactique des mathématiques et sur le rôle de l'enseignant des mathématiques. On a demandées à étudiants de spécialisation post- maîtrise, à quelque semaine de la obtention du titre de "Spécialisé pour l'enseignement des Mathématiques", des réflexions et considérations critiques a posteriori sur les changes observés sur soi mêmes au cours des 4 semestres, à cause des enseignements suivis, surtout de Didactique des mathématiques. Les futurs enseignants déclarent quelquefois des changes radicaux de convictions et de conceptions, entendues ces dernières comment des généralisations des premières.

1. Terminología mínima

Queriendo iniciar a tratar el tema de las convicciones y de las concepciones, consideramos de un cierto interés declarar explícitamente que nos serviremos de las siguientes interpretaciones de tales términos, que de otra parte son siempre más difusos y compartidos:

- *convicción* (belief) (o creencia): opinión, conjunto de juicios/expectativas, aquello que se piensa a propósito de algo;
- el conjunto de las convicciones de alguien (A) sobre un determinado aspecto (T) forma la *concepción* (K) de A relativa a T; si A pertenece a un grupo social (S) y comparte con los demás miembros de S el mismo conjunto de convicciones relativas a T, entonces K es la concepción de S relativa a T.

Algunas veces, al puesto de "concepción de A relativa a T" se habla de la "imagen que A tiene de T".
Nosotros nos ocupamos aquí sólo del caso en el cual T es la matemática, o la didáctica de la matemática o en otros casos que explicitaremos y discutiremos.

2. Cuadro teórico sobre las convicciones/concepciones relativas a la matemática

Los estudios científicos sobre la importancia de las concepciones que la sociedad, la gente común, ciertos grupos sociales, los maestros, los estudiantes tienen de la matemática, inclusive en lo que concierne a procesos que van más allá de la enseñanza y del aprendizaje de la misma, tiene un origen bastante reciente. Sin embargo, estos revelaron inmediatamente el gran impacto que estas consideraciones tienen sobre el aprendizaje y sobre la enseñanza. Schoenfeld (1992) llegó a afirmar que cada individuo conceptualiza la matemática y se ubica en el ambiente matemático precisamente sobre la base del sistema de sus propias convicciones sobre la matemática, por tanto sobre la base de las concepciones que tiene de la matemática; es dicha concepción la que determina no sólo las modalidades de dicha inserción, sino también las sensaciones que el individuo experimenta después de que esta inserción se ha dado. De esto se deduce la imposibilidad de separar conocimiento (de la matemática) y convicción (sobre la matemática) en los profesores (Fennema, Franke, 1992). Lo que además conlleva a afirmar, como obvia consecuencia, que las decisiones que los profesores toman están determinadas por los dos factores, lo que ulteriormente explica la notable importancia que en el momento actual tiene la investigación en el campo de las convicciones (Thompson, 1992; Hoyles, 1992; Pehkonen, Törner, 1996; Krainer et al., 1998).
Interesantes consideraciones teóricas sobre la estructura de las convicciones y sobre las actuales investigaciones a este propósito se encuentran en Törner (2002).
De otra parte, es hoy reconocido universalmente que las convicciones forman parte importante del conjunto de conocimientos, dado que los determinan y los condicionan, como lo había relevado Schoenfeld (1983) hace ya más de veinte años.
Es desde los primeros momentos de interés por este tipo de argumentos que nace una especie de análisis de los tipos de convicciones; en el trabajo de Schoenfeld (1992), por ejemplo, la distinción esta hecha sobre el agente y es así que él distingue entre convicciones:

- del estudiante
- del maestro
- de la sociedad,

una distinción de hecho descontada, pero no por eso libre de sorpresas, y, en todo caso, la más seguida precisamente por su inmediatez.
A propósito del tercer punto, hoy sabemos que no es posible separar el análisis de las convicciones de un individuo de aquellas del grupo social al cual pertenece, dado que estas son de todas formas el resultado de complejas interacciones entre grupos sociales (Hoyles, 1992); por tanto, un estudio de este tipo debe estar inmerso dentro del contexto social.

3. Primera referencia de los sujetos que participaron en nuestra investigación y cuadro teórico sobre el "cambio de convicciones"

En nuestro texto, nos referimos exclusivamente a las convicciones de estudiantes que podríamos definir como "particulares", estudiantes del cuarto y último semestre del Programa de Especialización en la enseñanza de la matemática SSIS que en Italia, después de un curso de licenciatura de cuatro años, otorga el título de "Habilitado para la enseñanza en la escuela secundaria superior".
Dichos sujetos:

- son para todos los efectos "estudiantes", incluso si revisten un papel particular que los convierten en "profesores dentro de poco tiempo"; además, muchos de ellos son suplentes y por tanto tienen experiencias de responsabilidades en la enseñanza
- tienen como fuerte experiencia de base su larga vida de estudiantes
- tienen, en un alto porcentaje, como única experiencia de enseñanza real la práctica docente que deben realizar dentro del programa de especialización (generalmente sin la libertad de decisión didáctica).

Estas características particulares de nuestros sujetos nos llevó a considerar el problema del "cambio de convicciones" en el sentido de "desarrollo – modifica de las convicciones en el transcurso del tiempo" (Wilson, Cooney, 2002); en este sentido, para nosotros fue una gran ayuda teórica el excelente análisis que sobre los profesores hizo Chapman (2002). En cuanto a la influencia que tiene el aprendizaje sobre la enseñanza por parte de los profesores en formación, nos servimos de Llinares (2002). Pero, dada la "naturaleza de estudiantes" de nuestros sujetos, tuvimos que hacer referencia a estudios sobre la naturaleza de la matemática (Presmeg, 2002) en los cuales se aprovecha una especie de autobiografía de las propias convicciones sobre la matemática y en las cuales se revela, de hecho, cambio de convicciones con el pasar del tiempo.
Por último, las reflexiones de la investigación fueron sugeridas por trabajos clásicos de los primeros años '90 y más recientemente Lester (2002) (en este trabajo, Lester retoma las concepciones clásicas sobre este tema, pero ejemplifica brillantemente a propósito de específicas y recientes investigaciones).

4. Convicciones sobre la matemática expresadas en otros sectores e su influencia en la actividad docente

Las convicciones que expresan, a propósito de la matemática, diversas partes de la sociedad, tienen una cierta influencia en el contexto social, y terminan con ser objeto de reflexión por parte de los futuros profesores; por ejemplo, si parte de la literatura, del cine, de las artes expresan convicciones deletéreas sobre la matemática (Furinghetti, 2002), los matemáticos y los docentes de matemáticas pueden recoger el desafío que es implícito en su enseñanza: derribar, en la propia aula, las convicciones deletéreas de los estudiantes, influenciados por tales agentes negativos. Pero, para llegar a proponerse dicho objetivo, los futuros profesores, deben obviamente conocer los juicios que han sido expresados.

5. Clasificación de las convicciones sobre la matemática

Un análisis de las convicciones se presenta por tanto como algo extremamente importante a fin de estudiarlas y reconocerlas. Veamos algunos ejemplos de propuesta de clasificación de las convicciones a propósito de la matemática.

Frank (1985):

Hay quien tiene una "mente matemática" y quien no

La matemática requiere de la lógica, no requiere de la intuición

En matemática se necesita saber siempre como se encuentra la respuesta a una solicitud o a un problema

En matemática es necesario tener buena memoria

En todo problema matemático existe siempre la "mejor forma" de resolverlo

La matemática se hace trabajando intensamente sobre problemas, hasta encontrar la respuesta

Los hombres son mejores en matemática que las mujeres

En matemática se debe dar siempre la respuesta justa, lo demás no importa

Los matemáticos resuelven siempre los problemas en su cabeza rápidamente

Existe un cierto "no se que", una técnica mágica para hacer matemática; o la tienes o no la tienes

La matemática es repetitiva, para nada creativa

En matemática las operaciones se hacen o mentalmente o por escrito, pero sin el uso de instrumentos, por ejemplo, los dedos.

Schoenfeld (1992):

Los problemas matemáticos tienen una única respuesta

Existe una única forma correcta de resolver un problema

Un estudiante normal, no particularmente dotado para la matemática, debe memorizar lo mejor posible las reglas y los procedimientos, no puede pretender de entenderla

Los matemáticos son individuos aislados, que trabajan aisladamente

Los estudiantes que han entendido un tema de matemática saben resolver un problema sobre dicho tema en los primeros 5 minutos después de haberlo visto

La matemática que se aprende en la escuela no tiene nada que ver con el mundo externo, con el mundo real

En los procesos de descubrimiento o de invención matemática la demostración formal es del todo irrelevante.

Furinghetti (1994):

Dar la respuesta justa es más importante que la forma de resolver un problema
Cada cosa debe ser dicha en la forma más exacta posible
Se debe dar siempre la respuesta justa en el menor tiempo posible
Existe siempre algún procedimiento que debe seguirse exactamente para encontrar el resultado
Mucho es lo que se aprende memorizando las reglas
Cada cosa se debe explicar exactamente
Diversos argumentos de la matemática son del todo desligados entre sí y por tanto se deben enseñar y aprender aisladamente.

Nos limitamos a estos tres ejemplos, pero clasificaciones analíticas de este tipo son numerosas.

6. La naturaleza de la didáctica de la matemática

Por lo que respecta a la didáctica de la matemática, se delinean diversas interpretaciones de base (Malara, Zan, 2002):

- la didáctica de la matemática es una ciencia autónoma que tiene en cuenta el complejo sistema en el cual se encuentra inserta, pero se basa en los métodos originales de investigación; esta interpretación es de hecho atribuida al trabajo pionero de Guy Brousseau iniciado en los años '60 (Brousseau, 1986) y a aquella que viene llamada "escuela francesa" que de él toma la iniciativa;
- la didáctica de la matemática es una disciplina científica que incluye sí una teoría, un desarrollo y una práctica, pero que también interactúa con el sistema escolar en su conjunto (preparación de los profesores, desarrollo del curriculo, aulas y horas de matemática, textos, material de apoyo, evaluación) y con todos los campos vinculados a este sistema (matemática, historia y epistemología de la matemática, psicología, ciencias de la educación, sociología, …); dicha complejidad llama en causa la correlación entre matemática y sociedad; esta visión es de hecho debida en gran parte al trabajo de Steiner (1985);
- la didáctica de la matemática es una ciencia aplicada, una ciencia de acciones prácticas; sus estudios tienen que ver con acciones concretas relativas a la enseñanza, buscando la mediación entre pedagogía, matemática (inclusive su historia y su epistemología) y otras disciplinas (psicología, antropología, sociología, ...); en esta dirección se pueden pensar (aún de formas diferentes) orientados los trabajos por Wittmann (1995), de Speranza (1997) y de otros.

