Ako sa mení zmysel matematických objektov vplyvom úpravy alebo konverzie ich semiotickej reprezentácie

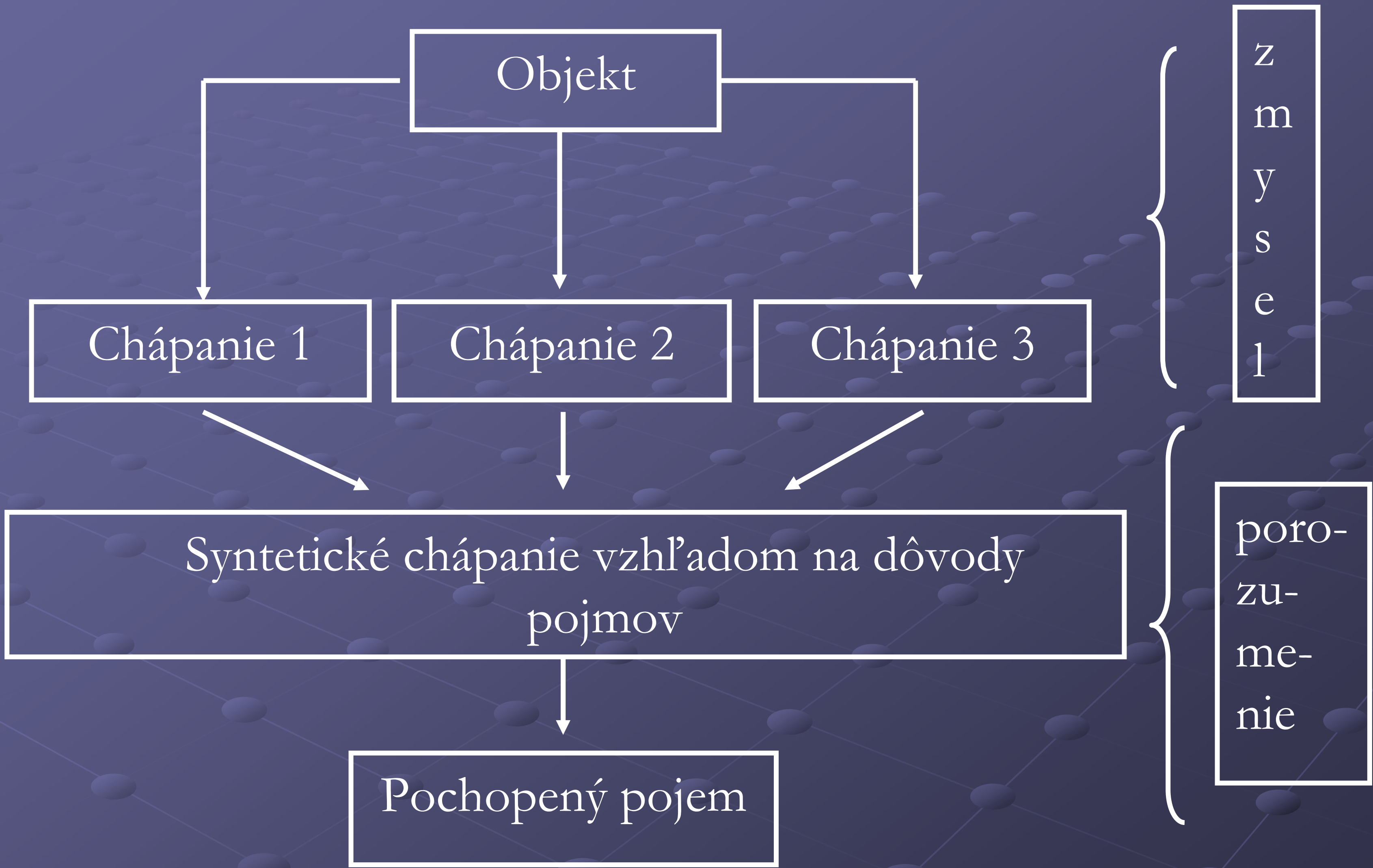
Bruno D'Amore
Department of Mathematics, University of Bologna, Italy
Faculty of Education, University of Bolzano, Italy
Pedagogical High School, Locarno, Switzerland
MESCUD, University Distrital "F. José de Caldas", Bogotà, Colombia

Výskum bol realizovaný v rámci výskumného projektu: „Metodologické aspekty (teoretické i empirické*) v pre i postgraduálnej príprave učiteľov matematiky pre všetky vzdelávacie stupne“*, financovaný Univerzitou v Bologni.

