Proposta di lezione frontale sulla polarità rispetto ad una conica (di Maurizio Santangelo).

Introduzione.

Tale lezione è indirizzata a terze classi di liceo scientifico o di istituto tecnico industriale con rendimenti scolastici medio-alti e può essere svolta nell' ambito del modulo sulle coniche così sviluppato: 1) u.d. sulla parabola; 2) u.d. sulla circonferenza; 3) u.d. sull'ellisse; 4) u.d. sull'iperbole; 5) u.d. sulla conica come rappresentazione grafica di un'equazione di secondo grado nelle variabili x ed y,rispettivamente ascissa ed ordinata del piano cartesiano; 6) u.d. sulla riduzione a forma canonica; 7) u.d. sui fasci di coniche.In particolare, ai fini dello svolgimento di tale lezione, interessa l'u.d. n.5 che complessivamente dura cinque ore: nelle prime tre ore si può parlare di coniche degeneri e non, di coordinate omogenee(cenni) e quindi della classificazione dei vari tipi di coniche;nella seconda parte dell'u.d.,cioè in due ore,si può affrontare la lezione in questione,facendo in modo,ovviamente,che si instauri un continuo confronto dialettico tra docente ed alunni.Alla fine sono riportati dei cenni storici sul problema della polarità rispetto ad una conica.

Lezione frontale.

Siano dati in un piano cartesiano un punto P(xo,yo) ed una conica K non degenere, quindi con determinante diverso da zero,di equazione :

$$1)\quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Si definisce polare del punto P,detto polo, rispetto alla conica K la retta di equazione :

$$2)\quad (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})x_0 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})y_0 + a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0.$$

dove si ricorda che i vari coefficienti con i due indici scambiati sono uguali.
La 1) in coordinate omogenee X,Y,T diventa l'equazione :

$$3)\quad a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + 2a_{12}XY + 2a_{13}XT + 2a_{23}YT + a_{33}T^2 = 0$$

La 2) in coordinate omogenee diventa la :

$$4)\quad (a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}T)X_0 + (a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}T)Y_0 + (a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}T)T_0 = 0$$

dove Xo,Yo,To sono le coordinate omogenee del punto P.

E’ evidente che la polare di un punto P rispetto ad una conica K è una retta,visto che l’equazione 2) è lineare in x ed y,ed inoltre che ad un punto P,detto polo,corrisponde una ed una sola retta polare,come si osserva dalla stessa equazione. A questo punto ci si pone la domanda:ad una retta polare di equazione :

$$5)\quad aX + bY + cT = 0$$

corrisponde uno ed un sol polo P nella polarità rispetto alla conica K oppure no?
La risposta è affermativa,in quanto assegnata una retta polare rispetto ad una conica esiste uno ed un sol polo P;questo è vero perché, potendosi scrivere la 4) sotto la forma :

$$6)\quad (a_{11}X_0 + a_{12}Y_0 + a_{13}T_0)X + (a_{21}X_0 + a_{22}Y_0 + a_{23}T_0)Y + (a_{31}X_0 + a_{32}Y_0 + a_{33}T_0)T = 0$$

dal confronto con la 5) si ottiene il sistema di tre equazioni nelle tre incognite Xo,Yo,To:

$$7')\ \ a_{11}X_0 + a_{12}Y_0 + a_{13}T_0 = a;\ \ 7'')\ \ a_{21}X_0 + a_{22}Y_0 + a_{23}T_0 = b;\ \ 7''')\ \ a_{31}X_0 + a_{32}Y_0 + a_{33}T_0 = c.$$

Esso è un sistema di Kramer,in quanto il suo determinante è diverso da zero,coincidente con il determinante della conica K che per ipotesi è non degenere;pertanto la soluzione è unica e quindi il polo P richiesto è uno ed uno solo.
E’ molto importante il seguente teorema,noto sotto il nome di teorema di reciprocità: data una conica K non degenere ed un punto P1(x1,y1),se la polare di P1 rispetto a K passa per un punto P2(x2,y2),allora la polare di P2,sempre rispetto a K,passa per P1.Dim:l’equazione della polare di P1 rispetto a K è la seguente:

$$8)\quad (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})x_1 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})y_1 + a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$$

e se tale retta deve passare per P2 ovviamente si deve verificare la condizione :

$$9)\quad (a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13})x_1 + (a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23})y_1 + a_{31}x_2 + a_{32}y_2 + a_{33} = 0$$

L’equazione della polare di P2 è la :

$$10)\quad (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})x_2 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})y_2 + a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0.$$

e tale equazione con le sostituzioni: x=x1 ed y=y1 diventa la 9) che si sa essere vera,quindi la polare di P2 passa per P1 c.v.d.. I punti P1 e P2 si dicono coniugati uno dell’altro nella polarità piana definita dalla conica.