Naturalmente, las cosas son de hecho más complejas; pero a nosotros, en esta ocasión, nos sirve sólo para delinear algunas alternativas interpretativas; en su interior, situables con modificaciones a veces leves, se pueden precisar papeles y funciones de la formación o de las relaciones entre teoría y práctica; el problema se delineó desde el inicio de los años '80 (Kilpatrick, 1981; Freudenthal, 1983) y, hasta el día de hoy, no ha dejado de crecer en interés. Un análisis detallado de la problemática relación entre teoría y práctica en la enseñanza se puede ver en Malara, Zan (2002); otras contribuciones recientes al respecto, que nos influenciaron en esta investigación, fueron Zaslavsky, Leikin (2004) y McDuffie (2004) quienes, de formas diversas, analizaron la práctica de aula y el desarrollo de la figura profesional del docente, el segundo en condiciones de formación.

7. Ámbito temático y social de la investigación: la Escuela de Especialización de Bologna y sus elecciones culturales y didácticas

Bastan pocas líneas para describir el ámbito en el cual se han desarrollado durante 5 años académicos los cursos de didáctica de la matemática en Bologna dentro del programa de Especialización SSIS; se quiso tener en cuenta cada una de las tres direcciones interpretativas descritas líneas arriba (ver **6.**), teniendo como punto de partida una visión de la didáctica de la matemática como disciplina que estudia científicamente los problemas prácticos que surgen en el aula, en la compleja relación sistémica entre maestro, alumno y saber, por tanto, haciendo referencia a la práctica de enseñanza pero más aún a la "epistemología del aprendizaje" (según las definiciones dadas en D'Amore, 1999).
Es así como, la visión de la didáctica de la matemática propuesta a los alumnos que siguen el programa de especialización SSIS es sí de una teoría autónoma, pero buscando siempre de integrar los tres puntos de vista precedentes (ver **6.**). La elección teórica de fondo es aquella que se conoce como "escuela francesa" en lo que concerne a la teoría puesta en campo para analizar los problemas del aula, pero siempre tornando a estos y no desdeñando profundizaciones sobre importantes temáticas como curriculo, evaluación etc.
Los profesores en formación provienen de diversos cursos de estudios, cursos de licenciatura en matemática, física, ingeniería, astronomía, economía, estadística, …eso sí todos, con un fuerte contenido matemático: quien no ha seguido cursos completos de matemática se le asignan "deudas culturales" que tienen el objetivo de llenar las lagunas que se crean por la ausencia tangible de estos contenidos dentro del plan de estudios de base.
Los profesores en formación dentro de la SSIS de Bologna siguen cursos de temáticas generales como pedagogía, psicología, sociología, antropología, … y después cursos específicos como didáctica de la matemática con su respectivo laboratorio (2 cursos en

dos semestres diferentes de 60 horas cada uno), laboratorio de didáctica de la matemática (en particular destinado a las nuevas tecnologías, 2 cursos en dos semestres diferentes de 60 horas cada uno), epistemología/historia de la matemática (2 cursos en dos semestres diferentes de 60 horas cada uno).
Es prevista una verdadera práctica docente guiada por un supervisor [profesor experto y habilitado, con un tiempo considerable de experiencia y con competencia en didáctica de la matemática] que se desarrolla en una verdadera aula [donde el profesor titular de la clase tiene la función de tutor]; dentro de la programación de esta práctica se presenta la premisa a la redacción de la tesis de especialización (a la cual se le da una importancia fundamental).
Del contenido de los dos cursos de didáctica de la matemática hemos ya hablado (y de todas formas incluye por entero el estudio de D'Amore, 1999, y otros textos); en cuanto a la modalidad, se intercalan continuamente lecciones frontales (generalmente discusiones sobre temas específicos que tienen en cuenta la realidad experimentada en aula) y trabajos en grupo con se concluyen con una presentación individual.

8. La invitación formal a los profesores en formación a declarar sus cambios de convicciones

Una vez alcanzadas las últimas horas del curso del año académico 2003-04, se ofreció a los profesores en formación la posibilidad de expresar sus opiniones y observaciones sobre sus propios cambios de convicciones sobre la matemática, sobre la didáctica de la matemática y sobre su papel como docentes, a través de una invitación escrita la cual reportamos por completo a continuación:

Bologna, SSIS, Matemática, enero 2004

Apreciado estudiante de la SSIS, apreciada estudiante de la SSIS,
hemos llegado a las dos últimas lecciones del curso de Didáctica de la Matemática II de este año académico 2003-04, el último de tus compromisos con la SSIS. Dentro de pocos meses, el curso terminará con la prueba final.
Nos estamos pidiendo si, en estos 4 semestres, han cambiado en algo tus convicciones y para nosotros es muy interesante saber en que.
Más explícitamente, nos gustaría, si deseas contribuir a este análisis, que compararas lo que tu considerabas *antes* de iniciar la SSIS y lo que consideras *ahora* a propósito de:

- Matemática (o Epistemología de la Matemática)
- Didáctica de la Matemática
- Papel del profesor de Matemática en el aula.

Dado que estamos hablando a un experto, deseamos ser aún más explícitos; nos interesan

- los "cambios epistemológicos" que se dieron dentro de ti
- el cambio de las "expectativas" que tienes en relación con tu futuro trabajo de profesor de Matemática
- el cambio de convicciones

y cuáles entre los cursos seguidos al interno de la SSIS han tenido mayor o menor influencia en estos cambios; o cuáles entre las lecturas hechas en estos dos años han sido particularmente determinantes desde este punto de vista.
Puede suceder que tu no hayas cambiado en ningún aspecto; sería para nosotros ya interesante que tu lo declararías explícitamente sin reparo alguno.
Pero puede darse que el cambio haya sido interesante, notable, importante; y entonces, esperamos que tu, con espíritu de colaboración, lo quieras comentar con una cierta profundidad.
Esta "tarea" que te asignamos debe evidenciar tu responsabilidad; por tanto NO es anónima. Si no deseas colaborar, simplemente no respondas. Pero si decides de hacerlo, te pedimos de ser sincero y explícito.
Las páginas que nos restituirás deberán ser firmadas y acompañadas de la dirección de correo electrónico pues es nuestro interés entrevistar a algunos de ustedes con el fin de profundizar las respuestas dadas. En el caso que tu seas elegido, te contactaremos y fijaremos contigo una fecha para la entrevista.
No porque tengamos prisa, sino para no esperar más allá de un determinado tiempo, te pedimos de hacernos llegar tu respuesta escrita dentro [omitido].

Gracias por tu colaboración

Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla
Titulares del Curso de Didáctica de la Matemática II

Respondieron a la solicitud el 90% de los futuros profesores, con cartas por demás largas y complejas. A cada uno de quienes respondieron les enviamos el siguiente mensaje:

Apreciado ….,
leímos la relación que gentilmente redactaste en fecha [omitido] sobre la base de nuestra solicitud, aquella en la cual te invitábamos a contarnos tu experiencia SSIS y en especial a evaluar los cambios de tus convicciones.
Te agradecemos mucho por la contribución y por la sinceridad con la cual espondiste.

Dentro de pocos meses escribiremos un breve artículo, en el cual puntualizaremos lo que hemos encontrado, con la esperanza que esto sea de estímulo para la reflexión dentro de nuestro cuerpo docente SSIS de Bologna y de otros grupos. Lo propondremos para la publicación en la revista *La matemática e la sua didattica.*
Un cordial saludo y los mejores deseos por una carrera futura brillante.

Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla

Fueron contactados personalmente una docena de futuros profesores y con ellos se dialogó informalmente a fin de entender en detalle las respuestas, diálogos que eran más que simples entrevistas.
Por tanto, nuestras observaciones, que escribiremos a continuación, son en parte el resultado directo de los textos escritos y en parte extracciones de las declaraciones que expresaron los futuros profesores que colaboraron.

9. Los resultados de la investigación

9.1. Cambios de concepciones sobre la matemática

Las concepciones declaradas, antes de seguir el programa de la SSIS, se enmarcan en los resultados que la investigación en este campo ha encontrado y las resumiremos en tipologías, usando frases tomadas directamente de las respuestas dadas por los futuros profesores [todos los protocolos se encuentran a disposición de quien desee confrontarlos]; para hacer más eficaz la lectura en lo que concierne a los "cambios", pondremos en relación la concepción precedente (P) con aquella sucesiva (S), acompañadas de un breve comentario (C) hecho por nosotros; al final de la frase elegida S, escribiremos entre paréntesis cuadrado el nombre del curso que al interno de la SSIS, por declaración explícita del futuro profesor, favoreció o le permitió el cambio en la concepción. (Cuando la frase se extrae del texto y esto hace que la sintaxis de la misma no sea correcta, dicha frase se adecua en modo tal de hacerla comprensible).

(P) La matemática es un cuerpo definido en milenios de años de estudio que no puede ser modificado
(S) No es tanto la matemática a ser el centro de interés, sino la forma como el alumno la aprende y la construye [Didáctica de la matemática]
(C) De una visión absolutista e inmóvil de la matemática, como objetivo central de la acción didáctica, a una atención más significativa hacia la epistemología del aprendizaje matemático.

