Zlomky: konceptuálne a didaktické hl’adisko

Martha Isabel Fandiño Pinilla
NRD
Department of Mathematics
University of Bologna - Italy

V predloženej práci vysvetľujeme závery projektov dlhodobého výskumu, ktorý súvisí s pojmom „zlomky“.

Jedná sa o jednu z najštudovanejších otázok v Didaktike matematiky, odkedy je vyučovanie zlomkov jednou z jej najväčších neúspechov.

Poukazujeme na jednu z možných ciest úspešného porozumenia uvedeného pojmu vychádzajúcu zo štúdia Didaktiky matematiky, viac ako z matematickej motivácie.

Matematické hľadisko

Predovšetkým musím povedať, že veľa učiteľov si neuvedomuje skutočnosť, že existuje významný rozdiel medzi zlomkom a racionálnym číslom (štúdium je venované predovšetkým racionálnym číslam Q^a.

Málo z nich si uvedomuje dôvod konštrukcie Q^a vychádzajúc z množiny usporiadaných dvojíc z $N \times N^+$.

Skutočnosť, že kladné racionálne číslo je trieda ktorá obsahuje nekonečne veľa usporiadaných ekvivalentných dvojíc prirodzených čísel (druhé z nich nesmie byť nula) je podľa nás zrejmá každému.

Vyskúšajme matematicky prijateľnú definíciu Q^a, vychádzajúc z N, uvažovaním dvojíc $(a; b)$, $(c; d)$ z množiny $N\times(N-\{0\})$, kde a, b, c, d sú ľubovoľné prirodzené čísla, s jedinou podmienkou $b\neq0$, $d\neq0$, a zaveďme nasledujúcu reláciu (označme ju **eq**):

[$(a; b)$ **eq** $(c; d)$] vtedy a len vtedy, keď [$a\times d = c\times b$].

Táto relácia je reláciou ekvivalencie, čo značí, že je (dôkazy sú jednoduché):

- ***reflexívna***: pre každú dvojicu (a; b) z N×(N-{0}) platí: (a; b) **eq** (a; b);
- ***symetrická***: pre každú dvojicu (a; b), (c; d) z množiny N×(N-{0}) platí: **ak** [(a; b) **eq** (c; d)] **potom** [(c; d) **eq** (a; b)];
- ***tranzitívna***: pre každú trojicu dvojíc (a; b), (c; d), (e; f) z množiny N×(N-{0}) platí: **ak** {[(a; b) **eq** (c; d)] **a** [(c; d) **eq** (e; f)]} **potom** [(a; b) **eq** (e; f)].

Takýmto spôsobom možno pôvodnú množinu $N \times (N-\{0\})$ rozložiť na triedy ekvivalencie prostredníctvom operácie, ktorá je známa ako “prechod k podielu”, čo značí: $[N \times (N-\{0\})]$ / **eq**.

$[N \times (N-\{0\})]$ / **eq** obsahuje nekonečný počet tried, z ktorých každá môže byť generovaná jedným svojim prvkom; každá trieda obsahuje nekonečný počet dvojíc prirodzených čísel.

$[N \times (N-\{0\})]$ / **eq** je množina Q^a. Každá trieda ekvivalentných dvojíc sa nazýva racionálne číslo. Reprezentantom každej triedy môže byť ľubovolná z dvojíc.

V Q^a môže byť definovaná i operácia delenia, zatiaľ čo v množine N nie je: pre delenie dvojice $(a; b)$ (s $b \neq 0$) dvojicou $(c;d)$ (s $d \neq 0$) stačí násobiť $(a; b)$ dvojicou $(d; c)$ (pri splnení podmienky $c \neq 0$).

Zlomky ako predmet školských poznatkov

Prechod od „Poznatku" (akademického) k „Vyučovanému poznatku" (študenta) je výsledkom dlhej a citlivej cesty vedúcej najskôr k poznatku pre učiteľa, potom k poznatku pre aktuálne vyučovanie a nakoniec k poznatku, ktorý si má osvojiť žiak.
V tejto postupnosti sa prvý krok transformácie „Poznatku" na „Poznatok pre vyučovanie" nazýva *didaktická transpozícia* a je dôležitým momentom v ktorom je najdôležitejšia odbornosť a tvorivosť učiteľa.