Adesso si deve dimostrare che, dato un punto P1(x1,y1) appartenente alla conica non degenere K,la polare di P1 rispetto a K passa per P1.La dimostrazione è immediata; difatti l’equazione di tale polare è la 8),ed imponendo che il punto P1 appartenga alla conica K si ha la :

$$11)\quad (a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13})x_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23})y_1 + a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33} = 0$$

che coincide con la 8) se si pone in quest'ultima : x=x1 ed y=y1,c.v.d.
Non si è dimostrato finora che la polare di P1 rispetto a K è tangente in P1 a K(P1 appartiene a K),si è trovato solo che tale retta passa per P1;da ora in poi,in questi appunti,partendo dai risultati trovati,si utilizzeranno esclusivamente considerazioni di carattere geometrico abbinate a dimostrazioni per assurdo.
Il prossimo teorema da dimostrare è il seguente:data una conica non degenere ed un punto A appartenente ad essa,la polare di A rispetto alla conica è la retta tangente in A alla conica stessa. Dim: si supponga che la polare di A rispetto alla conica data sia la retta AC,e che quindi tale polare intersechi la conica oltre che in A anche in C.
Se la polare di A è la retta AC,per il teorema di reciprocità un qualunque punto della retta ,scelto come polo,ha la polare,sempre rispetto alla stessa conica,passante per A; scelto C come polo,la polare di C passa per A per il teorema succitato,ed inoltre, appartenendo alla conica,tale polare deve passare per C:quindi la polare di C è

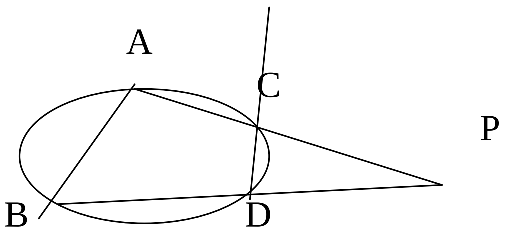


Fig. n. 1

la retta AC.Si è pervenuti all'assurdo che alla polare AC corrispondono due poli distinti A e C,rispetto alla medesima conica,e ciò è assurdo in quanto si è dimostrato che data una polare ed una conica esiste uno ed un solo polo corrispondente.
Dato che A appartiene alla conica la polare non può che passare per A e pertanto, per quanto visto sopra,la polare di A rispetto alla conica dovrà essere tangente in A alla conica stessa,c.v.d.
Osservazioni.- Ipotizzando che in fig. n.1 la polare di B sia la retta BD, si evince che la polare di A passa per P e quindi la polare di P passa per A, la polare di B passa per P e quindi la polare di P passa per B;pertanto si può concludere che la polare di P rispetto alla conica assegnata è la retta AB.Allo stesso modo,la polare di C passa per P e quindi la

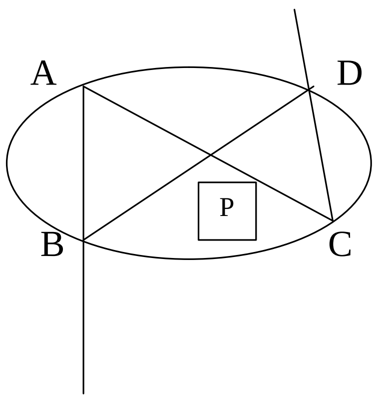


Fig. n. 2

polare di P passa per C,la polare di D passa per P e quindi la polare di P passa per D; pertanto anche la retta DC è la polare di P rispetto alla medesima conica,ma ciò è assurdo perché ad un polo P non possono corrispondere due polari diverse rispetto alla medesima conica,da cui una ulteriore conferma del risultato trovato.
In definitiva in fig. n.1 deve risultare A coincidente con C e B con D,cioè la polare di un punto P rispetto alla conica K con P esterno a K è la retta passante per i due punti di tangenza delle due rette tangenti alla conica condotte da P.