(P) La matemática es fría y perfecta, para mi siempre ha sido un modelo atrayente

(S) No puedo pensar que todos los estudiantes acepten esta visión, quisiera por lo menos que le reconocieran esta posibilidad [Didáctica de la matemática]
(C) De la convicción que la propia visión sea necesariamente compartida, a la admisión que pueden existir diversos puntos de vista; de un objetivo "fuerte" a objetivos dúctiles.

(P) La matemática tiene una gran utilidad en la vida de todos los días y esta utilidad debe ser puesta en evidencia continuamente para así favorecer su aceptación por parte del estudiante
(S) Se necesitaría buscar una forma tal para que cada uno [cada alumno] reconociera en la matemática una utilidad en forma personal [Didáctica de la matemática]
(C) De la centralidad de la matemática a la centralidad del estudiante; en la primera concepción es la utilidad de la matemática el objetivo al cual debe adecuarse el alumno, en la segunda el interés personal de cada alumno debería ser el punto de partida.

(P) La aprendí [la matemática] como una cosa extraña, sabía hacer las cosas, pero nunca me pregunté el por qué, alcanzaba notas muy altas, pero sabía que dependía de la técnica y no de la comprensión
(S) Sólo hoy entiendo que cada cosa [en matemática] tiene un sentido bien preciso, quisiera evaluar al alumno por lo que hace y por la forma como lo entiende y no sólo por el resultado que da sin entender las razones [Didáctica de la matemática]
(C) De una sensación de inadecuateza a la certeza: la matemática no es un conjunto insensato de cosas de resolver para obtener una evaluación positiva, sino un conjunto de cosas que tienen un sentido.

(P) Siempre había escuchado decir que la matemática es como la filosofía, pero no había entendido nunca el por qué; […] especialmente el álgebra la veía como un conjunto de reglas a seguir; ¿qué relación tiene entonces con la filosofía?.
(S) La matemática se ocupa en verdad de aspectos filosóficos porque debe "organizar" los conceptos; a medida que los construye, un alumno los debe organizar ampliando así su visión del mundo [Didáctica de la matemática]
(C) De una concepción confusa de una disciplina que hace afirmaciones que después no mantiene (filosofía/reglas de seguir) a una concepción de disciplina que ayuda organizar la visión del mundo.

(P) [La matemática es] Fría, árida, fatigosa, inútil, sirve en la escuela sólo para "filtrar" ["rajar", no promover]
(S) Si uno la entiende, como la entiendo ahora, le da un sentido, y en ocasiones más de uno; sirve para saber, como cultura [Didáctica de la matemática y Epistemología/Historia de la matemática]
(C) De una visión terriblemente negativa a una visión de la matemática como cultura.

(P) [La matemática es] Prototipo de razonamiento, pero también juego de símbolos, construcciones que tienen un objetivo, pero sólo construcciones de pensamiento
(S) Ahora veo la matemática como un gran castillo en el cual se debe estar en compañía; no es divertido estar solos, necesitamos intercambiar ideas; mientras más logro convencerme de esto acepto mejor el placer de entenderla [Didáctica de la matemática]
(C) De hecho privado a intercambio social; la comprensión de la matemática como placer del compartir.

Naturalmente la lista podría continuar; pero no es nuestra intención presentar todas las opiniones y todos los cambios de convicciones; de otra parte, salvo palabras diversas, gran parte de los futuros profesores comparten las mismas concepciones de las enunciadas líneas arriba.
Juzgamos importante el hecho de que algunos cambios de concepciones son radicales, clara evidencia de que un curso de 120 horas con la metodología descrita puede modificar significativamente fuertes concepciones.
Otro aspecto que llama la atención es el hecho que haya tenido un mayor efecto en el cambio de concepciones sobre la matemática el curso de didáctica de la matemática y no el curso de epistemología/historia de la matematica; esto tal vez por los contenidos o tal vez porque las reflexiones que tienen como objeto el sujeto que aprende tiene un mayor impacto.
Fueron muchos los futuros profesores que denunciaron la inutilidad de aquellos cursos que, aún teniendo nombres que hacen un llamado a la didáctica o a la epistemología, sólo repiten temas de matemática que según algunos son los más adecuados dentro de un programa de formación.

9.2. Cambios de concepciones sobre la didáctica de la matemática

Paradójicamente, el curso de didáctica de la matemática produce más cambios de concepciones sobre la matemática que no sobre la didáctica de la matemática!. ¿Por qué esto?. Una explicación la podemos encontrar en el hecho que las concepciones sobre la didáctica de la matemática al inicio de la especialización SSIS muchas veces son nulas, en cuanto los futuros profesores, licenciados, se inscriben a la SSIS ignorando totalmente los contenidos que deben afrontar en el curso de didáctica de la matemática. Sin embargo, algunos cambios de concepciones son bien descritos, como lo veremos. De evidenciar explícitamente el hecho de que sólo algunos de quienes seguían el programa SSIS habían ya seguido cursos de didáctica de la matemática en los cursos de pregrado; en estos, pero, no obstante el nombre, se tratan argumentos de matemáticas elementales, o complementarias o de historia de la matemática.

(P) Creía que [la didáctica de la matemática] fuese como preparar los ejercicios, las tareas en clase, las lecciones
(S) La didáctica [de la matemática] te da los instrumentos para entender lo que sucede en aula durante las lecciones de matemática

(C) De una concepción puramente instrumental, a una concepción problemática en clave de epistemología del aprendizaje.

(P) [Declaración oral] En un curso que había seguido, un docente, creo que no era de matemática, que dictaba el curso, no recuerdo como se llamaba, había dicho que en didáctica de la matemática se estudia como hacer una unidad didáctica junto con todas las cosas que se escriben: los pre-requisitos, los objetivos formativos, en suma todos esos aspectos
(S) [Declaración oral] Aquí se aprende a entender que detrás de cada error existe todo un mundo por descubrir, que el estudiante tiene miles de dificultades cuando debe construirse un pensamiento matemático correcto; incluso cuando logra el éxito ¿cómo saber si sabe verdaderamente o si sabe qué es lo que se espera de él?. Es el "contrato didáctico", ¿verdad?. Es uno de los tantos aspectos que se estudian en este curso.
(C) De una concepción instrumental, a una visión constructiva, orientada al estudiante y a su comprensión, a su construcción conceptual.

(P) […] de aprender a ser un profesor, a reconocer cuáles, cómo y cuándo usar determinados instrumentos, una especie de receta; dentro de mi sabía ya que no hubiera aceptado una curso pensado así, que este fuera el precio a pagar para ganar la habilitación para la enseñanza
(S) Ahora se que puedo interpretar los comportamientos de los estudiantes si se equivocan, porque; reconozco los obstáculos que encuentran en el aprendizaje de las cosas; los cambios de registros que los bloquea; nada que ver con recetas, una verdadera y propia ciencia, pero siempre útil, concreta
(C) De una concepción de didáctica de la matemática directiva e imitativa a una ciencia concreta que proporciona instrumentos potentes para interpretar la realidad del aula y las dificultades de los estudiantes.

También en este caso, se podría continuar por largo tiempo; pero para nosotros es más importante dar énfasis en las características radicales de los cambios de concepciones, a veces verdaderamente notables.
Por declaración explícita de los futuros profesores, un punto a nuestro favor en esta toma de consciencia lo encontramos en uno de los cursos de laboratorio de didáctica de la matemática y, para unos muy pocos, los cursos de didáctica general y de pedagogía (que en general, no vienen citados como particularmente significativos, en lo que concierne a los cambios de concepciones sobre la didáctica de la matemática).

9.3. Cambios de concepciones sobre el papel del docente de matemática
El efecto de los cursos de didáctica de la matemática en primer lugar, pero también, en este caso, de pedagogía, de psicología y de didáctica general, generaron profundos cambios de concepciones sobre el papel del docente, sobre sus objetivos y sobre su figura. Nos limitaremos a pocos ejemplos significativos.

(P) Pensaba a mi mismo como quien gestionaba la clase en el sentido que yo habría determinado los tiempos, los contenidos, las pruebas de evaluación
(S) Ahora entendí que, en un cierto sentido, debo respetar los tiempos de los estudiantes, que mi papel consiste en hacer que ellos aprendan bien, que la calificación [es decir la medida de la evaluación individual del alumno] es también un juicio que damos juntos, ellos y yo, de forma objetiva sobre la eficacia de mi acción didáctica
(C) De docente de matemática como instrumento impersonal de progreso en la acción de enseñanza, a docente de matemática como ser humano cuya responsabilidad es hacer que a través de una acción didáctica eficaz sus alumnos aprendan; de ser humano por encima de las partes a persona disponible a la autoevaluación de su eficacia.

(P) […] que existen temas que se deben aprender y que era yo a decidir, como sucedía en mi clase en el último año de la escuela superior; pensaba únicamente, en estar más atento, me decía: haré de todo para que todos aprendan, no voy a perder la paciencia
(S) No puedo esperar que todos aprendan todo, sólo puedo crear las mejores condiciones para dar a cada uno la oportunidad de expresarse de la mejor forma posible, de dar lo que puedan, ahora creo que todos merecen respeto
(C) De una concepción de profesor ingenua, indulgente y omnipotente, capaz de hacer que todos aprendan todo, a una concepción problemática, realista, que coloca al alumno al centro de la acción didáctica.

(P) […] tenía como modelo mi profesor de los últimos años de la escuela superior y varios profesores de la universidad; se preocupaban poco de nosotros; observé también al profesor –tutor- que me dirigió en la práctica docente; él se limitaba sólo a ser preciso y concreto, pero yo veía que muchos alumnos no lograban seguirlo […]; yo creía que en matemática se debía, por fuerza, hacer así
(S) A este punto, estoy dispuesta a hablar con ellos [los alumnos], para que me entiendan
(C) De una concepción toda centrada en la disciplina, donde el punto máximo de la acción didáctica es la exposición de la misma, a una concepción toda centrada en el alumno que aprende, también sin el rigor formal que antes era pensado como indispensable.