Ako sme už naznačili, poznatok Q^a nemôže byť jednoducho prenesený žiakovi, ani na základnej, ani na strednej škole. Žiak jednoducho nemá dosť analytických skúseností, ani kognitívnych schopností na konštrukciu takéhoto Poznatku.

Predsa však je nutné do „vyučovaného poznatku“ zahrnúť Q^a, spolu s používaním desatinnej čiarky na desatinných číslach medzi 0 a 1, atď. Okrem toho menový systém skoro všetkých krajín predpokladá, že občania majú základné schopnosti pracovať s racionálnymi číslami; medzinárodný systém mier to považuje tiež za samozrejmé už od konca osemnásteho storočia; prakticky vo všetkých povolaniach je nevyhnutné poznať aspoň intuitívne význam čísel 0,5 alebo 2,5. Racionálne čísla majú teda i sociálny štatút ktorý potvrdzuje schopnosť ďalšieho rozvoja poznatkov o racionálnych číslach.

Ako sme vyššie naznačili, proces didaktickej transpozície je nevyhnutný pri prenose Q^a do prijateľnej formy pre žiakov základnej a strednej školy.

História vyučovania matematiky jasne naznačuje cestu takejto transpozície počas jej vývoja: zlomky (prvý a druhý stupeň ZŠ), desatinné čísla (prvý a druhý stupeň ZŠ), Q^a (stredná škola, niekedy univerzita).

Bolo by chybou predpokladať, že „didaktická transpozícia" je to isté ako „zjednodušenie". Nezriedka pozorujeme, že naši študenti musia ísť cestou oveľa komplikovanejšou v porovnaní s cestou vývoja samotného Poznatku.

Napríklad, s problematikou pojmu číselných zlomkov sa objavujú objekty poznania, ktoré neexistujú v Q^a: domnelé zlomky (m/n kde n je deliteľ m) alebo nepravé zlomky (m/n kde $m>n$), sú nepresné, zatiaľ čo v Q^a takéto problémy neexistujú.

Samozrejme, ak by bolo možné vyhnúť sa zlomkom a ísť priamo ku kladným racionálnym číslam, mohlo by to byť jednoduchšie a prirodzenejšie.

Je to však nemožné. Stále sa zdá prirodzené ísť cez zlomky, aj keď nie je všetkým jasné že sa jedná o najefektívnejšiu cestu. Čo je jasné je to, že sa tu objavuje veľa problémov.

Teda zlomky, aj kým nie sú časťou akademických vedomostí, sú predmetom Matematického Vzdelávania ako objekt poznatkov, ktoré nazývame „školské“.

Teoretický rámec didaktického výskumu zlomkov

Zavedenie pojmu zlomkov má rovnaký základ na celom svete. Daný konkrétny celok delíme na *rovnaké* časti a následne pracujeme s niekoľkými z nich.

Takýto intuitívny pojem zlomku z celku je jasný a ľahko pochopiteľný, pretože ho možno jednoducho modelovať v každodennom živote. Z teoretického hľadiska sa však jedná o neadekvátne vysvetlenie rozmanitých interpretácií pojmu zlomok.

Ako uvidíme, jednoduchá „definícia" nie je postačujúca.

Niekedy to vyzerá tak, že mnohí učitelia nič netušia o obsiahnutej konceptuálnej a kognitívnej zložitosti zlomkov. Domnievame sa, že ak chceme aby žiaci pochopili zlomky, je potrebné venovať viac pozornosti rôznym spôsobom ponímania pojmu zlomok.