Assegnata una conica non degenere ed un punto P interno scelto come polo,si proverà che la polare di P rispetto alla conica non può intersecare la conica stessa;difatti (fig. n. 2) supposta AB la polare di P, per il teorema di reciprocità la polare di A passa per P e quindi è la retta AC,la polare del punto C è una retta che deve passare per A per il teorema di reciprocità e per C, appartenendo tale ultimo punto alla conica. Non potendo a due punti distinti A e C corrispondere la medesima polare AC,la polare di P non può essere secante la conica e neanche tangente perchè P non appartiene alla conica:quindi la polare di P non può che risultare esterna alla conica.D'altronde si perviene anche all'assurdo che al polo P corrisponderebbero due rette polari distinte AB e CD;difatti se la polare di C passa per P la polare di P passa per C, se la polare di D passa per P allora la polare di P passa per D,cioè la retta DC è polare di P;quindi a P corrisponderebbero due polari rispetto alla medesima conica, il chè è assurdo.
Osservazioni.- Si noti che, l'equazione della polare di P(xo,yo) rispetto alla conica di equazione 1),oltre che sotto la forma 2), si può scrivere sotto la forma :

$$12)\quad (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y + a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} = 0$$

come visto precedentemente,oppure sotto la forma :

$$13)\quad a_{11}x_0x + a_{22}y_0y + a_{12}(x_0y + xy_0) + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0$$

nota come formula dello sdoppiamento.Tale formule rappresentano:
1) sia l'equazione della retta polare di un punto P(xo,yo) rispetto ad una conica K a cui P non appartiene, 2) sia l' equazione della retta tangente in un punto P alla conica K con P appartenente a K, retta che in questo caso coincide con la polare di P.

Nel caso di una circonferenza K di equazione :

$$14)\quad x^2 + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

dato un punto P(xo,yo) generico non necessariamente appartenente a K, l'equazione della polare di P rispetto alla circonferenza assegnata è la :

$$15)\quad x_0x + y_0y + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0$$

Nel caso di un'ellisse od iperbole date sotto forma canonica di equazione :

$$16)\quad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

la polare del punto generico P(xo,yo) rispetto ad una di esse ha equazione :

$$17)\quad \frac{x_0x}{a^2} \pm \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

Nel caso di una parabola di equazione :

$$18) \quad y^2 = 2px$$

la polare del punto generico P(xo,yo) rispetto a detta parabola ha equazione :

$$19) \quad y_0 y - p(x_0 + x) = 0.$$

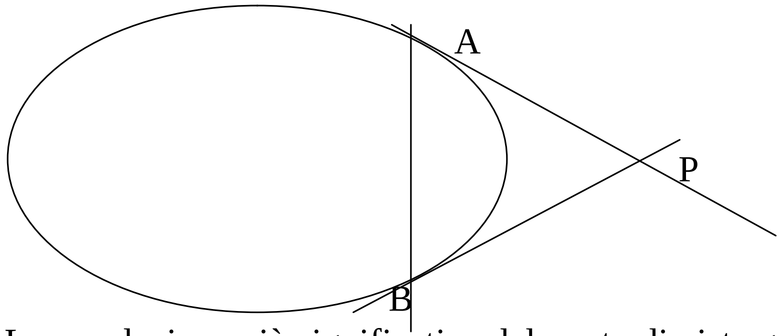


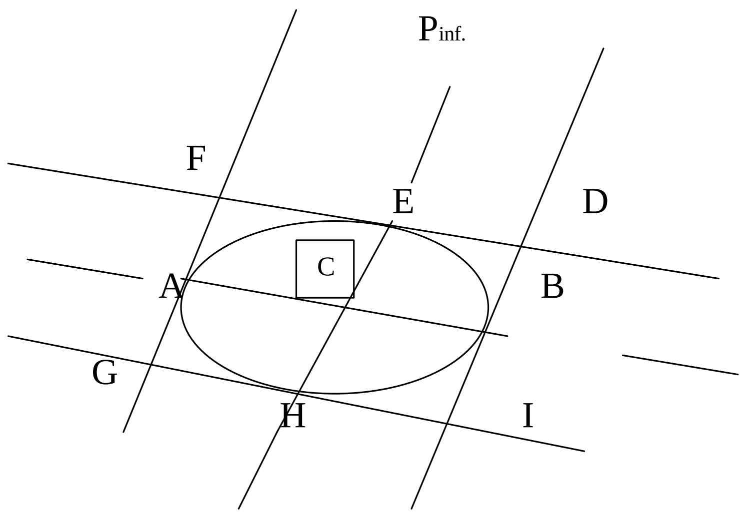
Fig. n.3

La conclusione più significativa dal punto di vista grafico è che,per costruire la polare del punto P rispetto alla conica assegnata,basta condurre da P le due tangenti alla conica e tracciare la retta che unisce i due punti di tangenza A e B:tale retta è la polare richiesta; difatti la polare di A passa per P e quindi la polare di P passa per A, la polare di B passa per P e quindi la polare di P passa per B,da cui si conclude che la polare di P rispetto alla conica data è la retta AB.In particolare si può notare che se P appartiene alla conica,la polare di P rispetto alla conica coincide con la retta tangente in P alla conica.