(P) [Declaración oral] El profesor de matemática es como un director de orquesta que dicta las notas y las reglas; toda la orquesta obedece y, haciéndolo bien, aprende; había visto una película que me había convencido donde un profesor, en Estados Unidos, llevaba a todos los alumnos a una especie de concurso, recuerdo que se hablaba de derivadas, pero estos [los alumnos] no sabían ni siquiera las fracciones y aún así ganaban, una escuela de provincia, ganaba incluso a escuelas con mucho nombre, mucho más reconocidas; me había convencido, creía que era aquel [el modelo]

(S) [Declaración oral] Ahora entiendo que la película y la filosofía que la sustentaba eran erradas, es como domesticar a la gente a repetir lo que nosotros queremos, como papagayos; yo entendí muy bien la diferencia entre situación didáctica y situación a-didáctica y deseo que mis alumnos se impliquen personalmente en la construcción del conocimiento, como nos enseñaron en el curso [de didáctica de la matemática]
(C) De la concepción de un profesor como director de orquesta y de la clase que repite las notas, a una concepción de profesor como comprometido con los procesos de responsabilización por parte de los alumnos en este proceso; bien explicada en la citación de las situaciones a-didáctica [argumento que tiene una gran influencia en este futuro profesor, como se evidencia en expresiones sobre las cuales no nos detenemos].

Nos limitaremos a estos pocos ejemplos, pero casi todos los futuros profesores, en este campo, declararon cambios de convicciones de gran envergadura, de ellos mismos definidas “inesperadas”, “increíbles”, “enormes” etc.

10. Conclusiones

Un papel fundamental reviste, en los cambios de concepciones sobre la matemática, sobre la didáctica de la matemática y sobre el papel del docente de matemática, la peculiaridad de los cursos que deben seguir los estudiantes de la SSIS; si se contrabandea, por ejemplo, un curso de didáctica de la matemática con un curso de matemática, entonces esto no sólo no produce cambios de concepciones, sino que de hecho confirma sus concepciónes deletéreas, formando como consecuencia “nuevos” profesores que sólo podrán seguir las huellas del pasado. Naturalmente, existen profesores de matemática de “vieja estampa” con una gran eficacia didáctica, que obtienen notables resultados sobre el plano del aprendizaje de sus alumnos; pero esto es consecuencia de una competencia disciplinar, capacidad comunicativa y de convicción, disponibilidad humana y sentido común. Parece que todo esto recae en la metáfora evidenciada en los estudios conducidos sobre los buenos profesores que obtienen resultados en forma espontanea, sin una formación específica en didáctica de la matemática (Flores Martínez, 1999).
Pero el verdadero sentido, el verdadero motivo por el cual se promueve un curso de didáctica de la matemática radica en el hecho que la didáctica de la matemática es vista hoy como una propia y verdadera ciencia que ofrece al docente, al futuro docente, instrumentos científicos concretos y eficaces para hacer de la gestión del aula un proceso eficaz, para entender los problemas que emergen en el aula durante las horas de matemática. Contrariamente a lo que esperan ingenuos románticos que no se recuperan, la didáctica de la matemática es una ciencia y no un arte, aunque una dosis “artística” no afecta (pero: no afecta nunca, ni siquiera en la creación matemática…).
Una vez establecido que el contenido de los cursos de didáctica de la matemática deben estar de acuerdo con el nombre, resta el problema de los tiempos; existen programas

SSIS que dan a disposición de la didáctica de la matemática muy pocas horas; por nuestra misma experiencia, juzgamos que para obtener cambios de concepciones así radicales como los descritos en el artículo, se requiere de un tiempo considerable para que los futuros profesores puedan reflexionar, comparar, imaginar situaciones…
Es muy interesante la lista, hecha por los mismos sujetos de la investigación, de los argumentos de didáctica de la matemática que fueron "decisivos", es decir que influenciaron con mayor fuerza los cambios; nos parece oportuno reportar aquí los más citados (D'Amore, 1999):

- contrato didáctico;
- didáctica de la matemática como epistemología del aprendizaje (que, en el curso, llamamos didáctica "B");
- imágenes y modelos; modelos intuitivos y modelos formales; modelos internos y modelos externos;
- misconcepciones;
- argumentación y demostración;
- teoría de las situaciones didácticas;
- teoría de los obstáculos;
- semiótica y noética; tratamiento y conversión; paradoja de Duval;
- primeros elementos de didáctica del álgebra;
- curriculo, evaluación y transposición didáctica;
- …

sólo para limitarnos a los más citados.

Tres aspectos consideramos de gran trascendencia.
El primero es el siguiente: de los textos producidos por los sujetos de la investigación se evidencia una gran coherencia; en otras palabras: en los textos que manifiestan los cambios de concepciones, los profesores en formación inicial no entran en contradicción; si manifiestan un cambio en matemática, éste tiene siempre un efecto en el cambio de convicciones en didáctica de la matemática y, como consecuencia, en el papel del docente de matemática. Nosotros esperábamos que, por lo menos en algún caso, se pudiera pensar en futuros profesores especializados que describen un cambio de concepciones en un campo, pero después lo contradicen en otro. Esto no se dio, indicio de que:

- se trata de profesionales maduros que son plenamente conscientes de lo que afirman
- las afirmaciones son sinceras y sentidas en verdad
- la acción de la didáctica al interno de la SSIS tuvo un efecto real.

El segundo aspecto tiene que ver con el hecho que, no obstante nuestra intención de analizar como se diversifican los cambios de concepciones según el programa de licenciatura cursado precedentemente, no logramos encontrar nada significativo en relación con esta situación.
El tercero aspecto tiene relación con eventuales temores relativos al hecho que estos futuros profesores especialistas, dada su naturaleza de estudiantes SSIS, podrían dar una

respuesta tratando de respetar situaciones … contractuales (de contrato didáctico o de contrato experimental) (D'Amore, 1999). De hecho, la experiencia muestra que respuestas no sinceras son, la mayoría de las veces, contradictorias y apresuradas; además, estos estudiantes habían ya superado todas las pruebas parciales que, en nuestro curso de didáctica de la matemática, llevan a la evaluación final; por tanto, podemos pensar que han ya superado todo tipo de evaluación por parte de sus profesores. Obviamente esto no niega la posibilidad de un comportamiento no del todo sincero o espontaneo; sin embargo, en todos los coloquios conducidos, nunca tuvimos la impresión que esto se diera.

Para concluir, entre todos los textos recibidos, uno nos impacto particularmente por la extensión y la profundidad de las argumentaciones y por la ostentación consciente de los cambios de concepciones en los tres campos.
El autor del texto se llama G y tiene como formación de base un título en física; le pedimos el permiso de reportar amplios apartados de su relación escrita y de algunas de sus declaraciones orales y le agradecemos el habernos dado su consentimiento.
En su larga relación:

- en cuanto a la matemática declara que tenía una concepción de algo así como «(…) un conocimiento a priori, dotado de una estructura axiomática – deductiva caracterizada de un rígido formalismo. (…) un objeto autoconsistente y perfecto en sí, el conocimiento exacto por excelencia que daba acceso al conocimiento científico». Los cursos de didáctica de la matemática y de epistemología/historia de la matemática le mostraron por primera vez el *por qué* de esto formalismo, cuales «(…) insidias epistemológicas se esconden detrás de los términos que usamos con poca atención». En especial, los cursos de didáctica de la matemática le mostraron «una visión más problemática de la disciplina». En situación de dialogo, G. confesó que le costó mucho trabajo aceptar el hecho que estaba cambiando de concepciones, que la imagen de la matemática se estaba convirtiendo en algo siempre más "humano" y siempre menos formal - en - el – vacío; confesó también de haber hecho un pasaje lento, gradual y sufrido, de una visión "realista" a una visión "pragmática" (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001; D'Amore, 2001; D'Amore, 2003);
- en lo que respecta a la didáctica de la matemática, G. declara de haber esperado que el objetivo de un «curso de didáctica de la matemática hubiera sido el de proveerme instrumentos estrictamente ligados con la disciplina para ayudarme a enseñar con eficacia haciendo que la materia aparezca lo más limpia posible, interesante y atrayente para el estudiante. Pensaba que la gestión de la situación de aula y de la relación con los estudiantes se abandonaba al carisma, a la motivación y a la experiencia de los profesores». Dicho aquí, mejor que en otra parte, esta convicción resume casi todas aquellas de los demás sujetos de la investigación. «(…) ha desplomado mi concepción de enseñanza de la matemática y ha representado una referencia cognitiva en las profundizaciones sucesivas»; a este punto, G. hace una lista de los temas de didáctica de la matemática que le han permitido llegar a esta

conclusión. Sostiene que tuvo forma de verificar la positividad de las propuestas durante el desarrollo de la práctica docente y que «El curso de didáctica de la matemática me ha ayudado a considerar el fenómeno de enseñanza/aprendizaje desde un punto de vista sistemático y no como la yuxtaposición de cada uno de los componentes». Un análisis claro y absolutamente coherente con el proprio cambio de concepción;

- en lo que respecta al papel del profesor de matemática, G. declara de haber sido sorprendido con el fenómeno de la "escolarización de los saberes y de las relaciones" descrito en D'Amore (2000), que lo ha llevado a modificar la imagen del docente construida hasta dicho momento; en este caso, si bien el curso de didáctica de la matemática fue el que determinó con mayor fuerza el cambio de concepción, fueron también los argumentos tratados en otros cursos como pedagogía, didáctica general etc. los que le llevaron a este radical cambio; la educación, de hecho carismático y ligado a la personalidad del docente, se transforma en «un proceso de construcción y de consolidación del yo», por tanto, entra a formar parte de la responsabilidad del alumno; mientras que «los aspectos socio - pedagógicos no son independientes de aquellos cognitivos». G. pasa de una concepción de profesor de matemática "neutro" a una concepción problemática y compleja.

Este triple y completo cambio denunciado por G. lo presenta como un hecho sufrido, no simplemente, razonado y consciente; en efecto, cambiar concepción no es inmune de sufrimientos, especialmente si es consciente; este aspecto emerge en todos los textos que produjeron los futuros profesores.