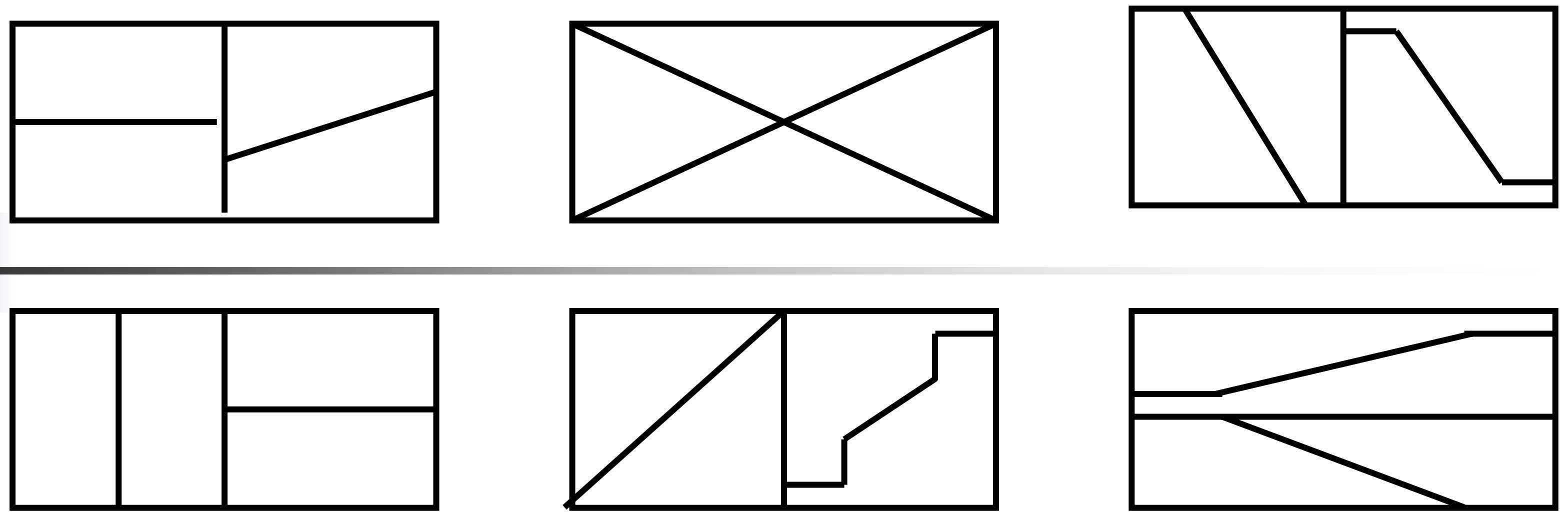
V práci ponúkame prehľad výsledkov medzinárodného výskumu v tejto citlivej oblasti, ktorý považujeme za jeden z najkomplexnejších na celom svete. Nie je možné uviesť všetky tieto výskumy, pretože ďaleko presahujú našu predstavivosť.

Z uvedeného dôvodu sa zameriame iba na jeho veľmi stručné zhrnutie; v ďalšej časti sa však na niekoľkých stranách pokúsim predložiť analýzu základov výskumu v tejto oblasti s odvolaním sa na množstvo publikácií.

Rôzne možnosti ponímania pojmu zlomok

Učiteľov na školeniach často prekvapí, ako intuitívne jasná definícia zlomku môže spôsobiť vznik minimálne tuctu rôznych interpretácií tohto pojmu.

1) Zlomok ako časť celku, niekedy spojitého (torta, pizza, plocha útvaru) a niekedy diskrétneho (množina loptičiek alebo ľudí). Tento celok je delený na „rovnaké" časti, okolnosti (situácie) však v škole často nie sú dobre definované a tak vznikajú rozpačité výsledky, tak ako to vidno v nasledujúcich situáciách:



alebo diskrétne: ako vypočítať ⅝ z 12 ľudí.

Ak ponúkame študentom konkrétne modely a potom žiadame abstraktné zdôvodňovanie, nezávislé od ponúknutého modelu, je to zrejmý indikátor nedostatku didaktického uvedomenia zo strany učiteľa a istý návod na neúspech.