1. Úvodné poznámky

Na každej úrovni matematického vzdelávania sa často, i s veľkými vzájomnými rozdielmi medzi žiakmi stáva, že sme prekvapení tvrdením, ktoré zrazu poukazuje na chýbajúce pojmové konštrukcie týkajúce sa témy, ktorá sa už predtým určite objavila.

Ponúkneme niekoľko príkladov, s ktorými sme sa stretli v posledných rokoch a pokúsime sa predložiť jedno z možných vysvetlení tohto javu analýzou jedného konkrétneho príkladu.


Objekt
Chápanie 1
Chápanie 2
Chápanie 3
Syntetické chápanie vzhľadom na dôvody pojmov
Pochopený pojem
z m y s e l
poro-zu-me-nie

2. Matematický objekt, jeho zdieľaný zmysel a jeho semiotické reprezentácie: popis jednej príhody

2.1. *Príhoda*

V piatej triede (deti približne 10 ročné) jednej talianskej základnej školy, učiteľ viedol úvodnú hodinu v a-didaktickej situácii, ktorá súvisela s prvými pojmami základov pravdepodobnosti, v ktorej si žiaci budovali, použitím niekoľkých príkladov, pojem „udalosť“ a „pravdepodobnosť jednoduchých udalostí“. Ako jeden z príkladov, učiteľ použil klasickú hraciu kocku so šiestimi stenami k štúdiu náhodných výsledkov zo štatistického hľadiska. Tu sa objavuje pravdepodobnosť frekvencie, ktorá je však interpretovaná v klasickom zmysle. Učiteľ následne ponúkol nasledujúce cvičenie:

Vypočítajte pravdepodobnosť nasledovnej udalosti: výsledok pri hode kockou je párne číslo.

Žiaci diskutujú v skupinách a predovšetkým si vymieňajú stratégie; pod vedením učiteľa prichádzajú k záveru, že odpoveď je možné vyjadriť zlomkom 3/6 pretože «možných výsledkov je 6 (v menovateli) zatiaľ čo počet výsledkov vyjadrujúcich priaznivé možnosti je 3 (v čitateli)».

Po inštitucionalizácii konštrukcie tohto poznatku, ktorý potvrdzujú výsledky experimentu a skutočnosť, že záver možno získať rýchlo a že žiaci akceptujú dôvod použitia zlomku, učiteľ navrhuje, že na základe ekvivalencie zlomkov 3/6 a 50/100, je tiež možné vyjadriť pravdepodobnosť zápisom 50%. Čo je v skutočnosti zmysluplnejšie, keďže to znamená, že pravdepodobnosť takéhoto výsledku je polovičná, v zmysle všeobecnosti všetkých možných udalostí, ktorých je 100.

Jeden žiak spozoroval, že « takže môžeme tiež použiť [zlomok] 1/2», a návrh je overený vysvetlením žiaka, ostatnými žiakmi rýchlo akceptovaný a ešte raz inštitucionalizovaný učiteľom.

2.2. *Semiotická analýza*

- ***semiotický register***: prirodzený jazyk: pravdepodobnosť, že výsledkom po hode kockou je párne číslo
- ***semiotický register***: jazyk zlomkov: 3/6, 1/2, 50/100
- ***semiotic register***: jazyk percent: 50%.

2.3. *Zmysel zdieľaný rôznymi semiotickými reprezentáciami*

Každá z predchádzajúcich semiotických reprezentácií je signifikant, ktorý vyplýva z predchádzajúcich jednoduchých významov (Duval, 2003).

- ***konverzia***: zo semiotickej reprezentácie vyjadrenej v registri prirodzeného jazyka do písanej formy 3/6
- ***úprava***: z písomných foriem 3/6 a 1/2 na 50/100
- ***konverzia***: z písomnej podoby 50/100 na 50%.

2.4. *Požadované predchádzajúce vedomosti*

V uvažovanej epizóde vzájomne pôsobí niekoľko typov poznatkov, zjavne dobre zvolených:

- poznatky a použitie zlomkov
- poznatky a použitie percent
- poznatky a použitie udalosti: výsledok hodu kockou je párne číslo.