Creemos que estas explícitas y concisas declaraciones sean el testimonio de como una participación activa en las relaciones educativas, incluso en un nivel cognitivo alto, puede tener un impacto notable también en adultos y en competentes, mientras que, frecuentemente, se piensa que este hecho sólo tiene que ver con estudiantes jóvenes y con escasas competencias cognitivas.

Bibliografía

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7, 2, 33-115.

Chapman O. (2002). Belief structure and inservice high school mathematics teacher growth. En: Leder G.C., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?* (177-194). Dordrecht – Boston – Londres: Kluwer Ac. P.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2000). La escolarización del saber y de las relaciones: los efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas. *Relime*. México D.F., México. 3, 3, 321-338.

D'Amore B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*. Barcelona. 27, 51-76.

D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). Concepts et objects mathématiques. En: Gagatsis A. (Ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. (111-130). Nicosia (Chipre): Intercollege Press Ed. Actas del "Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Universidad de Chipre, 22 junio - 6 julio 2001.

Fennema E., Franke M.L. (1992). Teachers' Knowledge and its Impact. En: Grows D. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (147-164). New York: Macmillan Publishing Company.

Flores Martínez P. (1999). Empleo de las metáforas en la formación de profesores de matemáticas. *Educación matemática*. 11, 1, 89-101.

Frank M.L. (1985). What myths about mathematics are held and conveyed by teachers? *Arithmetic teacher*. 37, 10-12.

Freudenthal H. (1983). Major Problems of Mathematics Education. En: Zweng et al. (Eds.) (1983). *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*. (1-7). Boston: Birkhäuser.

Furinghetti F. (2002). *Matematica come processo socioculturale*. Trento: IPRASE.

Hoyles C. (1992). Mathematics teaching and mathematics teachers: a meta-case study. *For the learning of mathematics*. 12, 3, 32-44.

Kilpatrick J. (1981). The Reasonable Ineffectiveness of Research in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*. 2, 2, 22-29.

Krainer K., Goffree F., Berger P. (Eds.) (1999). *On Research in Mathematics Teacher Education*. Osnabrück: Forschunginstitut für Mathematik Didaktik.
http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html

Lester F.K.Jr. (2002). Implications of research on students' beliefs for classroom practice. En: Leder G.C., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?* (345-354). Dordrecht – Boston – Londres: Kluwer Ac. P.

Llinares S. (2002). Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs. En: Leder G.C., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?* (195-210). Dordrecht – Boston – Londres: Kluwer Ac. P.

Malara N.A., Zan R. (2002). The problematic relationship between theory and practice. En: English L. (Ed.) (2002). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. (553-580). Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum Associates

McDuffie A.R. (2004). Mathematics teaching as a deliberate practice: an investigaction of elementary pre-service teachers' reflective thinking during student teaching. *Journal of mathematics teacher education*. 7, 1, 33-61.

Pehkonen E., Törner G. (1996). Introduction to the theme: Mathematical beliefs. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 28, 99-100.

Presmeg N. (2002). Beliefs about the nature of mathematics in the bridging of everyday and school mathematical practices. En: Leder G.C., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?* (293-312). Dordrecht – Boston – Londres: Kluwer Ac. P.

Schoenfeld A.H. (1983). Beyond the purely cognitive: beliefs systems, social cognitions and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive science*. 7, 4, 329-363.

Schoenfeld A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En: Grows A.D. (Ed.) (1992). *Handbook of research on mathematics learning and teaching*. (334-370). New York: MacMillan.

Speranza F. (1997). Didactics of Mathematics as "Design Science": an Epistemological Approach. En: Malara N.A. (Ed.). *An International View on Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. (150-154). Proceedings WG 25, ICME 8, 1996, Sevilla. Modena: AGUM.

Steiner H.G. (1985). Theory of Mathematics Education (TME): an Introduction. *For the Learning of Mathematics*. 5, 2, 11-17.

Thompson A. G. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: a Synthesis of the Research. En: Grouws D. (Ed.) (1992). *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching*. (127-145). New York: Macmillan Publishing Company.

Törner G. (2002). Mathematical beliefs. A search of a common ground: some theoretical considerations on structuring beliefs, some research questions, and some phenomenological observations. En: Leder G.C., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?* (73-94). Dordrecht – Boston – Londres: Kluwer Ac. P.

Wilson M., Cooney T.J. (2002). Mathematics teacher change and development. The role of beliefs. En: Leder G.C., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?* (127-148). Dordrecht – Boston – Londres: Kluwer Ac. P.

Wittmann E. (1995). Mathematics Education as a "Design Science". *Educational Studies in Mathematics*. 29, 355-374.

Zaslavsky O., Leikin R. (2004). Professional development of mathematics teacher educators: growth through practice. *Journal of mathematics teacher education*. 7, 1, 5-32.

Agradecimientos

Agradecemos a todos los estudiantes del curso de especialización SSIS (a.a. 2003-2004) por la asidua frecuencia a las lecciones (incluso cuando no eran formalmente obligados a seguirlas) y por la contribución dada a la investigación, haciendo aún más pesante el fárdelo de la especialización, con el agravante de un texto que en muchas ocasiones se le encontraba denso y largo, pero siempre lleno de estímulos y de reflexiones personales.

396. D'Amore B., Fandiño Pinilla MI. (2001). Concepts et objects mathématiques. In: Gagatsis A. (ed) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Atti del Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Università di Cipro, 22 giugno –6 luglio 2001. Nicosia (Cipro): Intercollege. 111-130.

Concepts et objets mathématiques

Bruno D'Amore et Martha Isabel Fandiño Pinilla

Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
Facoltà di Scienze della Formazione Primaria
Libera Università di Bolzano, Italia, Freie Universität Bozen, ltalien

Résumé. *Dans cet article on analysera de différentes interprétations des termes "concept" et "objet" en Mathématique, dans l'histoire de la pensée philosophique, psychologique, et dans la toute récente acception "anthropologique",, en montrant qu'il est nécessaire d'adopter une théorie "pragmatique".*

Summary. *In this article various interpretations of terms "concept" and "object" in Mathematics are analysed, using the History of Philosophical Thought, Psychology, and the recent "anthropological" perspective, demonstrating how it could be necessary to enter into a "pragmatic" theory.*

1. Le rôle du langage dans l'apprentissage et dans la formulation des concepts

Il est évident que pendant l'apprentissage et la formation des concepts le langage joue un rôle d'une importance extraordinaire.
Il est bien connu que de la position de Piaget on a approché toujours plus «une dévaluation cognitive progressive du langage» (Pontecorvo, 1983, page 292); ce dernier «doit être vu par rapport à la position de Piaget. Elle se situe contre toute conception identifiant l'origine de la pensée dans la communication sociale à travers le langage, et contre toute conception assimilant les systèmes logiques à des systèmes linguistiques (...). La pensée, insiste Piaget, n'est pas originée par le langage (...) la "structure" d'un système opératoire n'est pas la structure d'un système de signes mais la structure d'un

système “d’actions intériorisées”» (Tornatore, 1974, page 137).
Voilà pourquoi Piaget assume la position suivante:

- l’image est un signifiant dont le but est celui de désigner des objets de manière figurative;
- le concept est un signifié ayant comme fonction l’individuation des caractères constitutifs de l’objet par rapport à d’autres termes de la même classe (et non de le nommer);
- le mot, signe verbal désignant le concept n’ajoute rien, quant à la connaissance, au concept 1ui-même.

La position de Vygotsky (1962, page 106 de l’Ed. it.) est très différente: en effet il voit le langage comme un médiateur entre l’individu et la culture; il affirme que la formation d’un concept se vérifie par le moyen d’une opération intellectuelle «guidée par l’utilisation des paroles nécessaires à la concentration active de l’attention, l’abstraction de certains concepts, la synthèse et la symbolisation de ces concepts par le moyen d’un signe».
L’organisation cognitive de l’enfant reçoit donc, grâce au langage, une dimension n’appartenant qu’à elle, et qui lui est naturelle depuis son début: la *dimension sociale.* S’il est vrai que 1’enfant apprend à catégoriser dans le rapport linguistique avec l’adulte, il est vrai aussi que des formes de catégorisation doivent être déjà présentes en embryon *avant* leur systématisation définitive et adulte. Vygotsky établit donc une comparaison entre les concepts spontanés (ou quotidiens) et les concepts scientifiques:

- les premiers ont la caractéristique d’appartenir à l’expérience personnelle,
- les seconds font déjà partie d’un système de concepts. L’effet de l’école sur les compétences de l’enfant est celui de systématiser les concepts qu’il possède déjà et ceux qu’il acquiert au fur et à mesure.

2. Les définitions de concept et de schéma élaborées par Vergnaud

Gérard Vergnaud, a affronté dans plusieurs occasions la problématique visant à distinguer et à définir les idées de concept et de schéma. Après avoir déclaré que la connaissance rationnelle doit être de type opératif, il définit le schéma «d’organisation invariante du comportement par une classe de situations données» (Vergnaud, 1990).
En particulier, beaucoup de ses exemples sont tirés du domaine de la mathématique:

- la numération d’une petite collection d’objets de la part d’un enfant de 5 ans nécessite de l’application d’un schéma lui permettant de coordonner les mouvements des yeux et des mains et de coordonner la séquence numérique avec eux; en particulier, il existe une constante significative d’un comportement de type schématique dans la répétition du dernier nom numéral, prononcé sur un ton différent;
- la résolution d’équations linéaires par des adolescents suit à son avis un schéma, une

organisation inchangée;

- l'exécution de l'addition en colonne de nombres naturels suit un schéma déjà assumé;

etcetera.

Selon Vergnaud, si on analyse de manière critique la difficulté de certains élèves dans la solution de devoirs de mathématique, par exemple d'enfants face à des problèmes d'arithmétique, c'est en termes de *schémas* qu'il faut analyser le choix des données à utiliser, le choix des opérations, surtout quand il existe plusieurs choix possibles. Même les procédures ne seraient que des schémas.