Centro di una conica.

$Q_{inf.}$

Fig. n. 4



Si è visto che un punto P interno ad una conica non degenere ha polare esterna alla conica stessa;se la polare rispetto alla conica è la retta all'infinito del piano,il polo corrispondente è per definizione il centro C della conica ,(che si proverà in modo elementare essere centro di simmetria della conica).Adesso si condurrà un ragiona-

mento analogo a quello effettuato per la realizzazione della fig. n.3 dove P,invece di essere al finito, è all'infinito.
La polare di un qualunque punto all'infinito è una retta che passa per C,per il teorema di reciprocità:tale retta si chiama diametro della conica;per determinare il centro, quindi,basta determinare i punti di intersezione delle polari,rispetto alla medesima conica,di due qualsiasi punti all'infinito del piano.Per semplicità di calcolo conviene scegliere come punti all'infinito $X_{inf}(1,0,0)$ che definisce la direzione dell'asse x,ed $Y_{inf}(0,1,0)$ che definisce la direzione dell'asse y: la polare di $X_{inf}(1,0,0)$ ha equazione:

$$20) \quad a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$$

mentre la polare di $Y_{inf}(0,1,0)$, sempre rispetto alla medesima conica, ha equazione :

$$21) \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0.$$

Risolvendo il sistema algebrico costituito dalle 19) e 20) nelle incognite x ed y si determinano le coordinate non omogenee del centro C richiesto;si noti che il sistema è di Kramer ed ammette soluzioni se:

$$a_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^{2} \neq 0$$

cioè se la conica notoriamente è a centro,ellisse od iperbole,e non una parabola.
E' da sottolineare agli alunni che un punto all'infinito del piano definisce una direzione , difatti si dice che un fascio di rette parallele passa per il medesimo punto all'infinito.L'insieme dei punti all'infinito del piano si definisce retta all'infinito; ciascun punto sulla retta all'infinito del piano definisce una direzione.
Se la polare di P_{inf} è la retta AB relativa alla direzione (o punto all'infinito) Q_{inf}, la polare di quest'ultimo punto all'infinito è la retta HE che passa per P_{inf} :ciò è valido ovviamente per il teorema di reciprocità,ed in questo caso si dice che AB ed HE sono due diametri coniugati della conica,ovvero che P_{inf} e Q_{inf} sono due punti all'infinito che definiscono le rispettive direzioni coniugate.
E' molto importante notare che il centro di una conica è punto di simmetria per la conica stessa: mentre, nell'ambito delle lezioni universitarie di geometria previste al primo anno delle facoltà scientifiche (Matematica,Fisica,Ingegneria), per provare tale proprietà si introduce il concetto di birapporto delle quaterne di punti divisi armonicamente tra di loro, e si utilizzano calcoli più o meno laboriosi, in questi appunti si darà una giustificazione di carattere geometrico condotta in modo elementare della importante proprietà sopracitata del centro di una conica.
Come si può osservare da fig. n. 4 dal punto P_{inf} si conducono due rette parallele alla conica data tale che risultino tangenti alla conica:esse sono le rette FG e DI:unendo i punti A e B di tangenza con la conica si ottiene la polare di P_{inf} che risulta essere il diametro della conica coniugato alla direzione assegnata.Considerando il punto all' infinito di AB, e denominatolo Q_{inf}, da esso si conducono due rette che risulteranno ovviamente parallele alla retta AB,e che in particolare si vuole risultino tangenti alla conica assegnata in due punti denominati E ed H.Si determinano in tal modo i quattro

parallelogrammi AFEC,CEDB,BIHC e HGAC :si constaterà che i quattro parallelogrammi su indicati sono uguali.A tal fine si parte da una considerazione di carattere elementare:ogni coppia di rette parallele definisce un punto all'infinito che è il medesimo sia da una parte che dall'altra, in quanto definisce la medesima direzione.Tale osservazione consente di poter affermare,in base alla fig. n. 4,che, considerando il punto P_{inf} ,tutto ciò che si verifica al di sopra della retta AB si verifica allo stesso modo al di sotto;ciò permette di poter affermare che il parallelogramma AFEC è isometrico con AGHC,ed ECBD isometrico con CHIB.Considerato Q_{inf} coniugato a P_{inf} ,il parallelogramma AGHC sarà isometrico con HCBI e AFEC isometrico con CEDB,da cui si conclude agevolmente, anche se in modo intuitivo, che i quattro parallelogrammi sono uguali,cioè che il punto C biseca sia il segmento AB che il segmento EH,e pertanto, avendo scelto una coppia generica di diametri coniugati della conica, C è punto di simmetria per la conica.