2) Niekedy je zlomok chápaný ako výsledok ešte neuskutočneného delenia, tak ako *a*/*b*, ktorý možno interpretovať ako *a* : *b*; v tomto prípade najviac intuitívna interpretácia nie je časť/celok, ale že máme *a* objektov a delíme ich na *b* častí.

3) Niekedy zlomok chápeme ako pomer, ako interpretáciu, ktorá nekorešponduje ani s interpretáciou časť/celok ani s interpretáciou neuskutočneného delenia, ale skôr pomer medzi veľkosťami..

4) Niekedy je zlomok chápaný ako operátor

5) Zlomok je dôležitou súčasťou pravdepodobnosti, avšak nie dlho korešponduje so svojou pôvodnou definíciou,, minimálne v jej pôvodnej forme.

6) Zlomky ako skóre majú dosť rôzne vysvetlenie a zdá sa, že sa riadia inou aritmetikou.

7) Skôr alebo neskôr zlomok musí byť transformovaný na racionálne číslo, tento prechod nie je vôbec bezproblémový.

8) Neskôr zlomok musí byť spojený s predstavou bodu na číselnej osi, čo vedie k úplnej strate jeho pôvodného zmyslu.

9) Zlomok je často používaný ako miera, špeciálne pri jeho vyjadrení v tvare desatinného čísla.

10) Niekedy zlomok vyjadruje vybraté množstvo výberov v množine, čím nadobúda význam indikátora aproximácie.

11) Často sa zabúda, že percento je zlomok, tiež so špeciálnou charakteristikou.

12) V bežnom jazyku je mnoho použití zlomkov, nie vždy nutne explicitne vyjadrených, napr. čas ("štvrť na desať") alebo popis stúpania ("10% stúpanie"), sú často ďaleko od školského chápania zlomkov.

Noetika a semiotika zlomkov

Termín "***noetika***" popisuje pojmové osvojenie a teda v rámci školského prostredia pojmové učenie.

Termín "***semiotika***" popisuje vyjadrenie pojmov prostredníctvom systému znakov.

Obe sú v matematike veľmi dôležité.
Na jednej strane každá forma matematickej aktivity vyžaduje učenie sa jej pojmov. Na druhej strane je nemožné študovať učenie sa matematiky bez odvolávky na semiotický systém.

Je dôležité uvedomovať si, že matematické pojemy neexistujú v konkrétnej realite. Bod P, číslo 3, sčítanie, rovnobežnosť dvoch priamok, nie sú konkrétne objekty, ktoré by existovali v empirickej realite. Jedná sa o čisté pojmy, ideálne a abstraktné, a preto, ak sa chceme na ne odvolávať, nemôžu byť „empiricky predvedené" ako je to v iných vedách. V matematike možno pojmy iba ***reprezentovať*** vybraným semiotickým registrom.

Je faktom, že v matematike nemožno pracovať priamo s objektami (t.j. s pojmami), ale iba s ich ***semiotickými reprezentáciami***. Takže sémiotika je základom ako v matematike, tak i vo vyučovaní matematiky.

K reprezentácii daného pojmu existuje viac možných registrov.

Prechod z jednej reprezentácie k inej v rámci toho istého registra sa nazýva „transformácia úpravou", kým zmena sémiotickej reprezentácie do iného registra sa nazýva „transformácia konverziou".

V 1993 Duval upriamil pozornosť na kognitívny paradox ukrytý vo vnútri tohto objektu. Uvidíme, že pohľad na didaktiku zlomkov má mimoriadne dôležitý význam.

Zlomok je pojem, ktorého učenie je noetické. Ako taký nemôže byť konkrétne demonštrovaný. Možno s ním operovať ako s objektom, koláčom, ktorý rozdeľujeme a získavame takto jeho časť. Výsledok však nie je matematický „zlomok" ale iba „zlomok tohto objektu". Ak pracujeme so semiotickým registrom konkrétnych operácií, objasňujeme semiotickú reprezentáciu, nie pojem.