Selon Vergnaud, le point décisif dans la conceptualisation du réel et dans la didactique est le passage des *concepts-comme-instrument* aux *concepts-comme-objet* et une opération linguistique essentielle dans cette transformation est justement la nominalisation. Cela pourrait se résumer en un seul mot: *conceptualisation.*

Il est donc fondamental de donner une définition pertinente et efficace de *concept.* Dans plusieurs travaux, avec des variations minimes, Vergnaud en suggère une qu'on peut illustrer de la manière suivante:

un concept est une triade d'ensembles:

C=(S,I,*S*)

où:

- S est l'ensemble des situations donnant sens au concept (le *référent*);
- I est l'ensemble des invariants sur lesquels se fonde la capacité operationnelle des schémas (le *signifié*);
- *S* est l'ensemble des formes linguistiques et non linguistiques permettant de représenter symboliquement le concept, ses procédures, les situations et les procédures de tractation (le *signifiant*).

Selon Vergnaud, le fait d'étudier le développement et le fonctionnement d'un concept signifie prise en considération tour à tour de ces trois "plans" séparément et dans leurs relations réciproque et mutuelle.

3. Théories réalistes vs théories pragmatiques

Malgré cela, les questions sur la nature cognitive des concepts mathématiques et sur la nature de la signification des objets mathématiques prirent tout autre direction déjà au cours des années '70.

«Une théorie de la signification est une théorie de la compréhension; c'est à dire, ce dont doit rendre compte une théorie de la signification est ce qu'on connaît quand on connaît le langage, soit quand on connaît les significations des expressions et des discours du langage», déclarait Dummet en 1975 (Dummett, 1991).

Peu d'années après, en 1980, Brousseau se demanda: «Quelles sont les composantes de la signification déductibles du comportement mathématique qu'on observe dans l'élève? Quelles sont les conditions qui mènent à la reproduction d'un comportement tout en gardant la même signification?» (Brousseau, 1981). N'existerait-il pas, par hasard, une

"variété didactique" du concept de sens, spécifique pour la mathématique, jamais étudiée, jamais soulignée jusqu'à présent ni en linguistique ni en psychologie? (Brousseau, 1986).
L'accentuation de la nécessité d'études sur les concepts centrés sur les procès d'apprentissage a été mise en acte par Sierpinska (1990) aussi: «La compréhension du concept sera (...) conçue comme l'acte d'acquisition de sa signification. Tel acte sera probablement un acte de généralisation et synthèse de significations par rapport à des éléments propres à la 'structure' du concept (la 'structure' du concept est le réseau de significations des énoncés qu'on a pris en considération). Ces significations particulières doivent être acquises par des actes de compréhension. (...) La méthodologie des actes de compréhension est concernée principalement par le processus de construction de la signification des concepts».
On se trouve là face à la nécessité d'éclairer la nature de la signification, en confrontant deux catégories différentes dans lesquelles les théories peuvent être partagées en théories réalistes (ou figuratives) et en théories pragmatiques (cette division a déjà paru en Kutschera, 1979).

Dans la **théories réalistes** la signification est «une relation conventionnelle entre des signes et des entités concrètes ou idéales existant indépendamment des signes linguistiques; par conséquent elles se fondent sur un réalisme conceptuel» (Godino, Batanero, 1994). Comme le déclarait déjà Kutschera (1979), «Selon cette conception la signification d'une expression linguistique ne dépend pas de son utilisation dans des situations concrètes, mais il advient que l'utilisation se fonde sur la signification, une division nette entre sémantique et pragmatique étant possible».
Dans la sémantiques réaliste qui en dérive, on attribue des fonctions purement sémantiques aux expressions linguistiques: la signification d'un nom propre (comme 'Bertrand RusseIl') est l'objet que ce nom propre désigne (dans ce cas Bertrand Russell); les énoncés atomiques (comme 'A est un fleuve') expriment des faits décrivant la réalité (dans ce cas A est vraiment le nom d'un fleuve); les prédicats binaires (comme 'A lit B') désignent des attributs, ceux indiqués par la phrase qui les exprime (dans ce cas la personne A lit la chose B). Toute expression linguistique est donc un attribut de certaines entités: la relation nominale qui en dérive est la seule fonction sémantique des expressions. On reconnaît là les positions de Frege, de Carnap, et les positions assumées par Wittgenstein dans le *Tractatus.*
Une conséquence de cette position est l'admission d'une observation scientifique (en même temps donc empirique et objective ou intersubjective) comme pourrait l'être, à un premier niveau, une logique des énoncés et des prédicats.
Du point de vue qui nous intéresse le plus, si on applique les suppositions ontologiques de la sémantique réaliste à la mathématique, on en tire nécessairement une vision platonique des objets mathématiques: dans ce domaine en effet, les notions, les structures, et cetera, ont une réelle existence qui ne dépend pas de l'être humain, parce qu'elles appartiennent à un domaine idéal; «connaître» du point de vue mathématique

signifie découvrir des entités et leurs relations dans ce domaine. Et il est évident aussi que cette vision comporte un absolutisme de la connaissance mathématique en tant que système de vérités certaines, éternelles, non modifiables par l'expérience humaine, vu qu'elles la précèdent ou, au moins, elles lui sont étrangères et indépendantes. Des positions de ce genre, même si elles ont des nuances différentes, ont été adoptées par Frege, Russell, Cantor, Bernays, Gödel, ...; et elles durent faire face à des critiques véhémentes [le conventionnalisme de Wittgenstein et le presque empirisme de Lakatos: voir Emest (1991) et Speranza (1997)].

Dans les **théories pragmatiques** les expressions linguistiques ont des significations différentes selon le contexte où on les utilise, toute observation scientifique résulte donc impossible, parce que la seule analyse possible est "personnelle" ou subjective, de toute manière circonstanciée et non généralisable. On ne peut qu'examiner les différentes "utilisations": l'ensemble des "utilisations" détermine en effet la signification des objets. On reconnaît là les positions de Wittgenstein dans les *Recherches Philosophiques,* quand il admet que la valeur significative d'un mot dépend de sa fonction dans un jeu linguistique, vu qu'à l'intérieur de celui-ci, le mot a un mode d'«emploi» et un but concret pour lequel il a été utilisé, justement. Le mot n'a donc pas de signification en lui-même, et cependant il peut être significatif.
Les objets mathématiques sont donc des symboles d'unités culturelles qui émergent d'un système d'utilisations caractérisant les pragmatiques humaines (ou, au moins, de groupes homogènes d'individus) et se modifiant sans cesse dans le temps, aussi suivant la nécessité. En fait, les objets mathématiques et la signification de ces objets dépendent des problèmes affrontés en mathématique et de leurs solutions.

	THEORIES "REALISTES"	THEORIES "PRAGMA TIQUES"
signification	relation conventionnelle entre signes et entités concrètes ou idéales, indépendantes des signes linguistiques	dépend du conteste et de l'emploi
sémantique contre pragmatique	division nette	non-division ou division nuancée
objecrivité ou intersubjectivité	totale	absente ou discutable
sémantique	les expressions linguistiques ont des fonctions purement sémantiques	les expressions linguistiques et les mots ont des significations "personnelles", ils sont significatifs dans des contextes convenables, mais ils n'ont pas de significations absolues, en soi
analyse	possible et licite: la logique, par exemple	une analyse "personnelle" ou subjective, seule, est possible, l'analyse ne doit pas être généralisable, ni absolue

conséquente vision épistémologique	conception platonique des objets mathématiques	conception problématique des objets mathématiques
connaitre	découvrir	employer dans les contextes qui conviennent
connaissance	elle est un absolu	elle est relative à la circonstance et à l'emploi spécifique
exemples	Wittgenstein dans le *Tractatus,* Frege, Carnap, Russell, Cantor, Bemays, Gödel	Wittgenstein dans les *Reeherehes Philosophiques,* Lakatos

4. Le virage "anthropologique": signifié institutionnel et personnel des objets mathématiques

Dans la direction pragmatique, on comprend la définition que donne Chevallard (1991) d'objet mathématique: un objet mathématique est «un *émergent* d'un système de pratiques où sont manipulés des objets matériels qui se découpent dans différents *registres sémiotiques:* registre de l'oral, des mots ou expressions prononcés; registre du gestuel; domaine de la scription, de ce qui est écrit ou dessiné (graphismes, formalismes, calcul etc.), c'est-à-dire registre de l'écrit» étant donné que le "praxema" est un objet matériel lié à la praxis, l'objet est alors émergent d'un système de praxème». Dans cette acception, la notion de signification d'un objet a moins d'intérêt que celle de *rapport à l'objet,* rapport, relation à l'objet. C'est sur cette idée que s'appuie la construction de la "théorie de la connaissance" de Chevallard, ou mieux de son "anthropologie cognitive", à l'intérieur de laquelle on peut situer la didactique.
Mais alors la personne (ou l'institution, comme ensemble de personnes) qui se met en relation avec l'objet est centrale, et non l'objet en lui-même: «Un objet existe dès lors qu'une personne X ou une institution I reconnaît cet objet comme un *existant* (pour elle). Plus précisément, on dira que l'objet O *existe pour X* (respectivement, *pour I*) s'il existe un objet, que je note R(X,O) (respectivement R_1(O)), que j'appelle *rapport personnel de X à* O (respectivement *rapport institutionnel de I à O)*» (Chevallard, 1992, page. 86).
Cette position a marqué un tournant intéressant dans le contexte des théories encadrant toute recherche en Didactique de la Mathématique, encore plus si on souligne les recherches successives dans lesquelles plusieurs Auteurs ont éclairci et rendu opératoires les notions de Chevallard, en créant des instruments conceptuels adéquats et en les mettant en rapport à ceux que d'autres positions avaient fourni à ce propos.

5. Quelques précisions, avant de continuer

Dans ce paragraphe, il s'agira de quelques précisions terminologiques, de considérations complémentaires et de notes cautionnelles.