Considerazioni conclusive sulla proposta di lezione.

Perché insegnare al giorno d'oggi ad alunni di una scuola superiore l'argomento di questi appunti? I motivi fondamentali che giustificano una conoscenza da parte degli alunni di tale problema sono principalmente due:1) determinazione della retta tangente ad una generica conica K in un suo punto 2) determinazione della coppia delle rette tangenti ad una generica conica K condotte da un punto P esterno a K utilizzando la retta polare di P rispetto a K.

E' da sottolineare che i vari concetti espressi in questi appunti,per essere esposti agli alunni di una buona terza classe di liceo scientifico o di istituto tecnico industriale, debbono sicuramente essere analizzati ed illustrati più in dettaglio, ma ciò dipende da come il docente si pone nei confronti della classe,da come spiega e dagli stimoli che produce negli alunni durante la lezione frontale.Sicuramente gli alunni che hanno minore attitudine per la matematica e con più lacune troveranno difficoltà nella comprensione di questi argomenti concettualmente non semplici.Il docente dovrà con tatto dire che è importante avere capito i concetti generali e che non chiederà tutte le dimostrazioni; semmai si può soffermare maggiormente sulle considerazioni di carattere geometrico. Inoltre può aggiungere che se alcuni alunni desiderano ripetere al momento della verifica tutte le dimostrazioni relative all'argomento in questione sono liberi di farlo. Automaticamente si verificherà che gli alunni più bravi e più diligenti tenderanno a ripetere la lezione con più dettagli, privilegiando l'aspetto logico-deduttivo e riportando le varie dimostrazioni , mentre quelli che posseggono una preparazione più lacunosa durante l'interrogazione esporranno maggiormente le conclusioni finali senza scendere nei particolari. Sarà compito del docente di valutare, sull' argomento, questi ultimi alunni in modo più benevolo affinchè non si creino in loro complessi d'inferiorità,sempre che non dipenda da motivi di negligenza.

E' inoltre opportuno, da parte del docente, svolgere e proporre svariati esercizi sull'argomento di difficoltà via via crescente per gli alunni.

In questi appunti l'equazione della conica e tutte le altre formule riferita ad essa sono scritte mediante coefficienti con doppio indice e sono tali che $a_{ij}=a_{ji}$ con i,j=1,2,3;tale

modo di formalizzare è molto utile dal punto di vista didattico perché notoriamente consente,una volta ricavate le formule relative alla teoria delle coniche con metodo logico-deduttivo,di ricordarle con maggiore facilità(ad esempio il determinante di una conica, la formula della polare,o la formula dello sdoppiamento).
Per quanto riguarda la parte riguardante il centro di una conica è da sottolineare che le considerazioni riportate, al contrario di quel che si può affermare per la prima parte, sono piuttosto intuitive e basate molto su semplificazioni concettuali di natura didattica, al fine di rendere più abbordabile l'argomento per alunni del terzo superiore.
Per quanto riguarda i contenuti è da rilevare che in questi appunti sono state apportate molte semplificazioni sia concettuali che di calcolo:prima di tutto non si parla di birapporti e di gruppi armonici di punti,ed inoltre,rispetto alla normale trattazione universitaria riportata in svariati testi,sono stati omessi molti calcoli laboriosi ,quale, ad esempio,lo studio delle intersezioni tra retta e conica effettuato in coordinate omogenee.Sicuramente il fatto che in questi appunti non sia stato introdotto il birapporto non è positivo culturalmente,in quanto notoriamente gran parte della geometria proiettiva e svariate geometrie non euclidee(ad esempio modelli di Klein e di Poincarè) sono fondate su tale concetto;però se si pensa che questa proposta di lezione è diretta ad alunni di scuola superiore ,si può evitare di ricorrere al birapporto come strumento per lo svolgimento dell'argomento "polarità rispetto ad una conica".