Ak rozlišujeme črty ktoré charakterizujú rôzne vybrané objekty – akt delenia, koláč (spojitý), obsah (spojitý) obdĺžnika, množina loptičiek (diskrétny), formálny zápis s ich špecifickým názvom – úprava transformáciou (málo) a konverzia transformácií (veľa) spojite vedú k záveru, že ak študent je schopný reprodukovať ich, vyučovanie bolo úspešné, učenie bolo dokonalé a pojem skonštruovaný.

Ťažkosti s učením zlomkov a Didaktika matematiky

Výskum poukázal na niektoré „typické“ chyby študentov na celom svete. Výskum ich dôkladne a precízne študoval a evidoval. Nižšie uvádzame tie najdôležitejšie.

1) Ťažkosti v usporiadaní zlomkov a čísel zapísaných v desatinnom tvare.
2) Ťažkosti s operáciami medzi zlomkami a medzi racionálnymi číslami.
3) Ťažkosti vo vyjadrovaní ešte aj v najvšeobecnejšej schéme.

4) Ťažkosti v zaobchádzaní s prídavným menom “rovný”.
5) Ťažkosti v zaobchádzaní s ekvivalenciou.
6) Ťažkosti pri úprave na minimálny počet členov.
7) Ťažkosti v zaobchádzaní s neštandardnými útvarmi.
8) Ťažkosti v prechode od zlomku k celku ktorý ho generuje.
9) Ťažkosti v zaobchádzaní so samostatnými diagramami, obrázkami alebo modelmi.

Výskum poukázal na tieto typické chyby a klasifikoval ich, avšak bez použitia modernej didaktiky matematiky s akceptovaním epistemológie učenia sa v špecifickom prípade zlomkov, čím zameral svoju pozornosť na výsledky výskumu, ktorý sa realizoval posledných 40 rokov.

Táto skutočnosť ma viedla k realizácii môjho výskumu v rámci modernej didaktiky matematiky a k vráteniu sa k predchádzajúcemu klasickému výskumu zlomkov analyzujúc jeho výsledky z pohľadu didaktiky matematiky a nie len z hľadiska matematickej motivácie „typických žiackych chýb". Nasledovný zoznam naznačuje niekoľko možných východísk.

Výskum zdôraznil, že pôvod naznačených problémov súvisí s niektorými otázkami súčasnej didaktiky matematiky, presnejšie :

1. Didaktický kontrakt
2. Neprimerané semiotické reprezentácie
3. Predčasná formulácia predstáv a modelov
4. Nepochopenie
5. Ontogenetické, didactické, epistemologické prekážky
6. Nadbytok didaktických situácií a nedostatok a-didaktických situácií

Rada by som naznačila iba jednu z týchto čŕt.

Epistemologické prekážky

Mnoho vecí, ktoré súvisia s učením sa zlomkov možno považovať za skutočné epistemologické prekážky a ľahko ich spoznáme v histórii a vyučovacej praxi.

a) Redukcia zlomkov na minimum členov môže byť dlhodobo špecifickým cieľom štúdia v histórii ako to ukazuje skutočnosť že Egypťania, ktorí sa ktorí sa zaoberali štúdiom zlomkov počas mnohých storočí, používali iba zlomky s jednotkovým čitateľom (tzn. kmeňové zlomky)
b) Prechod od zlomkov k desatinným číslam potreboval v matematike viac ako 4,500 rokov.
c) Zvládnutie nuly v zlomkoch bol v histórii často enormným zdrojom problémov, dokonca pre vynikajúcich matematikov.

Dúfam, že tento prehľad vám umožnil vytvoriť si predstavu o výskume, ktorému som venovala 6 rokov môjho života a ktorý je kompletne popísaný v dizertačnej práci, ktorú som prezentovala pred touto dizertačnou komisiou.

ĎAKUJEM ZA VAŠU POZORNOSŤ A TRPEZLIVOSŤ