5.1. Parfois, en mathématique, on parle de "concepts" parfois d'"objets". Quelle est la différence? Elle pourrait être le résultat d'un caprice des mathématiciens, mais il s'agit par contre d'une différence bien fondée, puisqu'elle se base sur les trois points suivants:

- Tout concept mathématique a des liens avec des "non-objets", du point de vue du réalisme naïf; la conceptualisation n'est donc pas fondée sur des significations s'appuyant sur la réalité concrète, et elle ne peut pas l'être, vu que, dans les mathématiques, des renvois ostensibles ne sont pas possibles;
- Tout concept mathématique doit nécessairement se servir de représentations, vu qu'il n'y a pas d'"objets" à exhiber à leur place ou à leur évocation;[22] la conceptualisation doit donc nécessairement passer à travers des registres de représentation qui, pour de différentes raisons, surtout s'ils ont un caractère linguistique, ne peuvent pas être univoques: dans les mathématiques il n'y a pas d'accès sensible (vue, toucher, ...) direct aux "objets" mais seulement à leurs représentations sémiotiques dans des différents registres linguistiques;
- On parle plus souvent en mathématique d'"objets mathématiques" que de concepts mathématiques car en mathématique on étudie *de préférence* des objets plus que des concepts: «la notion d'objet est une notion que l'on ne peut pas utiliser dès que l'on s'interroge sur la nature, sur les conditions de validité ou sur la valeur des connaissances» (Duval, 1998, p. 139).

5.2. Dans la voie ouverte par Duval, la notion de concept, préliminaire ou au moins prioritaire chez presque tous les Auteurs, devient secondaire, tandis que ce qui assume un caractère prioritaire est le couple *(signe, objet),* ce qui mène au *paradoxe cognitif de la pensée mathématique,* mis en évidence justement par Duval (l988a, b, c; 1993). En Duval (1996) on cite un passage de Vygotsky dans lequel on déclare dans la substance qu'il n'y a pas de concept sans signe, idée d'autre part déjà bien presente ed Peirce: «Toutes les fonctions psychiques supérieures sont unies par une caractéristique commune supérieure, celle d'être des processus médiatisés, c'est à dire d'inclure dans leur structure, en tant que partie centrale et essentielle du processus dans son ensemble, l'emploi du signe comme moyen fondamental d'orientation et de maîtrise des processus psychiques (...) L' élément central [du processus de formation des concepts] est l'utilisation fonctionnelle du signe, ou du mot, comme moyen permettant à l'adolescent

[22] Ici on entend "objet" dans le sens d'"objet réel" ou de "chose". Dans la *Métaphysique,* Aristote exprime bien ce que cela signifie quand il affirme que la chose, en tant que partie du réel, est ce qui présente les trois caractéristiques suivantes: tridimensionnalité, accessibilité sensorielle multiple (c'est à dire de plusieurs sens à la fois) indépendance des représentations sémiotiques et possibilité de séparation matérielle des autres parties de la réalité, des autres "choses".

de soumettre à son pouvoir ses propres opérations psychiques, de maîtriser le cours des propres processus psychiques...» (Vygotsky, 1962; dans l'édition française, 1985, aux pages 150, 151, 157).
Il est clair que si on met l'accent sur le couple *(signe, objet),* toutes les représentations triadiques (de C.S. Peirce, de G. Frege, de C.K. Ogden et I.A. Richards) deviennent fausses.

6. Le concept (ou objet) en mathématique, comme superposition ou comme accumulation de conceptions provisoires

Nous essaierons ici une convergence entre:
(a) une position exclusivement didactique-cognitive, à caractère fortement naïf, accueillant comme hypothèse de base le constructivisme de la connaissance la plus élémentaire, position celle-ci, se fondant sur les positions a-critiques les plus diffusées;
(b) une position anthropologique dans laquelle tout se réfère au rapport personnel envers l'objet mathématique. Tout cela dans le domaine d'une théorie de l'apprentissage mathématique qui n'est caractérisée par aucun type de préconception théorique ou ontologique.
Ce paragraphe **6.** n'est qu'une tentative initiale de médiation entre les positons les plus naïves, mais enracinées dans le sens commun, et ce qu'on a expliqué jusqu'à présent.
Dans le paragraphe **7.** nous ferons quelques considérations critiques.

Soient c_i les conceptions provisoires, dans un processus linéaire et évolutif (au moins dans le temps) d'assimilation et mise à point, relativement à un objet mathématique C. Il est nécessaire de distinguer entre:

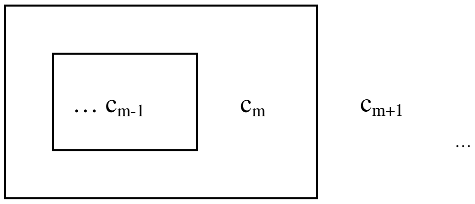
- c_i scientifiques de type institutionnel, qu'on appellera académiques (a), c'est à dire celles que la communauté scientifique (académique) accepte comme pertinentes, significatives et correctes; il s'agit de $R_I(C)$ partagés; on les appellera c_i de type a;
- c_i cognitives de type institutionnel, qu'on appellera scolaires (s), dues à l'action de école et à la noosphère, c'est à dire celles que quelqu'un construit ou a construit à l'école; il s'agit de $R_x(C)$ qui peuvent être aussi non partagées; on les appellera c_i de type s.

Les c_i de type a se différencient de celles de type s seulement parce que les deuxièmes sont plus en retard par rapport aux premières (c'est à dire: les index déposants ont une valeur numérique inférieure), ou bien parce qu'elles sont critiquement moins riches et plus fondées sur des sensations, sur le bon sens, et qu'elles sont liées à des applications, qui sont moins l'objet de révision et de réf1exion critique, et plus liées à de différentes clauses du contrat didactique.
Le sens du processus didactique usité, dans sa forme la plus naïve, mais aussi la plus

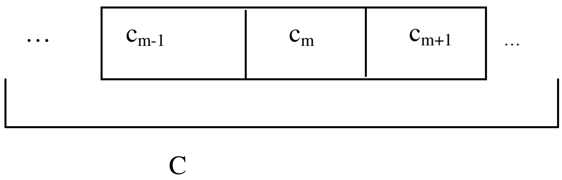
diffusée, est celui de porter à la fin les individus à la formation d'un concept C qui est le pic du processus évolutif, ***le*** concept, qu'on suppose existent, de type a (ou, au moins, le plus proche possible de celui-ci).
Toutefois, comme toute conception est dans une évolution historico-critique *perpétuelle,* il est impossible d'évaluer le franchissement de cette limite, surtout parce qu'on pourra parler à la rigueur d'«objet acquis par la communauté scientifique jusqu'à présent» sans se mettre dans la situation de prévoir le futur de cet objet. L'"objet" est donc dans cette conception quelque chose d'idéal, d'abstrait, l'apex d'un processus toujours en acte, dont on n'a qu'une idée limitée à l'évolution historique et à l'état actuel.

La formation de C à partir de la succession c_i peut se penser selon deux modalités:

superposition: toute conception provisoire c_{m+1} ajoute et intègre la précédente c_m, c'est à dire la comprend et y ajoute quelque chose, en se superposant à elle:



accumulation: toute conception provisoire c_{m+1} ajoute quelque chose (en plus) à la c_m précédente:



En réalité, on a souvent (toujours?) des mélanges des deux modalités.

EXEMPLE 1: le pseudo-objet *droite.*
Je vais tracer, de manière approximative, une succession de conceptions provisoires relativement à un objet supposé *droite.* Dans sa longue histoire évolutive, on pourrait penser à une succession comme celle-ci:
c_1: droite primitive: segment (ses caractéristiques sont: le fait d'être droit et subtil, et son indépendance nominale de la longueur); celle-ci est l'idée naïve d'un enfant
c_2: droite euclidienne: idéalisation de c_1 [ses caractéristiques sont: le fait d'avoir une seule dimension (ce qui est l'idéalisation du "subtil") et le fait d'être allongeable (ce qui est

l'idéalisation de l'indépendance du nom de la longueur)]; la relation entre points et droite n'est pas très claire; au sens pitagorique, le modèle est celui des perles (monades) enfilées dans le collier (droite); mais chez Euclide cette position naïve a déjà disparu
c_3: droite dense: idéalisation de c_2: entre deux points il y en a *toujours* un autre: le modèle pitagorique est dépassé
c_4: droite continue (déjà aux temps de Newton et Leibniz): sur la droite il existe de sièges convenables aux points correspondants à des valeurs irrationnelles ($\sqrt{2}$) et transcendantes (π) même si leur statut épistémologique n'est pas encore bien clair
c_5: droite d'Hilbert (définie implicitement par les axiomes): il n'y a plus de tentative de définition explicite pour essayer d'égaler l'image de droite à un modèle pre-figé qu'on veut rejoindre, mais on a une idéalisation de cette conception à l'intérieur d'un système théorique
c_6: droite comme nom commun utilisé indifféremment dans le domaine euclidien et non euclidien: on ne parle plus de dimension, du fait d'être droite, ou d'être infinie (mais toujours illimitée)
c_7: dénomination de droite donnée à des entités différentes de modèles différents (droite finie ou infinie, discrète, dense ou continue, limitée ou illimitée...)
c_8: objet n-2 dimensionnel dans une variété n-dimensionnelle
…
Comment peut-on établir si d'autres c_i suivront, et lesquels? Le pseudo-objet C "droite" est une superposition ou une accumulation des conceptions précédentes; il semble que de c_1 à c_5 on puisse parler surtout de passages de type "superposition", tandis que de c_6 à c_8 il semble s'agir surtout de passages de type "accumulation".