Cenni storici sul problema

Storicamente lo studio della polarità rispetto ad una conica è stato affrontato da numerosi matematici, tra i quali i più famosi sono: Apollonio da Perga, Pappo, Desargues, Euler, Cayley,Sylvester,Cauchy,Weierstrass, La Hire, Gergonne, Staudt, Cartesio, Poncelet, Moebius, Plucker, i matematici della scuola italiana(Veronesi , Segre, Castelnuovo, Enriques) ed i matematici bourbakisti,in particolare Andrè Weil.
Apollonio(c.262,190 a.C.), vissuto nel periodo alessandrino, morì nel 190 a.C e diede un forte contributo allo studio delle coniche nella sua più importante opera "Sezioni coniche" in cui tratta le coniche partendo dalla sezione di un cono retto con un piano; anche altri famosi autori, come Euclide,Menecmo, Archimede si erano già interessati al problema delle sezioni coniche, scrivendo diverse opere alcune delle quali sono state perdute, ma Apollonio fu uno dei primi che incominciò a studiare il problema della polarità rispetto ad una conica;la sua opera succitata si suddivide in otto libri,di cui il terzo ed il quarto si occupano del problema in questione.Ancora il problema non è affrontato nella sua generalità,ma è risolto relativamente ai vari tipi di coniche.
Un altro grande matematico che diede un forte impulso allo studio sulle coniche fu Pappo,il quale naque ad Alessandria nel terzo secolo d.C. e svolse il compito meritorio di riordinare tutti gli studi dei matematici greci che lo precedettero,

raccogliendo il contenuto delle sue ricerche nella sua opera “Collezione” in otto libri,di cui i primi due andarono perduti. Pappo in particolare si interessò a problemi di carattere geometrico, difatti si può considerare un precursore di Descartes per quanto riguarda alcuni concetti di geometria analitica e di studio sulle coniche.
Pappo si occupò pure del problema della polarità in una conica traendo spunto dal lavoro svolto da Apollonio.
Descartes, grande filosofo e matematico, nacque a La Haye,nella Turenna,il 31 Marzo 1596, e morì di polmonite a Stoccolma nel 1650.Fu il fondatore della geometria analitica, nuova branca della matematica in cui si fonde l’ algebra (non astratta) con la geometria;la sua opera matematica per antonomasia è “Geometrie” ma pubblicò numerosi articoli di matematica su svariate riviste.Seppur non abbia trattato in particolare il problema polo-polare (da quello che risulta allo scrivente), è sicuramente un matematico che ha dato una svolta netta circa l’approccio ai problemi geometrici mediante metodi algebrici. Comunque Descartes si occupò molto della determinazione della retta tangente ad una conica in un suo punto, argomento collegato alla polarità rispetto ad una conica.
Girard Desargues(1591-1661), ufficiale dell’esercito francese,divenuto in seguito ingegnere ed architetto,studioso autodidatta di matematica,utilizzò nei suoi studi geometrici quasi sempre il metodo grafico, contrapponendosi come metodo di studio della geometria, a Descartes per quanto detto in precedenza.Desargues conosceva le “Sezioni coniche” di Apollonio e si era interessato all’approfondimento di tale argomento sino al punto di poter studiare nuovi metodi per dimostrare teoremi sulle coniche.
Nel 1639 scrisse un’opera in francese riguardante lo studio delle sezioni coniche,dal titolo :”Broullon project d’une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan”.Quest’opera si occupa di metodi proiettivi in geometria. Desargues, considerato uno dei più importanti fondatori della geometria proiettiva, diede una nuova impostazione alla nuova branca utilizzando quasi esclusivamente metodi grafici e trattò numerosi problemi quali : il punto all’infinito della retta, la retta all’infinito del piano, la prospettiva(studiata pure da Monge), operazioni per proiezione e sezione, involuzioni, birapporti, gruppi armonici di punti. Introdotti questi ultimi concetti,l’Autore si inoltra nello studio del polo e della polare rispetto ad una conica,e quindi fornisce la definizione dei diametri di una conica come è noto ai giorni nostri (cioè le polari dei punti all’infinito del piano).Desargues per primo riuscì ad unificare, mediante i metodi grafici e le operazioni di proiezione e sezione,tutta la teoria delle coniche.
Phippe La Hire(1640-1718),inizialmente pittore da giovane ma in seguito studioso di matematica ed astronomia, si interessò alle ricerche sulle sezioni coniche, utilizzando metodi di proiezione e sezione; i suoi risultati più importanti sono raccolti nell’opera ”Sectiones conicae”(1685).Egli riuscì a dimostrare quasi tutti i 364 teoremi di Apollonio sulle coniche.Per quanto riguarda il problema del polo e polare rispetto ad una conica egli dà un nuovo risultato importante, dimostrando che se un punto P si considera come il fascio di rette polari rispetto ad una conica, il luogo geometrico dei rispettivi poli è costituito dalla polare di P.