Každá z týchto interakcií je evidentná v samostatných i spoločných cvičeniach v triede.

2.5. *Pokračovanie epizódy: strata zdieľaného zmyslu zapríčinená semiotickými transformáciami*

V závere epizódy bola žiakom položená otázka, či zlomok 4/8 môže reprezentovať rovnakú udalosť, keďže je ekvivalentný s 3/6. *Odpoveď je negatívna, jednohlasná a bez váhania*.

Dokonca i učiteľ, ktorý predtým zvládal situáciu s istotou, teraz tvrdí, že «4/8 *nemôže* reprezentovať tú istú udalosť pretože kocka má 6 stien a nie 8».

Po požiadavke na hlbšiu úvahu o otázke učiteľ dodáva: «Existujú nielen kocky so 6 stenami, ale i hracie kocky s 8 stenami. V tom prípade, áno, zlomok 4/8 môže reprezentovať, že výsledok hodu kockou je párne číslo».

3. Symbolika pre semiotické základy

V iných prácach sme už používali nasledujúce definície a symboly (D'Amore, 2001, 2003a,b, a inde):

semiotika $=_{df}$ reprezentácia realizovaná prostredníctvom systému znakov

noetika $=_{df}$ pojmové chápanie objektu.

Odteraz budeme používať :

r^m $=_{df}$ m^{th} semiotický register

$R^m_i(A)$ $=_{df}$ i^{th} semiotická reprezentácia pojmu A v semiotickom registri r^m

($m = 1, 2, 3, \ldots; i = 1, 2, 3, \ldots$).

Charakteristika semiotiky: ***reprezentácia – úprava – konverzia*** [zahrňujúca rôzne kognitívne aktivity]

pojem A ktorý má byť reprezentovaný → výber rôznych znakov pojmu A

↓

REPREZENTÁCIA A $[R^m_i(A)]$ v daných semiotic. registroch r^m

↓ transformácia reprezentácie *ÚPRAVY*

nová reprezentácia $(i \neq j)$ $[R^m_j(A)]$ v tom istom semiotic.registeri r^m

↓ transformácia registra ***KONVERZIE***

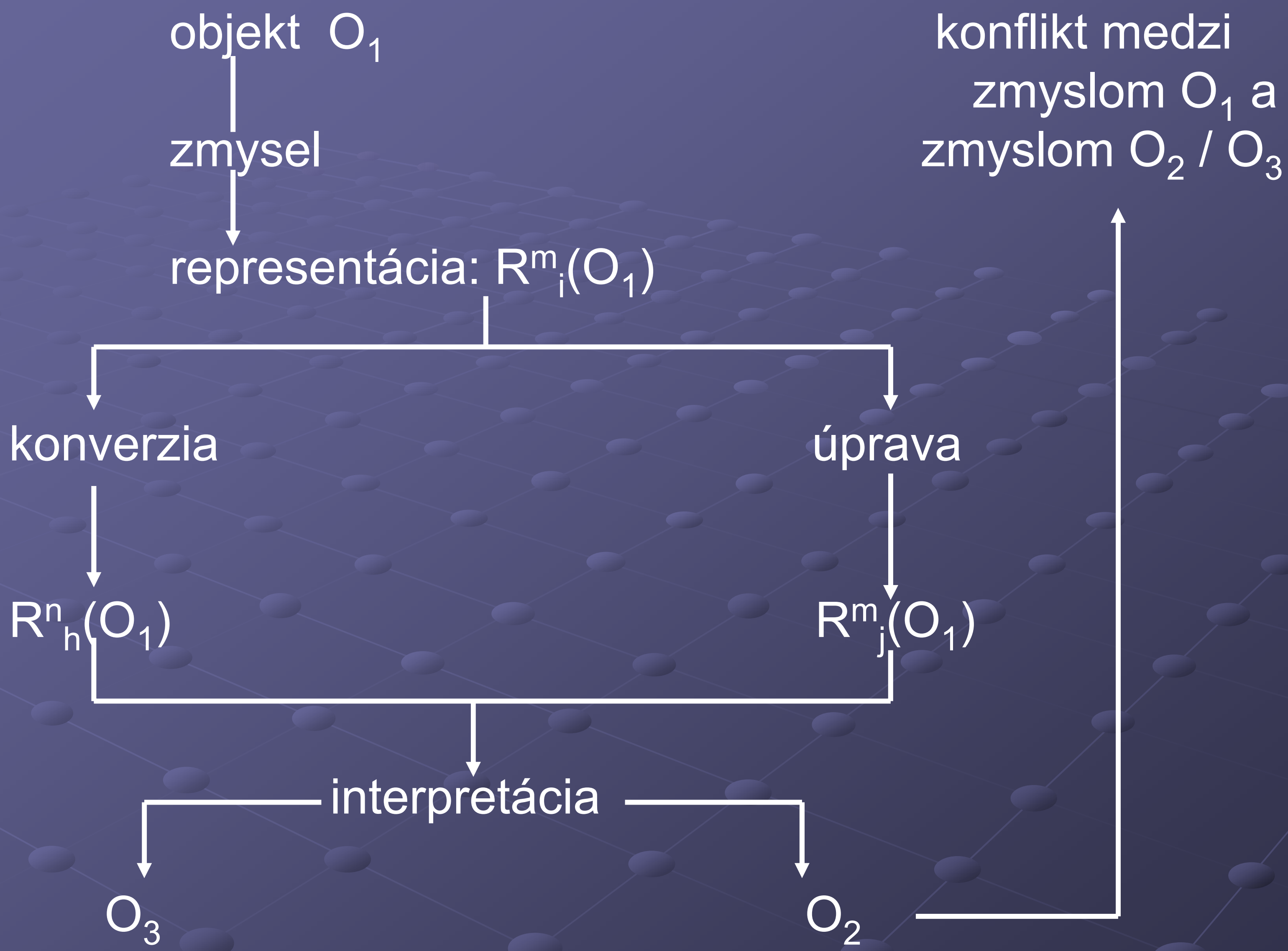
nová reprezentácia $(h \neq i,\ h \neq j)$ $[R^n_h(A)]$ v *inom* semiotickom registri r^n $(n \neq m)$