EXEMPLE 2: le pseudo-objet *addition.*
Je tracerai, de manière approximative, une succession de conceptions provisoires relatives à l'objet supposé *addition.* Dans sa longue histoire évolutive, on pourrait penser à une succession comme celle- ci:
c_1: addition pytagorique (ordinal et cardinal confondus) en N-{O}; l'addition comme cardinal de recueils disjoints; il s'agit là de la conception naïve d'un petit enfant (c'est sur ce point que Vergnaud explique quelques-uns de ses *théorèmes* en *acte)*
c_2: addition en Q_a; je pense aux additions entre fractions, dans l'histoire sumérienne, égyptienne, et puis grecque
c_3: addition en N et en Qa (O inc1us); au cours du Moyen - Age, dans le monde indien-arabe il devient nécessaire de référer l'addition aux cas où un des termes de la somme est zéro
c_4: addition en Z
c_5: addition en Q
c_6: addition en R
c_7: addition dans le domaine complexe C
c_8: addition dans les quaternions et, plus en général, dans les systèmes complexes n-valables; je pense aux recherches de Hamilton, Grassmann, Frobenius et Hankel;

certaines propriétés formelles de l’addition typiques des nombres N, Z, Q, R et C se perdent, et toutefois l’opération qui étend et généralise l’addition est appelée toujours de la même manière
c_9: addition généralisée dans les réseaux et dans les algèbres de Boole
c_{10}: addition généralisée dans les structures $<A,+,\times, O, 1,...>$
…
Comment peut-on établir si d’autres c_i suivront, et lesquels? Le pseudo-objet C “addition” est superposition ou accumulation des conceptions précédentes; il semble que de c_1 à c_7 on puisse parler de passages surtout de type “superposition”, tandis que de c_8 à c_{10} il semble s’agir surtout de passages de type “accumulation”.

7. Critiques à la position précédente

La vision tracée dans le paragraphe 6. n’est qu’un schéma résumant les positions les plus naïves, mais aussi les plus populaires à cet égard. Voyons maintenant quelques notes fortement critiques.
En tout cas, une réflexion mure montre que l’activité des particuliers face aux problématiques créant des c_i est essentielle; dans ce sens, un supposé ordre hiérarchique perd de sens, à mon avis; par conséquent, une plus grande... noblesse conceptuelle supposée pour les c_i de type a, par rapport à celles de type s, disparaît. Les “objets” se constituent de l’activité des personnes face à la solution de problèmes, de façon indépendante de tout contexte institutionnel aussi; même, dans un certain sens, on privilégie les significations personnelles par rapport aux significations institutionnelles.
De ce point de vue, il semble insensé de parler, par exemple, de l’”objet droite” (ou de l’”idée de droite”, ou du “concept de droite”) comme on le fait normalement: évidemment, on est plutôt forcé à parler de “pluralité d’objets”; il ne s’agit donc pas tellement d’une “montée” vers un apex, mais d’une pluralité d’”objets” *différents* qui, tout banalement, ont leur nom propre en commun, mais ce dernier n’ identifie pas une seule entité, comme dans la vision qu’on a appelé “théorie réaliste”, et sa signification dépend d’un contexte d’utilisation, comme dans la vision qu’ on a appelé “théorie pragmatique”.
Tout c_i est donc, dans cette vision, un “objet droite” (probablement, une analyse plus attentive pourrait montrer qu’à son tour, il est lui-même une pluralité...).
Tout c_i est le résultat d’un rapport personnel à l’objet, mais, comme on a vu Chevallard et Godino-Batanero, *l’objet est ce rapport personnel lui-même,* et non pas un supposé “objet en soi”.
D’autre part, Wittgenstein lui-même insiste sur le fait qu’on ne doit pas parler d’idées mathématiques au sens où, par contre on le fait normalement, c’est à dire comme le résultat d’un processus d’abstraction, vu que cela est à l’origine de graves confusions philosophiques, psychologiques [et didactiques, comme me le suggère Juan Godino (dans une lettre privée)]. Wittgenstein dans les *Recherches Philosophiques* insiste sur le

concept de diversité d'utilisation, ou d'utilisations différentes du "terme" ("droite", "addition", dans mes exemples plus haut).
Chez Godino-Batanero, on propose d'associer l'entité théorique "signification de Ox" (en réalité une classe de significations) à l'objet mathématique Ox: on passe ainsi de l'accentuation du "concept", de ses définitions et de ses règles d'utilisation, à une nouvelle accentuation des domaines de problèmes, des pratiques des techniques qui constituent la base de ces entités intensionnelles.
Les deux cas que nous avons fourni, "droite" et "addition", constituent donc justement un exemple de la relativité des objets Ox qui parfois sont des entités mentales (donc personnelles), et parfois des entités abstraites (institutionnelles). Nous n'avons pas trop insisté sur l'éclaircissement et la définition de cette distinction, parce que nous la considèrons occasionnelle et réciproque...

Nous croyons pouvoir déclarer que l'identification de problèmes spécifiques, d'activités pratiques, d'activités techniques etc. qui, ont porté même d'un point de vue historique à la création de toute "conception", tout "objet", toute "règle", est d'une importance fondamentale dans les études théoriques d'Education Mathématique, dans la recherche dans ce domaine, et dans la pratique didactique. Il est aussi extrêmement important d'établir la dépendance réelle ou présumée de cette recherche des contextes institutionnels (il pourrait y avoir une raison historique, ou éducative, ou instrumentale etc., ou toutes ces raisons ensemble).

Bibliographie

Anderson R.C., Spiro R.J., Montague W.E. (1977). *Schooling and the acquisition of knowledge.* Hillsdale N,J., Lea.

Astolfi J.P., Develay M. (1989). *La transposition didactique en mathématique, en physique et biologie.* Irem de Lyon, Lirdis.

Brousseau G. (1981). Address of members of the G.R.D.M. (France) at the ICME IV. August 1980. *Recherches* en *Didactique* des *Mathématiques.* 2, l, 130-135.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches* en *Didactique* des *Mathématiques.* 7, 2, 33-115.

Bruner J .S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist.* 19, 1-15.

Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble.* LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique de la Mathématique.* 12, l, 73-112.

Clary M.,Genin C. (1991). *Enseigner l'histoire à l'école?* Paris, Hachette/Istra.

Cornu L., Vergnioux A. (1992). *La didactique en questions.* Paris, Hachette.

D’Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna, Pitagora.

D’Amore B. (2001). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l’apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. En italien: *La matematica e la sua didattica.* 2, en presse.

Dewey J. (1933). *How we think.* Edit. Italienne: 1961. Florence, La Nuova Italia.

Dummett A.A.E. (1991). ¿Qué es una teoria del significado? In: Valdés L.M. (ed.). *La búsqueda del significado.* Madrid, Tecnos. [Il faut remarquer que la version originale de ce travail remonte au 1975].

Duval R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* l, 7-25.

Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 1,57-74.

Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 1, 235-253.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives.* ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? Texte du cours tenu à la VIII Ecole estivale de Didactique de la Mathématique, 1995; actes de 1996.

Duval R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* 6, 139-163.

Emest P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* London, Falmer Presso.

Gagné R. (1965-1985). *The conditions of learning.* New Y ork, Holt, Rinehart & Winston Inc. 1965. L’oeuvre subit un changement complet de plan quand il fut publié par Cbs College Publishing, 1985.

Gal’perin P Ja. (1969). Contributo allo studio dello sviluppo intellettuale del bambino. Dans: Veggetti M.S. (ed.) (1977). 43-63. [L’article de Gal’perin fut publié dans une revue soviétique en 1969].

Giordan A., De Vecchi G. (1987). *Les origines du savoir.* Neuchàtel, Delachaux et Niestlé.

Godino J., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objectos matematicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 14, 3, 325-355. [Trad. it. Bologna, Pitagora 1999, comment livre dans la série: Bologna-Querétaro].

Godino J., Batanero C. (1998). The dialectic relationships among theory, development and practice in Mathematics Education: a meta-analysis of three investigations. In: Malara N.A. (Ed.) (1998), *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline. Proceedings oJ WG* 25 *ICME* 8, *Sevilla July 1996.* Modena, CNR-MURST-University of Modena. 13-22.

Klausmeier H.J. (1979). *Un modello per l'apprendimento dei concetti.* In: Pontecorvo C., Guidoni P. (ed.) (1979).
Klausmeier H.J. (1980). *Learning and teaching concepts.* New York, Academic Press.
Klausmeier H.J., Gathala E.S., Frayer d.A. (1974). *Conceptuallearning and development.* New Y ork and London, Academic Press.
Kutschera F. von (1979). *Filosofia dellenguaje.* Madrid, Gredos.
Luria A.R. (1982). *Language and Cognition.* (ed. by J. V. Wertsch). Washington, V. H. Winston.
Meirieu P. (1987). *Apprendre... oui, mais comment?* Paris, ESF.
Nelson K. (1974). Concept, word and sentence: interrelations in acquisition and development. *Psychological Review.* 81,4.
Nelson K. (1977). Cognitive development and the acquisition of concepts. In: Anderson R.S., Spiro r.l, Montague W.E. (eds.), (1977).
Piaget J., Inhelder B., Szeminska A. (1948). *La géométrie spontanée de l'enfant.* Paris, PUF.
Vygotsky L.S. (1962). *Thought and language.* Cambridge, MIT Press. Il s'agit d'un résumé.
Pontecorvo C. (Ed.) (1983). *Conoscenza scientifica e insegnamento.* Torino, Loescher.
Pontecorvo C., Guidoni P. (1979). *Scienza e scuola di base.* Rome, Istituto della Enciclopedia Treccani.
Sierpinska A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics.* 10, 3, 24-36.
Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica.* Bologne: Pitagora.
Tomatore L. (1974). *Educazione e conoscenza.* Turin, Loescher.
Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 19, 133-169.
Vygotsky L.S. (1960). The development of higher forms of attention in childhood. In: Werscht J. V. (Ed.). *The concept oJ activity in Soviet psychology.* Armonk NY, Sharpe 1981,189-240. La I édition russe remonte au 1960, Moscou, Izd. Akad. Pedag.
Vygotsky L.S. (1962). *Thought and language.* Cambridge, MIT Press. Il s'agit d'un résumé tiré de l'édition originale en langue russe, un recueil d'articles publiés à Moscou en 1956. Ed. française: 1985, Paris, éd. Sociale. Ed. italienne: 1990, Bari, Laterza.