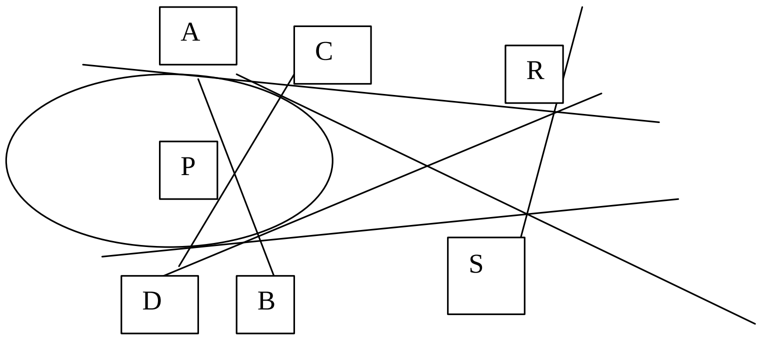


Fig. n.5

Quindi La Hire trovò che la polare del punto P rispetto alla conica è la retta RS, dove R ed S sono rispettivamente i poli delle rette AB e CD che si incontrano in P (vedi Fig. n.5); tale importante risultato è noto sotto il nome di teorema di reciprocità. In particolare la figura n.5 suggerisce il modo di costruire la polare di un punto P rispetto alla conica, con P interno alla conica.
Da Descartes in poi, per più di un secolo,si svilupparono studi di geometria con l'ausilio prevalente di metodi algebrici a discapito dei metodi grafici che furono quasi totalmente trascurati; durante questo periodo si svilupparono gli studi sul calcolo infinitesimale e sul calcolo delle probabilità.
Nel 1800 si verificò il fenomeno della rinascita della geometria proiettiva sintetica che si contrapponeva al filone dello studio della geometria effettuato con strumenti algebrici e di analisi matematica. Uno dei principali rappresentanti sostenitori del primo filone fu Poncelet(1788-1867),mentre Gergonne(1771-1859) sosteneva maggiormente l'importanza dei metodi algebrici che potevano consentire,secondo la sua opinione, una più agevole generalizzazione delle proprietà metriche delle figure geometriche.
Questi due ultimi matematici diedero nuovi impulsi per gli studi su polo e polare rispetto ad una conica; Poncelet nel suo lavoro "Traitè" del 1822 e nel "Memoire sur la theorie generale des polaires reciproques", lavoro esposto in una conferenza all' Accademie di Parigi nel 1824, utilizzò il concetto di polo e polare rispetto ad una conica al fine di stabilire il principio di dualità (sostituzione dei termini "retta" con "punto" e viceversa nei vari enunciati).Anche Gergonne affrontò questo problema, ma la formulazione data da quest'ultimo era abbastanza incompleta e presentava dei punti oscuri.Nacque una diatriba su chi fosse lo scopritore di questo principio generale di dualità tra Poncelet e Gergonne e si giunse al punto che il primo accusò l'altro di plagio. Poncelet, con il suo lavoro "Traitè",segna la nascita ufficiale,a detta di molti studiosi, di una nuova branca della matematica: la geometria proiettiva . Anche Monge(1746-1818),Servois(1767-1847) e Brianchon(1783-1864) avevano usato la nozione di polo e polare rispetto ad una conica, ma senza innovazioni particolari.
Christian Von Staudt(1798-1867),grande geometra tedesco, proseguì il filone degli studiosi di geometria proiettiva che utilizzavano quasi esclusivamente metodi grafici;

egli in particolare bandì completamente l'aspetto metrico ed introdusse la correlazione polare senza utilizzare la teoria delle coniche pervenendo, come conseguenza logica, alla definizione di conica come luogo geometrico dei punti che appartengono alla rispettiva polare(vedere bibl. n.7).