$(m, n, i, j, h = 1, 2, 3, \ldots)$

4. Návrat k epizóde

- Existuje matematický objekt O_1, ktorý reprezentuje udalosť: pravdepodobnosť, že výsledok hodu kockou je párne číslo;
- *Zmysel* sa prisudzuje objektu na základe zdanlivo zdieľaného dojmu, ktorý je súčasťou spoločenskej praxe organizovanej v triede;
- Semiotický register r^m je zvolený s cieľom reprezentovať O_1: $R^m_i(O_1)$;
- Úprava sa realizuje: $R^m_i(O_1) \rightarrow R^m_j(O_1)$;
- konverzia sa realizuje : $R^m_i(O_1) \rightarrow R^n_h(O_1)$;
- $R^m_j(O_1)$ je vysvetlené a matematický objekt O_2 je v nej rozpoznaný;
- $R^n_h(O_1)$ je vysvetlené a matematický objekt O_3 je v nej rozpoznaný.

Aký je vzťah medzi O_2, O_3 a O_1?


objekt O_1
zmysel
representácia: $R^m_i(O_1)$
konverzia
úprava
$R^n_h(O_1)$
$R^m_j(O_1)$
interpretácia
O_3
O_2
konflikt medzi zmyslom O_1 a zmyslom O_2 / O_3

V našom príklade:

- objekt O_1: pravdepodobnosť, že výsledok hodu kockou je párne číslo;
- zmysel: experimentálna situácia v triede pod vedením učiteľa vedie k záveru, že zmysel O_1, popísaný žiakmi v súlade s cieľmi učiteľa je : väčšina možných záverov a väčšina záverov súvisiacich s párnosťou;
- voľba semiotického registra r^m: racionálne čísla Q vyjadrené ako zlomky; reprezentácia: $R^m{}_i(O_1)$: 3/6 ;
- úprava: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^m{}_j(O_1)$, t.j. z 3/6 na 1/2 ;
- úprava: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^m{}_k(O_1)$, t.j. z 3/6 na 4/8;
- konverzia: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^n{}_h(O_1)$, t.j. z 3/6 na 50%;
- $R^m{}_j(O_1)$ je určené a matematický objekt O_2 je v ňom obsiahnutý;
- $R^m{}_k(O_1)$ je určené a matematický objekt O_3 je v ňom obsiahnutý;
- $R^n{}_h(O_1)$ je určené a matematický objekt O_4 je v ňom obsiahnutý.

Aký je vzťah medzi O_2, O_3, O_4 a O_1?

V niektorých prípadoch, (O_2, O_4), je rozpoznaná identita so signifikantom, čo vyjadruje skôr skonštruovaný poznatok, ktorý umožňuje toto rozpoznanie. To je jeden, spoločný zmysel. V inom prípade, (O_3), identita nie je rozpoznaná, interpretácia je alebo zdá sa byť iná a tak sa zmysel objektu (význam) O_1 stráca.

Duval sa tiež zaoberá otázkou rôznych reprezentácií toho istého objektu (Duval, 2006).

Nie je nutné prípad straty zmyslu považovať iba za výsledok konverzie. Ako sme videli v našom príklade, strata je spôsobená prechodom z 3/6 k 4/8. Učiteľova interpretácia zlomku 4/8 nedáva možnosť uvažovať O_1 v tom istom zmysle ako to bolo skôr, keď reprezentoval i 3/6.

Ten istý experiment realizovaný so staršími študentmi i študentmi učiteľského štúdia ukazuje, že i keď prechod z 3/6 k 4/8 je príkladom straty zmyslu, strata zmyslu je väčšia pri prechode z 3/6 k 7/14; zatiaľ čo je to výrazne menej ako konverzia z 3/6 na 0.5.

5. Záver

To čo by sme radi zdôraznili je, že čím je zmysel matematického objektu komplexnejší, tým ho viac považujeme za súčasť dvojice (objekt a jeho reprezentácia). Jedná sa o sémantické spojenie dvojíc typu:
(objekt, jeho reprezentácia) – (objekt, jeho *iná* reprezentácia)

Popísaný jav možno použiť na doplnenie predstavy navrhovanej Duvalom, o význame viacnásobných reprezentácií objektu pri jeho porozumení, ale môže byť použitý aj na prerušenie „začarovaného“ kruhu tohto paradoxu. Každá reprezentácia prináša so sebou *rôzne* „aplikačné podsystémy“, z ktorých sa vynárajú *rôzne* objekty (predtým nazvané O_1, O_2, O_3 y O_4). Avšak členenie týchto objektov v rámci všeobecnejšieho systému si vyžaduje zmenu perspektívy, posun do iných súvislostí, v ktorých výskum *všeobecnej štruktúry* je súčasťou systému globálnej praxe, kde rôzne „čiastkové objekty“ majú svoj zmysel.

Progresívny vývoj použitia rôznych reprezentácií bezpochyby obohacuje význam, poznanie a porozumenie objektu, ako i jeho komplexnosť. V istom zmysle sa matematický objekt javí ako jednoznačný, v inom ako viacnásobný.
Aká je teda povaha matematického objektu? Zdá sa, že jediná odpoveď je: „štrukturálny, formálny, gramatický“ (v epistemologickom zmysle) spoločne s “globálnym, mentálnym, štrukturálnym“ (v psychologickom zmysle), kde my ako aktívne subjekty konštruujeme v našom mozgu progresívne obohacovanie našich skúseností.

Tieto úvahy jasne vedú k potenciálnemu budúcemu rozvoju, v ktorom myšlienky, zdanlivo rôzne, spolupracujú na hľadaní vysvetlenia takých fenoménov, ktoré súvisia s chápaním podstaty.

References

D'Amore B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-173. [Version in Spanish: D'Amore B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*. 35, 90-106].

D'Amore B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51. [Version in Spanish: D'Amore B. (2002). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *TED*. Bogotà, Università Pedagogica Nazionale. 11, 63-71].

D'Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [Version in Spanish: D'Amore B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matematica*. México DF, México: Reverté-Relme. Preface by Guy Brousseau. Preface to the Spanish version by Ricardo Cantoral. Translation by Martha Isabel Fandiño Pinilla]. [Version in Portugese: D'Amore B. (2005). *As bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas e conceituais da didáctica da matematica*. Preface to the talian edition: Guy Brousseau. Preface: Ubiratan D'Ambrosio Tradução: Maria Cristina Bonomi Barufi. Escrituras: São Paulo].

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 5, 37-65.

Duval R. (2003). Décrire, visualiser ou raisonner: quels 'apprentissages premiers' de l'activité mathématique? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 8, 13-62.

Duval R. (2006). Transformations de representations semiotiques et demarche de pensée en mathématiques. Colloque COPIRELEM, Strasbourg, 30th may 2006 – 1st june 2006. In press.

Radford L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-23.