Precedentemente Euler(Basilea, 1707-Pietroburgo, 1783) e successivamente Cauchy (Parigi, 1789- Sceaux, 1857),Laplace(Beaumont eu Auge, 1749- Parigi, 1827), Cayley(Richmond,1821-Cambridge,1895) e Sylvester(Londra, 1814-1897), studiando le coniche, le quadriche, e le trasformazioni geometriche introdussero i concetti di determinante , di matrice e di forma quadratica : dal punto di vista storico appare chiaro il legame esistente tra i succitati argomenti di natura geometrica e la nascita dell' algebra lineare.A buon diritto Cayley e Sylvester si considerano tra i fondatori di questa nuova branca della matematica, ed in particolare il primo iniziò lo studio della geometria analitica generalizzata ad n dimensioni .Inoltre Weierstrass (Osterferld, Munster, 1815-Berlino 1897) studiò le forme bilineari. Tutto quest'ultimo gruppo di grandi matematici, con a capo Cayley, contribuirono a formalizzare il problema del polo e della polare rispetto ad una conica sotto forma algebrico-lineare.

Moebius (1790-1868),illustre matematico tedesco, introdusse nella geometria moderna il concetto di corrispondenza biunivoca o trasformazione nel piano e nello spazio e si dedicò molto alle omografie (o collineazioni) ed alle correlazioni (o reciprocità) nelle quali a punti corrispondono rette(caso della polarità piana); cioè per la prima volta nella storia della matematica la dipendenza tra polo e polare rispetto ad una conica è studiata sotto il punto di vista di una trasformazione geometrica (vedere bibl. n. 9)(questo aspetto nella proposta di lezione frontale non è affrontato).

Una svolta radicale alla risoluzione del problema in esame fù data da Julius Plucker (1801-1868) che utilizzò l'algebra e l'analisi matematica in modo proficuo per lo studio della geometria proiettiva; egli parte dalla nozione di coordinate omogenee e scrive in modo generale l'equazione di una retta polare rispetto ad una conica, fissato un punto detto polo,utilizzando l'equazione della conica e le derivate parziali rispetto alle coordinate omogenee.Quando il polo appartiene alla conica si ha l'equazione della retta tangente alla conica stessa.

I più recenti sviluppi nel settore della geometria risalgono ai contributi dati dai matematici della scuola italiana di inizio secolo scorso con Corrado Segre(1863-1952), Guido Castelnuovo(1865-1952) e Federico Enriques(1871-1946) che contribuirono a formalizzare in modo più rigoroso, utilizzando sia metodi grafici che algebrici e di analisi, il problema del polo e della polare.Guido Castelnuovo, nel suo ottimo testo (vedere bibl. n. 1), in particolare affronta il problema utilizzando la forma mista associata ad una conica, il birapporto e la nozione di gruppi armonici di punti.Questi matematici si occuparono della risoluzione di problemi molto avanzati di geometria algebrica(va- rietà,trasformazioni birazionali,studio dei punti multipli di superfici particolari, etc…)(vedere bibl. n.8) in particolare il capitolo dei Proff. Ciliberto e Brigaglia), ma tra l'altro ripresero e rivalutarono alcuni studi di geometria proiettiva compiuti da quegli Autori che precedentemente si erano ispirati a metodi

prevalentemente grafici (vedere bibl. n.1 ed anche :”Enriques-Lezioni di geometria proiettiva”-Ediz. Zanichelli).
Per concludere il breve iter storico sul problema in questione, l’ultima grossa pietra miliare è costituita dal lavoro del matematico bourbakista Andrè Weil ”Foundations of algebraic geometry” che diede una impostazione rigorosa ed inattaccabile a tutta la geometria algebrica.

Bibliografia.

I riferimenti bibliografici da cui sono stati tratti gli spunti per lo sviluppo di tale proposta di lezione frontale sono principalmente:

1) Guido Castelnuovo:Lezioni di Geometria,Ed.Dante Alighieri.
2) G.Dantoni-C.Mammana:Lezioni di Geometria,Di Stefano Editore,Genova
3) Stoka-Pipitone:Esercizi di Geometria, Vol I Ed.CEDAM.
4) Stoka-Corso di geometria-Ediz.CEDAM

I cenni storici sono tratti da:

5) Morris Kline: Storia del pensiero matematico,Voll.1 e 2. Ediz.Einaudi.
6) Carl B. Boyer:Storia della matematica, Oscar Mondadori.
7) Umberto Bottazzini-Il flauto di Hilbert-Ediz.UTET.
8) A.A.V.V.-La matematica italiana dopo l’unità-Ediz.Marcos Y Marcos
9) Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi- a cura di Luigi Berzolari, Volume terzo-parte seconda-Ediz.Hoepli.